Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

Elektronische Lernmedien im Mathematikunterricht
(Projekt CA V)

Teil 6

Projektgruppe 3

Standards – Grundkompetenzen im Spannungsfeld der Technologie

Hollabrunn, Juni 2005

6. Bericht der Projektgruppe 3

Themenbereich:
Standards – Grundkompetenzen im Spannungsfeld der Technologie

Inhalt
(die Projektgruppe verwendet eine interne Gliederung)

1. Bildungsstandards in Österreich

Die Notwendigkeit der internationalen Vergleichbarkeit und Durchlässigkeit der Bildungssysteme, die verstärkte Autonomie der Schulen, das österreichische System der Berechtigungsvergabe sowie die Ergebnisse von TIMSS und PISA waren der Anlass, auch in Österreich Standards zu implementieren. Folgendes wurde durch die internationalen Messungen in den Kernbereichen des Bildungskanons aufgezeigt:

- Es muss **mehr Augenmerk auf langfristig verfügbare Kompetenzen** gelegt werden. Lernen konzentriert sich bei uns infolge unseres Systems der Leistungsbeurteilung vor allem auf den Erwerb kurzfristiger Kompetenzen, die bei der nächsten Prüfung oder Schularbeit abgefragt werden.
- Bildungsinhalte müssen nach ihrer **Notwendigkeit und Brauchbarkeit für den lebenslangen Bildungserwerb** hinterfragt werden. Die Betonung liegt also auf Bildung und nicht nur auf direkt verwertbaren beruflichen Qualifikationen.
- Die oft im Mittelpunkt der Qualitätsdiskussionen stehenden **„Schlüsselqualifikationen"**, wie Problemlösekompetenz, Teamfähigkeit usw. **benötigen als Voraussetzung eine fundierte fachliche Grundbildung**. Problemlösen erlernt man nicht „an sich", indem man über Problemlösen diskutiert, sondern „an etwas", indem man also konkrete Probleme löst.
- **Bildungsabschlüsse müssen**, zumindest was unverzichtbare Grundkompetenzen anlangt, **vergleichbarer werden**. Ich erlebe in meiner Lehrveranstaltung für Lehramtsstudenten an der Universität ein breites Spektrum an mathematischen Voraussetzungen, von Spitzenkönnern bis zu mathematischen Analphabeten - und alle haben ein Maturazeugnis (oft mit denselben Noten), das bestätigt: „Du kannst an der Technischen Universität studieren."

Eine der wichtigsten Reaktionen der Bildungsverantwortlichen war die Einführung von Bildungsstandards für die Fächer Deutsch, Englisch und Mathematik, vorerst einmal für die Grundschule und die Sekundarstufe I.

1.1 Was Bildungsstandards sind – und was sie nicht sind

Was sie sind:

- **Bildungsstandards sind Leistungsstandards**: Sie legen fest, welche langfristigen Kompetenzen unsere Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe erworben haben sollen. Derzeit werden sie für das Ende der Grundschule und für das Ende der Sekundarstufe I (für Hauptschule und AHS) formuliert.
- **Bildungsstandards sind fachbezogene Standards**: Sie konzentrieren sich dabei auf die Kernbereiche der Unterrichtsfächer Deutsch, Englisch und Mathematik und beschreiben die erwarteten Lernergebnisse, wobei fachliche und fachübergreifende Basisqualifikationen definiert werden, die für die weitere schulische Bildung bzw. berufliche Ausbildung von Bedeutung sind. Somit sind sie auch für die berufsbildenden Schulen an der Schnittstelle zwischen Sekundarstufe I und II von Bedeutung.
- **Bildungsstandards sind Regelstandards**: Es wird ein durchschnittliches Anforderungsniveau formuliert. Die Bandbreite wird durch die Festlegung von zwei (in Deutsch) bzw. drei Anspruchsniveaus (in Englisch und Mathematik) ausgedrückt.
- **Bildungsstandards sind ein Instrument der Outputsteuerung**: Während der Lehrplan als Instrument der Inputsteuerung vorgibt, was gelehrt und was gelernt werden soll, drücken die Kompetenzerwartungen der Bildungsstandards aus, was Schülerinnen und Schüler an bestimmten Punkten ihres Bildungsweges können sollen.

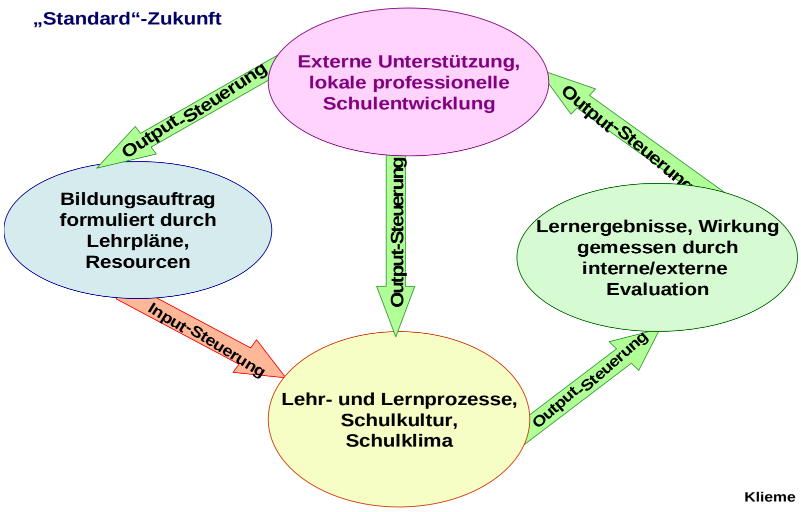


Abb. 1

Was sie nicht sind:

- **Bildungsstandards legen nicht fest, was guter Unterricht ist**: Sie standardisieren nicht den Unterrichtsprozess. Der Weg zu den erwarteten Kompetenzen liegt weiterhin in der pädagogischen Verantwortung der Lehrerinnen und Lehrer.
- **Bildungsstandards sind daher auch kein Instrument der Lehrerinnen und Lehrerbeurteilung.**
- **Bildungsstandards schränken damit die Autonomie der Schulen nicht ein**: Die Erwartungen, die durch die Standards ausgedrückt werden, sollen nur verdeutlichen, dass schulische Qualität ohne Qualität der Lernergebnisse nicht denkbar ist.
- **Bildungsstandards sind kein Instrument der Berechtigungsvergabe:** Die Leistungsbeurteilung - und damit die Berechtigungsvergabe mit ihrem Prozessanteil (Mitarbeit im Unterricht) und ihrem Produktanteil (Prüfungen und Schularbeiten) obliegt weiterhin den Lehrerinnen und Lehrern. Eine punktuelle Messung von Grundkompetenzen am Ende der Sek. I kann diese Leistungsbeurteilung nicht ersetzen.
- **Bildungsstandards sind keine Minimalstandards**: Sie sind für Hauptschule und AHS formuliert. Bei Minimalstandards müsste man eigene Standards für die beiden Schularten definieren.

1.2 Was wir mit Bildungsstandards erreichen wollen

Als Instrument der Qualitätsentwicklung haben sie zwei Funktionen:

- **Orientierungsfunktion**: Sie beschreiben den Bildungsauftrag des Faches. Die eigentlichen Standards formulieren verbal, was die Schülerinnen und Schüler können sollen, und die Aufgabenbeispiele dienen als Realisierung der Standards im Unterricht und als Instrument der Selbstevaluation.
- **Evaluationsfunktion**: Bildungsstandards sind Messinstrumente für Qualitätsevaluation. Sie können zur Selbstevaluation für Lehrerinnen und Lehrer und Schülerinnen und Schüler verwendet werden, sowie im Rahmen der Qualitätsevaluation einer Schule und natürlich vor allem zur Systemevaluation. Für diese Rolle ist geplant, am Ende der Grundschule und am Ende der Sek. I einen bestimmten Anteil der Schülerinnen und Schüler zu testen; am Ende der Sek. I sollen je 10% der Schülerinnen und Schüler in Deutsch, Englisch und Mathematik getestet werden. Schulen sollen aber auch im Rahmen ihrer Qualitätsevaluation freiwillig an der Testung teilnehmen können.

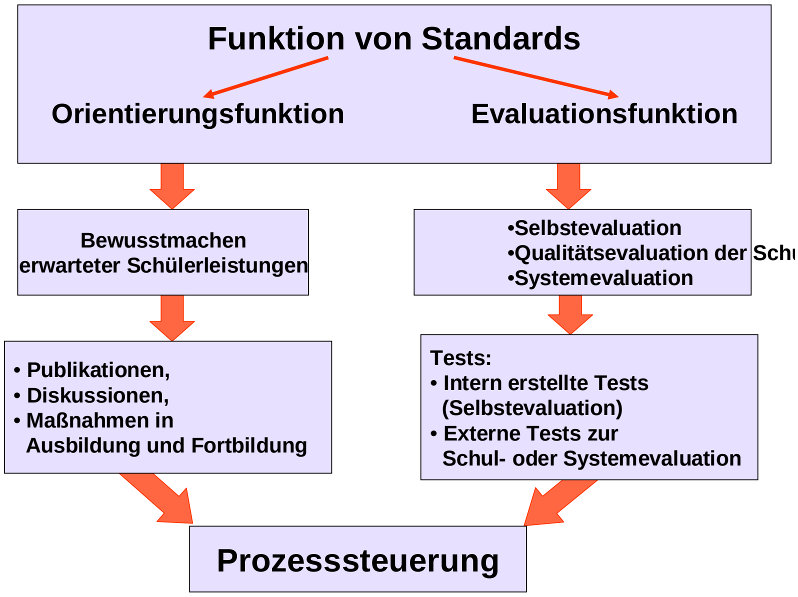


Abb. 2

Aus der **Produktmessung** in Form von Standardtests müssen natürlich Überlegungen und Maßnahmen zur **Prozesssteuerung**, also zur Verbesserung des Unterrichts abgeleitet werden. Dies erfordert aber wiederum den Aufbau von **Unterstützungssystemen**, denn man kann Lehrerinnen und Lehrer und Schulen mit den Messergebnissen nicht alleine lassen.

Bei allen Schulpartnern soll durch die Diskussion über und durch die Messung von Standards erreicht werden, **dass der Stellenwert schulischer Leistung verbessert wird**. Dass wir hier in Österreich Defizite haben, zeigt die PISA-Studie sehr schmerzhaft.

Standards sollen nicht nur den Ertrag des derzeitigen Unterrichtes abbilden, sie sollen auch Erwartungen ausdrücken, in welche Richtung der Unterrichtsertrag verändert werden soll. **Daher darf bei ersten Standardmessungen keine allzu hohe Erfolgsquote erwartet werden**. Erreicht werden soll, dass die daraus abgeleiteten Steuermaßnahmen die **Erfolgsquote im Laufe der Zeit verbessern**.

1.3 Derzeitige Standardaktivitäten

Standards sind kein statisches Gebilde, das für Generationen entwickelt wird, sondern ein dynamisches Produkt, das ständig evaluiert und weiterentwickelt werden muss. Folgende Phasen sind im Laufen oder geplant:

- **Standardentwicklung:** In Mathematik wurde im Oktober 2004 ein erster Prototyp eines Standardkonzeptes abgeschlossen, in Englisch und in Deutsch steht man vor der Fertigstellung. Das Standardpapier beinhaltet den Bildungsauftrag des Faches, ein Kompetenzmodell, verbal formulierte Standards und einen Aufgabenpool, der den Lehrerinnen und Lehrern zur Orientierung angeboten wird.

- **Pilotphase:** Ziel der Pilotphase ist es, die Standards in der Praxis zu testen und in einem Regelkreis zwischen Pilotschulen und Standardentwicklern weiterzuentwickeln. Es gibt in Österreich über 100 Pilotschulen in der Sekundarstufe I (Hauptschule und AHS). Die Betreuung und Vernetzung erfolgt durch Landeskoordinatoren und Fachkoordinatoren der drei Fächer. Die Pilotphase soll bis etwa 2007 dauern.

- **Aufgaben der Pilotschulen:** Diskussion des Standardpapiers, Erproben von Aufgaben im Unterricht, Entwickeln von Instrumenten zur Selbstevaluation, erste Vortests, Vorschläge für weitere Aufgaben für den Aufgabenpool, Rückmeldungen an die Standardentwickler.

- **Aktivitäten in höheren Schulen:** In der BHS hat die Standarddiskussion vor allem in den technischen Schulen und in den Handelsakademien schon begonnen. Schulaufsicht und Expertengruppen verschiedener Fächer arbeiten an Standardkonzepten, die auf die jeweiligen Schularten zugeschnitten sind. Dabei geht es nicht nur um Standards für den allgemeinbildenden Bereich, es muss auch der berufsbildende Auftrag der einzelnen Schularten mitbedacht werden. In der AHS gibt es im Auftrag des Ministeriums ein Projekt, in dem Mathematikstandards für das Ende der Sekundarstufe II entwickelt werden.

- **Internationale Vernetzung:** Es besteht vor allem ein enger Kontakt zu den deutschsprachigen Ländern Deutschland und Schweiz, wo die Aktivitäten ziemlich parallel laufen. Ziel ist eine möglichst breite Abstimmung, ohne aber die Grundlage der Standardentwicklung, nämlich die Lehrpläne der einzelnen Länder aus den Augen zu verlieren.

- **Testentwicklung:** In Mathematik wurde mit der Entwicklung von Testaufgaben (Testitems) begonnen und zwar in Zusammenarbeit zwischen Testpsychologen, Fachdidaktikern und Schulpraktikern. Erste Feldtests sind für Mitte 2005 geplant.

- **Breite Umsetzung in der Praxis:** Dies ist für die Sekundarstufe I für 2007/2008 geplant. Für Systemmonitoring sollen dann 30% der 14-jährigen Schülerinnen und Schüler getestet werden, und zwar 10% in Deutsch, 10% in Englisch und 10% in Mathematik. Es können aber auch Schulen im Zuge ihrer Qualitätsevaluation freiwillig am Test teilnehmen. Bis dorthin ist noch viel zu tun:
  - Weiterentwicklung der Standards
  - Maßnahmen in der Lehrerausbildung und –fortbildung,
  - Aufbau von Unterstützungssystemen,
  - Produktion von Testitems, Feldtests,
  - Information und Einbeziehung der Schulpartner,
  - Diskussion der Standards mit den Abnehmern unserer Schulen.

2. Bildungsstandards für das Fach Mathematik

2.1 Der Beitrag des Faches Mathematik zur Bildung

Unterrichtsgegenstände können heute nicht mehr nur dadurch gerechtfertigt werden, dass sie traditionell schon immer Bestandteil des Fächerkanons waren. Jedes Fach hat nachzuweisen, welchen Beitrag es zur Bildung der jungen Menschen liefert. Dieser ist auch im Lehrplan der AHS Oberstufe verankert.
Wir haben für die Beschreibung der Funktion der Mathematik für die Allgemeinheit und somit für die Bildung drei wichtige Rollen dieses Faches ausgewählt:

(1) **Mathematik als Technik des Problemlösens durch Schließen.**
Wichtige Phasen des mathematischen Problemlösens sind: Modellbilden – Operieren – Interpretieren.
(2) **Mathematik als Sprache:**
Schülerinnen und Schüler sollen drei Arten von Sprachen erlernen: Die Muttersprache, Fremdsprachen und die Sprache der Mathematik
(3) **Mathematik als Denktechnologie:**
Im Mittelpunkt dieses Bildes von Mathematik steht nicht ein ganz bestimmtes mathematisches Kapitel, sondern jene heuristischen Strategien, jene Denktechnologie die beim Betreiben von Mathematik erworben werden und die in vielen Bereichen des Lebens anwendbar sind.

SchülerInnen sollen durch die Beschäftigung mit Mathematik auch personale und soziale Kompetenzen erwerben, indem sie zum Beispiel lernen Verantwortung für das eigene Lernen zu übernehmen und bewusst Lernstrategien einzusetzen, gemeinsam mit anderen mathematisches Wissen zu entwickeln und Probleme zu lösen.

Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit, die Rolle zu erkennen, die Mathematik in der Welt spielt, mathematisches Wissen funktional, flexibel und mit Einsicht zur Bearbeitung vielfältiger kontextbezogener Probleme einzusetzen und unter Zuhilfenahme von Mathematik begründete Urteile abzugeben.

Unter Kompetenzen werden hier kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten verstanden, die von Lernenden entwickelt werden können und sie befähigen, bestimmte Tätigkeiten in variablen Situationen auszuüben.
Kompetenzen haben eine Handlungsdimension (auf welche Art von Tätigkeiten sie sich beziehen, also was getan wird) und eine inhaltliche Dimension (auf welche Inhalte sie sich beziehen, also womit etwas getan wird) sowie eine „konative“/“volitionale“ Dimension (vom Willen und von der Einstellung abhängig).

Mathematische Kompetenzen beziehen sich auf mathematische Tätigkeiten sowie auf mathematische Inhalte.

2.2 Das dreidimensionale Kompetenzmodell

Das Kompetenzmodell unterscheidet zwei fachliche Teildimensionen und beschreibt unterschiedliche Niveaustufen auf solchen Dimensionen. Jede Kompetenzstufe ist durch kognitive Prozesse und Handlungen von bestimmter Qualität spezifiziert, die Schüler auf dieser Stufe bewältigen können, nicht aber Schüler auf niedrigeren Stufen. Die sich in einem solchen Modell ergebenden Kompetenzklassen müssen gegenüber dem allgemeinen Bildungsziel und der Rolle des Faches gerechtfertigt werden.

Bei den **fachlichen Teildimensionen** sind folgende Dimensionen zu unterscheiden:

- **Die Handlungsdimension (A)**
  Es handelt sich um fachlich orientierte Aktivitäten, die für die Bearbeitung und Nutzung der inhaltlichen Teilbereiche erforderlich sind. Durch eine Unterteilung in 4 Klassen (Ausprägungen) werden charakteristische Handlungsbereiche spezifiziert, die sich aus dem allgemeinen Bildungsziel und der Rolle des Faches ableiten lassen. Die Bildungsziele finden sich im Lehrplan.

- **Die inhaltliche Dimension (B)**
  Die inhaltliche Dimension umfasst themenbezogene Fähigkeiten im Gegenstandsbereich der Mathematik, die für das schulische Lernen in der Sekundarstufe II besonders relevant sind. Grundlage für die im Folgenden angeführten und beschriebenen Ausprägungen der inhaltlichen Dimension ist der Lehrplan.

Die dritte Dimension beschreibt unterschiedliche Anspruchsniveaus:

Die Komplexitätsdimension:

Die Komplexitätsdimension bezieht sich auf die Anzahl und Verknüpfung der Denkschritte, die zur Bearbeitung einer Aufgabe erforderlich sind. Durch Kompetenzstufen sollen kognitive Leistungen mit unterschiedlichem Anspruchsniveau spezifiziert werden. Das Erreichen einer Kompetenzstufe sagt etwas darüber aus, welche Handlungen und mentale Operationen mit hoher Wahrscheinlichkeit korrekt ausgeführt werden können.

Für die Sekundarstufe II erscheinen drei Abstufungen sinnvoll.

Dimension 1: Handlungsdimension (A)

Aus der Zusammenschau der verschiedenen Rollen der Mathematik lassen sich folgende vier Ausprägungen (Klassen) eines mathematischen Handlungsprozesses formulieren:
Ausprägungen der Handlungsdimension

A1: Modell bilden, Darstellen
A2: Operieren, Rechnen
A3: Interpretieren und Dokumentieren
A4: Argumentieren und Begründen

Sie können wie folgt beschrieben werden:

Modell bilden, Darstellen	Umfasst die Fähigkeit, ein Problem aus einer bestimmten Situation in die Sprache der Mathematik zu übertragen. Dazu ist erforderlich, den mathematischen Stellenwert eines Problems zu erkennen, die benötigten Daten aufzufinden und auszuwählen und sich für einen Lösungsweg zu entscheiden und diesen zu planen. Häufig geht es dabei um einen Übersetzungsprozess von der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik. Umfasst das Nutzen der Möglichkeiten vorhandener technischer Hilfsmittel.
Operieren, Rechnen	Umfasst die Kompetenz, Verfahren, Rechenmethoden, Techniken oder Konstruktionsverfahren, die für das mathematische Problem eine Lösung ergeben, auf richtige, effiziente und sinnvolle Weise anzuwenden. Damit reicht diese Kompetenz über die reine Rechenfertigkeit hinaus. Eine Lösung kann beispielsweise auch durch Visualisierung oder durch Verwendung von Tabellen gefunden werden. Umfasst das Nutzen der Möglichkeiten vorhandener elektronischer Rechenwerkzeuge.
Interpretieren und Dokumentieren	Umfasst die Kompetenz, mathematische Ergebnisse zu verbalisieren, wie etwa: die Analyse der Brauchbarkeit des Modells, das innermathematische Interpretieren der Korrektheit der Lösung, das Untersuchen der Brauchbarkeit der mathematischen Lösung für das praktische Problem, die Dokumentation des Lösungsweges und des Ergebnisses, das Interpretieren und Dokumentieren von Ergebnissen bei Verwendung technischer Hilfsmittel.
Argumentieren und Begründen	Umfasst die Fähigkeit, mathematische Probleme unter Verwendung der Fachsprache argumentativ zu behandeln. Umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, mit Begründen und mit Beweisen zu tun haben. Dies inkludiert auch ein Argumentieren betreffend die Entscheidung für ein bestimmtes Modell oder für einen bestimmten Algorithmus. Umfasst Argumentieren und Begründen bei Nutzung von Technologie als Darstellungs- und Recheninstrument, sowie bei Nutzung elektronischer Informationsquellen.

Dimension 2: Die inhaltliche Dimension (B)
Die vier Klassen spiegeln die wesentlichen Inhaltsbereiche des Lehrplans der Sekundarstufe II wider:

Algebra	Rechnen in den Zahlenmengen N, Z, Q, R und C Anwenden von Grundgesetzen und Rechenregeln Exakte Werte, Näherungswerte, Fehler abschätzen Rechnen mit Termen Lösen von Gleichungen, Ungleichungen und linearen Gleichungssystemen Nutzen der Algebra in Anwendungssituationen
Geometrie	Analytische Geometrie: Rechnen mit Vektoren im R^2 und R^3; skalares und vektorielles Produkt Gerade und Ebene in verschiedenen Darstellungsformen, Lagebeziehungen, Abstandsberechnungen Kreis und Kegelschnitte Trigonometrie: Deuten von Winkelfunktionen im Einheitskreis und im rechtwinkeligen Dreieck; Winkelmaße Auflösen des recht- und schiefwinkeligen Dreiecks, Nutzen der Geometrie in Anwendungssituationen
Analysis	Funktionsbegriff, Darstellungsformen und Eigenschaften von Funktionen Lineare, quadratische und rationale Funktionen, Winkelfunktionen, Potenz- und Wurzelfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen Folgen (Monotonie, Schranken, Grenzwert) und Reihen Differenzialrechnung: Differenzen- und Differenzialquotient, Ableitungsfunktionen, Differenziationsregeln Integralrechnung: Stammfunktion, Ober- und Untersummen, bestimmtes Integral Nutzen der Analysis in Anwendungssituationen
Stochastik	Erfassen und Interpretieren von Daten, absolute und relative Häufigkeiten, Kennzahlen der Statistik Wahrscheinlichkeitsrechnung: Baumdiagramme, abhängige und unabhängige Ereignisse, bedingte Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Zufallsvariable, Binomial- und Normalverteilung Testen von Hypothesen, Schätzen von relativen Anteilen

Dimension 3: Die Komplexitätsdimension
Die Komplexitätsdimension beschreibt Kompetenzstufen mit mehr oder weniger komplexen Denkprozessen (Anzahl und Verknüpfung der Denkschritte).
Im Gegensatz zu den bei einer Schularbeit überprüften im laufenden Lernprozess erworbenen kurzfristigen Kompetenzen beschreiben Standards langfristige Kompetenzen, die bis zum Ende der Sekundarstufe II erworben werden sollen.
Es besteht Einigkeit darüber, dass langfristige Kompetenzen, wie sie mit Standards angesprochen werden, einen relativ niedrigen Komplexitätsgrad aufweisen als kurzfristig erforderliche Kompetenzen bei einer Schularbeit im jeweiligen Lernprozess. In diesem Modell werden drei Komplexitätsstufen definiert:

Niveau I: Geringe Komplexität: Grundkompetenzen und einfache Grundbausteine
Niveau II: Mittlere Komplexität: Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen
Niveau III: Höhere Komplexität: Komplexe Verknüpfungen von Grundkompetenzen

Von der Komplexität zu unterscheiden ist der Begriff der Schwierigkeit, der eher individuumsbezogen gesehen werden muss, also von der Vorbildung des Lernenden beeinflusst wird.

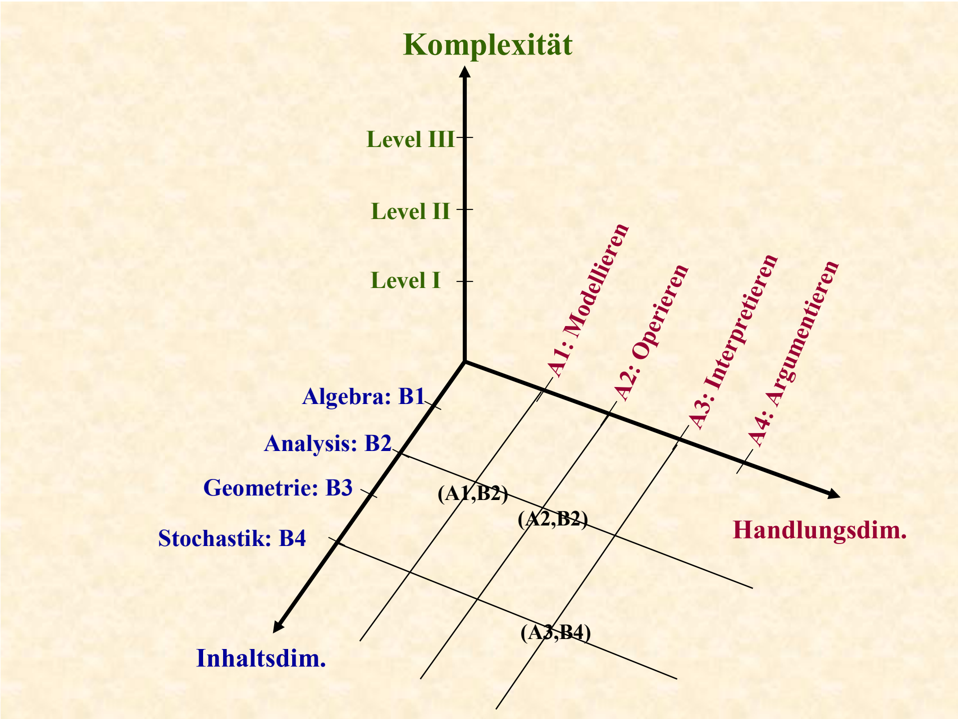


Abb. 3

Die Vernetzung der drei Dimensionen

Mathematische Kompetenz zeigt sich erst dann, wenn Elemente der Handlungsdimension und der Inhaltsdimension vernetzt miteinander auftreten, das heißt, wenn Schülerinnen und Schüler in wechselnden Situationen mathematisch spezifische Handlungen aufgrund vorhandener inhaltlicher Fähigkeiten ausführen können.

Je nach gestellter Aufgabe geschieht dies auf unterschiedlichen Anspruchsniveaus.

Diese Vernetzung der Handlungsdimension und der Inhaltsdimension wird in folgender Graphik dargestellt. Die Realisierung eines solchen Kompetenzpaares in Form von Aufgaben kann in verschiedenen Anspruchsniveaus erfolgen. Das heißt, die Komplexität wird erst bei einer konkreten Aufgabe ausgewiesen.

Beispiele für Kompetenzen bei Vernetzung der Dimensionen:

(1) Modellieren im Inhaltsbereich Geometrie (A1/B3): Schülerinnen und Schüler entscheiden sich für ein mathematisches Modell, für einen Lösungsweg zur Lösung geometrischer Probleme. Dies kann je nach Aufgabe wieder auf verschiedenen Anspruchsniveaus passieren.

(2) Operieren im Inhaltsbereiche Analysis (A2/B2): Schülerinnen und Schüler beherrschen Rechenverfahren im Bereich Analysis, je nach gestellter Aufgabe auf Niveau I, II oder III.

(3) Interpretieren im Inhaltsbereich Algebra (A3/B1): Schülerinnen und Schüler interpretieren algebraische Ergebnisse in Hinblick auf mathematische Korrektheit oder auf Brauchbarkeit für das praktische Problem. Aus dem Problem ergibt sich das Niveau.

(4) Argumentieren im Inhaltsbereich Stochastik (A4/B4): Schülerinnen und Schüler begründen die Entscheidung für eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung, je nach Komplexität wieder auf Niveau I, II oder III.

Zwecks besserer Lesbarkeit werden zuerst Standards für Handlungsdimension und danach Standards für die Inhaltsdimension. Die Vernetzung sowie die Komplexitätszuordnung erfolgen dann bei den Aufgaben, die eigentlich erst eine leistungsmäßige Erfassung und Messung der Standards ermöglichen.

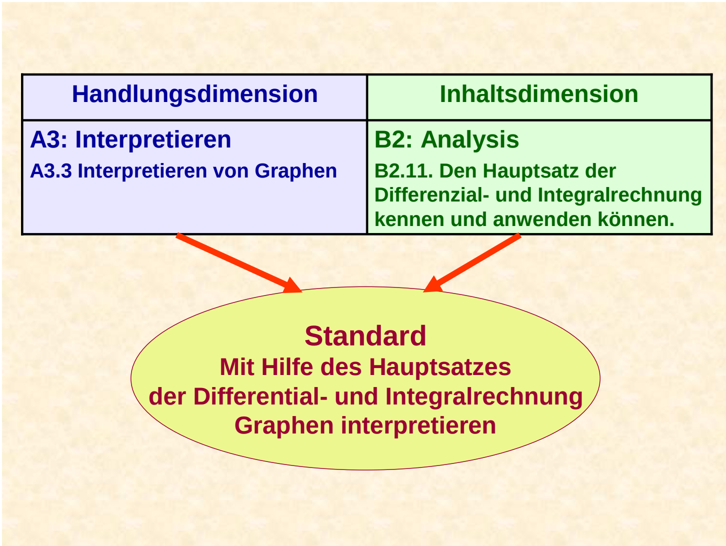


Abb. 4

3. Der Einfluss von Technologie auf Standards

Some mathematics becomes more important – because technology requires it

Some mathematics becomes less important – because technology replaces it

Some mathematics becomes possible – because technology allows it

Bert Waits

Dieses Statement von Bert Waits - einem der Pioniere der Nutzung von Computeralgebra Systemen in der Schule – zeigt deutlich die zu erwartenden Veränderungen beim Einfluss von Technologie im Mathematikunterricht.

Der Zugang von ACDCA zu den Standards ergab sich aus Beobachtungen unserer Versuchsklassen im Bereich Leistungsmessung und Leistungsbewertung. Es zeigte sich, dass die traditionellen Formen der Leistungsmessung nicht mehr zum schülerzentrierten, experimentellen Lernen passten das typisch für technologiegestützten Unterricht ist. Die Diskussionen zum Thema Leistungsbeurteilung führten zu folgenden Fragen:
Welche fundamentalen langfristigen Kompetenzen sind nach wie vor notwendig als Grundbausteine für die zentrale Rolle des Mathematikunterrichtes – das Problemlösen?

- **Wie ändern sich fundamentale Kompetenzen bei konsequenter Nutzung von Technologie?**

So kamen wir in der zweiten Hälfte der Neunziger Jahre zu ersten Vorarbeiten für die Definitionen von Standards [Heugl, 1999], Heugl, 2001]. Parallel dazu beschloss das Bildungsministerium die Entwicklung von Standards für die Sekundarstufe I und gab ein Projekt zur Entwicklung von Standards für die Sekundarstufe II in Auftrag, an dem auch Mitglieder von ACDCA mitarbeiteten.

Die eigentliche Arbeit an technologieorientierten Standards begann nach Fertigstellung eines ersten Prototyps für Standards der Sekundarstufe II. Es handelt sich ja um eine stetige Weiterentwicklung des österreichischen Standardkonzepts. Genauso wie bei der Entwicklung der Standards für die Sekundarstufen I und II sind folgende Themenkreise zu bearbeiten:

- Veränderungen Rolle der Mathematik bei Technologieeinsatz [Heugl, 2004]
- Veränderungen des Kompetenzmodells
- Veränderungen der Standards
- Aufgabenbeispiele und Tests

3.1 Veränderungen des Kompetenzmodells durch den Einfluss von Technologie

Eine mögliche Berücksichtigung des Technologieeinsatzes wäre, eine zusätzliche Dimension zu definieren, die die Werkzeugkompetenz beschreibt. Das war nie ein Thema, da wir ja die Grundstruktur des dreidimensionalen Modells nicht verändern wollten. Außerdem wollten wir betonen, dass Werkzeugkompetenz eine typische mathematische Kompetenz ist und daher im Modell Platz haben müsste. Daher konzentriert sich die derzeitige Arbeit auf **Veränderungen der Handlungsdimension**.

Ein erster Zugang war, neben den 4 Klassen – Modellieren, Operieren, Interpretieren und Argumentieren – die Handlungen im Zusammenhang mit Technologienutzung als 5. Klasse dazu zu nehmen. Nach langen Diskussionen entschieden wir, **„Werkzeughandlungen“** nicht als 5. Klasse zu separieren, solche Handlungen erfolgen ja beim Modellieren, Operieren, Interpretieren und Argumentieren. Also ist es nahe liegend sie **in die 4 bestehenden Klassen zu integrieren**.

So entstanden sozusagen durch „Hineinzoomen“ in diese Handlungsklassen jeweils **vier „Subklassen“**, die eine Beschreibung technologiespezifischer Handlungen erlauben.

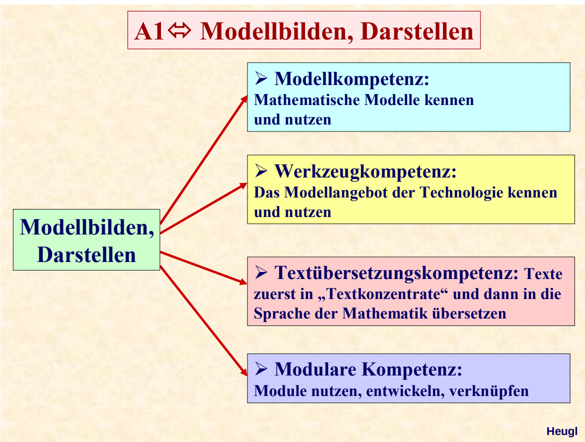


Abb. 4

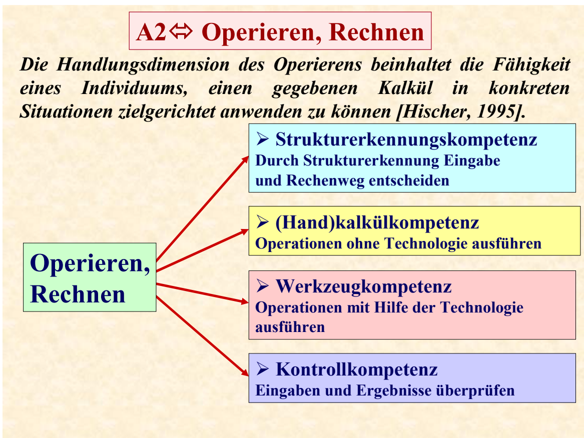


Abb. 5

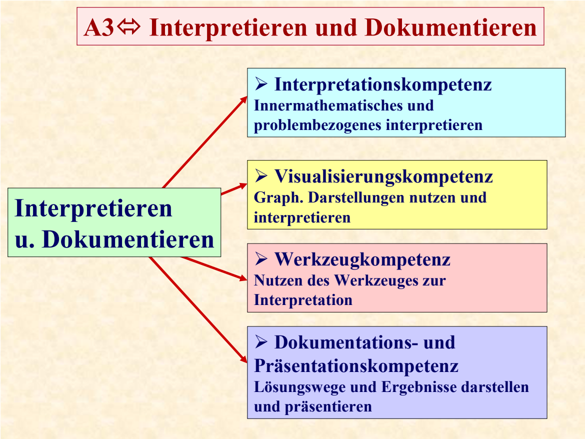


Abb. 6

Abb. 7

Kommentare zum Einfluss von Technologie auf einige “Subklassen:

- **Modellkompetenz und Werkzeugkompetenz:**

Technologie bietet eine größere Vielfalt an Prototypen eines Modells, einer Formel – auch Modelle, die vorher im Unterricht nicht verfügbar waren (z.B. Rekursive Modelle). Während im traditionellen Mathematikunterricht meist nur ein Prototyp verfügbar ist und verwendet werden kann, stehen durch Technologie oft mehrere Prototypen parallel in verschiedenen Fenstern zur Verfügung. Typisch für diese neue Art des mathematischen Denkens und Handelns ist das Arbeiten in einem Fenster und das Hin- und Herpendeln zwischen Fenstern, um die Möglichkeiten der verschiedenen Prototypen nutzen zu können. Wir nennen dieses Handlungskonzept „Window-Shuttle-Methode“ – eine neue Qualität mathematischen Handelns.

Unbedingte Voraussetzung für das Nutzen verschiedener Prototypen ist eine Werkzeugkompetenz beim Modellbilden, wie zum Beispiel bei rekursiven Modellen, bei Regressionsfunktionen oder bei der Nutzung von Tabellenkalkulationssoftware.

- **Übersetzungskompetenz**

Der Übersetzungsprozess verläuft normalerweise in zwei Phasen: Zuerst wurden Informationen über das gegebene Problem (Texte, Daten graphische Informationen, usw.) in eine komprimierte Form übersetzt – wir nennen sie „Wortformel“. Im zweiten Schritt wird die Wortformel in die Sprachen der Mathematik übersetzt.

Mit Hilfe der Technologie und dem dadurch zur Verfügung stehenden erweiterten mathematischen Wortschatz kann die Übersetzung in die mathematische Symbolsprachen direkter erfolgen. Übliche Tätigkeiten beim Übersetzungsprozess: Definieren von Variablen und Funktionen (⇔ Erweiterung des mathematischen Wortschatzes), Nutzen von Befehlen oder Funktionen, die die Technologie bereit stellt, Schreiben von Programmen.

- **Modulare Kompetenz**

Das Nutzen von Modulen ist nicht neu, jede Formel aus der Formelsammlung ist letztlich ein Modul (z.B. Cosinussatz, Heron’sche Flächenformel usw.). Das modulare Denken und Arbeiten hat durch das Werkzeug allerdings eine neue Qualität bekommen. Während nämlich im traditionellen Mathematikunterricht solche Module der Ausgangspunkt für das Rechnen sind, übernehmen durch Technologie verfügbaren Module auch das Operieren.

Module sind komplexe Wissenseinheiten
- *in denen Wissen komprimiert wird, und*
- *in denen Operationen durch diese Kapselung als ganzes abrufbar und einsetzbar werden [Dörfler w., 1991*

Das Entwickeln von Modulen bedeutet also der Entwicklung eines kognitiven Schemas, das als kognitive Einheit abrufbar ist. Verbunden ist damit auch immer eine Reduktion der Komplexität.

Das modulare Denken und Handeln ist ein besonders gutes Beispiel für die These von W. Dörfler, dass Technolgie nicht nur Kognition unterstützt, sondern Teil der Kognition wird.

Nach der Entstehung kann man 3 Arten von Modulen unterscheiden:

- **Module, die von den Schülern entwickelt wurden**
  Diese Module sind sozusagen die wertvollsten und gerade bei der Konstruktion der Module in der so genannten White Box Phase des Lernprozesses zeigt sich diese deutliche Veränderung im mathematischen Tun.
  Durch Speichern, Definieren von Funktionen oder Programmieren werden solche komplexe Wissenseinheiten geschaffen. Manche stehen als Funktionen oder Programme für den weiteren Problemlöseprozess zur Verfügung, andere werden nur temporär eingesetzt, um den Ablauf besser zu strukturieren
- **Module, welche die Lehrer zur Verfügung stellen**
  Besonders als didaktisches Werkzeug werden von Lehrern in der White Box Phase des Lernens Module als Black Box angeboten, die zum Entdecken verwendet werden, aber deren Inhalt für den Lernprozess nicht ausschlaggebend ist.

- **Module die das CAS zur Verfügung stellt**
  Man kann sagen ein CAS ist ein System von Modulen. Das beginnt beim algebraischen Modul factor(t(x),x) zum Faktorisieren von Termen und geht bis zu Modulen zum Lösen von Differentialgleichungen. Betreffend der Chancen und Gefahren gilt dasselbe wie bei den Lehrermodulen.

Ziele (Phasen) eines modulorientierten Mathematikunterrichts
[Lehmann, 2002]

- Definieren von Modulen
- Analysieren von Modulen, Nutzen von Modulen für experimentelles Lernen
- Entwickeln eines “Modulpools” als Werkzeugkasten für das Problemlösen
- Nutzen von Modulen als „Black Boxes“
- Verknüpfung von Modulen, Entwickeln neuer, komplexerer Module durch Nutzen bekannter Module als Bausteine

Die Ergebnisse von E. Lehmann´s Untersuchungen zeigen, dass Schüler/innen, die mit dem modularen Arbeiten Vertraut sind, diese Module tatsächlich als neue Sprachelemente beim Problemlösen und Beweisen nutzen.

A2 ⇔ Operieren, Rechnen

Bevor man den Einfluss von Technologie auf Handlungen des Operierens untersucht sollte definieren, was Kalkülkompetenz ist:

> ***Kalkülkompetenz (anstelle von Rechenfertigkeit) ist die Fähigkeit eines Individuums, einen gegebenen Kalkül in konkreten Situationen zielgerichtet anwenden zu können.*** [Hischer, H. 1995]

Diese Definition zeigt deutlich, dass Kalkülkompetenz mehr ist als Rechnungen nur händisch auszuführen.

Der Einfluss von CAS auf die Kalkülkompetenz:

- Schwerpunktsverschiebung vom Operieren zum Modellieren und Interpretieren
- Schwerpunktsverschiebung vom Ausführen zum Planen der Operation
- Schwerpunktsverschiebung von der Handkalkülkompetenz zu den anderen algebraischen Kompetenzen
- Geringere Komplexität beim händischen Rechnen, insbesondere was die langfristige Kalkülkompetenz betrifft
- Notwendigkeit der Wergzeugkompetenz
- Mehr Praxisnähe bei Anwendungsproblemen
- In der Theoriephase mehr Konzentration auf das jeweilige mathematische Problem, da Rechenarbeit abgegeben wird
- Eine bessere Verknüpfung des formalen und inhaltlichen Aspekts der Mathematik

Die obige Definition führt uns zur Aufgliederung in die vier „Subklassen“ dieser Handlungsdimension:

➢ Strukturerkennungskompetenz

Auch die Notwendigkeit dieser Kompetenz ist nichts Neues. So hat etwa Günther Malle in seinen Untersuchungen gezeigt, dass ein großer Teil der Schülerfehler beim algebraischen Operieren auf Strukturerkennungsfehler zurückzuführen ist.
Eine Voraussetzung für diese Kompetenz ist die Kenntnis der algebraischen Gesetze und Regeln. Richtige Strukturentscheidungen können auch bei Nutzung des Werkzeugs CAS nicht allein mit “trial and error” getroffen werden
Gerade jetzt, wo das Werkzeug die Ausführung der Operation übernimmt, bekommt die Strukturerkennung eine neue Bedeutung.

Strukturerkennung ist nötig

- bei der Eingabe eines Ausdrucks: Insbesondere bei linearen Eingabezeilen ist zuerst einmal eine Strukturerkennung für das richtige Setzen der Klammern nötig.
- bei der Auswahl der passenden Operation: Diese Entscheidung erfolgt auf der Basis einer Strukturerkennung.

- bei der Überprüfung und Interpretation von Ergebnissen: Der Lernende muss Ergebnisse interpretieren, die er nicht selbst produziert hat. Das angebotene Ergebnis stimmt von der Struktur her oft nicht mit dem erwarteten überein.
- beim Vergleich verschiedener Ergebnisse. Oft ist nicht sofort einsehbar, ob verschiedene Ergebnisse äquivalent oder verschieden sind.

➢ **(Hand-)Kalkülkompetenz**

Wir können in auch Technologieklassen das rechnen keinesfalls nur der maschine als “Black Box” überlassen. Zur Entwicklung von Mathematik im Lernenden sind gewisse Handkalkülfertigkeiten unbedingt notwendig, weil ohne Eigenerfahrung weder die Strukturerfassung noch die Entscheidung für eine bestimmte Operation denkbar wäre.

Wenn ich sage “wir”, so meine ich die Gruppe Herget, Lehmann, Kutzler, Heugl [Herget u.a. 2000], die in einem Papier publiziert hat mit dem Titel

„Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar?“

Wir gehen aus von einer zweigeteilten Prüfung, bei der ein Teil ohne moderne technische Hilfsmittel stattfindet, während beim zweiten Teil Technologie wie insbesondere leistungsfähige Taschenrechner und Computer mit CAS eingesetzt werden dürfen. Dieses Modell einer zweigeteilten Prüfung wird in manchen Ländern, z. B. in Österreich, erprobt; in anderen Ländern, z. B. in England, wird es bereits eingesetzt. Dieser Ansatz *könnte ein Kompromiss* sein, um sowohl den Wünschen der Technologie-Befürworter als auch den Vorbehalten der Technologie-Gegner zu entsprechen.

Wir stellen uns im Folgenden eine fiktive *schriftliche* technologiefreie Prüfung vor und suchen nach Aufgaben und Aufgabentypen, die in einer derartigen Prüfung gestellt werden könnten.

Die Grenzziehung zwischen Aufgaben, die bei einer technologiefreien Prüfung gestellt würden, und Aufgaben, die bei einer solchen Prüfung nicht gestellt werden sollten, läuft auf die eingangs gestellte Frage hinaus, welche handwerklichen Rechenkompetenzen im Technologiezeitalter unbedingt erforderlich sind.

➢ Zu diesem Zweck haben wir drei Töpfe definiert: –T, ?T, +T

Die gesuchte Grenze zwischen Aufgaben, die bei einer fiktiven technologiefreien Prüfung gestellt würden, und Aufgaben, die bei einer solchen Prüfung nicht gestellt werden sollten, ist fließend und hängt von vielen Parametern ab, natürlich auch vom Schultyp. Wir versuchen eine möglichst allgemeingültige Antwort und schaffen dazu drei „Töpfe“, die wir –T, ?T und +T nennen.

- Der erste Topf, **–T** (= ohne Technologie), beinhaltet jene Aufgaben, die bei einer technologiefreien Prüfung zu stellen wären. In diesen Topf kommen also all jene Aufgaben, von denen wir erwarten, dass Schülerinnen und Schüler sie ohne Zuhilfenahme *irgend*eines Taschenrechners oder Computers lösen können.
- Die durch den Topf –T bezeichneten Rechenfertigkeiten sollen ab der 8. Jahrgangsstufe gelten bzw. ab jener Jahrgangsstufe, in der der betreffende Stoff behandelt wird. Diese

Rechenfertigkeiten sollen dann über die jeweilige Jahrgangsstufe hinaus *dauerhaft* erhalten bleiben und wirklich *jederzeit* gefordert werden können.

- Der dritte Topf, **+T** (= mit Technologie), beinhaltet jene Aufgaben, die bei einer solchen Prüfung nicht gestellt werden sollten, d. h. bei der Lösung dieser Aufgaben darf ein leistungsfähiger Taschenrechner oder ein Computer mit CAS verwendet werden.
- Der zweite Topf, **?T**, spiegelt unsere Zweifel, unsere unterschiedlichen Einstellungen und zum Teil auch die grundsätzliche Problematik dieses Themas wieder. Bei den in diesem Topf gelandeten Aufgaben gingen die Meinungen der vier Autoren auseinander, oder wir waren uns einig, dass wir keine Zuordnung zu einem der beiden anderen Töpfe vornehmen wollten oder konnten. Dieser Topf kennzeichnet, wie fließend die Grenze für uns (noch) ist.

Wo immer es machbar war, haben wir das Spektrum und die Grenzen eines konkreten Aufgabentyps dadurch abgesteckt, dass wir vergleichbare Aufgabenvarianten für –T und +T angegeben haben.

Beispiele von Inhaltsbereichen:

Terme – mit und ohne Klammern – langfristige Mindestkompetenzen

Wie bereits erwähnt ist die Aufgabenformulierung für den Wert einer Aufgabe mitentscheidend. In der folgenden Tabelle haben wir daher bewusst auf die übliche Aufforderung „Multipliziere aus“ verzichtet und statt dessen „Schreibe ohne Klammern“ verlangt. Während Ersteres die Anwendung des Distributivgesetzes suggeriert ist Letzteres neutral und erhöht damit den Wert der Aufgabe.

	–T (ohne Technologie)	*?T*	*+T (mit Technologie)*
01	Schreibe ohne Klammern: $a-(b+3)$	Schreibe ohne Klammern: $(5+p)^2$	Schreibe ohne Klammern: $3a^2(5a-2b)$
02	Schreibe ohne Klammern: $2(a+b)$		Schreibe ohne Klammern: $(a^2-3b)(-3a+5b^2)$
03	Schreibe ohne Klammern: $2(ab)$		Schreibe ohne Klammern: $(2a+t)^2$
04	Schreibe ohne Klammern: $3(5a-2b)$		Schreibe ohne Klammern: $(5+p)^3$
05	Schreibe ohne Klammern: $(3+a)(b-7)$		
06	Schreibe anders: $2a+2b$		
07	Vereinfache: $x^2y^2+(xy)^2$		
08	Faktorisiere: $3ab+6ac$		
09	Faktorisiere: x^2-4	Faktorisiere: x^2+4x+4	Faktorisiere: x^2-x-6

–T09: Diese Aufgabe ist wichtig, weil sie Entscheidungs- und Begründungskompetenz entwickeln hilft, was wiederum gebraucht wird, um auf einem Taschenrechner etwa die Taste „factor“ sinnvoll wählen zu können.

Ein Hintergrund-Ziel (im Sinne der Bemerkungen zum Abschnitt „Brüche und Bruchterme“) ist hier das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Über die Aufgabentypen ?T01 und ?T09 wurde besonders lange diskutiert. Gerade die eingangs erwähnte Strukturerkennungskompetenz wäre laut Meinung eines Teiles unserer Gruppe ohne die durch diese Aufgaben ausgedrückte Rechenkompetenz nicht gewährleistet. Auf der anderen Seite wurden in den österreichischen Computeralgebra-Projekten Anzeichen dafür gefunden, dass durch das Verwenden von Technologie die Strategiekompetenz gefördert wird, ohne dass eine gute Entwicklung von Rechenkompetenz an dieser Stelle unbedingt erforderlich wäre.

Lineare Gleichungen – langfristige Mindestkompetenzen

	–T (ohne Technologie)	*?T*	*+T (mit Technologie)*
01	Löse nach x: $x-6=0$		
02	Löse nach x: $5-x=2$		
03	Löse nach x: $3x=12$		
04	Löse nach x: $5x-6=15$		Löse nach x: $5x-6=2x+15$
05	Löse nach y: $\frac{y}{3}=5$		Löse nach x: $2x+3=\frac{4}{3}$
06	Löse nach x: $a\cdot x=5$	Löse nach x: $a\cdot x-6=15$	
07	Löse nach x: $x+1=x$	Löse nach x: $2(x+1)=2x$	
08	Löse nach x: $x+1=x+1$	Löse nach x: $2(x+1)=2x+2$	
09	Löse nach t: $s=v\cdot t$	Löse nach x: $K=k\cdot x+F$	
10	Löse nach r: $U=2r\pi$		
11	Löse nach x: $\lvert x\rvert=1$		

–T06: Dieses Beispiel ist wichtig, weil die heute verfügbaren CAS die hier erforderliche Fallunterscheidung bezüglich *a* nicht machen.

–T11: Da bei einem CAS die Betragsfunktion oft im Ergebnis auftritt, sollen Schülerinnen und Schüler diese Funktion kennen und in einfachen Situationen wie hier auch technologiefrei handhaben können.

Quadratische Gleichungen – langfristige Mindestkompetenzen

	–T (ohne Technologie)	*?T*	*+T (mit Technologie)*
01	Löse nach x: $x^2=4$		Löse nach x: $9x^2=4$
02	Löse nach x: $x^2-4=0$		Löse nach x: $9x^2-4=0$
03	Löse nach x: $x^2-x=0$		
04	Löse nach x: $x^2-4x=0$	Löse nach x: $x^2+4x+4=0$	Löse nach x: $2x^2-5x+9=0$
05	Löse nach x: $x^2=a$		
06	Löse nach r: $A=4\pi r^2$		Löse nach v_0: $x=\frac{1}{2a}\cdot v_0^2$

+T04 und ?T04 markieren eine der auf den ersten Blick einschneidendsten Veränderungen: Die „*p*-*q*-Formel“ für die Lösung einer quadratischen Gleichung zählt für uns nicht mehr zum verbindlichen Katalog der sicheren handwerklichen Fähigkeiten, bleibt aber wegen ihrer Bedeutung und den typischen Fallunterscheidungen eines der Hintergrund-Ziele. Das bisher übliche Lösen quadratischer Gleichungen nach Rezept (ob mit einer der Formeln oder jeweils mit quadratischer Ergänzung) ist unserer Überzeugung nach ein „aussterbendes Rezept“ (vgl. [Herget 1996].) Entsprechend sind Rechenstab und Logarithmentafel fast „über Nacht“ aus dem Mathematikunterricht verschwunden, als die umfangreichen Berechnungen den Taschenrechnern übertragen werden konnten.

- **Werkzeugkompetenz**

… to do mathematics means to transform thinking into operating (and then transfering to the computer).

> ***But the essential fact is the entire process and not simply the counter position of contemplating on the one hand and operating on the other.***
>
> ***B. Buchberger***

Nicht nur der Denkprozess über das mathematische Problem führt zum gewünschten Ergebnis, ohne Werkzeugkompetenz im Handlungsbereich des Operierens ist weder die Planung noch die Durchführung der Operation möglich. Handlungen im Zusammenhang mit der Werkzeugnutzung erfordern kognitive mathematische Prozesse.

Der Einfluss von CAS auf die Werkzeugkompetenz

- Notwendige Werkzeugfertigkeiten müssen genauso geübt und automatisiert werden wie Rechenfertigkeiten.
- Wachsende Freude und Interesse an Mathematik im CAS-unterstützten Unterricht korreliert mit der Werkzeugkompetenz
- Wir beobachten einen unterschiedliche Zugang zu dieser Kompetenz und damit eine unterschiedliche Akzeptanz bei Burschen und Mädchen
- Die notwendigen Befehle und Operationen müssen den Lernenden in kleinen Portionen offeriert werden.
- Vereinbaren von Regeln für die Dokumentation des Lösungsweges notwendig

➢ **Kontrollkompetenz**

Seit Mathematik zur Problemlösung benutzt wurde, war es nötig, die Korrektheit der Ergebnisse zu überprüfen, also zu testen.

Eines der wichtigsten Resultate unserer CAS-Projekte lautet: Der Unterricht wird deutlich schülerzentrierter und experimenteller. Neben dem Lehrer gewinnt das CAS als Experte an Bedeutung. Dadurch erhöht sich aber die Notwendigkeit des Testens ganz bedeutend. Auf der anderen Seite stellt das Werkzeug völlig neue Testmöglichkeiten zur Verfügung.

Veränderungen bei der Testkompetenz durch den Einfluss von CAS:
- Testen ist einfacher und schneller möglich.
- Neue Testmöglichkeiten, wie etwa das algebraische oder das graphische Testen
- Testen wird notwendiger, da die Ergebnisse ja nicht selber produziert werden.
- Experimentelles Arbeiten braucht begleitendes Testen. In CAS-Klassen ist kaum mehr der „algorithmische Gehorsam" zu beobachten, das heißt das einfache Nachvollziehen des Lehrerweges. Man findet Schularbeiten, wo bei 20 SchülerInnen 10 verschiedene Lösungswege auftreten.
- Mehr Anwendungen erfordert neben dem innermathematischen Testen der Korrektheit der Operation auch ein Testen der Brauchbarkeit der Lösung für das praktische Problem.

Diese neue Rolle der Testkompetenz erfordert das Einüben von Teststrategien, so wie man im traditionellen Unterricht Rechenfertigkeiten geübt hat. Es ist oft faszinierend zu beobachten, wie erfindungsreich SchülerInnen beim Entwickeln von Teststrategien sind.

Beispiele für Teststrategien bei der Untersuchung der Äquivalenz von Termen:
- Nutzen der algebraischen Möglichkeiten des Werkzeugs CAS (z.B.: expandieren oder faktorisieren)

- Gleichsetzen der Terme
- Bilden der Differenz
- Bilden des Quotienten
- Graphische Methoden

A3 ⇔ Interpretieren und Dokumentieren

➢ **Eigentliche Interpretationskompetenz – verbunden mit Werkzeugkompetenz**

Die drei Phasen des Problemlöseprozesses laufen natürlich nicht hintereinander ab – Problemlösen ist ein ständiger Regelkreis, der Kontrolle und Interpretation laufend erfordert. Innermathematische und problemorientierte Interpretation sind natürlich auch ein Bestandteil des traditionellen Problemlöseprozesses, die Technologie bringt einerseits neue Erfordernisse beim Interpretieren, bietet aber auch neue Möglichkeiten. Daher ist Werkzeugkompetenz ein ständiger Bestandteil der Handlung des Interpretierens.

Interpretation ist notwendig
- um Begriffe und Formulierungen der Umgangssprache zu analysieren,
- um zu einer komprimierten Form („Wortformel“) des Textes zu kommen,
- um aus dem Pool der verfügbaren Modelle ein brauchbares Modell auszuwählen,
- um die Komplexität verschiedener Lösungswege abzuwägen,
- um die Brauchbarkeit der Lösung zu entscheiden, die vom Werkzeug angeboten wird (innermathematisch und problembezogen),
- um den Einfluss einzelner Parameter zu verstehen,
- um das Modell zu verbessern.

➢ **Visualisierungskompetenz**

Wir haben das Visualisieren deshalb als eigene Subklasse hervorgehoben, weil **eine besondere Qualität der Mathematik die Möglichkeit der graphischen Repräsentation abstrakter Objekte** ist. In diesem Sinn ist Visualisierung natürlich auch im traditionellen Unterricht von großer Wichtigkeit, nur ist es wesentlich schwieriger, den graphischen Prototypen einer Funktion oder eines Begriffes zu erhalten. Die gute alte „Kurvendiskussion“ verdankt diesem Umstand ihre Berechtigung.

Im Zeitalter der Kommunikationstechnologie muss sich die Mathematik einer weiteren Aufgabe vermehrt stellen: Wir sind ständig konfrontiert mit einer Fülle graphischer Darstellungen von Abhängigkeiten zwischen Größen in den Printmedien, im Fernsehen und im Internet. Sie kompetent und verantwortungsbewusst zu interpretieren und zu nutzen ist ein wichtiges Lernziel der Mathematik.

Der Einfluss von CAS auf die Visualisierungskompetenz:

- CAS ermöglicht dem Lerner Graphen viel einfacher und schneller zu erhalten
- Verschiedene Prototypen eines Objektes, einer Funktion stehen jetzt parallel zur Verfügung: Hat man zum Beispiel den Term, so erhält man unmittelbar auch den Graphen.
- Die Nutzung neuer Prototypen, die einer Visualisierung leicht zugänglich sind, wird durch das neue Werkzeug ermöglicht, wie zum Beispiel rekursive Modelle oder

Datenmaterial, das im Data/Matrix Editor (allgemeiner durch Bearbeiten mittels Tabellenkalkulation) bearbeitet werden kann.

- Der Lernprozess verläuft häufig in Form des Hin- und Herpendelns zwischen verschiedenen Prototypen. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von der Window Shuttle Methode [Heugl u. a., 1996]. So kann etwa die Auswirkung von Parametern auf das Modell oder auf die Lösung sehr direkt und wirkungsvoll untersucht werden.
- Algebraische Probleme können nun relativ einfach graphisch gelöst werden.

➢ **Dokumentations- und Präsentationskompetenz**

Bei Nutzung der Technologie wird ein großer Teil der Operationen vom Werkzeug als Black Box erledigt. Daher ist es unbedingt notwendig – insbesondere in der Prüfungssituation – eine möglichst präzise Dokumentation des Lösungsweges zu verlangen, eventuell verbunden mit Kommentaren und Begründungen bezüglich der zugrunde liegenden Theorie. Diese Dokumentation ist die Entscheidungsgrundlage für die Korrektheit des Lösungsweges und der damit verbundenen Denkprozesse.

Insbesondere bei Anwendungsproblemen muss der Mathematiker in der Lage sein, dem Nutzer und Fragesteller den Weg und die Lösung zu dokumentieren und zu erklären.

Beim Lernen von Mathematik erwirbt man nicht nur fachliche Kompetenz, automatisch (oder besser auch explizit bewusst gemacht) ist Methodenkompetenz ein wichtiges Produkt des Lernprozesses. Für uns ist Methodenkompetenz nicht nur ein Nebenprodukt, sondern ein Teil jener kognitiven Kompetenz, die durch die Rolle von Mathematik als Denktechnologie repräsentiert wird. Die Präsentationskompetenz erhält durch die Technologie und ihr Angebot an Präsentationstools eine neue Qualität.

A4 ⇔ Argumentieren und Begründen

“Mathematical thinking technology is the essence of science and the essence of a technology based society” (Buchberger)

Leider werden im Lehrplan oft nur die Lerninhalte registriert und der erste Teil – die Bildungs- und Lehraufgabe – nicht beachtet. Gerade in diesem Teil wird in vielfältiger Weise auf die Handlungsdimension hingewiesen:

❖ *Mathematik ist eine Schulung des Denkens, in der Arbeitstechniken vermittelt, Strategien aufgebaut, Phantasie angeregt und Kreativität gefördert wird.*

❖ *Mathematik ist ein elaboriertes Begriffsnetz, ein ständiges Bemühen um exakten Ausdruck, in dem Fähigkeiten zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen entwickelt sowie die sprachliche Ausdrucksfähigkeit gefördert werden*

[bmbwk, 2004].

In einem denkwürdigen Vortrag bei der Konferenz „Computer – Mensch- Mathematik“ 1991 an der Universität Klagenfurt hat Univ. Prof. Willi Dörfler folgende Thesen zum Thema „Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium“ aufgestellt [Dörfler, 1991]:

- *Sieht man Kognition als funktionales System, das Mensch und Werkzeuge und den sonstigen materiellen und sozialen Kontext umfasst, so können neue Werkzeuge Kognition qualitativ verändern und neue Fähigkeiten generieren..*

Lernen ist dann nicht nur Entwicklung von vorhandenen Fähigkeiten, sondern systemische Konstruktion funktionaler kognitiver Systeme.

- *Computer und Computersoftware ist demnach als Erweiterung und Verstärkung unserer Kognition anzusehen.*

➢ Induktive Schlusskompetenz (plausibles Schließen)

Hans Freudenthal sagte:

“Bevor die Schüler beweisen lernen, sollten sie zuerst vermuten lernen”

Die erste Phase auf der Entdeckungsreise in die Mathematik ist die heuristische, experimentelle Phase: Kennzeichen sind Tätigkeiten wie Experimentieren, Vermuten, plausibles, induktives Schließen, die Aneignung heuristischer Strategien (wie etwa Generalisieren, Spezialisieren, Analogisieren, usw.).

Technologie unterstützt diese Phase ganz besonders, ja man kann sagen, diese heuristische Phase tritt bei Technologieeinsatz erstmals bewusst auf.

Technologie unterstützt zum Beispiel:

- Die Visualisierung,
- den Bau von Tabellen,
- das Testen des Einflusses von Parametern,
- das Simulieren,
- das Zoomen,
- usw.

Mit diesen Tätigkeiten verbunden ist eine neue Qualität des Argumentierens

➢ Deduktive Schlusskompetenz („logisches, exaktes Schließen”)

Im Anschluss an die heuristische Phase folgt die exaktifizierende Phase, eine Phase des Beweisens, des deduktiven Schließens:

- Vermutungen der heuristischen Phase werden abgesichert, werden bewiesen,
- durch Standpunktsverlagerungen kommt man zu exakteren Begriffen, zu neuen Problemlösestrategien,
- mathematisches Wissen wird geordnet und gesichert,
- Zusammenhänge werden hergestellt,
- mathematische Arbeitsweisen werden vertraut gemacht,
- Argumentationsfähigkeit wird geschult.

Oft dominieren beim Beweisen komplexe Rechenoperationen und verdecken dadurch das eigentliche Ziel dieser Tätigkeit des Beweisens – durch logisches Argumentieren zu gesicherten Erkenntnissen zu kommen. Ein wesentlicher Beitrag der Technologie zu dieser Subklasse des Argumentierens ist daher das Ausführen komplexer Operationen, wodurch die Konzentration auf das eigentliche Beweisen ermöglicht wird.

Es kommt zu einer Verschiebung der Tätigkeit vom Ausführen zum Planen.

- **Werkzeugkompetenz**

So wie in allen Klassen der Handlungsdimension unterstützt die Werkzeugkompetenz auch die Handlung des Argumentierens und Begründens.

Bei der Durchführung von Beweisen benötigt man Werkzeugkompetenz in allen inhaltlichen Bereichen, wie zum Beispiel:

- Algebra (Umformen komplexer Terme, Lösen von Gleichungen und Ungleichungen)
- Analysis (Lösen von Differentialgleichungen, Summen, Grenzwerte)
- Geometrie (Rechnen mit Vektoren und Matrizen)

Argumentieren kann aber auch dadurch entwickelt und geschult werden, dass man Operationen, die vom Werkzeug als Black Box ausgeführt wurde erklären und begründen lässt.

3.2 Beispiele für "technologie-beeinflusste" Standards

A1 ⇔Modellbilden, Darstellen

- **Modellkompetenz:**
  Kennen und Nutzen mathematischer Modelle

Beispiel 1: Prototypen von Funktionen

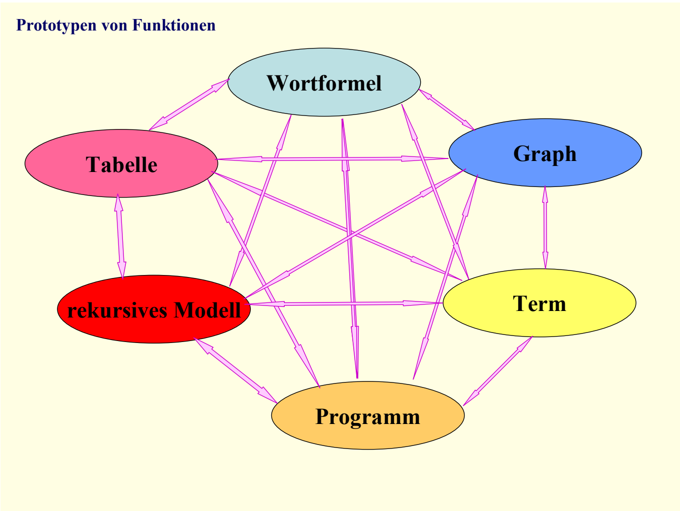


Abb. 8

Der Computer als Medium für Prototypen macht verschiedene Prototypen parallel verfügbar und bietet auch Prototypen, die sonst nicht verfügbar wären (z.B. rekursive Modelle, Programme)

Standards:

- ***Kennen von Prototypen, die vom Werkzeug angeboten werden.***
- ***Den für das gegebene Problem passenden Prototypen auswählen.***

- **Zur Werkzeugkompetenz:**

Beispiel 2: Kosten und Erlös bestimmen den Gewinn
[Böhm, J.; 1998]
Die Analyse der Produktionskosten c für ein bestimmtes Produkt ergab für unterschiedliche Produktionsmengen x die folgenden Gesamtkosten:

Menge x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Kosten c	160	188	210	220	235	255	284	330	390

- Suche ein Modell für die Gesamtkostenfunktion (cost(x)).
- Erstelle eine Tabelle der Gesamtkosten für $0 \leq x \leq 50$ mit Schrittweite 5.

Standards:

- ***Eine Tabelle unter Nutzung des Werkzeugs aufstellen*** [Abb. 9]
- ***Die passenden Windows Variablen auswählen*** [Abb. 10]
- ***Einen Graphen mit Hilfe der Technologie zeichnen*** [Abb. 11]

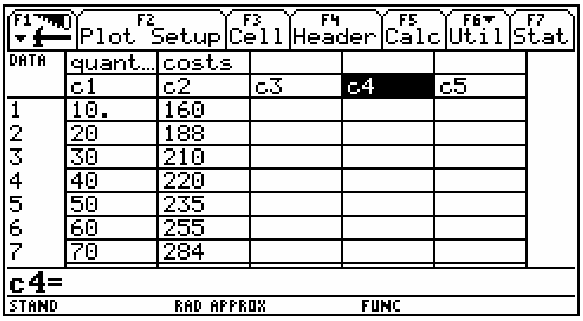


Abb. 9

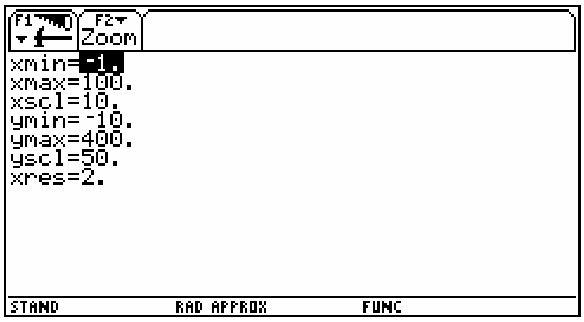


Abb. 10

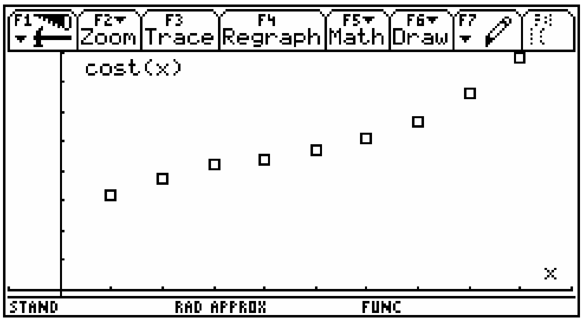


Abb. 11

Standards:

- ***Sich für ein bestimmtes vom Werkzeug angebotenes Modell entscheiden (Kubische Regressionsfunktion)*** [Abb. 12]
- ***Analysieren der statistischen Variablen*** [Abb. 13]
- ***Speichern und zeichnen des Graphen*** [Abb. 14]

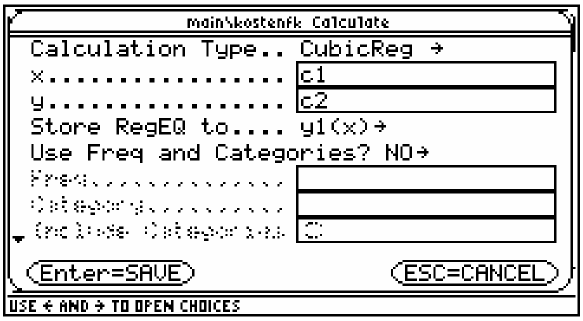


Abb. 12

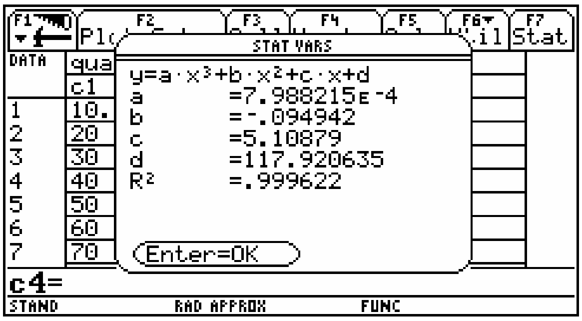


Abb. 13

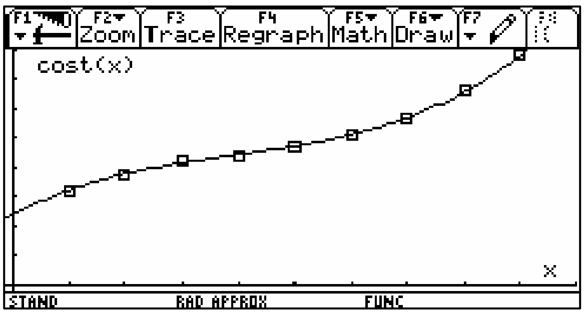
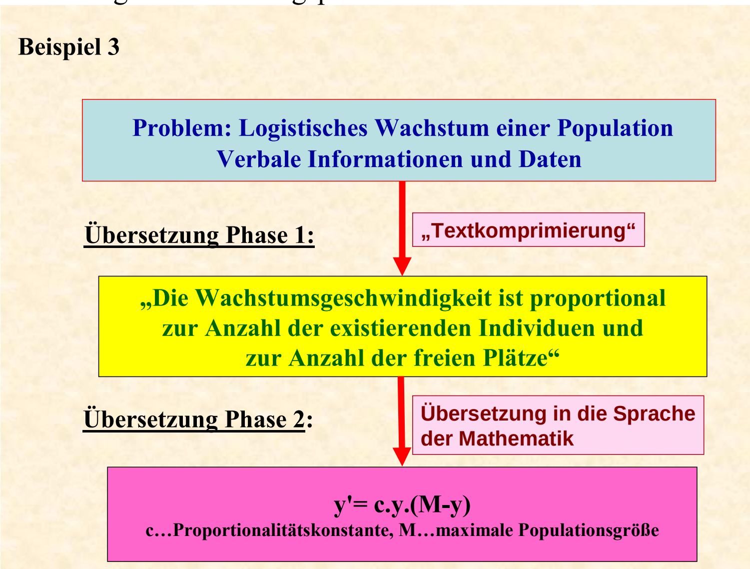


Abb. 14

- **Übersetzungskompetenz:**

Beispiel 3: : Logistisches Wachstum einer Population

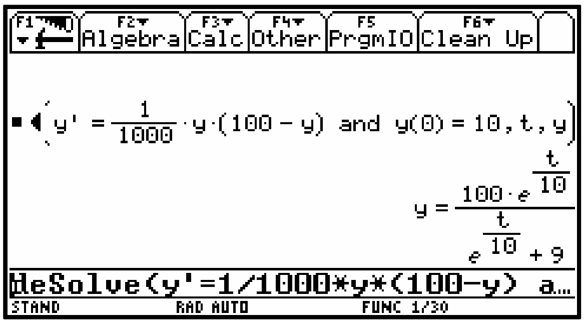
Zweistufiger Übersetzungsprozess:



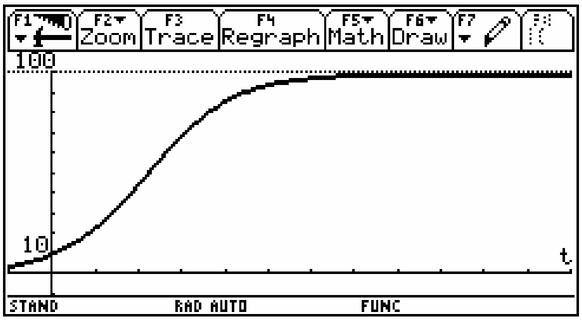
[Abb. 15]

Standards:

- ***Text “komprimieren” → “Wortformel finden*** [Abb. 15]
- ***Wortformel in die Sprache der Mathematik übersetzen*** [Abb. 15]
- ***Operieren mit Hilfe der Technologie*** [Abb. 16; Abb. 17]



[Abb. 16]



[Abb. 17]

- **Modulare Kompetenz:**
  Entwickeln, Nutzen und Verknüpfen von Modulen

Standards:

- ***Defininieren eines Moduls durch Speichern*** [Abb. 18]
- ***Experimentieren mit dem Modul, Formulieren von Vermutungen*** [Abb. 19]
- ***Bauen neuer Module durch Verknüpfen bekannter Module*** [Abb. 20]

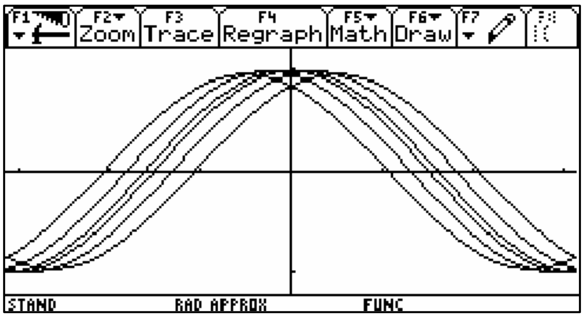
Beispiel 4: Der Modul “Differenzenquotient”

[Lehmann, E. 2000]

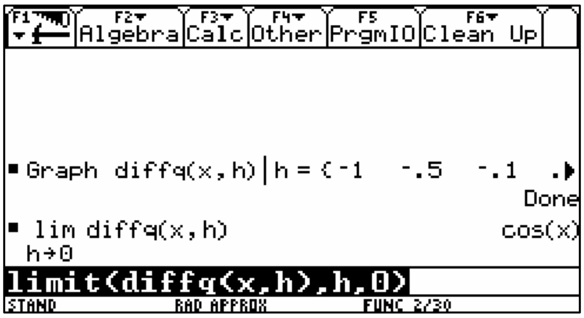
z.B.: Gegeben ist die Funktion f(x) = sin(x)

$$\boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \rightarrow diffq(x,h)}$$

[Abb. 18]



[Abb. 19]



[Abb. 20]

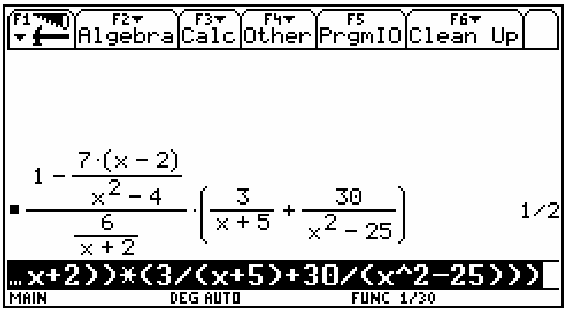
A2⇔ Operieren, Rechnen

➢ **Strukturerkennungskompetenz**

Standards:

- ***Eingabe eines Terms durch Verwendung passender Klammern*** [Abb. 21]

Beispiel 5: Strukturerkennung bei Eingabe eines Terms



[Abb. 21]

➢ **Werkzeugkompetenz**

Standards:

- ***Operieren im Graphikfenster*** [Abb. 22 und Abb. 25]
- ***Operieren im Algebrafenster*** [Abb. 23]
- ***Operieren in der Tabelle*** [Abb. 24]

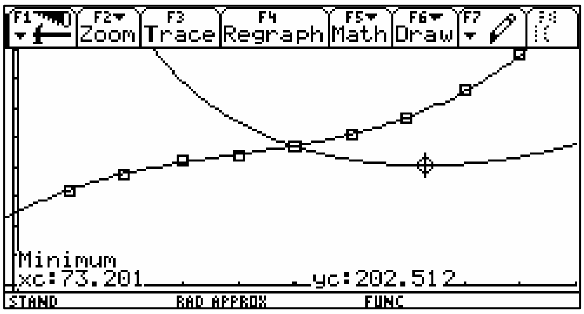
Beispiel 6: Kosten und Erlös bestimmen den Gewinn
[Böhm, J.; 1998]

Die Analyse der Produktionskosten c für ein bestimmtes Produkt ergab für unterschiedliche Produktionsmengen x die folgenden Gesamtkosten:

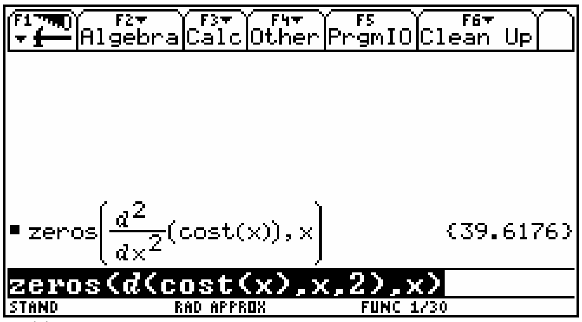
Menge x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Kosten c	160	188	210	220	235	255	284	330	390

Voraussetzung: Die Kostenfunktion cost(x) und die Durchschnittskostenfunktion cost(x)/x wurden ermittelt.

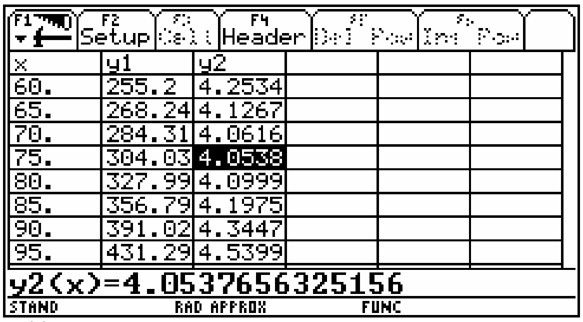
- Suche die „Kostenkehre“ (Wendepunkt der Kostenfunktion
- Wo sind die Durchschnittskosten minimal („Betriebsoptimum“).



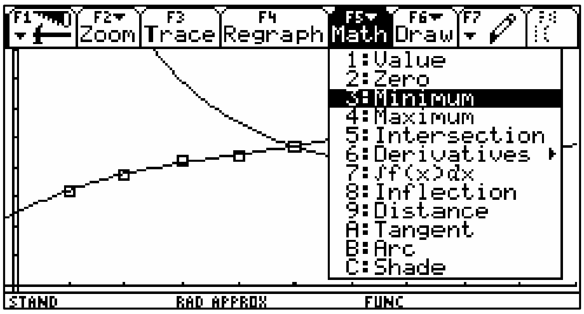
[Abb. 22]



[Abb. 23]



[Abb. 24]



[Abb. 25]

A3⇔ Interpretieren und Dokumentieren

➢ **Visualisierungskompetenz**

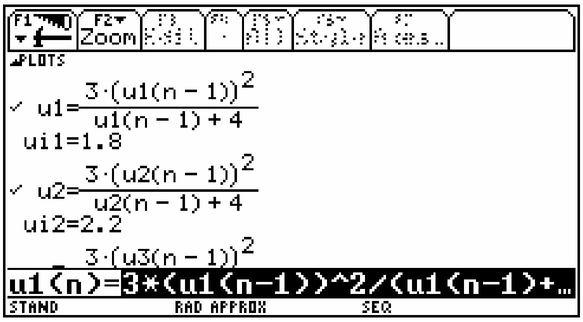
Standards:

- ***Visualisieren in verschiedenen graphischen Darstellungsformen der Technologie*** [Abb. 26 und Abb. 27]
- ***Untersuchen des Einflusses von Parametern im Graphikfenster*** [Abb. 25, Abb. 26 und Abb. 27]
- ***Interpretieren von Ergebnissen durch pendeln zwischen verschiedenen Prototypen in verschiedenen Fenstern (Window –Shuttle-Methode)*** [Abb. 25, Abb. 26 und Abb. 27]

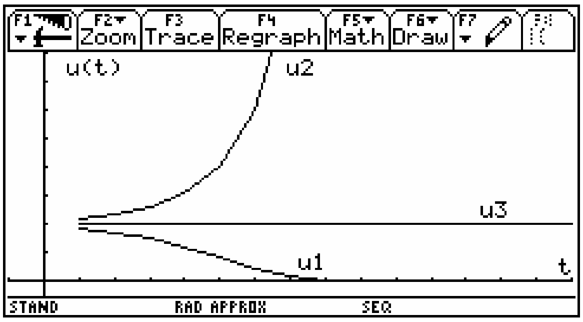
Beispiel 7: Sterile Insektentechnik (SIT)

Eine Insektenpopulation mit anfangs u_0 Weibchen und u_0 Männchen möge bei natürlichem Wachstum pro Generation jeweils auf das r-fache anwachsen. Zur Bekämpfung der Population wird pro Generation eine bestimmte Anzahl s von sterilen Männchen freigesetzt, die sich mit der Naturpopulation völlig vermischt. Modellannahme: r=3, s=4.

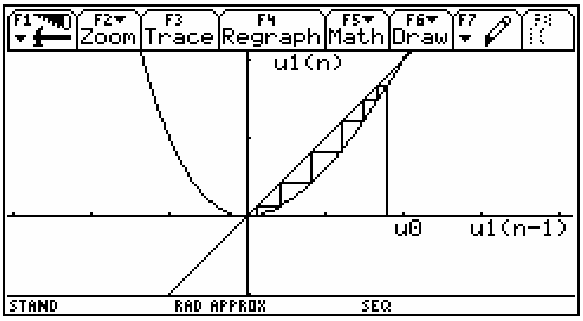
Untersuche das Wachstum der Population unter verschiedenen Anfangsbedingungen:
$u_0 = 1{,}8$
$u_0 = 2{,}2$
$u_0 = 2{,}0$



[Abb. 26]



[Abb. 27]



[Abb. 28]

- **Werkzeugkompetenz**
  Nutzen der Technologie zum Interpretieren

Standards:

- ***Interpretieren von Ergebnissen durch pendeln zwischen verschiedenen Repräsentationen des Ergebnisses (Window –Shuttle-Methode)*** [Abb. 29 und Abb. 30]

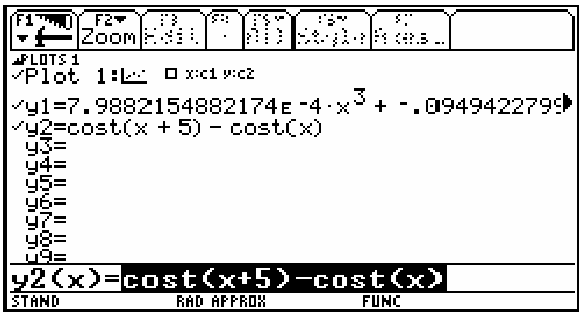
Beispiel 8: Kosten und Erlös bestimmen den Gewinn
[Böhm, J.; 1998]

Die Analyse der Produktionskosten c für ein bestimmtes Produkt ergab für unterschiedliche Produktionsmengen x die folgenden Gesamtkosten:

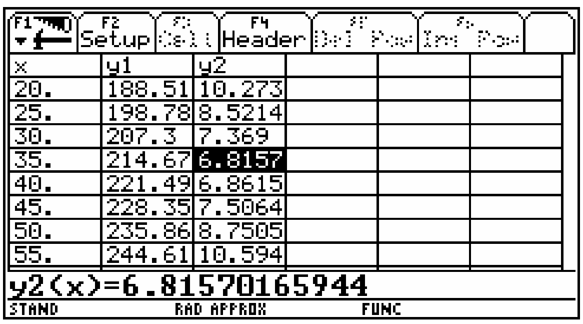
Menge x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Kosten c	160	188	210	220	235	255	284	330	390

Voraussetzung: Die Kostenfunktion cost(x) wurde durch kubische Regression ermittelt

- Bestimme möglichst genau den Bereich, in dem die Produktionskosten am langsamsten zunehmen.



[Abb. 29]



[Abb. 30]

➢ Dokumentations- und Präsentationskompetenz

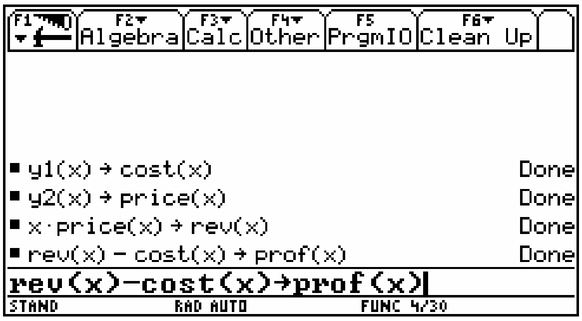
Standards:

- ***Werzeugkompetenz für das Präsentieren*** [Abb. 32]

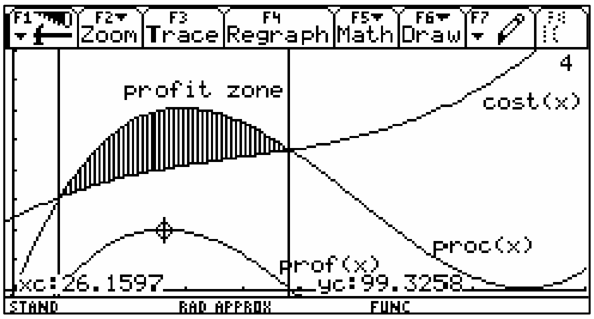
Beispiel 9: Kosten und Erlös bestimmen den Gewinn
[Böhm, J.; 1998]

Voraussetzung: Kostenfunktion cost(x), Erlösfunktion proc(x) und Gewinnfunktion prof(x) ermittelt [Abb. 31].

- Präsentiere die Ergebnisse im Grafikfenster (inklusive Beschriftung, Gewinnzone, maximaler Gewinn)



[Abb. 31]



[Abb. 32]

A4⇔ Argumentieren und Begründen

➢ Induktive Schlusskompetenz
(„plausibles Schließen“)

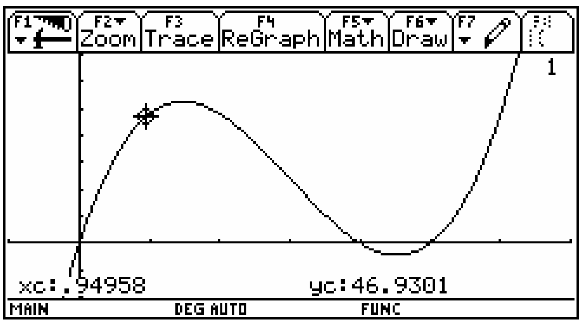
Standards:

- ***Durch experimentieren mit der Technologie zu Vermutungen kommen (z.B. durch “Zoomen”)*** [Figur 33 bis 37]

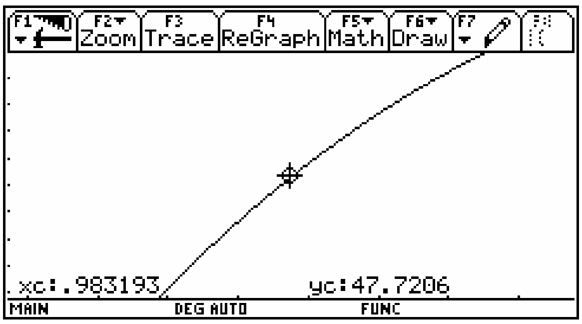
Beispiel 10: Die Idee der Linearisierung – Differenzierbarkeit ⇔ Stetigkeit

Gegeben sei eine Polynomfunktion y = f(x).

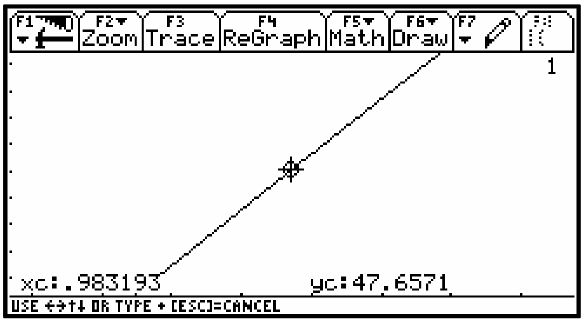
- Versuche durch „Zoomen“ die Idee der Linearisierung zu visualisieren [Abb. 33, Abb. 34, Abb. 35].
- Nimm die Betragsfunktion und versuche an einer Nullstelle der Betragsfunktion durch „zoomen“ zu einer Vermutung zu kommen. [Abb. 36 und Abb. 37].



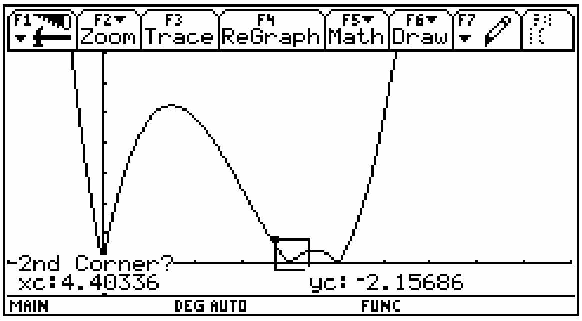
[Abb. 33]



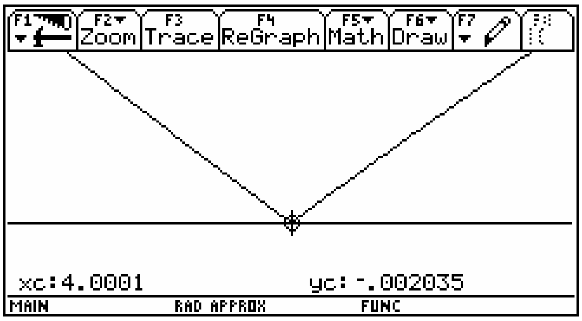
[Abb. 34]



[Abb. 35]



[Abb. 36]



[Abb. 37]

Vermutung: |f(x) | ist an der Nullstelle stetig aber nicht differenzierbar

➢ Deduktive Schlusskompetenz

Standards:

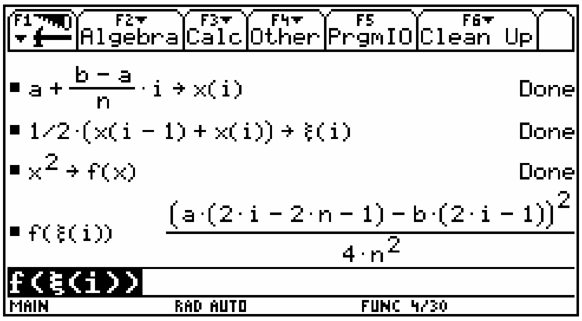
- ***Planen des Beweises - operieren mit Te3chnologieunterstützung*** [Abb. 38 bis Abb. 40]

Beispiel 11: Riemann Summen – exakt berechnet

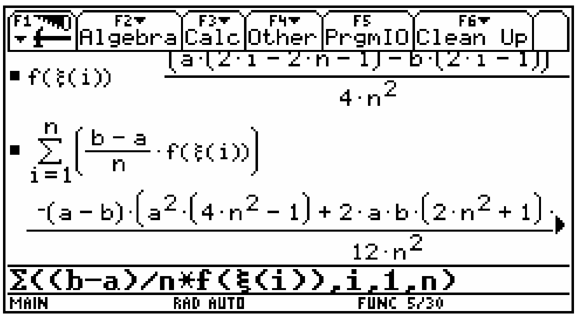
Gegeben $\int_a^b x^2\,dx$

Berechne das bestimmte Integral unter Nutzung der Definition des Integrals. Verwende z. B. die Idee der “Mittelsummen”

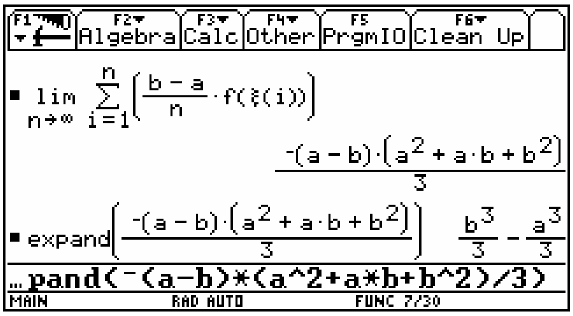
Nach der Teilung des Intervalls [a, b] in n gleiche Teile und Berechnen der Mittelpunkte und ihrer Funktionswerte [Abb. 38] wird die Summe [Abb. 39] und der Grenzwert der Summe [Abb. 40] mit Hilfe der Technologie berechnet.



[Abb. 38]



[Abb. 39]



[Abb. 40]

- **Werkzeugkompetenz**
  Begründen unterstützt durch Technologie

Standards:

- ***Begründen von Ergebnissen, die vom Werkzeug produziert wurden.*** [Abb. 41]

Beispiel 12: Erklären von Lösungsschritten beim Differenzieren unterstützt durch Technologie. Nutzen von ***Derive*** als Black Box und erklären der von ***Derive*** im „Step mode“ angegebenen Lösungsschritte (in blauer Farbe)

$$\frac{d}{dx}\sqrt{(x\cdot SIN(x))}$$

$$\frac{d}{dx}F(x)^n \Rightarrow n\cdot F(x)^{n-1}\cdot\frac{d}{dx}F(x)$$

$$\frac{\frac{d}{dx}(x\cdot SIN(x))}{2\cdot\sqrt{(x\cdot SIN(x))}}$$

$$\frac{d}{dx}(F(x)\cdot G(x)) \Rightarrow G(x)\cdot\frac{d}{dx}F(x) + F(x)\cdot\frac{d}{dx}G(x)$$

$$\frac{x\cdot\frac{d}{dx}SIN(x) + SIN(x)\cdot\frac{d}{dx}x}{2\cdot\sqrt{(x\cdot SIN(x))}}$$

$$\frac{d}{dx}SIN(x) \Rightarrow COS(x)$$

$$\frac{x\cdot COS(x) + SIN(x)\cdot\frac{d}{dx}x}{2\cdot\sqrt{(x\cdot SIN(x))}}$$

$$\frac{d}{dx}x \Rightarrow 1$$

$$\frac{x\cdot COS(x) + SIN(x)}{2\cdot\sqrt{(x\cdot SIN(x))}}$$

[Abb. 41]

4. Ausblick

Mit dieser Arbeit ist nur ein erster Schritt in Richtung Berücksichtigung des Einflusses von Technologie auf Standards getan. Folgende Aktivitäten sind im Laufen oder in Planung:

➢ Fertigstellung der Adaptierung des Kompetenzmodells:

Bearbeitung der Inhalts- und Komplexitätsdimension in ähnlicher weise wie in dieser Arbeit die Handlungsdimension.

➢ Überarbeitung der Standards

Bis jetzt gibt es in dieser Arbeit nur exemplarische Beispiele für die Handlungsdimension technologiebeeinflusster Standards. In Zukunft muss sowohl die Handlungsdimension als auch die Inhaltsdimension überarbeitet werden. Es müssen technologiespezifische Standards flächendeckend eingefügt werden.

➢ Aufgabenpool

Derzeit gibt es für die Sekundarstufe II nur einen **öffentlichen Aufgabenpool**, der der Orientierung und Steuerung im Hinblick auf langfristige Kompetenzen dienen soll, es gibt noch keinen **geheimen Testitempool**. Die Entwicklung von Testitems für die eigentlichen Standardtests hat noch nicht begonnen.

Es müssen Aufgaben im Hinblick auf den Einfluss von Technologie untersucht und entwickelt werden. Dazu ist muss man sich auf ein Klassifikationsschema einigen. Derzeit wird bei **ACDCA** folgendes **Schema** verwendet:

C0	**Aufgaben CAS-neutral –SchülerInnen in „Technologieklassen haben weder Vor- noch Nachteile**
C+	**Aufgaben mit Vorteilen für CAS- SchülerInnen**
C-	**Aufgaben mit Nachteilen für CAS-SchülerInnen**

Denkbar wäre auch das **Schema** zu verwenden, das eine **internationale Expertengruppe** aus Belgien, Dänemark, Schottland, Schweiz, Österreich entwickelt hat [Böhm, 2004]:

C0	**Aufgaben, bei denen CAS keine wesentliche Hilfe darstellen**
C1	**Aufgaben, die mit Hilfe von CAS wesentlich schneller gelöst werden können oder trivialisiert werden**
C2	**Aufgaben, welche die Werkzeugkompetenz testen**

C3	**Traditionelle Aufgaben, die durch die Nutzung von CAS ausgeweitet werden (Verallgemeinerung, Einfluss von Parametern usw.**
C4	**Aufgaben, die nur mit Hilfe von CAS gelöst werden können**

Auf der Grundlage eines solchen Klassifikationsschemas muss der Aufgabenpool des Projektes „Bildungsstandards aus Mathematik für die Sekundarstufe II" [Liebscher, 2004] überarbeitet werden. Die bestehenden Aufgaben müssen klassifiziert werden und es müssen vor allem technologiespezifische Aufgaben beigefügt werden.

➢ Standardtests

Es muss unterschieden werden zwischen

- **Orientierungstests**, die aus dem öffentlichen Aufgabenpool entwickelt werden und
- **Standardtests**, die in Zusammenarbeit mit der Testpsychologie aus einem geheimen Itempool entwickelt werden

Derzeit arbeiten wir nur an Orientierungstests. Sie dienen, wie ihr Name sagt der Orientierung, der Steuerung in Richtung mehr Augenmerk auf langfristige Kompetenzen und können von LehrerInnen auch als Instrument der Selbstevaluation eingesetzt werden. Damit beschäftigt sich das folgende Kapitel.

5. Durchgeführte Tests:

5. 1. SchülerInnenfragebogen für die 6. Klassen:

Austrian Center for Didactics of Computer Algebra **Projektgruppe Standards** **6. Klasse - Test 1**

SchülerInnenfragebogen

Mein persönliches Codewort:

1. Geschlecht: ❑ männlich ❑ weiblich

2. Meine Mathematiknote im letzten Schuljahr war:

❑ Sehr gut ❑ Gut ❑ Befriedigend ❑ Genügend ❑ Nicht genügend

3. Bitte schätze die Aufgaben ein, die du gerechnet hast

Aufgabe	leicht	mittel	schwer
1	❑	❑	❑
2	❑	❑	❑
3	❑	❑	❑
4	❑	❑	❑
5	❑	❑	❑
6	❑	❑	❑
7	❑	❑	❑

Vielen Dank für deine Unterstützung und Mitarbeit!

5. 2. Fragestellungen für die 6. Klassen:

1. Der Bruttopreis B einer Ware enthält 20% Mehrwertsteuer. Stelle eine Formel für den Nettopreis N dieser Ware auf!

   Formel:

2. Für die reellen Zahlen a, b gilt: $4 \leq a \leq 6$ und $3 \leq b \leq 4$.
   Gib die größtmögliche untere Schranke und die kleinstmögliche obere Schranke für $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $a : b$ an.

	a + b	a - b	a · b	a : b
untere Schranke				
obere Schranke				

3. Ein zylindrisches Gefäß wird mit Wasser gefüllt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das Gefäß leer. Pro Minute fließen 0,5 Liter Wasser zu.
   Beantworte anhand einer Tabelle bzw. einer aufgestellten Formel folgende Fragen:

   a) Wie viele Liter sind nach 1, 2, 3, 4 sowie nach **t** Minuten im Gefäß?

   b) Wie ändert sich das Volumen, wenn die Zeit auf das Doppelte wächst?
   Kreuze die richtige Antwort an:

   ❑ Das Volumen wird halbiert.

   ❑ Das Volumen wird verdoppelt.

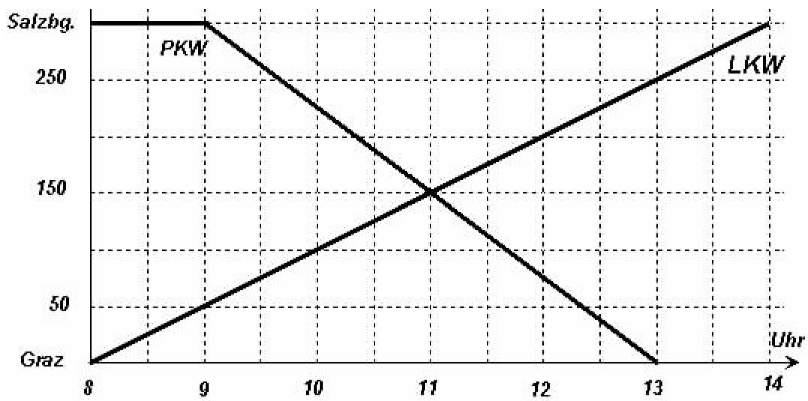
   ❑ Das Volumen wird vervierfacht.

   c) Auf das Wievielfache muss **t** wachsen, damit **V** auf das Fünffache wächst?
   Begründe die Antwort!

4. Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. Kreuze an, welche der folgenden Vektoren zu $\vec{a}$ parallel, normal bzw. weder parallel noch normal sind!

	parallel zu $\vec{a}$	normal zu $\vec{a}$	weder parallel noch normal zu $\vec{a}$
$\vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix}$	❑	❑	❑
$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$	❑	❑	❑
$\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$	❑	❑	❑
$\vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$	❑	❑	❑

5. Beantworte folgende Fragen:



a) Wann und wo fährt der LKW ab?

....

b) Wann und wo fährt der PKW ab?

....

c) In welcher Entfernung (von Graz aus) treffen einander PKW und LKW?

....

d) Mit welcher Geschwindigkeit fährt der LKW ?

....

e) Wann trifft der PKW in Graz ein?

....

f) Wie lange braucht der LKW nach Salzburg?

....

g) Wie weit sind LKW und PKW um 10 Uhr voneinander entfernt?

....

6. Gegeben ist die Formel $a = \frac{2 \cdot b^2 \cdot c}{d}$ mit a, b, c, d > 0

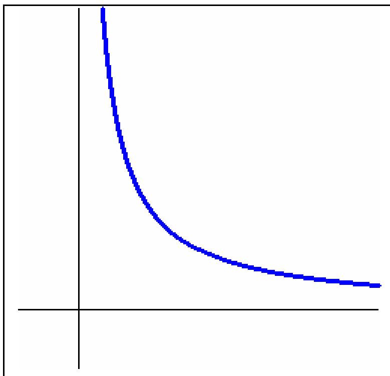


Abb. 1

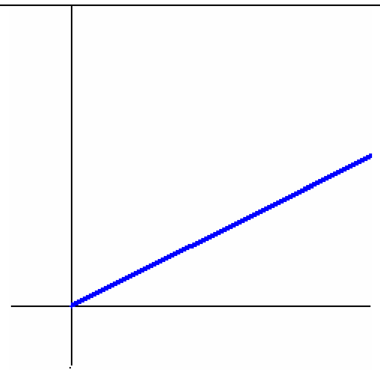


Abb. 2

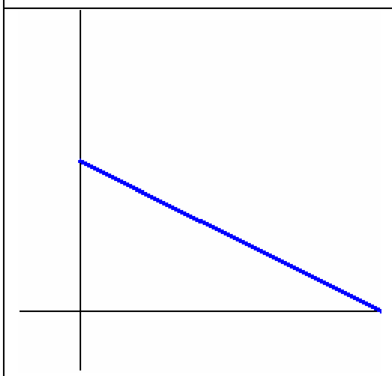


Abb. 3

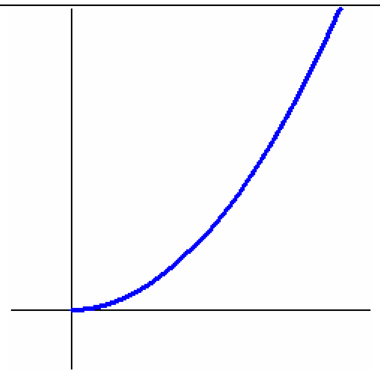


Abb. 4

a) c, d sind konstant, a = f(b).
Welche der oben dargestellten Funktionsgraphen stellt die Funktion f(b) dar?

b) b, d sind konstant, a = f(c).
Welche der oben dargestellten Funktionsgraphen stellt die Funktion f(c) dar?

c) b, c sind konstant, a = f(d).
Welche der oben dargestellten Funktionsgraphen stellt die Funktion f(d) dar?

7. Was lässt sich über die Anzahl der reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung aussagen? Begründe deine Aussage und deute sie grafisch!

5. 3. Testauswertung für die 6. Klassen:

Austrian Center for Didactics of Computer Algebra **Projektgruppe Standards** **6. Klasse - Test 1**

Hinweise zur Auswertung: 6. Klasse - Test 1

1. Der Bruttopreis B einer Ware enthält 20% Mehrwertsteuer. Stelle eine Formel für den Nettopreis N dieser Ware auf!

Standard:

A1: Modellbilden, Darstellen Entscheiden für ein passendes mathematisches Modell	**B1: ALGEBRA** Algebraische Kompetenzen in anwendungsorientierten Aufgaben nutzen können.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**

Lösungserwartung:

Formel: $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{1{,}2}}$ *oder* $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{5B}}{\mathbf{6}}$ *oder* $\mathbf{N} = \mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{120}}$ *oder* $\mathbf{N} = \mathbf{0{,}8333} \cdot \mathbf{B}$ usw.

2. Für die reellen Zahlen a, b gilt: $4 \le a \le 6$ und $3 \le b \le 4$.
Gib die größtmögliche untere Schranke und die kleinstmögliche obere Schranke für $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $a : b$ an.

Standard:

A2: Operieren, Rechnen Rechnen mit und Berechnen von Näherungswerten, Schätzen	**B1: ALGEBRA** Mit exakten Werten, Näherungswerten und Schranken arbeiten und Fehler abschätzen können.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**

Lösungserwartung:

	A + b	a - b	a · b	a : b
untere Schranke	**7**	**0**	**12**	**1**
obere Schranke	**10**	**3**	**24**	**2**

3. Ein zylindrisches Gefäß wird mit Wasser gefüllt. Zum Zeitpunkt t = 0 ist das Gefäß leer. Pro Minute fließen 0,5 Liter Wasser zu.
Beantworte anhand einer Tabelle bzw. einer aufgestellten Formel folgende Fragen:

<u>Lösungserwartung</u>:

a) Wie viele Liter sind nach 1, 2, 3, 4 sowie nach **t** Minuten im Gefäß?

<u>Standard:</u>

A1: Modellbilden, Darstellen • Sachverhalte erfassen und mathematische Beziehungen darin erkennen • Entscheiden für ein passendes mathematisches Modell • Entscheiden für eine Darstellungsform (z.B. Formel, Gleichung, Graph, Tabelle, rekursives Modell) und zwischen den Darstellungsformen wechseln.	**B2: ANALYSIS** Mit verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen arbeiten können und ihre Eigenschaften kennen und nutzen.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS – Vorteil**

Zeit	**1**	**2**	**3**	**4**	**t**
Volumen	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**0,5t**

b) Wie ändert sich das Volumen, wenn die Zeit auf das Doppelte wächst?

<u>Standard:</u>

A3: Interpretieren und Dokumentieren Interpretieren von Daten und Informationen	**B2: ANALYSIS** Mit verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen arbeiten können und ihre Eigenschaften kennen und nutzen.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS – Vorteil**

Kreuze die richtige Antwort an:

☐ Das Volumen wird halbiert.

☑ Das Volumen wird verdoppelt.

☐ Das Volumen wird vervierfacht.

c) Auf das Wievielfache muss **t** wachsen, damit **V** auf das Fünffache wächst?

Standard:

A4: Argumentieren und Begründen Begründen der Entscheidung für eine bestimmte Lösung.	**B2: ANALYSIS** Mit verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen arbeiten können und ihre Eigenschaften kennen und nutzen.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS – Vorteil**

Begründe die Antwort!

Die Zeit muss auf das Fünffache wachsen - es liegt ein direktes Verhältnis vor. FALSCH: „Je mehr, desto mehr" !

4. Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. Kreuze an, welche der folgenden Vektoren zu $\vec{a}$ parallel, normal bzw. weder parallel noch normal sind!

Standard:

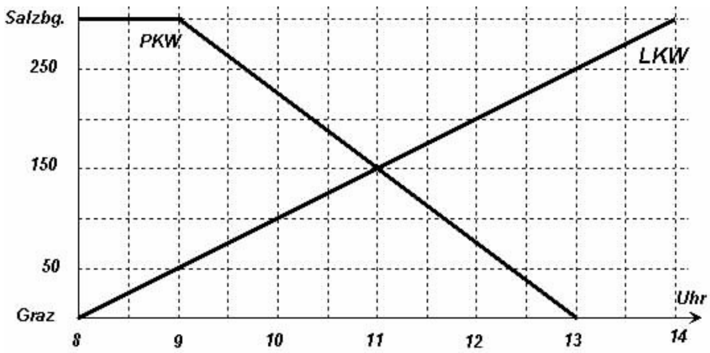
A1: Modellbilden, Darstellen Sachverhalte erfassen und mathematische Beziehungen darin erkennen **A2: Operieren, Rechnen** • Beherrschen von Rechenverfahren in den einzelnen Inhaltsbereichen (Algebra, Geometrie, Analysis, Stochastik) auch unter Nutzung der vorhandenen Technologien. • Graphisches Darstellen und Lösen	**B3: GEOMETRIE** Eigenschaften von Vektoren, Grundgesetze und Rechenregeln für Vektoroperationen kennen und anwenden können.
L1: Geringe Komplexität Grundkompetenzen und einfache Grundbausteine	**CAS - neutral**

Lösungserwartung:

	parallel zu $\vec{a}$	normal zu $\vec{a}$	weder parallel noch normal zu $\vec{a}$
$\vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix}$	☑	❑	❑
$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$	❑	☑	❑

$\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$	☐	☐	☑
$\vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$	☐	☐	☑

5. Beantworte folgende Fragen:



Standard:

A2: Operieren, Rechnen Graphisches Darstellen und Lösen **A3: Interpretieren und Dokumentieren** Interpretieren von Graphen	**B2: ANALYSIS** Mit verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen arbeiten können und ihre Eigenschaften kennen und nutzen.
L1: Geringe Komplexität Grundkompetenzen und einfache Grundbausteine	**CAS – Vorteil**

Lösungserwartung:

h) Wann und wo fährt der LKW ab?
Der LKW fährt um 8.00 Uhr in Graz ab.

i) Wann und wo fährt der PKW ab?
Der PKW fährt um 9.00 Uhr von Salzburg ab.

j) In welcher Entfernung (von Graz aus) treffen einander PKW und LKW?
Sie treffen einander 150 km von Graz entfernt.

k) Mit welcher Geschwindigkeit fährt der LKW ?
Der LKW fährt mit 50 km/h.

l) Wann trifft der PKW in Graz ein?
Der PKW trifft um 13.00 Uhr in Graz ein.

m) Wie lange braucht der LKW nach Salzburg?
Der LKW fährt 6 Stunden nach Salzburg.

n) Wie weit sind LKW und PKW um 10 Uhr voneinander entfernt?
Sie sind ca. 125 km voneinander entfernt.

6. Gegeben ist die Formel $a = \frac{2 \cdot b^2 \cdot c}{d}$ mit a, b, c, d > 0

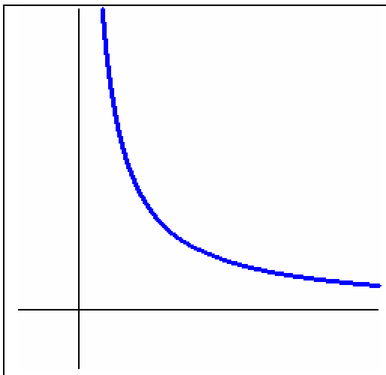


Abb. 1

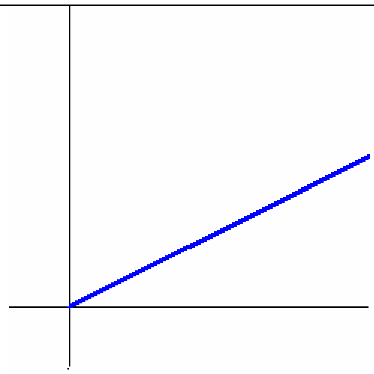


Abb. 2

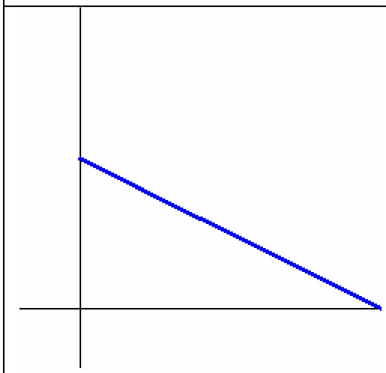


Abb. 3

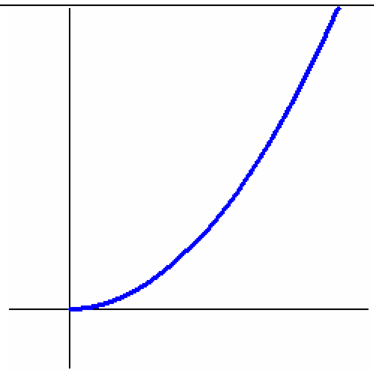


Abb. 4

Standard:

A1: Modellbilden, Darstellen Entscheiden für ein passendes mathematisches Modell **A3: Interpretieren und Dokumentieren** Interpretieren von Größenbeziehungen und Strukturen in Tabellen und Formeln	**B2: ANALYSIS** Funktion als eindeutige Zuordnung verstehen und angemessen verwenden können.
L3: Höhere Komplexität Komplexe Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS – Vorteil**

Lösungserwartung:

a) c, d sind konstant, a = f(b).
Welche der oben dargestellten Funktionsgraphen stellt die Funktion f(b) dar?
Abb. 4

b) b, d sind konstant, a = f(c).
Welche der oben dargestellten Funktionsgraphen stellt die Funktion f(c) dar?
Abb. 2

c) b, c sind konstant, a = f(d).
Welche der oben dargestellten Funktionsgraphen stellt die Funktion f(d) dar?
Abb. 1

7. Was lässt sich über die Anzahl der reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung aussagen? Begründe deine Aussage und deute sie grafisch!

Standard:

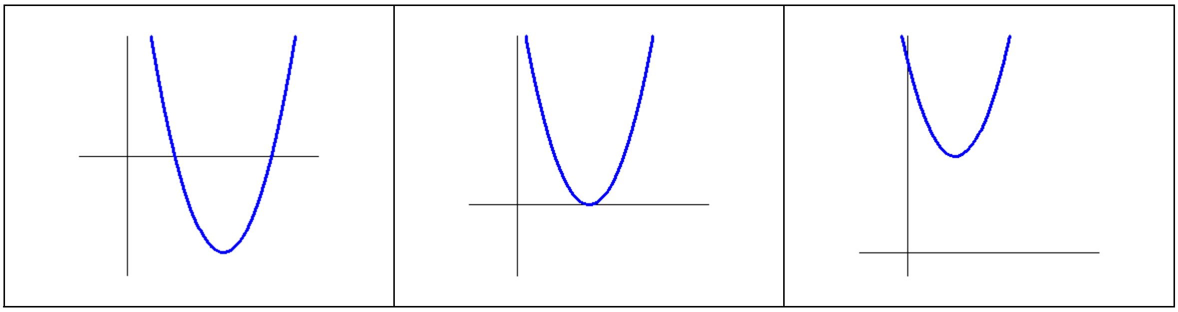
A4: Argumentieren und Begründen Innermathematische Begründung der Rechenschritte, des Konstruktionsganges, der Lösungsfälle.	**B1: ALGEBRA** Variable, Terme, Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme sinnvoll einsetzen und mit ihnen arbeiten können. **B2: ANALYSIS** Mit verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen arbeiten können und ihre Eigenschaften kennen und nutzen.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS – Vorteil**

Lösungserwartung:

Eine quadratische Gleichung kann höchstens zwei reelle Lösungen besitzen.

Diskriminante (Ausdruck unter der Wurzel) > 0: zwei reelle Lösungen
Diskriminante (Ausdruck unter der Wurzel) = 0: eine reelle Lösung (Doppellösung)
Diskriminante (Ausdruck unter der Wurzel) < 0: keine reelle Lösung

Mögliche grafische Deutung:



5. 4. SchülerInnenfragebogen für die 7. Klassen:

Austrian Center for Didactics of Computer Algebra **Projektgruppe Standards** **7. Klasse - Test 1**

SchülerInnenfragebogen

Mein persönliches Codewort:

1. Geschlecht: ❑ männlich ❑ weiblich

2. Meine Mathematiknote im letzten Schuljahr war:

❑ Sehr gut ❑ Gut ❑ Befriedigend ❑ Genügend ❑ Nicht genügend

3. Bitte schätze die Aufgaben ein, die du gerechnet hast

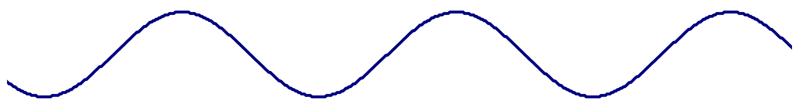
Aufgabe	leicht	mittel	schwer
1	❑	❑	❑
2	❑	❑	❑
3	❑	❑	❑
4	❑	❑	❑
5	❑	❑	❑
6	❑	❑	❑
7	❑	❑	❑

Vielen Dank für deine Unterstützung und Mitarbeit!

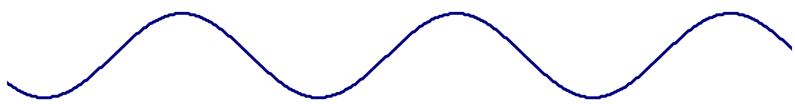
5. 5. Fragestellungen für die 7. Klassen:

1. Zeichne in den vorliegenden Abbildungen die Koordinatenachsen und ihre Skalierung so ein, dass die gezeichneten Kurven

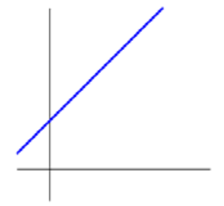
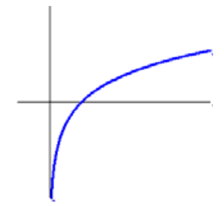
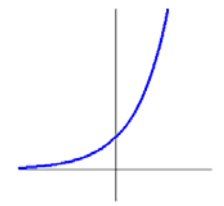
   a) den Graphen der Funktion y = sin x darstellt:



   b) den Graphen der Funktion y = cos x darstellt:



2. Unter den gezeichneten Kurven befinden sich die Graphen der Funktionen $y = e^x$, $y = e^{-x}$ und y = ln x. Ordne diese richtig zu.

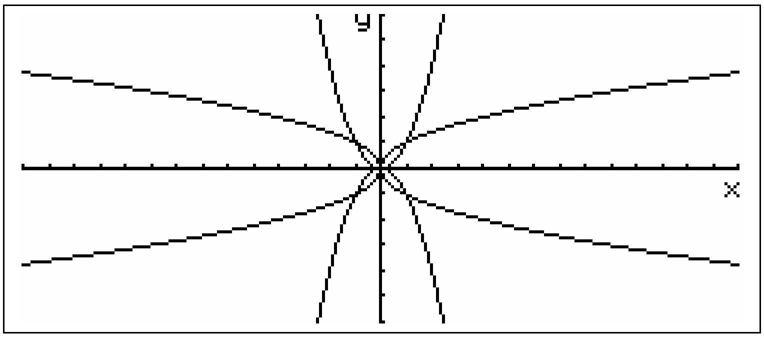
3. Erkläre die drei Rechnungen, die der Computer automatisch durchgeführt hat, indem du die Zwischenschritte aufschreibst.

$\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{27}+\sqrt{48}=10\cdot\sqrt{3}$

$\sqrt{45}-\sqrt{20}=\sqrt{5}$

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

4. Der folgende Graph ist mit dem Computer aus 6 verschiedenen Funktionen erstellt worden:



a) Gib die Funktionsgleichungen an und ordne jedem Teil des Graphen die entsprechende Funktion zu.

b) Warum kann dieses Bild nicht aus nur 4 Funktionsgraphen erzeugt werden?

5. In einer Kultur von ursprünglich 1000 Bakterien verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien pro Stunde.

a) Stelle die Entwicklung der Bakterienanzahl dar!

b) Um wie viel Prozent wächst die Bakterienzahl pro Stunde?

c) Schätze ab, wann die Bakterienzahl 7000 überschritten wird!

6. Der Bruttopreis B einer Ware enthält 20% Mehrwertsteuer. Stelle eine Formel für den Nettopreis N dieser Ware auf!

Formel:

7. Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. Kreuze an, welche der folgenden Vektoren zu $\vec{a}$ parallel, normal bzw. weder parallel noch normal sind!

	parallel zu $\vec{a}$	normal zu $\vec{a}$	weder parallel noch normal zu $\vec{a}$
$\vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix}$	❑	❑	❑
$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$	❑	❑	❑
$\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$	❑	❑	❑
$\vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$	❑	❑	❑

5. 6. Testauswertung für die 7. Klassen:

Projektgruppe Standards **7. Klasse - Test 1**

Hinweise zur Auswertung: 7. Klasse - Test 1

1. Zeichne in den vorliegenden Abbildungen die Koordinatenachsen und ihre Skalierung so ein, dass die gezeichneten Kurven

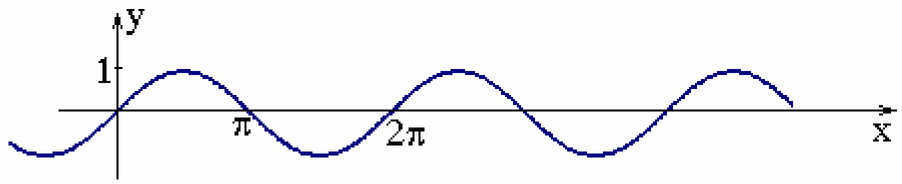
Standard:

A3: Interpretieren und Dokumentieren Interpretieren von Graphen	**B2: ANALYSIS** Mit verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen arbeiten können und ihre Eigenschaften kennen und nutzen.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS – Vorteil**

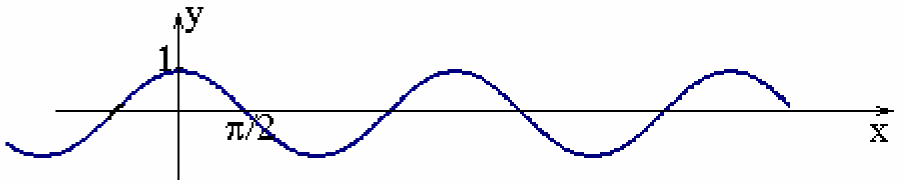
Lösungserwartung:

Hinweis: Die Lage der y-Achse kann auch um 2π oder 4π nach rechts verschoben sein. Auch Skalierungen im Gradmaß sind gestattet.

a) den Graphen der Funktion y = sin x darstellt:



b) den Graphen der Funktion y = cos x darstellt:

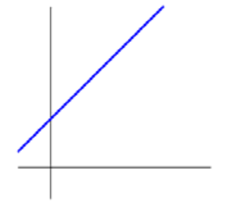
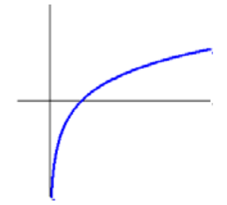


2. Unter den gezeichneten Kurven befinden sich die Graphen der Funktionen $y = e^x$, $y = e^{-x}$ und $y = \ln x$. Ordne diese richtig zu.

Standard:

A3: Interpretieren und Dokumentieren Interpretieren von Graphen	**B2: ANALYSIS** Mit verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen arbeiten können und ihre Eigenschaften kennen und nutzen.
L1: Geringe Komplexität Grundkompetenzen und einfache Grundbausteine	**CAS – Vorteil**

Lösungserwartung:

				
	$y = e^{-x}$		**$y = \ln x$**	**$y = e^x$**

3. Erkläre die drei Rechnungen, die der Computer automatisch durchgeführt hat, indem du die Zwischenschritte aufschreibst.

Standard:

A2: Operieren, Rechnen • Beherrschen numerischer Rechenverfahren (z.B. Rechnen mit Dezimalzahlen, Brüchen, Potenzen usw.) auch unter zweckmäßiger Nutzung elektronischer Hilfsmittel. • Erkennen von Termstrukturen	**B1: ALGEBRA** Die Begriffe Potenz, Wurzel und Logarithmus kennen und damit verständig umgehen können.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**

Lösungserwartung:

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{48} = 10 \cdot \sqrt{3}$$

$$\mathbf{\sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{3} = 10 \cdot \sqrt{3}}$$

$$\sqrt{45} - \sqrt{20} = \sqrt{5}$$

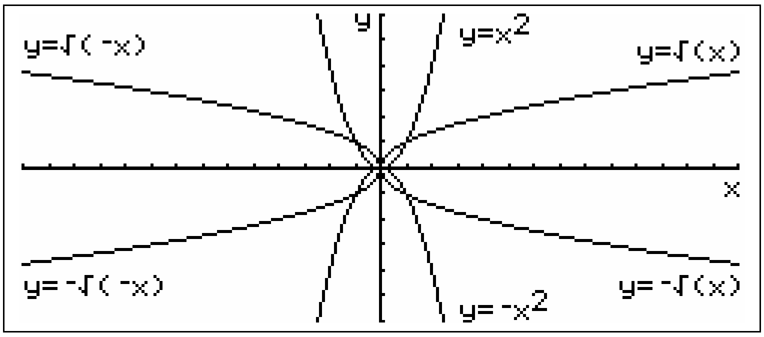
$$\mathbf{3 \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}}$$

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)} = \frac{2\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{9-5} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

4. Der folgende Graph ist mit dem Computer aus 6 verschiedenen Funktionen erstellt worden:

Lösungserwartung:



a) Gib die Funktionsgleichungen an und ordne jedem Teil des Graphen die entsprechende Funktion zu.

b) Warum kann dieses Bild nicht aus nur 4 Funktionsgraphen erzeugt werden?

Weil die linke und die rechte Parabel keine Funktionen darstellen.

5. In einer Kultur von ursprünglich 1000 Bakterien verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien pro Stunde.

Lösungserwartung:

d) Stelle die Entwicklung der Bakterienanzahl dar!

Standard:

A1: Modellbilden, Darstellen • Entscheiden für ein passendes mathematisches Modell • Entscheiden für eine Darstellungsform (z.B. Formel, Gleichung, Graph, Tabelle, rekursives Modell) und zwischen den Darstellungsformen wechseln.	**B2: ANALYSIS** • Mit verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen arbeiten können und ihre Eigenschaften kennen und nutzen. • Folgen als Funktionen in N verstehen und angemessen verwenden können.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**

$N(t) = 1000\cdot 2^t$ ***oder*** $N(t) = 1000\cdot e^{\ln 2\cdot t}$ ***oder***

$N(t) = 2\cdot N(t-1)$ **und** $N(0) = 1000$ ***oder***

Tabelle *oder* Graph (beschriftet mit N und t; Beginn bei (0/1000))

e) Um wie viel Prozent wächst die Bakterienzahl pro Stunde?

Standard:

A3: Interpretieren und Dokumentieren Interpretieren von Daten und Informationen	**B1: ALGEBRA** Algebraische Kompetenzen in anwendungsorientierten Aufgaben nutzen können.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**

100%

f) Schätze ab, wann die Bakterienzahl 7000 überschritten wird!

Standard:

A2: Operieren, Rechnen • Rechnen mit und Berechnen von Näherungswerten, Schätzen • Lösen mit Hilfe von Tabellen	**B1: ALGEBRA** Algebraische Kompetenzen in anwendungsorientierten Aufgaben nutzen können.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**

Nach ungefähr 2½ Stunden.
(Jede Antwort zwischen 2 und 3 Stunden gilt als richtig!)

6. Der Bruttopreis B einer Ware enthält 20% Mehrwertsteuer. Stelle eine Formel für den Nettopreis N dieser Ware auf!

Standard:

A1: Modellbilden, Darstellen Entscheiden für ein passendes mathematisches Modell	**B1: ALGEBRA** Algebraische Kompetenzen in anwendungsorientierten Aufgaben nutzen können.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**

Lösungserwartung:

Formel: $N = \frac{B}{1{,}2}$ *oder* $N = \frac{5B}{6}$ *oder* $N = B \cdot \frac{100}{120}$ *oder* $N = 0{,}8333 \cdot B$ usw.

7. Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. Kreuze an, welche der folgenden Vektoren zu $\vec{a}$ parallel, normal bzw. weder parallel noch normal sind!

Standard:

A1: Modellbilden, Darstellen Sachverhalte erfassen und mathematische Beziehungen darin erkennen A2: Operieren, Rechnen • Beherrschen von Rechenverfahren in den einzelnen Inhaltsbereichen (Algebra, Geometrie, Analysis, Stochastik) auch unter Nutzung der vorhandenen Technologie. • Graphisches Darstellen und Lösen	**B3: GEOMETRIE** Eigenschaften von Vektoren, Grundgesetze und Rechenregeln für Vektoroperationen kennen und anwenden können.
L1: Geringe Komplexität Grundkompetenzen und einfache Grundbausteine	**CAS - neutral**

Lösungserwartung:

	parallel zu $\vec{a}$	normal zu $\vec{a}$	weder parallel noch normal zu $\vec{a}$
$\vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix}$	☑	❑	❑
$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$	❑	☑	❑
$\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$	❑	❑	☑
$\vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$	❑	❑	☑

5. 7. SchülerInnenfragebogen für die 8. Klassen:

Austrian Center for Didactics of Computer Algebra **Projektgruppe Standards** **8. Klasse - Test 1**

SchülerInnenfragebogen

Mein persönliches Codewort:

1. Geschlecht: ❑ männlich ❑ weiblich

2. Meine Mathematiknote im letzten Schuljahr war:

❑ Sehr gut ❑ Gut ❑ Befriedigend ❑ Genügend ❑ Nicht genügend

3. Bitte schätze die Aufgaben ein, die du gerechnet hast

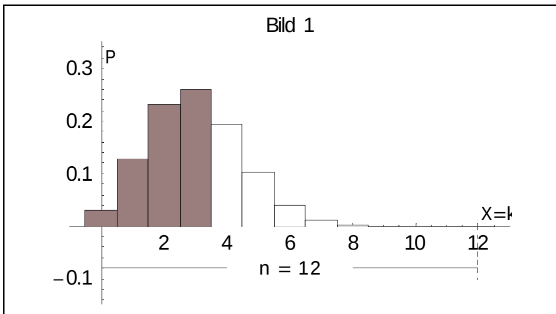
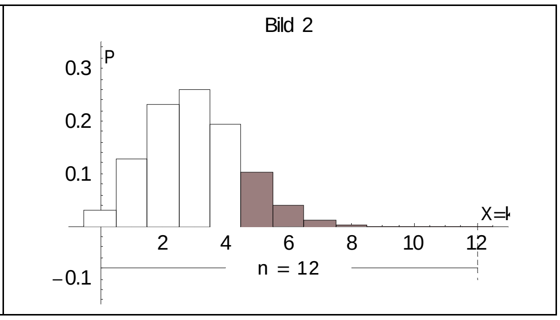
Aufgabe	leicht	mittel	schwer
1	❑	❑	❑
2	❑	❑	❑
3	❑	❑	❑
4	❑	❑	❑
5	❑	❑	❑
6	❑	❑	❑
7	❑	❑	❑
8	❑	❑	❑

Vielen Dank für deine Unterstützung und Mitarbeit!

5. 8. Fragestellungen für die 8. Klassen:

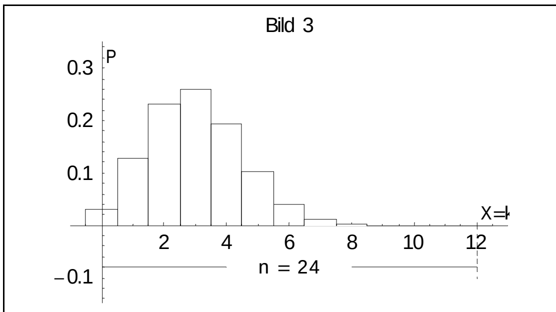
1. Ein Test besteht aus 12 Fragen mit jeweils 4 Antworten, von denen immer genau eine richtig ist. Die Antworten werden zufällig angekreuzt; X ist die Anzahl der richtigen Antworten. In den folgenden Grafiken ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

   a) Was wird in den einzelnen Bildern jeweils durch die dunkel markierte Fläche angezeigt? Gib die Antwort umgangssprachlich und in mathematischer Schreibweise!

umgangssprachlich:	umgangssprachlich:
mathematisch:	mathematisch:

   b) Der Test gilt als bestanden, wenn mindestens 4 der 12 Fragen richtig beantwortet sind. Kennzeichne die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses in untenstehender Grafik! Ist die Wahrscheinlichkeit, den Test durch zufälliges Ankreuzen zu bestehen, größer oder kleiner als 0,5?

	Antwort:

2. Die Funktion $s(t) = 5t^2$ beschreibt annähernd den Weg in Metern, den ein Körper im freien Fall in t Sekunden zurücklegt.

   a) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit in den ersten drei Sekunden?

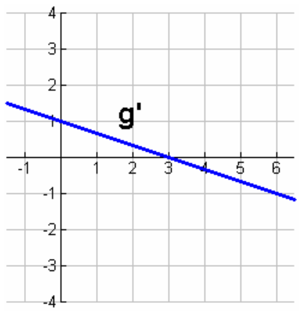
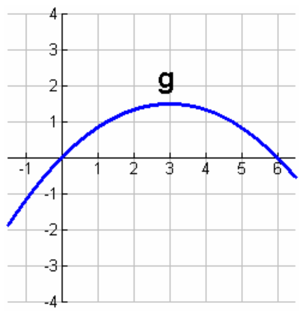
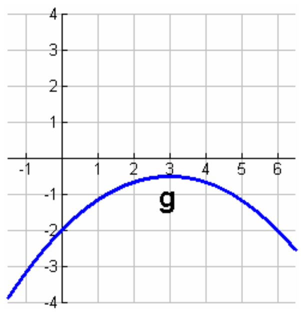
b) Wie groß ist die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 3 s?

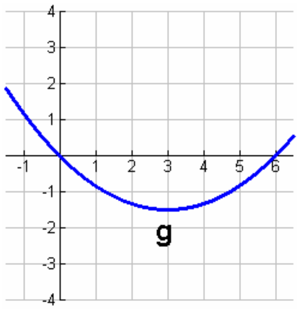
....

3. Stellen die angegebenen Gleichungen Kreise dar?
Kreuze an und gib deine Überlegungen an!

		Welche Überlegungen hast du angestellt?
$x^2 + y^2 = 25$	ja ❑ nein ❑	
$x^2 - y^2 = 25$	ja ❑ nein ❑	
$x^2 + y = 25$	ja ❑ nein ❑	
$4x^2 + 9y^2 = 36$	ja ❑ nein ❑	
$4x^2 + 4y^2 = 25$	ja ❑ nein ❑	

4. Von welchen der drei angegebenen Funktionen A, B, C kann g' die Ableitungsfunktion sein? Begründe deine Entscheidung!

	Begründung
 A ❑	
 B ❑	

 C ❑	

5. Der Bruttopreis B einer Ware enthält 20% Mehrwertsteuer. Stelle eine Formel für den Nettopreis N dieser Ware auf!

   Formel:

6. Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. Kreuze an, welche der folgenden Vektoren zu $\vec{a}$ parallel, normal bzw. weder parallel noch normal sind!

	parallel zu $\vec{a}$	normal zu $\vec{a}$	weder parallel noch normal zu $\vec{a}$
$\vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix}$	❑	❑	❑
$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$	❑	❑	❑
$\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$	❑	❑	❑
$\vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$	❑	❑	❑

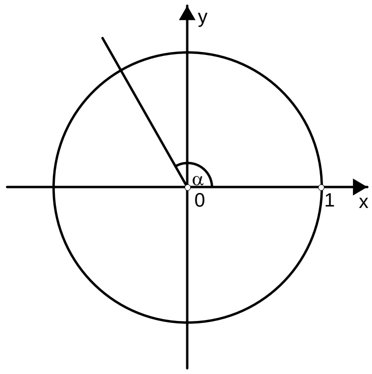
7. In einer Kultur von ursprünglich 1000 Bakterien verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien pro Stunde.

   g) Stelle die Entwicklung der Bakterienanzahl dar!

   h) Um wie viel Prozent wächst die Bakterienzahl pro Stunde?

   i) Schätze ab, wann die Bakterienzahl 7000 überschritten wird!

8. Zeichne sin α und cos α im Einheitskreis ein.



5. 9. Testauswertung für die 8. Klassen:

Austrian Center for Didactics of Computer Algebra **Projektgruppe Standards** **8. Klasse - Test 1**

Hinweise zur Auswertung: 8. Klasse - Test 1

1. Ein Test besteht aus 12 Fragen mit jeweils 4 Antworten, von denen immer genau eine richtig ist. Die Antworten werden zufällig angekreuzt; X ist die Anzahl der richtigen Antworten. In den folgenden Grafiken ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

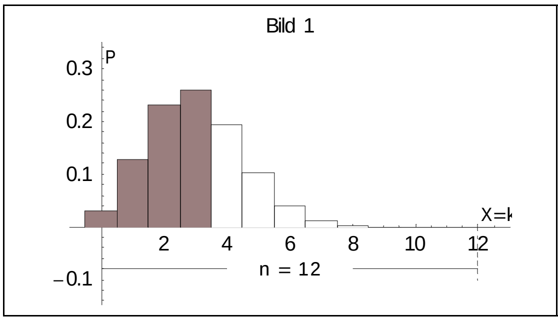
Lösungserwartung:

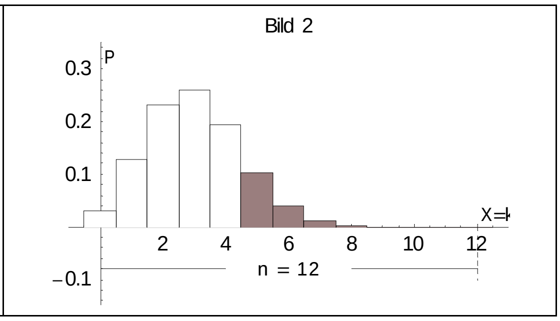
Hinweis: Eine Antwort ist als richtig zu werten, wenn beide unten fett gedruckten Begriffe im richtigen Zusammenhang vorkommen!

c) Was wird in den einzelnen Bildern jeweils durch die dunkel markierte Fläche angezeigt? Gib die Antwort umgangssprachlich und in mathematischer Schreibweise!

Standard:

A3: Interpretieren und Dokumentieren • Interpretieren von Graphen • Formulieren einer zum Problem passenden Antwort	**B4: STOCHASTIK** Diskrete und stetige Verteilungen (insbesondere Binomial- und Normalverteilung) unterscheiden und damit arbeiten können
L3: Höhere Komplexität Komplexe Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**





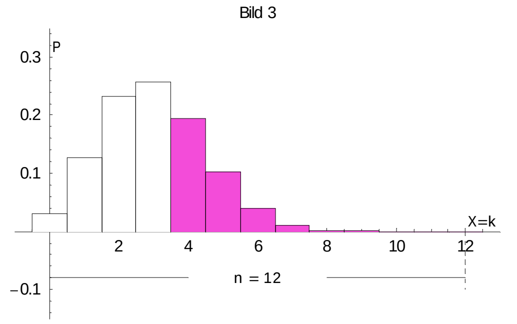
umgangssprachlich: Die dunkel markierte Fläche entspricht der **Wahrscheinlichkeit**, dass **höchstens drei** (null, eins, zwei, drei) Fragen richtig beantwortet wurden.	umgangssprachlich: Die dunkel markierte Fläche entspricht der **Wahrscheinlichkeit**, dass **mindestens fünf** (fünf, sechs, …, zwölf) Fragen richtig beantwortet wurden.

mathematisch: $P(X \leq 3)$ *oder* $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$	mathematisch: $P(X \geq 5)$ *oder* $P(X=5) + P(X=6) + \ldots + P(X=12)$

d) Der Test gilt als bestanden, wenn mindestens 4 der 12 Fragen richtig beantwortet sind. Kennzeichne die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses in untenstehender Grafik! Ist die Wahrscheinlichkeit, den Test durch zufälliges Ankreuzen zu bestehen, größer oder kleiner als 0,5?

Standard:

A3: Interpretieren und Dokumentieren Interpretieren von Daten und Informationen **A4: Argumentieren und Begründen** Begründen der Entscheidung für eine bestimmte Lösung	**B4: STOCHASTIK** Diskrete und stetige Verteilungen (insbesondere Binomial- und Normalverteilung) unterscheiden und damit arbeiten können
L3: Höhere Komplexität Komplexe Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**

	Antwort: Die Wahrscheinlichkeit, den Test durch zufälliges Ankreuzen zu bestehen, ist **kleiner als 0,5**.

2. Die Funktion $s(t) = 5t^2$ beschreibt annähernd den Weg in Metern, den ein Körper im freien Fall in t Sekunden zurücklegt.

Lösungserwartung:

a) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit in den ersten drei Sekunden?

Standard:

A1: Modellbilden, Darstellen Entscheiden für ein passendes mathematisches Modell **A2: Operieren, Rechnen** Beherrschen numerischer Rechenverfahren (z.B. Rechnen mit Dezimalzahlen, Brüchen, Potenzen usw.) auch unter zweckmäßiger Nutzung elektronischer Hilfsmittel **A3: Interpretieren und Dokumentieren** Formulieren einer zum Problem passenden Antwort	**B2: ANALYSIS** Den Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten verstehen und angemessen verwenden können.

L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS – neutral**

15 m/s

b) Wie groß ist die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 3 s?

Standard:

A1: Modellbilden, Darstellen Entscheiden für ein passendes mathematisches Modell **A2: Operieren, Rechnen** Beherrschen numerischer Rechenverfahren (z.B. Rechnen mit Dezimalzahlen, Brüchen, Potenzen usw.) auch unter zweckmäßiger Nutzung elektronischer Hilfsmittel **A3: Interpretieren und Dokumentieren** Formulieren einer zum Problem passenden Antwort	**B2: ANALYSIS** Den Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten verstehen und angemessen verwenden können.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**

30 m/s

3. Stellen die angegebenen Gleichungen Kreise dar?
Kreuze an und gib deine Überlegungen an!

Standard:

A3: Interpretieren und Dokumentieren Interpretieren von Größenbeziehungen und Strukturen in Tabellen und Formeln	**B3: GEOMETRIE** Darstellungsformen von Kegelschnitten kennen und anwenden können
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**

Lösungserwartung:

Hinweis: Die Überlegungen werden nicht in die Bewertung einbezogen.
Sie dienen nur der Einschätzung der Denkprozesse.

		Welche Überlegungen hast du angestellt?
$x^2 + y^2 = 25$	ja ☑ nein ❑	
$x^2 - y^2 = 25$	ja ❑ nein ☑	
$x^2 + y = 25$	ja ❑ nein ☑	
$4x^2 + 9y^2 = 36$	ja ❑ nein ☑	
$4x^2 + 4y^2 = 25$	ja ☑ nein ❑	

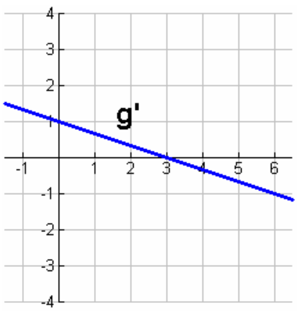
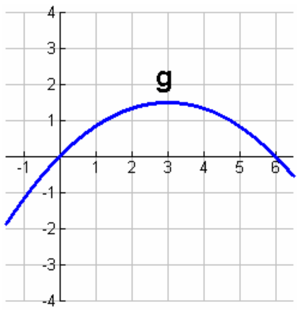
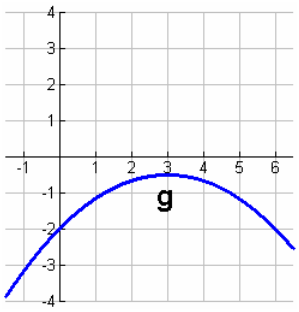
4. Von welchen der drei angegebenen Funktionen A, B, C kann g’ die Ableitungsfunktion sein? Begründe deine Entscheidung!

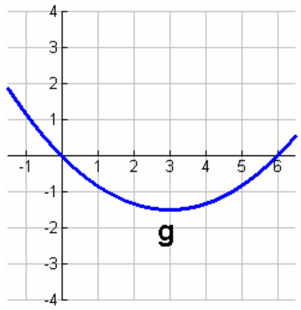
<u>Standard:</u>

A1: Modellbilden, Darstellen Sachverhalte erfassen und mathematische Beziehungen darin erkennen **A3: Interpretieren und Dokumentieren** Interpretieren von Graphen	**B2: ANALYSIS** Stammfunktionen als Ergebnis der Umkehrung des Differenzierungsprozesses verstehen. Stammfunktionen zu einfachen Funktionen ermitteln können.
L3: Höhere Komplexität Komplexe Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS – Vorteil**

<u>Lösungserwartung</u>:

Hinweis: Die Begründungen werden nicht in die Bewertung einbezogen. Sie dienen nur der Einschätzung der Denkprozesse.

	Begründung
 A ☑	
 B ☑	

 C ❑	

5. Der Bruttopreis B einer Ware enthält 20% Mehrwertsteuer. Stelle eine Formel für den Nettopreis N dieser Ware auf!

Standard:

A1: Modellbilden, Darstellen Entscheiden für ein passendes mathematisches Modell	**B1: ALGEBRA** Algebraische Kompetenzen in anwendungsorientierten Aufgaben nutzen können.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**

Lösungserwartung:

Formel: $N = \frac{B}{1{,}2}$ *oder* $N = \frac{5B}{6}$ *oder* $N = B \cdot \frac{100}{120}$ *oder* $N = 0{,}8333 \cdot B$ usw.

6. Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. Kreuze an, welche der folgenden Vektoren zu $\vec{a}$ parallel, normal bzw. weder parallel noch normal sind!

Standard:

A1: Modellbilden, Darstellen Sachverhalte erfassen und mathematische Beziehungen darin erkennen **A2: Operieren, Rechnen** • Beherrschen von Rechenverfahren in den einzelnen Inhaltsbereichen (Algebra, Geometrie, Analysis, Stochastik) auch unter Nutzung der vorhandenen Technologie. • Graphisches Darstellen und Lösen	**B3: GEOMETRIE** Eigenschaften von Vektoren, Grundgesetze und Rechenregeln für Vektoroperationen kennen und anwenden können.
L1: Geringe Komplexität Grundkompetenzen und einfache Grundbausteine	**CAS - neutral**

<u>Lösungserwartung</u>:

	parallel zu $\vec{a}$	normal zu $\vec{a}$	weder parallel noch normal zu $\vec{a}$
$\vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix}$	☑	❑	❑
$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$	❑	☑	❑
$\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$	❑	❑	☑
$\vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$	❑	❑	☑

7. In einer Kultur von ursprünglich 1000 Bakterien verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien pro Stunde.

<u>Lösungserwartung</u>:

j) Stelle die Entwicklung der Bakterienanzahl dar!

<u>Standard:</u>

A1: Modellbilden, Darstellen • Entscheiden für ein passendes mathematisches Modell • Entscheiden für eine Darstellungsform (z.B. Formel, Gleichung, Graph, Tabelle, rekursives Modell) und zwischen den Darstellungsformen wechseln.	**B2: ANALYSIS** • Mit verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen arbeiten können und ihre Eigenschaften kennen und nutzen. • Folgen als Funktionen in N verstehen und angemessen verwenden können.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**

$\mathbf{N(t) = 1000 \cdot 2^t}$ ***oder*** $\mathbf{N(t) = 1000 \cdot e^{\ln 2 \cdot t}}$ ***oder***

$\mathbf{N(t) = 2 \cdot N(t-1)}$ **und** $\mathbf{N(0) = 1000}$ ***oder***

Tabelle *oder* Graph (beschriftet mit N und t; Beginn bei (0/1000))

k) Um wie viel Prozent wächst die Bakterienzahl pro Stunde?

Standard:

A3: Interpretieren und Dokumentieren Interpretieren von Daten und Informationen	**B1: ALGEBRA** Algebraische Kompetenzen in anwendungsorientierten Aufgaben nutzen können.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**

100%

l) Schätze ab, wann die Bakterienzahl 7000 überschritten wird!

Standard:

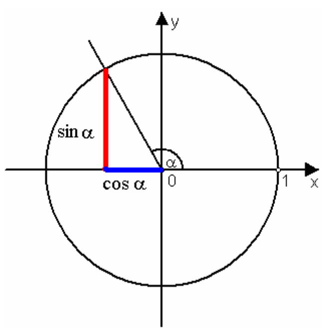
A2: Operieren, Rechnen • Rechnen mit und Berechnen von Näherungswerten, Schätzen • Lösen mit Hilfe von Tabellen	**B1: ALGEBRA** Algebraische Kompetenzen in anwendungsorientierten Aufgaben nutzen können.
L2: Mittlere Komplexität Einfache Verknüpfungen von Grundkompetenzen	**CAS - neutral**

Nach ungefähr 2½ Stunden.
(Jede Antwort zwischen 2 und 3 Stunden gilt als richtig!)

8. Zeichne sin α und cos α im Einheitskreis ein.

Standard:

A2: Operieren, Rechnen Graphisches Darstellen und Lösen	**B3: GEOMETRIE** Trigonometrische Funktionen sin α, cos α und tan α definieren und angemessen verwenden können. Beziehungen zwischen Winkelfunktionen kennen.
L1: Geringe Komplexität Grundkompetenzen und einfache Grundbausteine	**CAS - neutral**



6. Testergebnisse:

SCHULE	TESTAUSWERTUNG 6. KLASSE																
Schule / Beispiel	schätz s1	schätz s2	schätz s3	schätz s4	schätz s5	schätz s6	schätz s7	Schul typ	An zahl	Technologie	schätz l1	schätz l2	schätz l3	schätz l4	schätz l5	schätz l6	schätz l7
SCHULE 1	1,364	2,000	2,136	2,045	1,636	2,955	2,810	3	3	1	1	2	1	1	1	3	1
SCHULE 2	1,579	1,789	1,789	1,474	1,263	2,684	2,526	2	4	2	2	1	1	1	1	3	3
SCHULE 3	1,609	1,391	1,304	2,000	1,130	2,870	2,696	1	3	2	1	1	1	1	1	3	2
SCHULE 4	1,500	1,450	1,600	1,200	1,100	2,600	2,222	2	4	2	1	1	1	1	1	2	2
SCHULE 5	2,182	2,182	1,909	2,091	1,545	2,727	2,636	2	4	2	1	1	1	1	1	1	1
SCHULE 6	1,435	1,304	1,348	1,478	1,227	2,304	2,391	1	3	1	1	2	2	1	1	3	2
SCHULE 7	2,556	2,105	1,947	2,389	1,316	2,895	2,526	1	3	3	2	2	1	1	1	3	1
SCHULE 8	1,778	1,481	1,704	2,192	1,259	2,556	2,75	1	3	1	3	2	1	2	1	1	3
SCHULE 9	1,300	1,400	1,524	1,500	1,150	2,500	2,350	2	3	2	2	2	1	1	2	3	3
SCHULE 10	1,708	1,250	2,208	1,625	1,250	1,875	1,391	1	3	3	2	1	1	1	1	2	2
SCHULE 11	1,875	1,667	1,778	1,750	1,000	2,125	2,250	2	4	2	1	1	1	2	1	3	3
SCHULE 12	1,778	1,765	1,889	2,000	1,389	2,778	3,000	2	4	1	2	1	1	1	1	2	2
SCHULE 13	2,091	1,810	1,826	1,435	1,391	2,826	3,000	1/2	3	2	2	2	1	1	2	3	3
SCHULE 14	1,529	1,882	1,889	1,632	1,421	2,765	2,438	1/2	3	2	1	3	1	1	1	3	3
SCHULE 15	1,529	1,625	1,688	1,647	1,353	2,647	3,000	1/2	3	2	2	2	2	1	1	3	2
SCHULE 16	1,750	1,828	2,000	1,367	1,333	3,000	2,923	1	3	2	1	1	1	1	1	1	2
SCHULE 17	1,867	1,813	1,750	1,313	1,438	2,786	1,533	1	3	2	3	2	2	1	2	2	1
SCHULE 18	2,056	1,684	2,000	1,684	1,211	2,842	2,895	1	3	1	1	2	1	1	2	2	2
SCHULE 19	1,609	1,696	1,826	1,652	1,348	2,783	2,609	2	4	2	3	2	3	1	1	3	2
Teilnehmer	19																
Mittelwert	1,742	1,691	1,796	1,709	1,303	2,659	2,523										

SCHULE	**TESTAUSWERTUNG 6. KLASSE**																																	
	1	2								3				4				5							6			7						
Schule / Beispiel		a1	a2	b1	b2	c1	c2	d1	d2	a	b	c1	c2	a	b	c	d	a	b	c	d	e	f	g	a	b	c	a	b1	b2	b3	c1	c2	c3
SCHULE 1	0	55	55	0	0	45	41	0	0	91	64	41	27	100	50	68	82	100	95	82	73	86	86	77	0	0	4,5	18	9,1	14	32	32	36	23
SCHULE 2	5,3	63	63	26	26	63	58	32	32	68	89	63	11	100	84	53	74	95	79	95	79	95	95	74	47	42	32	5,3	5,3	5,3	5,3	0	0	0
SCHULE 3	22	78	78	13	13	78	83	13	13	100	96	48	4,3	78	70	61	35	91	91	96	96	96	96	83	35	39	17	4,3	0	0	0	0	0	0
SCHULE 4	20	85	90	55	65	80	85	60	65	95	95	70	30	100	95	85	100	100	95	100	100	100	90	90	60	55	20	0	0	0	0	5	5	0
SCHULE 5	31	77	77	15	7,7	69	69	15	15	62	69	46	15	92	77	62	77	92	77	92	85	92	85	77	23	7,7	7,7	0	7,7	7,7	7,7	7,7	0	0
SCHULE 6	4,3	87	87	52	57	87	87	52	57	87	91	87	39	100	83	74	96	87	70	100	96	100	100	91	96	83	61	0	30	30	30	8,7	13	8,7
SCHULE 7	0	58	53	16	21	47	47	21	5,3	95	63	37	5,3	84	63	42	53	95	63	89	84	100	84	53	32	16	26	0	0	0	0	5,3	11	0
SCHULE 8	21	82	89	43	46	75	75	36	39	96	89	50	3,6	54	64	79	64	96	82	79	57	100	71	68	57	71	61	14	3,6	0	0	0	0	0
SCHULE 9	19	81	95	38	38	86	90	43	43	100	76	48	24	100	90	76	67	100	86	95	86	100	95	90	52	52	29	9,5	0	0	0	4,8	4,8	4,8
SCHULE 10	67	96	96	100	100	88	88	100	100	100	92	75	21	100	100	75	92	92	92	100	100	100	100	100	79	92	88	38	17	25	17	92	96	92
SCHULE 11	0	89	89	22	44	89	89	44	44	89	89	56	0	78	89	67	89	100	100	100	100	100	100	100	67	67	56	0	0	0	0	0	0	0
SCHULE 12	0	72	72	17	22	67	67	11	5,6	89	61	61	17	83	56	72	44	89	83	94	72	100	94	72	61	39	22	0	11	11	17	0	0	0
SCHULE 13	39	74	74	26	35	61	48	43	39	78	83	57	4,3	96	87	91	78	91	91	87	83	100	91	83	83	83	13	0	0	0	0	0	0	0
SCHULE 14	0	55	50	25	20	55	50	15	20	85	70	20	20	95	65	65	70	90	70	70	55	95	85	70	15	20	10	0	0	0	0	15	5	5
SCHULE 15	12	59	59	12	18	53	53	12	12	100	82	41	18	88	82	65	94	100	82	88	65	94	94	71	59	47	41	0	0	0	0	0	0	0
SCHULE 16	3,3	80	80	6,7	6,7	77	70	6,7	6,7	87	77	50	6,7	100	100	93	83	97	53	100	87	100	93	60	10	13	17	0	0	0	0	0	0	0
SCHULE 17	5,6	83	83	22	28	78	78	28	28	61	78	56	5,6	100	94	89	78	100	94	100	89	89	94	83	44	44	56	89	0	0	0	72	67	67
SCHULE 18	5,3	79	79	26	32	79	79	26	26	89	74	32	21	89	84	79	74	95	84	89	74	100	84	79	68	47	42	5,3	0	0	0	11	0	0
SCHULE 19	13	78	78	35	35	78	78	39	35	87	78	35	30	100	83	65	70	100	87	100	87	91	96	78	39	39	39	22	8,7	13	13	0	0	0
durchschnittlicher Prozentsatz	14	75	76	29	32	71	70	31	31	87	80	51	16	91	80	72	75	95	83	92	82	97	91	79	49	45	34	11	4,9	5,6	6,4	13	12	11
Teilnehmer	19																																	
richtige Antworten	34																																	

SCHULE	**TESTAUSWERTUNG 7. KLASSE**																
Schule / Beispiel	schätz s1	schätz s2	schätz s3	schätz s4	schätz s5	schätz s6	schätz s7	Schul typ	An zahl	Technologie	schätz l1	schätz l2	schätz l3	schätz l4	schätz l5	schätz l6	schätz l7
SCHULE 1	2,045	2,13	2,727	2,455	1,591	1,826	1,261	2	3	2	2	3	2	2	2	2	1
SCHULE 2	1,357	1,786	1,846	3,000	1,929	1,643	1,571	1	3	3	2	1	2	3	2	1	1
SCHULE 3	2,167	2,000	2,167	2,750	1,333	1,417	1,417	2	4	2	2	2	2	3	1	2	1
SCHULE 4	1,778	2,000	2,500	2,556	2,056	1,667	1,389	1	3	2	2	2	2	3	2	1	1
SCHULE 5	1,429	2,286	2,167	2,571	1,286	1,286	1,000	2	4	2	2	2	3	3	1	1	1
SCHULE 6	1,700	2,100	2,300	3,000	1,400	1,100	1,500	2	4	2	2	2	2	3	2	1	1
SCHULE 7	1,188	1,063	2,000	2,375	1,688	1,688	1,438	2	3	2	1	1	2	3	2	1	1
SCHULE 8	2,000	2,067	2,533	2,875	1,750	2,188	1,467	1	3	1	3	1	2	3	2	2	1
SCHULE 9	2,667	2,333	2,167	2,909	1,727	1,750	1,250	1	3	2	1	1	1	2	1	1	1
SCHULE 10	1,950	2,316	1,421	2,900	1,450	1,737	1,600	2	4	2	2	1	2	2	2	2	1
SCHULE 11	2,077	2,071	1,769	2,538	1,357	1,214	1,538	2	4	1/2	2	1	2	2	1	2	1
SCHULE 12	2,583	3,000	2,083	2,917	1,250	1,636	1,545	1	3	1	2	3	2	3	1	1	1
SCHULE 13	1,438	2,353	1,941	2,941	1,824	1,941	1,588	1	3	2	1	1	2	2	2	1	1
SCHULE 14	2,778	1,667	2,556	2,889	1,222	1,500	1,778										
SCHULE 15	2,238	2,190	2,263	2,850	2,000	1,900	1,571	3	3	1	1	2	2	3	2	1	1
SCHULE 16	1,714	2,857	2,000	2,571	1,429	1,714	1,571	2	4	2	2	1	2	2	1	1	2
SCHULE 17	1,571	1,857	2,071	2,857	1,643	1,714	1,500	1	3	2	1	2	3	3	2	1	1
SCHULE 18	2,364	2,273	2,300	2,700	1,167	1,727	1,750	1	3	2	2	2	2	3	1	2	1
SCHULE 19	1,750	2,000	2,000	3,000	1,625	2,143	1,875	1	3	2	1	1	2	3	2	2	1
SCHULE 20	2,636	2,750	2,250	2,833	2,182	2,455	1,750	1	3	2	2	2	1	3	2	3	1
SCHULE 21	2,455	2,318	2,286	2,762	1,773	2,091	1,227	2	4	2	1	2	3	2	1	2	1
Teilnehmer	21																
Mittelwert	1,897	2,061	2,03	2,657	1,528	1,643	1,444										

SCHULE	TESTAUSWERTUNG 7. KLASSE																												
	1								2			3			4							5			6	7			
Schule / Beispiel	a1	a2	a3	a4	b1	b2	b3	b4	a	b	c	a	b	c	a1	a2	a3	a4	a5	a6	b	a	b	c	.	a	b	c	d
SCHULE 1	30	13	8,7	8,7	30	39	4,3	8,7	57	4,3	74	17	17	0	52	35	30	13	4,3	0	8,7	35	74	61	22	78	83	78	91
SCHULE 2	89	89	22	28	94	94	22	28	89	100	89	83	89	5,6	44	44	39	28	39	28	33	56	100	89	72	100	78	28	100
SCHULE 3	94	38	0	13	94	25	0	13	75	6,3	100	69	75	0	56	44	13	13	6,3	6,3	13	75	88	75	44	100	94	94	100
SCHULE 4	77	55	0	27	59	59	4,5	27	73	32	77	82	82	14	59	45	23	23	0	0	27	50	91	86	55	100	100	100	100
SCHULE 5	100	73	82	27	100	82	55	27	91	64	82	55	45	18	45	27	18	9,1	0	0	18	36	100	64	45	91	91	73	91
SCHULE 6	93	36	29	36	79	43	21	36	100	7,1	100	64	64	14	50	43	29	14	0	0	0	57	93	79	7,1	86	57	64	79
SCHULE 7	90	80	35	30	85	85	35	30	90	80	90	95	95	15	60	55	30	30	30	30	15	85	95	60	5	100	80	75	90
SCHULE 8	70	50	0	35	65	30	0	30	50	25	90	10	10	0	20	10	0	0	0	0	5	55	70	80	5	85	95	95	80
SCHULE 9	25	13	0	6,3	19	0	0	6,3	44	13	56	25	25	0	6,3	0	0	0	0	0	19	44	75	94	13	100	81	81	75
SCHULE 10	84	40	12	8	76	40	16	8	60	12	72	100	100	24	56	28	24	8	8	8	4	60	72	72	24	96	52	44	72
SCHULE 11	50	33	17	22	56	39	11	17	67	17	72	72	78	5,6	72	72	50	33	17	17	11	61	56	78	22	89	89	67	72
SCHULE 12	13	19	0	19	13	19	0	13	19	6,3	31	38	50	31	63	38	0	0	0	0	0	94	75	88	31	100	31	69	56
SCHULE 13	83	71	13	21	75	75	13	17	50	38	63	79	67	50	21	17	4,2	4,2	4,2	4,2	0	71	79	75	13	96	79	58	83
SCHULE 14	15	7,7	0	0	7,7	23	0	0	85	62	85	38	38	0	7,7	7,7	7,7	0	0	0	0	7,7	77	77	7,7	85	69	62	62
SCHULE 15	44	40	8	8	36	40	4	8	52	12	56	12	12	0	24	20	4	0	0	0	0	48	64	36	4	104	96	92	88
SCHULE 16	83	42	17	17	92	58	8,3	17	83	33	83	42	50	33	58	50	58	25	17	25	33	58	67	75	17	67	50	58	58
SCHULE 17	72	44	11	5,6	72	33	11	5,6	89	67	72	67	67	11	61	61	22	5,6	0	11	0	44	83	33	17	89	94	61	83
SCHULE 18	47	21	11	11	32	32	11	5,3	58	47	63	37	37	0	0	0	0	0	0	0	5,3	21	84	74	16	68	53	84	63
SCHULE 19	0	33	25	17	50	58	33	17	58	83	58	67	75	17	25	25	8,3	8,3	8,3	8,3	0	33	58	67	8,3	92	83	83	83
SCHULE 20	31	6,3	0	0	38	0	0	0	25	19	56	38	38	0	6,3	0	6,3	0	0	0	19	19	38	31	6,3	94	94	75	88
SCHULE 21	46	36	0	3,6	46	36	0	3,6	57	46	57	36	25	3,6	18	11	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	43	64	57	0	93	93	93	82
durchschnittlicher Prozentsatz	59	40	14	16	58	43	12	15	65	37	73	54	54	12	39	30	18	10	6,5	6,7	10	50	76	69	21	91	78	73	81
Teilnehmer	21																												
richtige Antworten	29																												

SCHULE	TESTAUSWERTUNG 8. KLASSE																		
Schule / Beispiel	schätz s1	schätz s2	schätz s3	schätz s4	schätz s5	schätz s6	schätz s7	schätz s8	Schul typ	An zahl	Technologie	schätz l1	schätz l2	schätz l3	schätz l4	schätz l5	schätz l6	schätz l7	schätz l8
SCHULE 1	2,222	1,348	2,083	2,042	1,333	1,333	1,750	2,833	1	3	1	2	2	2	2	2	2	2	2
SCHULE 2	2,471	1,647	2,235	2,235	1,765	1,235	1,941	2,429	1	3	2	2	1	1	2	3	2	3	1
SCHULE 3	2,889	1,889	1,889	2,667	2,111	1,889	1,667	2,333	1	4	2	3	1	1	2	2	2	3	1
SCHULE 4	2,769	2,231	2,154	1,462	1,462	1,231	1,769	2,824	1	3	2	3	1	2	2	2	1	2	3
SCHULE 5	2,867	2,267	2,867	1,933	2,067	2,067	1,733	1,579	2	4	2	2	2	1	2	1	1	2	1
SCHULE 6	2,929	2,071	2,714	2,000	1,643	2,286	1,643	2,056	1	3	2	2	1	1	2	1	1	2	1
SCHULE 7	2,720	2,120	2,680	2,560	2,160	1,560	1,960	2,593	3	3	1	2	2	1	2	1	1	2	1
SCHULE 8	2,875	2,000	1,625	2,313	1,929	1,533	1,563	2,350	2	4	2	2	3	1	1	3	1	2	1
SCHULE 9	2,500	2,333	2,857	2,067	1,929	1,438	1,588	2,125	1	3	2	2	2	2	2	2	1	2	1
SCHULE 10	2,154	2,385	1,692	2,154	1,923	1,692	1,923	2,188	2	4	2	2	1	1	2	3	1	2	1
SCHULE 11	2,500	1,882	2,375	2,188	1,529	1,647	1,294	2,450	1	3	2	2	1	2	2	1	2	1	2
SCHULE 12	2,636	1,846	1,786	2,500	1,500	1,214	1,571	2,375	1/2	3/4	2	2	2	1	2	2	1	2	1
Teilnehmer	12																		
Mittelwert	2,442	1,889	2,073	2,006	1,668	1,483	1,554	2,108											

SCHULE	**TESTAUSWERTUNG 8. KLASSE**																									
	1						2		3					4			5	6				7			8	
Schule / Beispiel	a11	a12	a21	a22	b1	b2	a	b	a	b	c	d	e	a	b	c	.	a	b	c	d	a	b	c	a	b
SCHULE 1	13	4,2	13	4,2	17	29	21	50	96	75	92	75	79	71	71	58	79	92	92	83	96	71	88	96	17	13
SCHULE 2	24	14	38	19	24	48	0	38	81	57	71	38	57	52	4,8	38	19	100	100	95	86	14	67	52	19	19
SCHULE 3	0	0	0	0	0	54	7,7	23	77	62	100	62	54	46	54	46	31	69	54	54	77	46	85	69	15	15
SCHULE 4	5,9	0	0	0	12	65	0	0	59	18	53	5,9	53	47	53	88	12	88	76	76	76	47	76	59	0	0
SCHULE 5	0	0	0	0	5,3	26	0	11	68	63	68	26	42	58	53	74	0	89	58	53	68	16	84	58	74	74
SCHULE 6	17	0	11	0	17	39	33	17	89	61	56	11	67	67	56	83	44	67	50	44	50	56	94	83	22	17
SCHULE 7	3,4	0	3,4	0	14	38	17	6,9	72	48	62	21	45	48	34	66	10	90	93	86	72	24	62	48	14	14
SCHULE 8	0	0	0	0	15	40	25	5	90	75	100	70	85	45	30	35	10	95	90	90	80	65	65	55	60	60
SCHULE 9	14	0	18	0	23	45	32	9,1	64	45	59	18	41	64	36	77	14	100	100	100	95	32	73	73	41	32
SCHULE 10	25	38	13	25	25	25	13	19	81	69	94	25	50	75	25	75	13	88	75	63	56	19	81	75	6,3	6,3
SCHULE 11	9,5	9,5	14	9,5	9,5	38	14	19	71	52	76	14	33	52	24	43	4,8	86	90	52	81	29	71	86	4,8	4,8
SCHULE 12	16	21	21	21	37	63	11	5,3	100	84	100	53	74	26	16	26	16	100	100	100	95	42	74	47	0	0
durchschnittlicher Prozentsatz	11	7,2	11	6,6	16	43	14	17	79	59	78	35	57	54	38	59	21	89	82	75	78	38	77	67	23	21
Teilnehmer	12																									
richtige Antworten	26																									

GEGENÜBERSTELLUNG JENER BEISPIELE, DIE SOWOHL IN DER 6., 7. UND 8. KLASSE GETESTET WURDEN														
Schulen 6. Klasse	Schulen 7. Klasse	Schulen 8. Klasse	Prozentbeispiel			Vektorbeispiel								
			6. Klasse	7. Klasse	8. Klasse	7. Klasse				8. Klasse				
			Beispiel 1	Beispiel 6	Beispiel 5	Beispiel 7				Beispiel 6				
						a	b	c	d	a	b	c	d
SCHULE 1	SCHULE 1	SCHULE 1	0,000	21,739	79,167	78,261	82,609	78,261	91,304	91,667	91,667	83,333	95,833
SCHULE 2	SCHULE 2	SCHULE 2	5,263	72,222	19,048	100,000	77,778	27,778	100,000	100,000	100,000	95,238	85,714
SCHULE 3	SCHULE 3	SCHULE 3	21,739	43,750	30,769	100,000	93,750	93,750	100,000	69,231	53,846	53,846	76,923
SCHULE 4	SCHULE 4	SCHULE 4	20,000	54,545	11,765	100,000	100,000	100,000	100,000	88,235	76,471	76,471	76,471
SCHULE 5	SCHULE 5	SCHULE 5	30,769	45,455	0,000	90,909	90,909	72,727	90,909	89,474	57,895	52,632	68,421
SCHULE 6	SCHULE 6	SCHULE 6	4,348	7,143	44,444	85,714	57,143	64,286	78,571	66,667	50,000	44,444	50,000
SCHULE 7	SCHULE 7	SCHULE 7	0,000	5,000	10,345	100,000	80,000	75,000	90,000	89,655	93,103	86,207	72,414
SCHULE 8	SCHULE 8	SCHULE 8	21,429	5,000	10,000	85,000	95,000	95,000	80,000	95,000	90,000	90,000	80,000
SCHULE 9	SCHULE 9	SCHULE 9	19,048	12,500	13,636	100,000	81,250	81,250	75,000	100,000	100,000	100,000	95,455
SCHULE 10	SCHULE 10	SCHULE 10	66,667	24,000	12,500	96,000	52,000	44,000	72,000	87,500	75,000	62,500	56,250
SCHULE 11	SCHULE 11	SCHULE 11	0,000	22,222	4,762	88,889	88,889	66,667	72,222	85,714	90,476	52,381	80,952
SCHULE 12	SCHULE 12	SCHULE 12	0,000	31,250	15,789	100,000	31,250	68,750	56,250	100,000	100,000	100,000	94,737
SCHULE 13	SCHULE 13		39,130	12,500		95,833	79,167	58,333	83,333				
SCHULE 14	SCHULE 14		0,000	7,692		84,615	69,231	61,538	61,538				
SCHULE 15	SCHULE 15		11,765	4,000		104,000	96,000	92,000	88,000				
SCHULE 16	SCHULE 16		3,333	16,667		66,667	50,000	58,333	58,333				
SCHULE 17	SCHULE 17		5,556	16,667		88,889	94,444	61,111	83,333				
SCHULE 18	SCHULE 18		5,263	15,789		68,421	52,632	84,211	63,158				
SCHULE 19	SCHULE 19		13,043	8,333		91,667	83,333	83,333	83,333				
	SCHULE 20			6,250		93,750	93,750	75,000	87,500				
	SCHULE 21			0,000		92,857	92,857	92,857	82,143				
Teilnehmer pro Jahrgang			erreichter Prozentsatz pro Beispiel in einem Jahrgang										
19	21	12	12,731	19,571	21,019	87,296	74,256	69,330	76,458	88,595	81,538	74,754	77,764

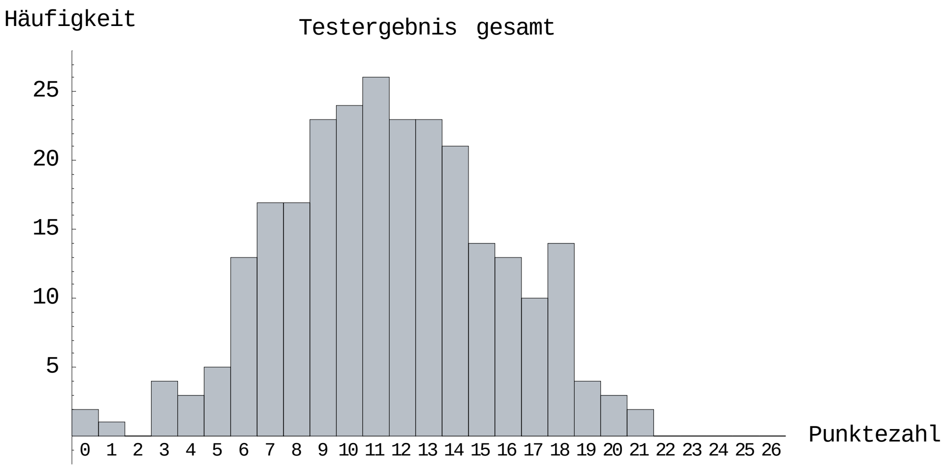
7. Statistische Auswertungen:

7. 1. Testauswertungen für die 8. Klassen:

In dieser Testserie geht es in erster Linie um die Evaluierung der Testaufgaben selbst. Aus diesem Grund werden die einzelnen Teilaufgaben (Items) innerhalb eines Beispiels nicht gewichtet, sondern einzeln ausgewertet und so in das Endergebnis mit aufgenommen.
Bei inhaltlicher Deutung der Ergebnisse führt das naturgemäß zu einer gewissen Verzerrung; so hat etwa das Beispiel „Binomialverteilung" mit 6 Items ein deutlich größeres Gewicht als das Beispiel „Einheitskreis" mit zwei Teilaufgaben.

➢ Ein erster Überblick: Die Punkteverteilung

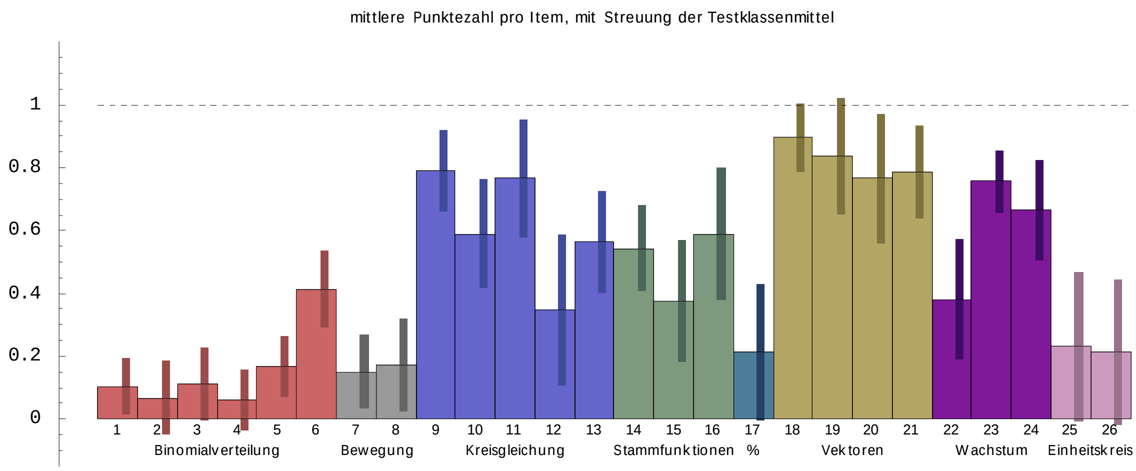
Die 26 Items des Tests ergeben ein erreichbares Punktemaximum von 26. Aufgetragen sind absolute Häufigkeiten.



Man erkennt, dass das Ergebnis nicht mit üblichen Maßstäben zu beurteilen ist: 104 der insgesamt 262 Schülerinnen und Schüler haben mindestens 13 (50%) der 26 Items richtig beantwortet.

➢ Die Punktmittel der einzelnen Items

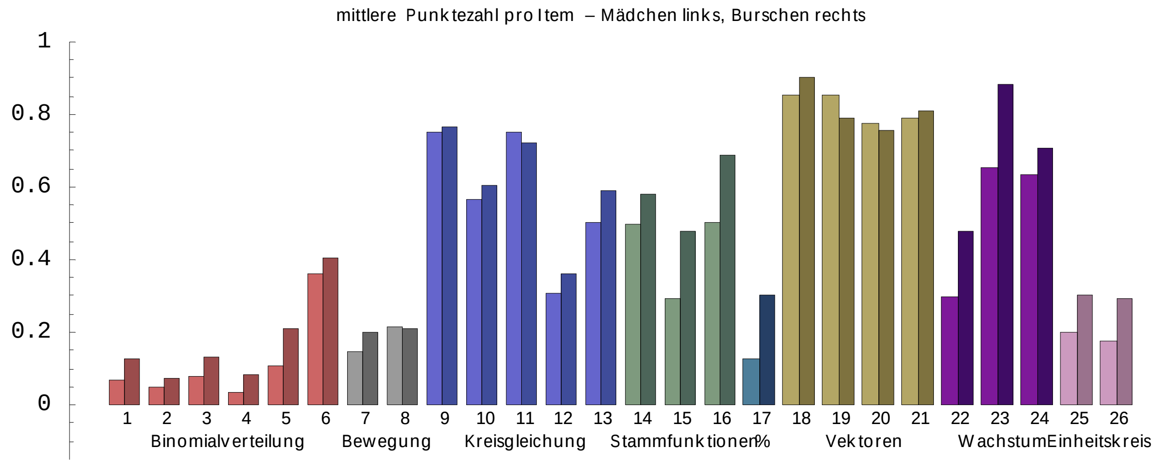
Pro Item wird bei richtiger Antwort ein Punkt vergeben; es gibt nur richtige bzw. falsche Antworten, also 1 oder 0. In der Grafik sind die mittleren Punktezahlen pro Item angegeben, und damit gleichzeitig der relative Anteil der richtigen Antworten.



Die Streuung wäre aufgrund der 0-1-Bewertung der Teilaufgaben nicht sehr informativ. Die Grafik zeigt daher, wie stark die Mittelwerte der einzelnen Testklassen um den Gesamtmittelwert streuen. Die größeren Streuungen beim Beispiel „Einheitskreis“ zeigen, dass das Ergebnis hier stärker von der Testklasse abhängt als etwa beim Beispiel „Vektoren“.

➢ Geschlechtsspezifische Unterschiede?

Die Grafik zeigt die mittlere Punktezahl pro Item, getrennt nach Schülerinnen (linker Balken) und Schülern.

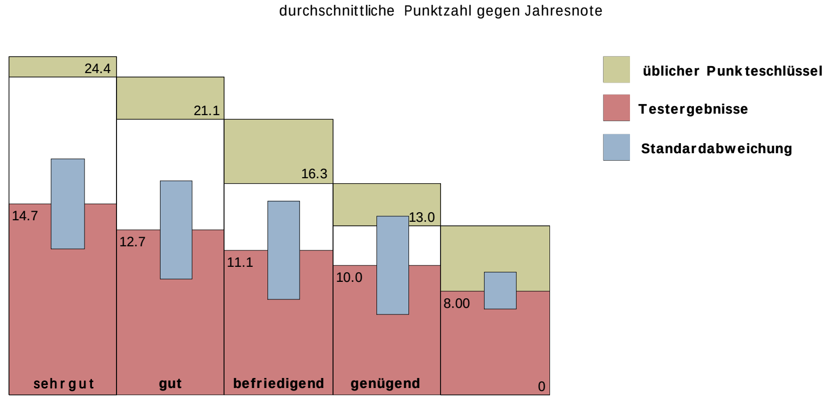


Insgesamt liegt die mittlere Punktezahl pro Schülerin mit 10,6 etwas unter dem entsprechenden Wert von 12,5 bei den Schülern. Bei einem Gesamtmittelwert von 11,5 Punkte pro Test und einer Streuung von etwa 4 ist dieses Ergebnis statistisch nicht signifikant.
Interessanter ist die Tatsache, dass bei bestimmten Beispielen bzw. Items deutlich größere Abweichungen auftreten. Gibt es Aufgaben, die Schülern leichter fallen als ihren weiblichen Kolleginnen? Liegt das an der Fragestellung?

➢ Zusammenhang Testergebnis – Jahresnote?

Wie weit stimmen die beim Test erbrachten Leistungen mit den jeweiligen Schulleistungen im Fach Mathematik überein? Wir haben zum Vergleich die jeweils letzte Jahresnote aus Mathematik herangezogen.

a) Durchschnittliche Punktezahl der einzelnen Jahresnotenklassen, mit Standardabweichung



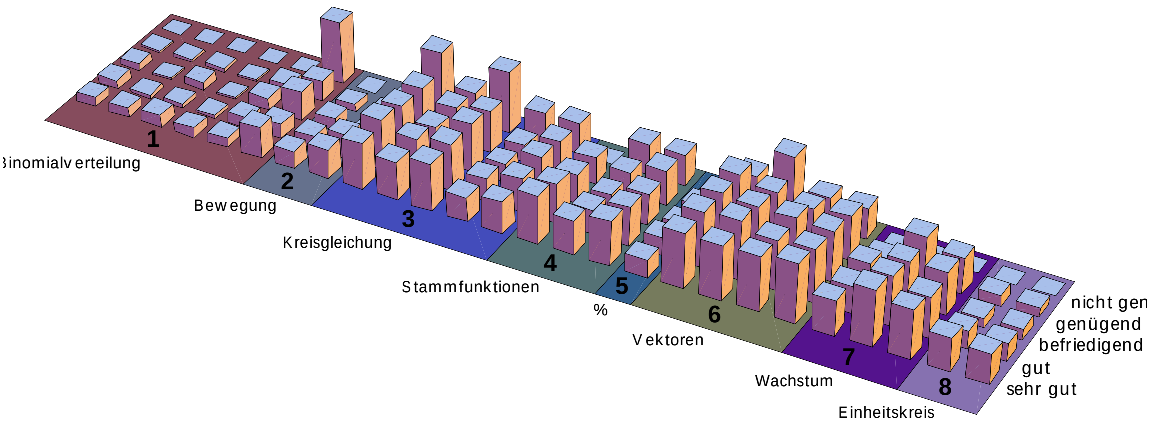
Die Schülerinnen und Schüler werden entsprechend ihrer Jahresnoten in 5 Klassen geteilt und die Testergebnisse für jede dieser Klassen getrennt aufgelistet. So haben z.B alle „Sehr gut" – Schülerinnen und Schüler eine mittlere Punktezahl von 14,7 erreicht. Bei einem üblichen Punkteschlüssel wäre die „Sehr gut" – Grenze bei etwa 24,4 Punkten von 26 maximal erreichbaren. Wie bereits oben erwähnt sollte diese Differenz nicht überbewertet werden. Der Zusammenhang zwischen Jahresnote und Testergebnis ist erwartungsgemäß; auffallend hingegen die relativ große Streuung.

b) Nach Items aufgeschlüsselt ...

Im Rahmen unserer Testanalyse ist wieder die Untersuchung nach einzelnen Items interessant: Welche Items zeigen eine klare Korrelation zwischen Jahresnote und Testergebnis, und bei welchen ist dies nicht so stark ausgeprägt?

In der „Skyline – Grafik" stehen die „Sehr Gut" -Säulen in der ersten Reihe; eine deutliche Abnahme der Säulenhöhe bis zur letzten Reihe (Jahresnote Nicht Genügend) zeigt eine starke Korrelation an. [Die Türme in der letzten Reihe sind ein rein statistisches Phänomen: Die Klasse der Repetenten ist sehr klein, und da haben einige wenige Schüler gewisse Items (zufällig?) richtig beantwortet.]

mittlere Punktezahl pro Item, nach Jahresnote gesamt



Hier die Ergebnisse in Tabellenform: die mittlere Punktezahl pro Item, aufgeschlüsselt nach Jahresnoten. In den letzen beiden Zeilen wird der Regressionskoeffizient und der Korrelationskoeffizient berechnet. Große, negative Koeffizienten zeigen den erwarteten Zusammenhang an, uns sie sind rötlich eingefärbt; Items mit kaum erkennbarer Korrelation sind bläulich eingefärbt.

Gesamt, mittlere Punktezahl pro Item nach Jahresnote

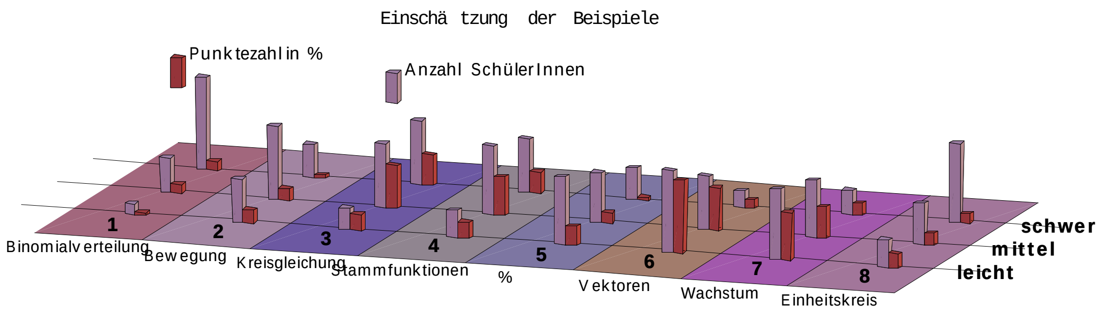
Jahresnoten	Binomialverteilung						Bewegung		Kreisgleichung					Stammfunktionen			%	Vektoren				Wachstum			Einheitskreis	
5	0	0	0	0	0	1.0	0	0	1.0	0.50	1.0	0.50	0.50	0	0.50	0.50	0	0.50	1.0	0.50	0.50	0	0	0	0	0
4	0.033	0.044	0.056	0.033	0.11	0.32	0.11	0.12	0.72	0.57	0.67	0.29	0.51	0.42	0.34	0.57	0.16	0.86	0.73	0.64	0.71	0.21	0.73	0.59	0.17	0.14
3	0.11	0.028	0.13	0.028	0.19	0.46	0.19	0.069	0.74	0.56	0.78	0.29	0.58	0.47	0.32	0.51	0.19	0.88	0.83	0.83	0.79	0.47	0.68	0.71	0.15	0.17
2	0.13	0.057	0.075	0.057	0.17	0.25	0.21	0.40	0.83	0.68	0.77	0.38	0.55	0.64	0.40	0.62	0.30	0.91	0.94	0.81	0.85	0.45	0.79	0.66	0.28	0.28
1	0.15	0.15	0.20	0.15	0.15	0.50	0.28	0.48	0.75	0.63	0.78	0.40	0.50	0.78	0.55	0.73	0.28	0.90	0.88	0.90	0.98	0.55	0.93	0.80	0.53	0.48
Regressionskoeffizient β_1 ; X Jahresnote, Y mittlere Punktezahl pro Item	−0.03	−0.03	−0.03	−0.03	−0.02	−0.02	−0.04	−0.1	−0.03	−0.04	−0.04	−0.04	−0.02	−0.1	−0.05	−0.05	−0.04	−0.04	−0.06	−0.08	−0.08	−0.09	−0.07	−0.07	−0.09	−0.08
Korrelationskoeffizienten ρ_{XY} ; X Jahresnote, Y mittlere Punktezahl pro Item	−0.12	−0.11	−0.11	−0.12	0.050	0.050	−0.12	−0.27	0.080	0.090	−0.10	0.080	0.030	−0.23	−0.12	−0.12	−0.12	−0.13	−0.17	−0.20	−0.22	−0.20	−0.18	−0.15	−0.22	−0.21

Betrachte z.B. Item 5 vom Beispiel „Kreisgleichung“: Die Frage, ob die Gleichung $4x^2 + 4y^2 = 25$ einen Kreis beschreibt, wurde von allen Notenklassen praktisch gleich gut (bzw. gleich schlecht) beantwortet. Die beiden Items von „Einheitskreis“ zeigen dagegen das erwartete Notengefälle auf. Aussagekräftig sind weniger die absoluten Zahlen, sondern die Zahlen im Vergleich der einzelnen Items.

➢ Einschätzung des Schwierigkeitsgrades

a) Einschätzung durch die SchülerInnen

Die SchülerInnen haben die einzelnen Beispiele in drei Schwierigkeitsklassen geteilt. In der Grafik zeigen die heller eingefärbten Säulen (jeweils die linke) die Anzahl der SchülerInnen in absoluten Zahlen. Die rechts stehende, rot eingefärbte Säule gibt für jede einzelne Klasse die erreichte Punktezahl (in % der maximal erreichbaren Punktezahl) an.



Die Tabelle mit den entsprechenden Zahlenwerten:

Schwierigkeitsgrad

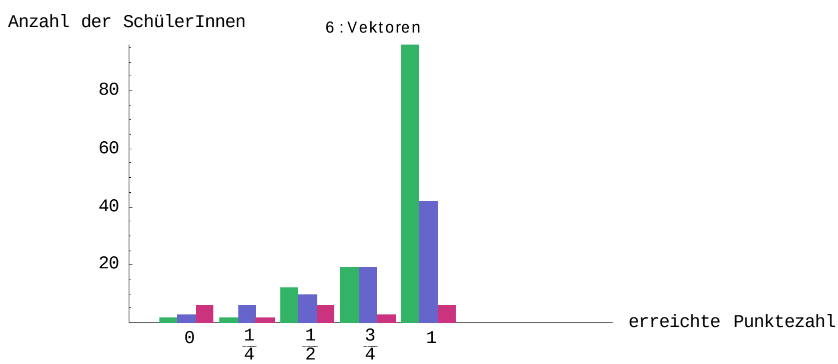
Schwierigkeitsgrad	1	2	3	4	5	6	7	8	
3	9.74 154	10.0 55	48.2 107	39.3 89	9.43 53	51.9 27	50.4 41	11.8 131	err.Punktezahl in % Anzahl SchülerInnen
2	26.0 57	15.9 123	67.2 106	56.5 115	20.5 83	78.6 90	54.7 95	29.0 69	err.Punktezahl in % Anzahl SchülerInnen
1	28.7 18	30.6 72	75.0 36	59.3 45	28.3 113	89.0 136	67.8 118	52.2 46	err.Punktezahl in % Anzahl SchülerInnen

Beispiel

Auffallend hier das Beispiel 5 („Prozentrechnung“): Es wird von der überwiegenden Mehrzahl der SchülerInnen trotz mäßiger Erfolgsquote als leicht eingestuft. Überraschend der hohe Anteil der Klasse „schwer“ bei Beispiel 8 („Einheitskreis“).

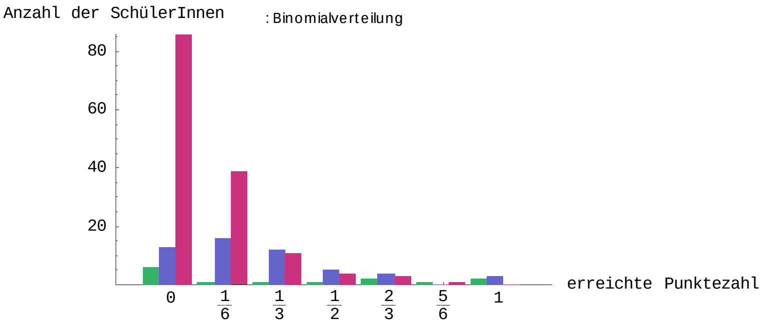
b) Vergleich Schülereinschätzung – Erfolg (exemplarisch)

.... die allseits beliebten Vektoren, und die gar nicht so beliebte Stochastik

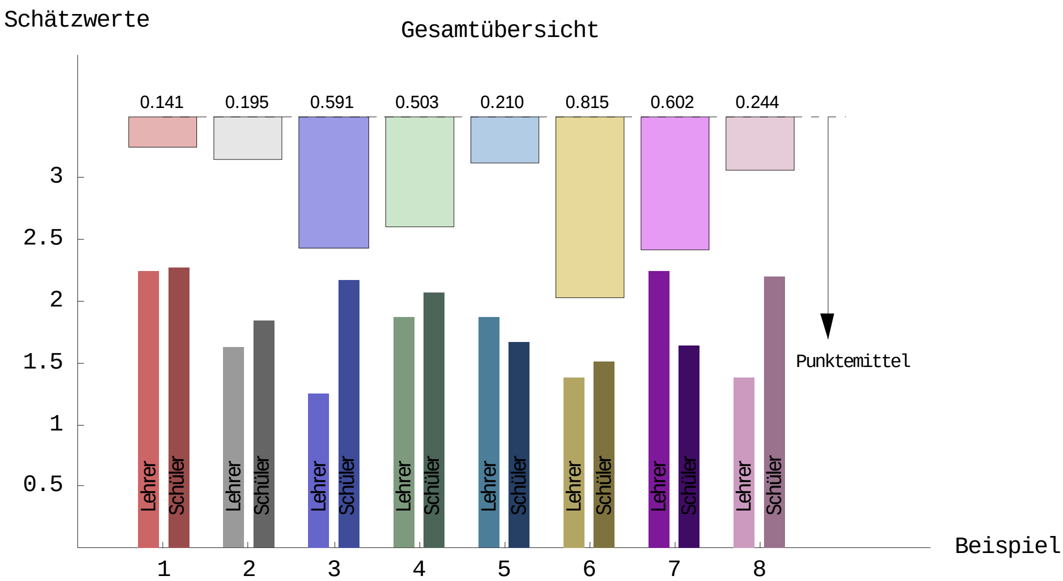


Eine Analyse des Beispiels „Vektoren“: Auf der Horizontalen ist die erreichte Punktezahl (in relativen Anteilen) aufgetragen. Das Beispiel umfasst 4 Items, daher gibt es fünf mögliche Ergebnisse: 0, ¼, ½, ¾ und 1. Über jeder Punkteklassen ist die entsprechende Anzahl der SchülerInnen in absoluten Zahlen aufgetragen, unterteilt in die Schätzklassen „Leicht“ (grün), „Mittel“ (blau) und „Schwer“ (rot). Die Grafik zeigt unmittelbar das erwartete Profil eines als vorwiegend leicht eingestuften Beispiels, das auch tatsächlich erfolgreich gelöst wurde.

Ebenso erwartungsgemäß das Profil des als schwer eingestuften Beispiels „Binomialverteilung“: Die Erfolgsquote ist sehr gering.



c) Einschätzung des Schwierigkeitsgrades: Ein Vergleich Lehrer / Schüler
Auch die Lehrer haben den Schwierigkeitsgrad der Beispiele eingeschätzt; eine Gegenüberstellung zu den entsprechenden Einschätzungen der Schüler zeigt die nächste Grafik. Gleichzeitig ist die Erfolgsquote der einzelnen Beispiele – hängend von oben nach unten – aufgetragen.



➢ Unabhängigkeit von Items

Von besonderem Interesse ist im Rahmen der Testentwicklung die Frage nach der Korrelation der Itemergebnisse innerhalb eines Beispiels. Ein großer Korrelationskoeffizient zeigt einen hohen Grad von Abhängigkeit an; es liegt die Vermutung nahe, dass die Fragestellungen eine gewisse Redundanz aufweisen.

Die Untersuchung des Beispiels „Binomialverteilung“ zeigt eine Abhängigkeit der Items 1 und 3, sowie der Items 2 und 4. Die Fragen zu Bild 1 und Bild 2 unterscheiden sich nicht wesentlich. Bei Beispiel 6 („Vektoren“) fällt die Korrelation zwischen Item 2 und Item 3 auf.

Korrelationskoeffizienten – Binomialverteilung

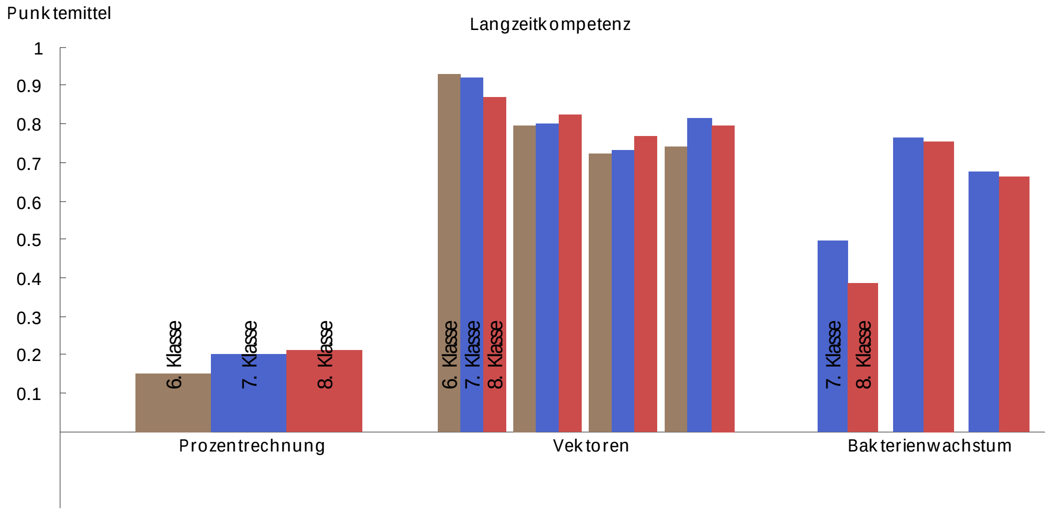
	1	2	3	4	5	6
6	0.36	0.22	0.32	0.24	0.41	1.0
5	0.36	0.29	0.24	0.25	0.99	
4	0.41	0.88	0.39	0.98		
3	0.69	0.33	0.99			
2	0.45	0.99				
1	0.99					

Korrelationskoeffizienten – Vektoren

	18	19	20	21
21	0.39	0.34	0.26	0.99
20	0.40	0.57	0.99	
19	0.35	0.99		
18	0.99			

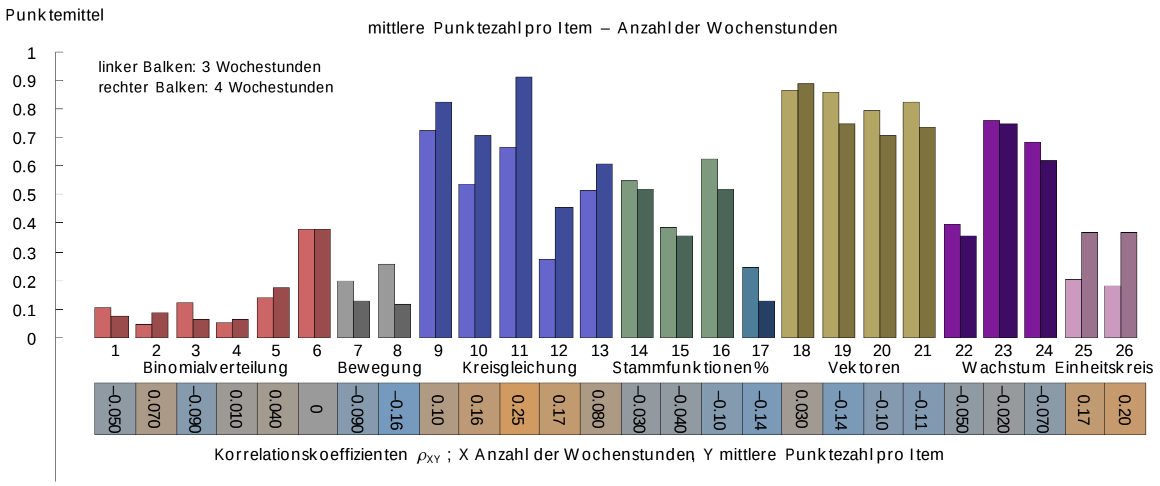
➢ Langfristige Kompetenzen?

Wir möchten auch langfristige Kompetenzen testen. Zu diesem Zweck gibt es zwei Beispiele, die in jeden der drei Klassentests aufgenommen wurden („Prozentrechnung“ und „Vektoren“), und ein Beispiel, welches im Test der 7. und 8. Klasse vorkommt („Bakterienwachstum“).



Die Ergebnisse sind auf den ersten Blick nicht sehr ermutigend; vor einer eingehenderen Analyse sind jedoch vorschnelle Schlussfolgerungen nicht sinnvoll.

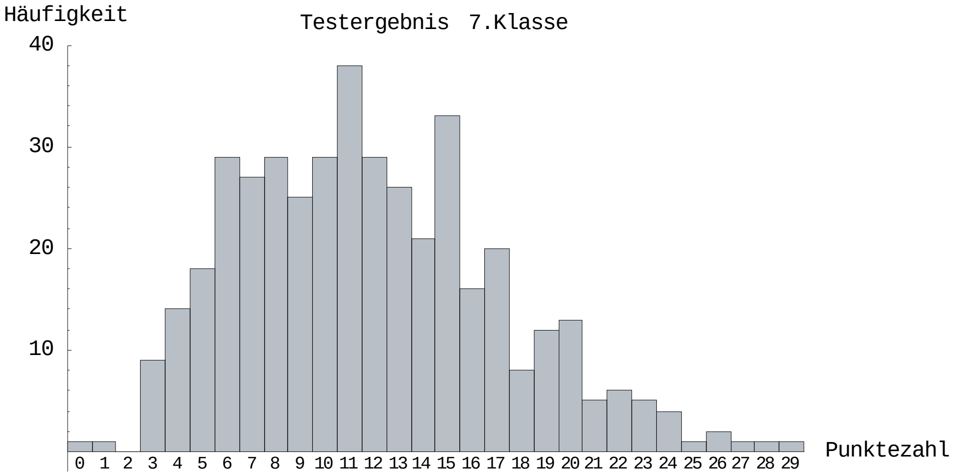
➢ Zusammenhang Testergebnis – Anzahl der Mathematik-Wochenstunden



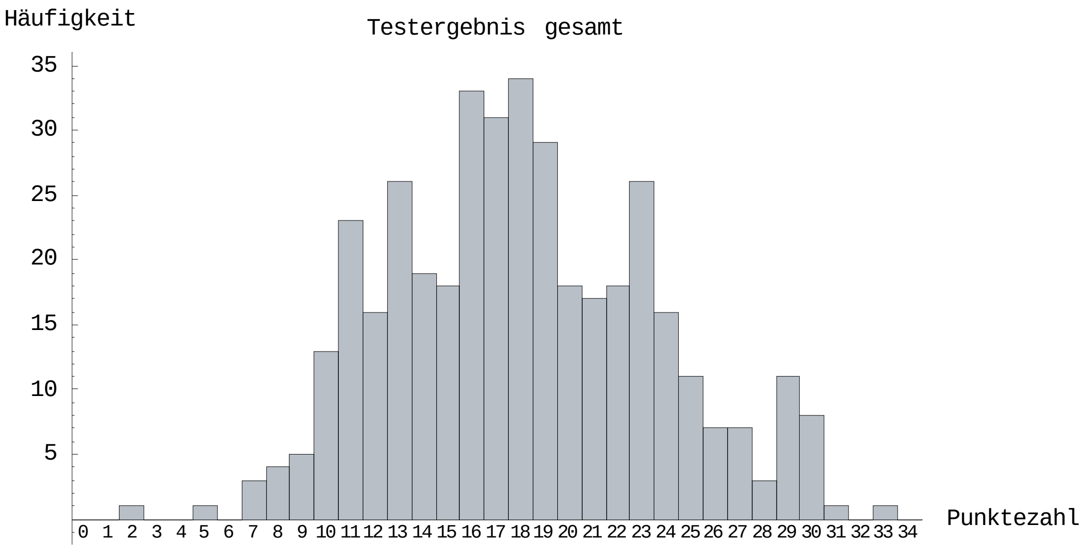
7. 2. Testauswertungen für die 6. / 7. Klassen

➢ Die Punkteverteilungen

a) für die 7. Klassen

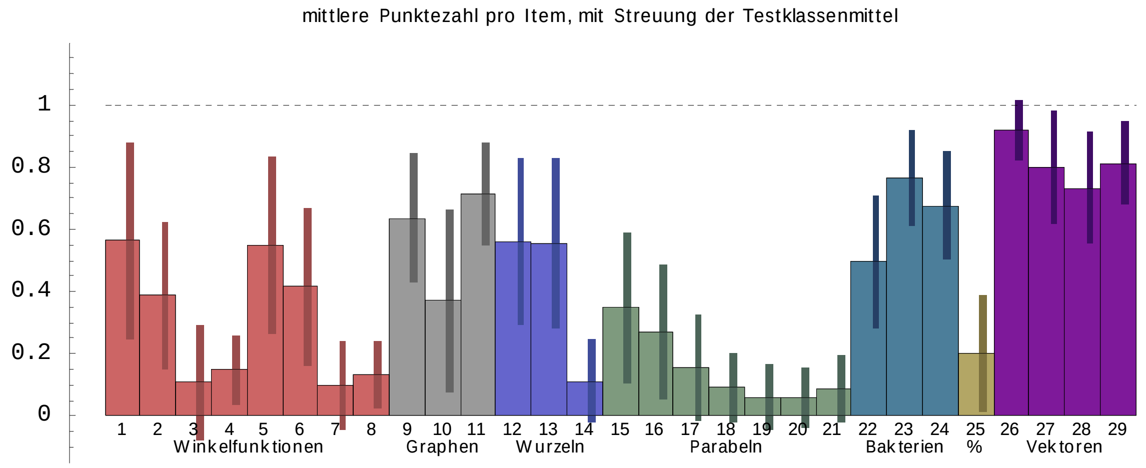


b) für die 6. Klassen

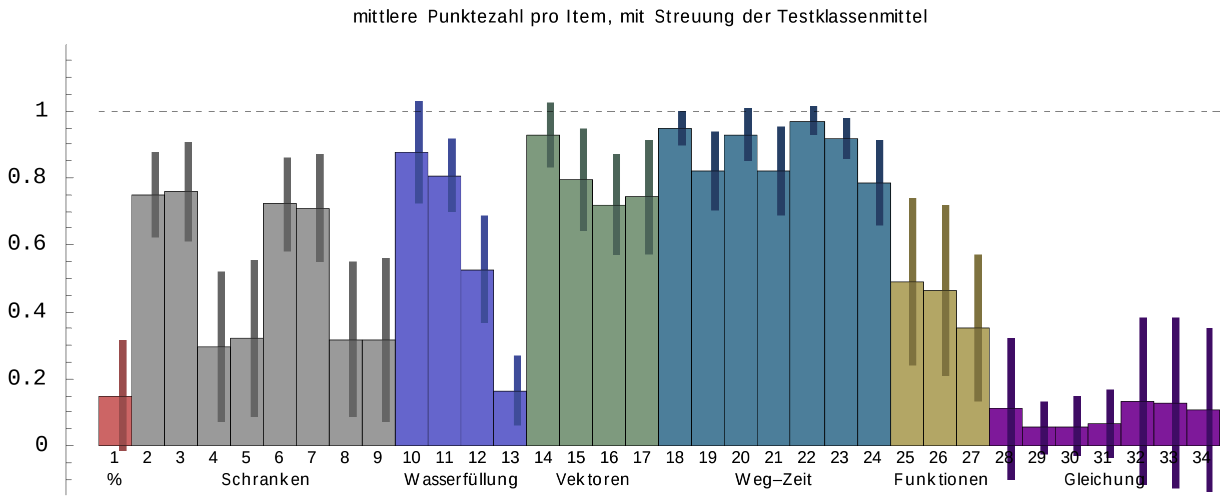


➢ Punktemittel nach Items

a) für die 7. Klassen

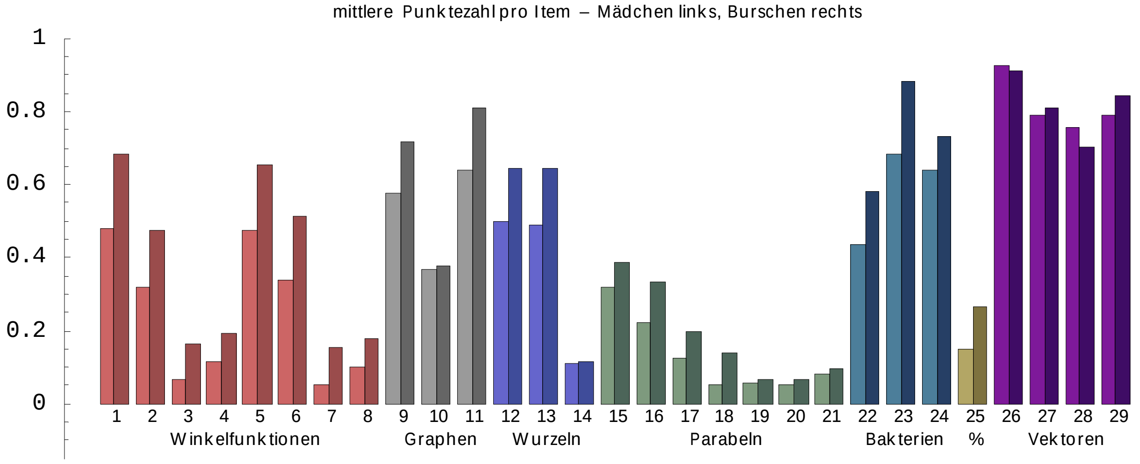


b) für die 6.Klassen

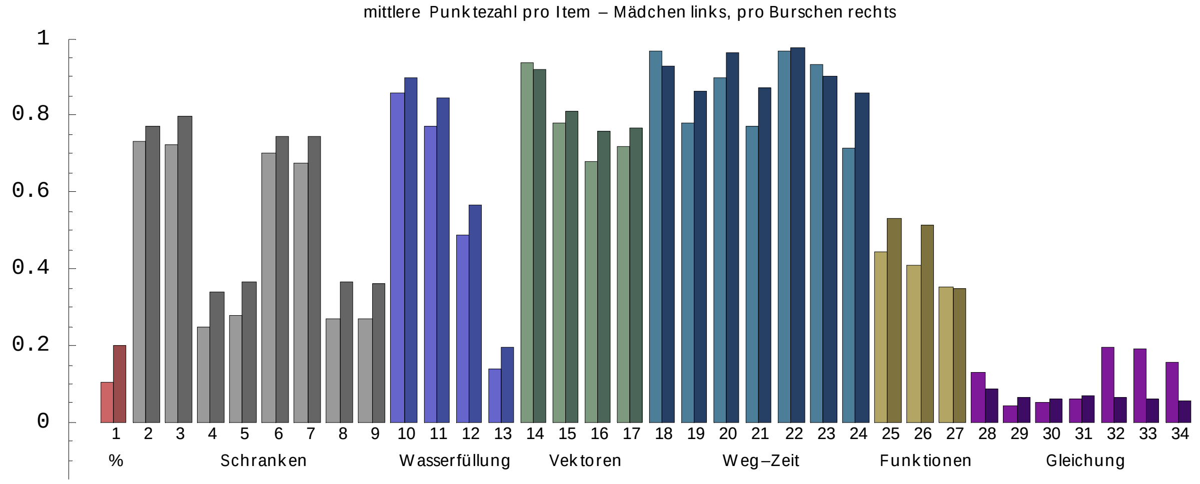


➢ Geschlechtsspezifische Unterschiede?

a) 7. Klassen

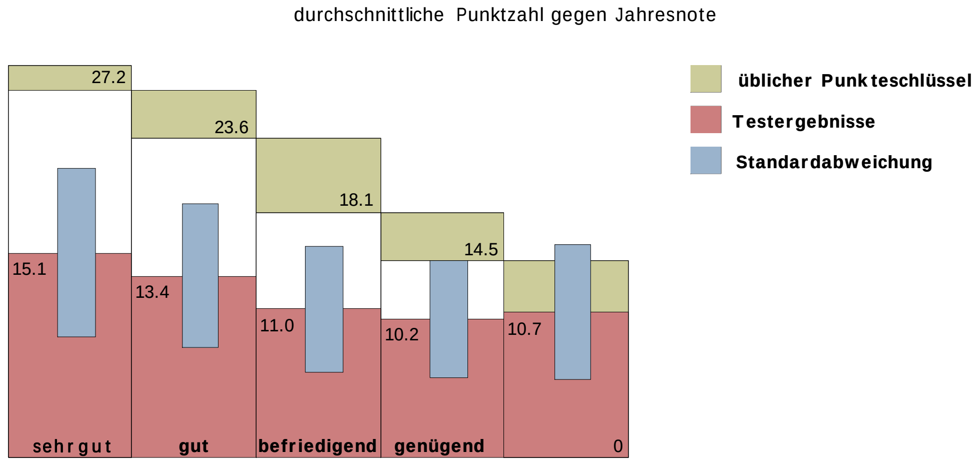


b) 6. Klassen

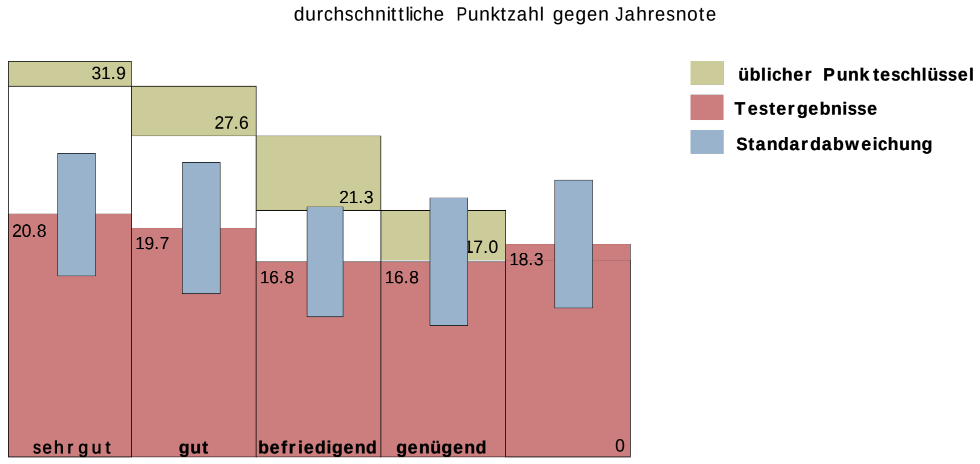


➢ Zusammenhang Testergebnis – Jahresnote

a) 7. Klassen

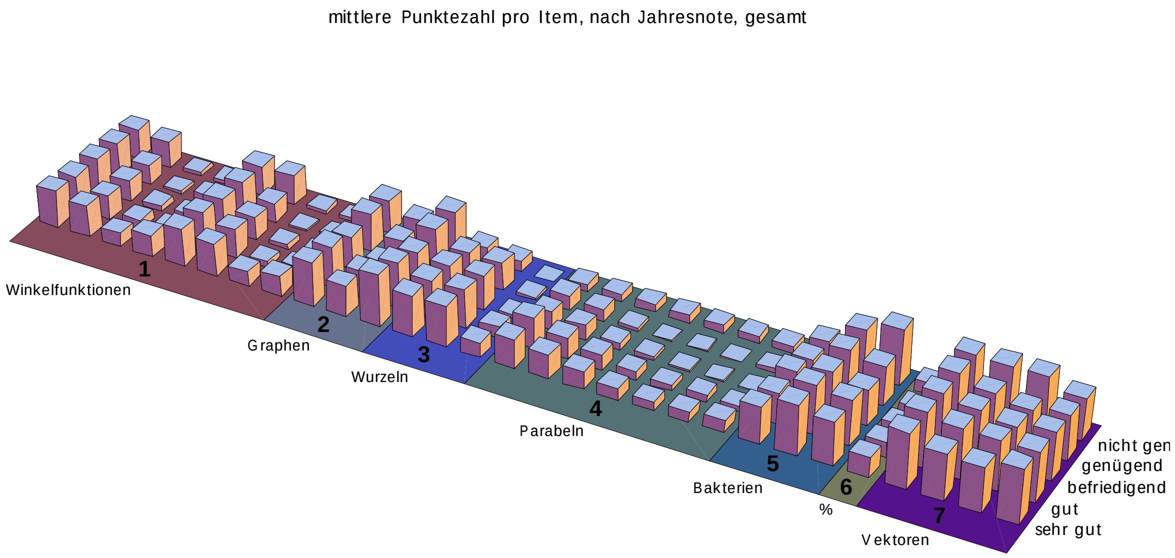


b) 6. Klassen



nach Items aufgegliedert:

c) 7. Klassen, nach Items aufgegliedert

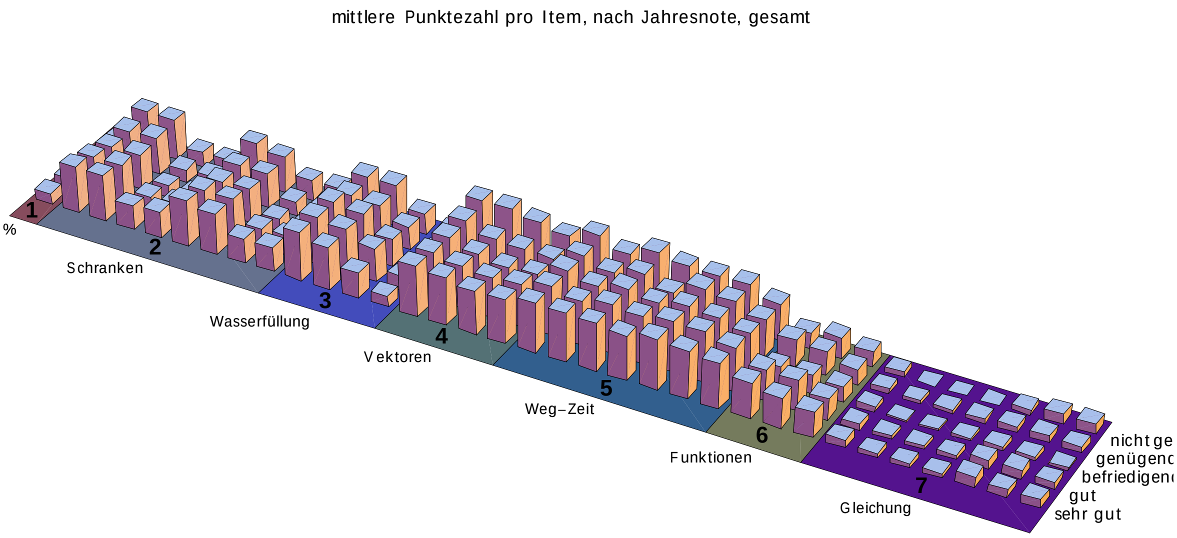


in Tabellenform:

Gesamt mittlere Punktezahl pro Item nach Jahresnote

Winkelfunktionen								Graphen			Wurzeln			Parabeln							Bakterien			%	Vektoren				Jahresnoten
0.50	0.44	0.063	0.063	0.50	0.50	0.063	0.063	0.56	0.38	0.69	0.25	0.19	0	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.38	0.75	0.94	0.19	0.88	0.88	0.88	0.69	5
0.54	0.33	0.051	0.11	0.51	0.33	0.036	0.080	0.64	0.33	0.71	0.47	0.46	0.051	0.25	0.19	0.058	0.014	0.022	0.0072	0.065	0.41	0.74	0.64	0.12	0.91	0.74	0.64	0.75	4
0.58	0.35	0.088	0.088	0.54	0.39	0.080	0.080	0.56	0.29	0.61	0.58	0.57	0.062	0.30	0.25	0.12	0.071	0.027	0.018	0.027	0.53	0.71	0.60	0.18	0.90	0.81	0.73	0.82	3
0.58	0.40	0.14	0.16	0.60	0.48	0.11	0.17	0.70	0.43	0.76	0.64	0.65	0.19	0.52	0.36	0.25	0.16	0.096	0.11	0.096	0.52	0.83	0.76	0.24	0.94	0.86	0.83	0.84	2
0.62	0.53	0.23	0.36	0.64	0.55	0.24	0.33	0.74	0.52	0.88	0.70	0.70	0.24	0.48	0.41	0.30	0.20	0.15	0.17	0.21	0.62	0.85	0.74	0.33	0.94	0.79	0.76	0.91	1
–0.03	–0.04	–0.04	–0.06	–0.04	–0.05	–0.04	–0.06	–0.04	–0.05	–0.04	–0.07	–0.08	–0.05	–0.08	–0.06	–0.06	–0.04	–0.03	–0.03	–0.03	–0.05	–0.04	–0.02	–0.05	–0.02	–0.02	–0.03	–0.05	Regressionskoeffizient β_1 ; X Jahresnote, Y mittlere Punktezahl pro Item
–0.060	–0.090	–0.15	–0.18	–0.080	–0.11	–0.16	–0.19	–0.090	–0.10	–0.11	–0.16	–0.18	–0.19	–0.18	–0.16	–0.18	–0.16	–0.12	–0.15	–0.11	–0.12	–0.090	–0.040	–0.13	–0.070	–0.050	–0.070	–0.13	Korrelationskoeffizienten ρ_{XY} ; X Jahresnote, Y mittlere Punktezahl pro Item

d) 6. Klassen, nach Items aufgegliedert



in Tabellenform:

Gesamt , mittlere Punktezahl pro Item nach Jahresnote

Jahresnoten	%	Schranken								Wasserfüllung				Vektoren			
5	0.10	0.80	0.80	0.30	0.30	0.80	0.70	0.40	0.40	0.80	0.80	0.40	0.20	1.0	1.0	0.90	0.80
4	0.092	0.71	0.73	0.26	0.29	0.67	0.66	0.28	0.26	0.75	0.72	0.46	0.11	0.92	0.73	0.69	0.68
3	0.15	0.69	0.70	0.24	0.24	0.65	0.67	0.25	0.25	0.93	0.85	0.52	0.13	0.91	0.75	0.65	0.70
2	0.20	0.79	0.80	0.33	0.36	0.79	0.78	0.36	0.38	0.94	0.86	0.66	0.27	0.92	0.84	0.76	0.81
1	0.21	0.90	0.88	0.45	0.50	0.88	0.81	0.48	0.48	0.95	0.83	0.50	0.21	0.98	0.91	0.83	0.84
Regressionskoeffizient β_1	−0.03	−0.04	−0.04	−0.04	−0.05	−0.05	−0.04	−0.05	−0.05	−0.05	−0.03	−0.03	−0.03	−0.02	−0.04	−0.03	−0.04
Korrelationskoeffizienten ρ_{XY}	−0.10	−0.11	−0.090	−0.10	−0.12	−0.12	−0.10	−0.11	−0.12	−0.17	−0.090	−0.070	−0.090	−0.060	−0.10	−0.070	−0.10

Jahresnoten	Weg−Zeit							Funktionen			Gleichung						
5	1.0	0.80	1.0	0.90	0.90	0.90	0.70	0.30	0.40	0.30	0.10	0	0	0	0.10	0.20	0.20
4	0.93	0.75	0.91	0.70	0.97	0.90	0.71	0.50	0.45	0.30	0.10	0.058	0.067	0.075	0.12	0.13	0.11
3	0.95	0.81	0.94	0.85	0.96	0.89	0.78	0.32	0.34	0.30	0.10	0.025	0.033	0.050	0.083	0.067	0.058
2	0.95	0.85	0.95	0.91	0.99	0.96	0.85	0.60	0.58	0.41	0.11	0.071	0.071	0.071	0.18	0.18	0.13
1	0.97	0.95	0.93	0.86	0.98	0.93	0.88	0.69	0.59	0.50	0.16	0.086	0.069	0.069	0.21	0.16	0.16
Regressionskoeffizient β_1	−0.01	−0.05	−0.01	−0.04	−0.02	−0.02	−0.05	−0.06	−0.05	−0.05	−0.02	−0.01	−0.01	−0.01	−0.03	−0.01	−0.01
Korrelationskoeffizienten ρ_{XY}	−0.060	−0.13	−0.040	−0.12	−0.090	−0.070	−0.13	−0.14	−0.10	−0.12	−0.040	−0.050	−0.030	−0.020	−0.080	−0.030	−0.040

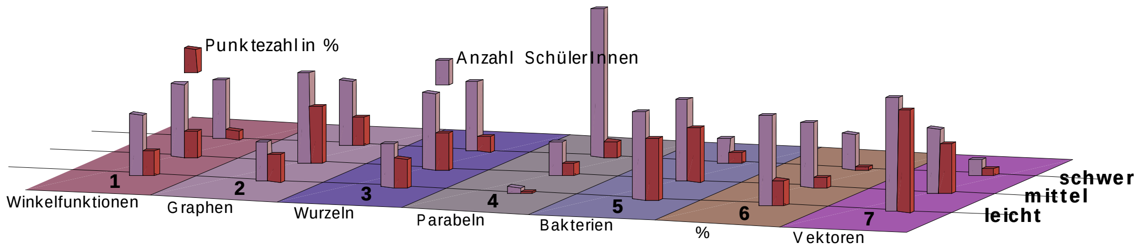
Regressionskoeffizient β_1 ; X Jahresnote, Y mittlere Punktezahl pro Item

Korrelationskoeffizienten ρ_{XY} ; X Jahresnote, Y mittlere Punktezahl pro Item

➢ Einschätzung des Schwierigkeitsgrades

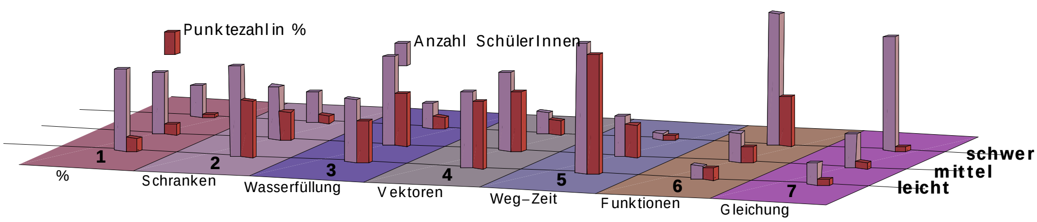
a) 7. Klassen

Einschä tzung der Beispiele



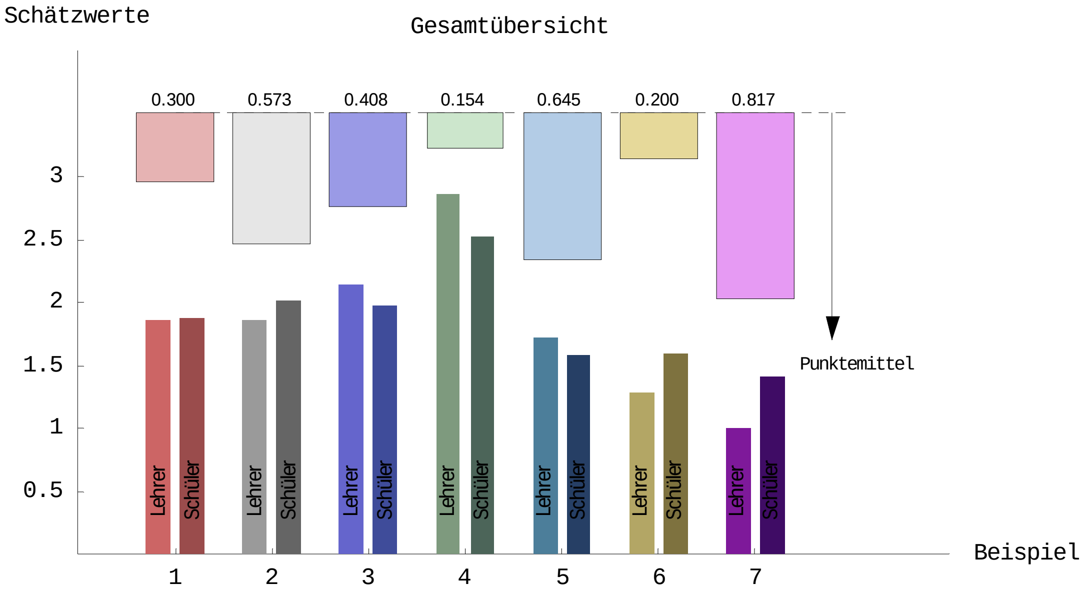
b) 6. Klassen

Einschä tzung der Beispiele

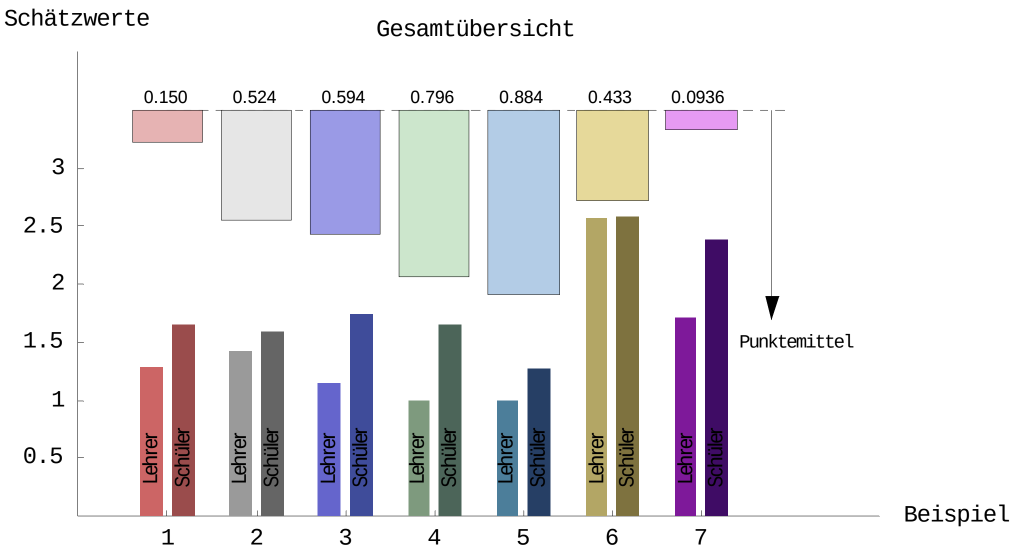


c) Schwierigkeitsgrad Lehrer – Schüler: Vergleich

für die 7. Klassen



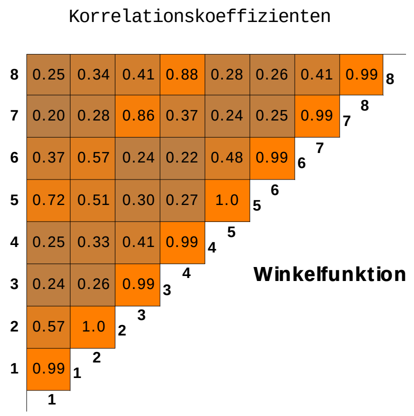
für die 6.Klassen

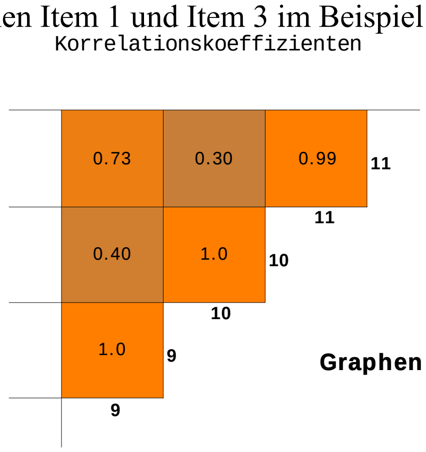


➢ Beispiele für Korrelationen von Items

für die 7.Klassen

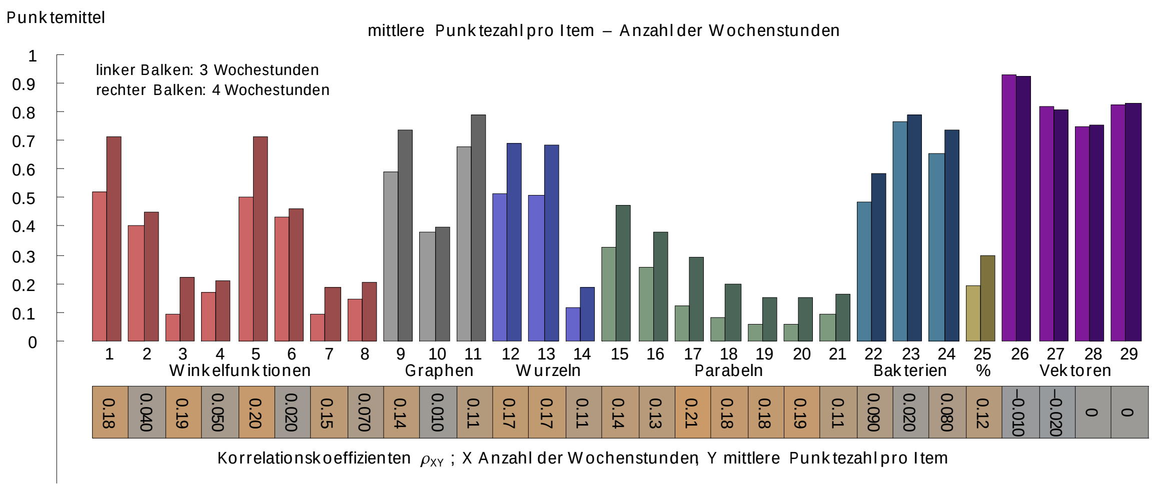
Wir haben das Beispiel „Winkelfunktionen ausgewählt. Es zeigt sich hier eine auffallende Korrelation zwischen Item 1 und Item 5.
Sehr ausgeprägt auch die Korrelation zwischen Item 1 und Item 3 im Beispiel „Graphen“.



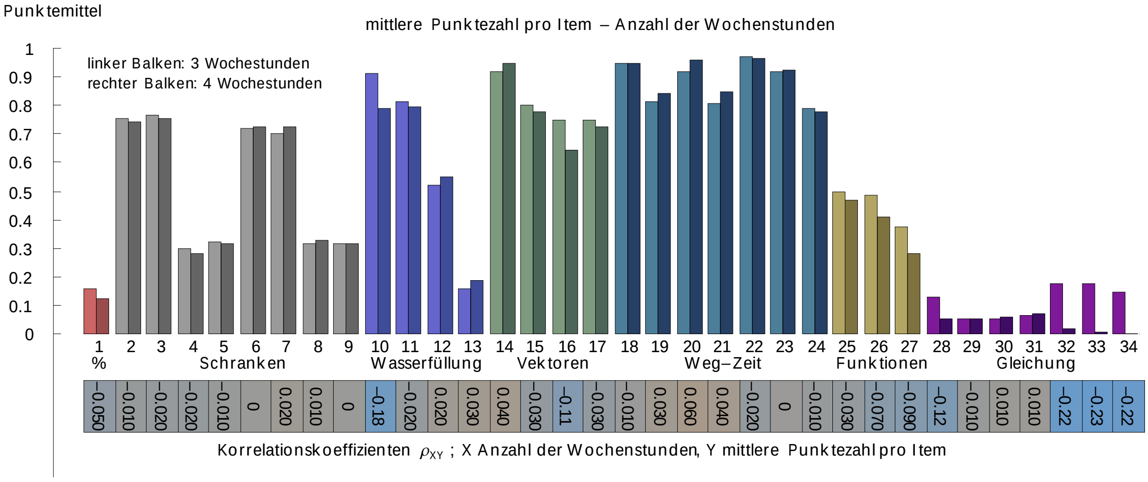


➢ Zusammenhang Testergebnis – Anzahl der Mathematik-Wochenstunden

für die 7. Klassen



für die 6.Klassen



8. Literatur

ACDCA (Austrian Center for Didactics of Computer Algebra): Berichte der Forschungsprojekte CAS III and CAS IV. Hompage ACDCA: www.acdca.ac.at

BMBWK (Hrsg.), laufend: Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe. BMBWK, Sektion I. Internet: www.gemeinsamlernen.at

BMBWK, 2004: Bildungsministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kunst: Lehrplan Mathematik für die Oberstufe der AHS, 2004: www.bmbwk,ac.at

Böhm, J. (1998): Optimierungsaufgaben grafisch, numerisch und analytisch mit dem TI-92 lösen. BK Teachware Series „Support in Learning“ Nr. SR-06, 1998, ISBN 3-901769-11-0

Böhm, J. u.a. (2004): The Case for CASBöhm, J. u.a. (2004): The Case for CAS, p-23. Produced by T-cubed Europe. Printed by Westfälische Wilhelms-Universität Münster-Germany. ISBN 3-934064-45-0

Buchberger, B.:
Teaching Math by Software. Paper of the RISC Institute) Research Institute for Symbolic Computation); University of Linz, 1992

Buchberger, Bruno (Research Institute for Symbolic Computation, University of Linz, Austria): “Teaching Without Teachers” Invited Talk at VISIT-ME 2002, Vienna, July 10, 2002. The written version can be found in the Proceedings of the conference.

Buchberger, Bruno (Research Institute for Symbolic Computation, University of Linz, Austria): “Logic, Mathematics, Computer Science: Interactions” Talk at LMCS 2002. Castle of Hagenberg, October 2002.

Dörfler, W. (1991): „Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium“ in Computer - Mensch – Mathematik. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1991, S. 51. ISBN3-209-01452-3.

Gruber Karl Heinz, (1999) Univ. Prof. Dr., Universität Wien
Internationaler Workshop „Evaluation und Qualität im Bildungswesen“, Blumau, 1999. Tagungsband des Zentrums für Schulentwicklung, Hans-Sachsgasse 3/II, 8010 Graz.

Haider, G.; Reiter C. (2004): PISA 2003 Internationaler Vergleich von Schülerleistungen. Internet: www.pisa-austria.at

Herget, Wilfried, (1996): *Rettet die Ideen! – Rettet die Rezepte?* In: Hischer, H. / Weiß, M. (Hrsg.): Rechenfertigkeit und Begriffsbildung – Zu wesentlichen Aspekten des Mathematikunterrichts vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen. Hildesheim: Franzbecker, S.156-169.

Herget, Wilfried, (1999): *Wie viel Termumformung braucht der Mensch? – Taschencomputer und Mathematikunterricht.* In: Amelung, Udo (Hrsg.): Der TI-92 im Mathematikunterricht. Pfingsttagung 1998. Zentrale Koordination Lehrerausbildung, ZKL-Texte Nr. 7, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, S. 3-19.

Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B., Lehmann., E. (2000): „Indispensable Manual Calculation Skills in a CAS Environmet“ in Ohio Journal of School Mathematics Autumn 2000, Number 42, Page 13.

Heugl, H., Klinger, W., Lechner, J. (2001): Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen. Addison-Wesley Publishing Company, Bonn 1996. ISBN 3-8273-1082-2

Heugl, H., (1999): The necessary fundamental algebraic competence in the age of Computeralgebra Systems. Proceedings of the 5th ACDCA Summer Academy, 1999, **http://www.acdca.ac.at**.

Hischer, H. (1995): Begriffs-Bilden und Kalkulieren vor dem Hintergrund von CAS. In: Rechenfertigkeit und Begriffsbildung; Tagungsband der 13. Arbeitstagung des Arbeitskreises “Mathematik und Informatik” der GDM in Wolfenbüttel; Sept. 1995, p 8.

Klieme, E., u.a., (2003): Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) 53170 Bonn (Hrsg.). Bestellung: Schriftlich an den Herausgeber BMBF Postfach 300230 in 53182 Bonn. Internet: www.bmbf.de

Kutzler, Bernhard, 1996: Symbolrechner TI-92 (Computeralgebra im Taschenformat). Bonn: Addison-Wesley, 192 Seiten, ISBN 3-89319-952-7.

Kutzler, Bernhard, 1998: Einführung in den TI-89. Hagenberg: bk teachware, 62 Seiten, ISBN 3-901769-12-9.

Kutzler, Bernhard, 1999: Der algebraische Taschencomputer als pädagogisches Werkzeug. Bonn: Profil – Zeitschrift des Deutschen Philologenverbandes, März + April 1999. Auch: **http://www.kutzler.com**.

Kutzler, Bernhard & Kokol-Voljc, Vlasta, 2000: Introduction to Derive 5. Hagenberg: Soft Warehouse Europe.

Lechner, J. (2000): Erarbeitung eines Kommentars zum Oberstufenlehrplan für einen CAS-unterstützten Unterricht. In Bericht über das Projekt CAS III – 1999/2000: www.acdca.ac.at

Lehmann, Eberhard, 1999a: Terme im Mathematikunterricht unter Verwendung von Computergrafik und Computeralgebra, Hannover: Schroedel-Verlag.

Lehmann, Eberhard, 1999b: Neue Aspekte im Unterricht über Terme durch Einsatz von Computeralgebra-Systemen. Universität Bayreuth.

Lehmann, E. (2002): „Mathematiklehren mit Computeralgebrasystem-Bausteinen“. Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2002, ISBN 3088120-343-5.

Liebscher, M. (2004): Projektbericht: „Bildungsstandards aus Mathematik für die Sekundarstufe II“. Projekt des BMBWK, Leitung Marlies Liebscher. CD-Rom des Landesschulrates für Steiermark.

Schmidt, G.: „Experimentieren, Entdecken, Modellieren und Veranschaulichen“ Skriptum zur Lehrerfortbildung edited by Texas Instruments Austria, 1997

Timischl, W. (1988): Biomathematik. Springer Verlag New York-Wien. ISBN 0-387-82039-6

9. Durchgeführte Tests in der Handelsakademie

Parallel zu den AHS-Klassen wurden in 55 Klassen der Handelsakademie modifizierte Tests (siehe Anhang) durchgeführt und von Mag. Eleonore Eisler (BHAK Tulln) ausgewertet. Angefügt ist die Auswertung der Ergebnisse in Form einer Präsentation.

Auswertung der Testergebnisse
Datengrundlage

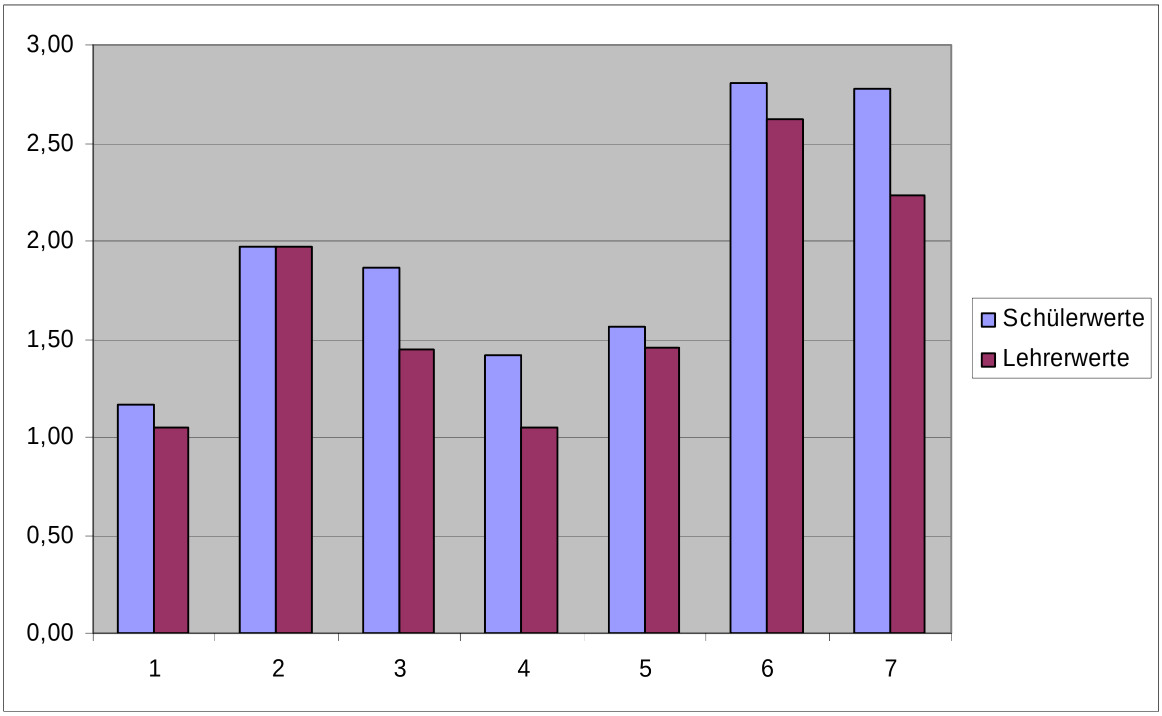
- 3 Jahrgang: 23 Klassen mit 492 Schülern
- 4 Jahrgang: 15 Klassen mit 308 Schülern
- 5 Jahrgang: 17 Klassen mit 266 Schülern

In Summe: 55 Klassen mit 1066 Schülern

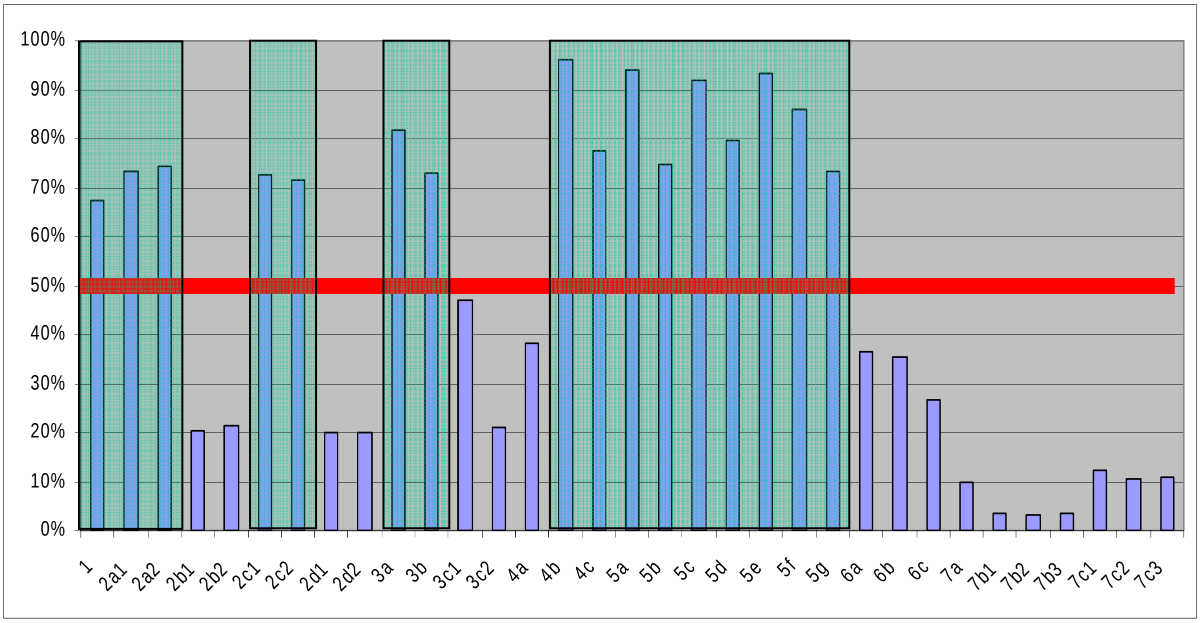
Auswertung des 3. Jahrgangs

- Einschätzung der Beispiele
- Betrachtung der einzelnen Beispiele
- Geschlechtsspezifische Auswertung
- Vergleich AHS-HAK
- Korrelation von Noten und Testergebnis

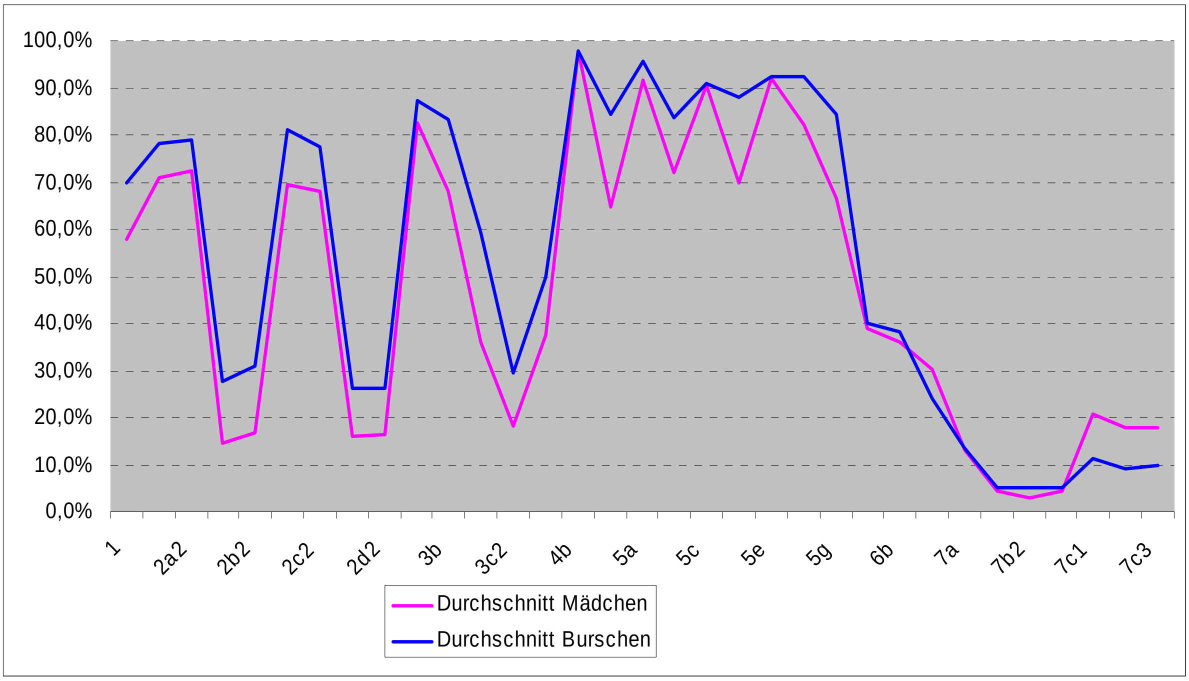
Vergleich von Lehrer- und Schülereinschätzung



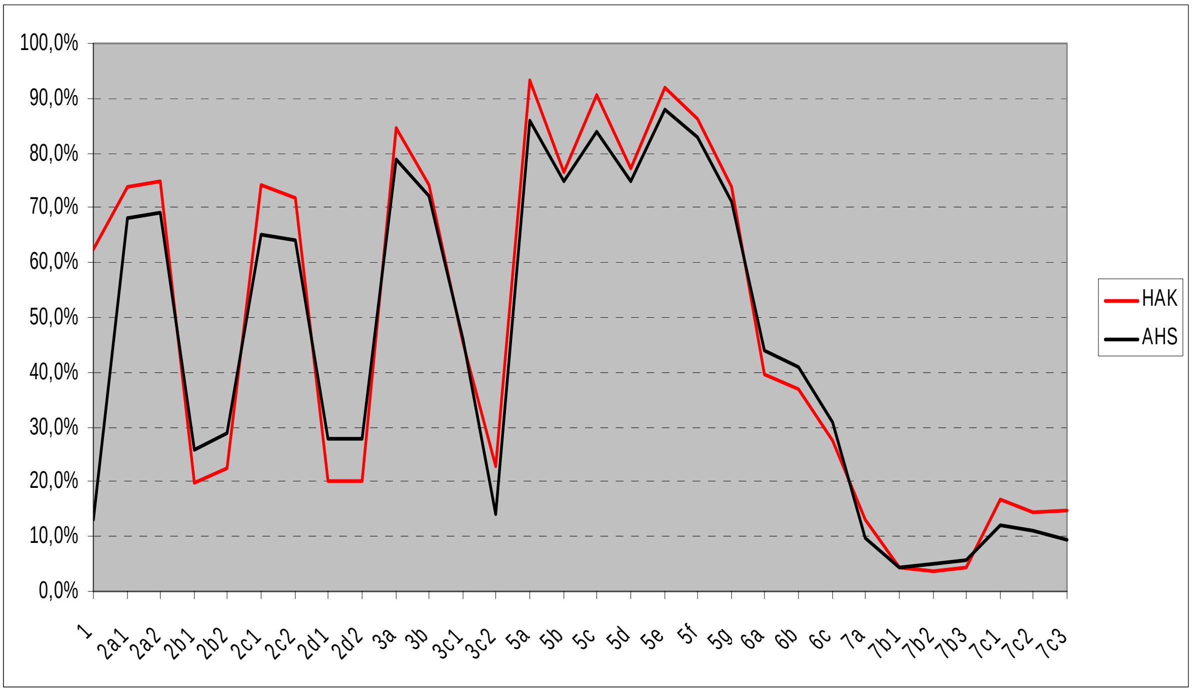
Betrachtung der einzelnen Beispiele



Geschlechtsspezifische Auswertung



Vergleich AHS-HAK



Daten zur Korrelation

- Korrelationskoeffizient: -0.983
- Anstieg der Regression: -0.0305 = -3,05%
- Abstand zwischen 1er und 5er: 12,1%

Schlussfolgerungen

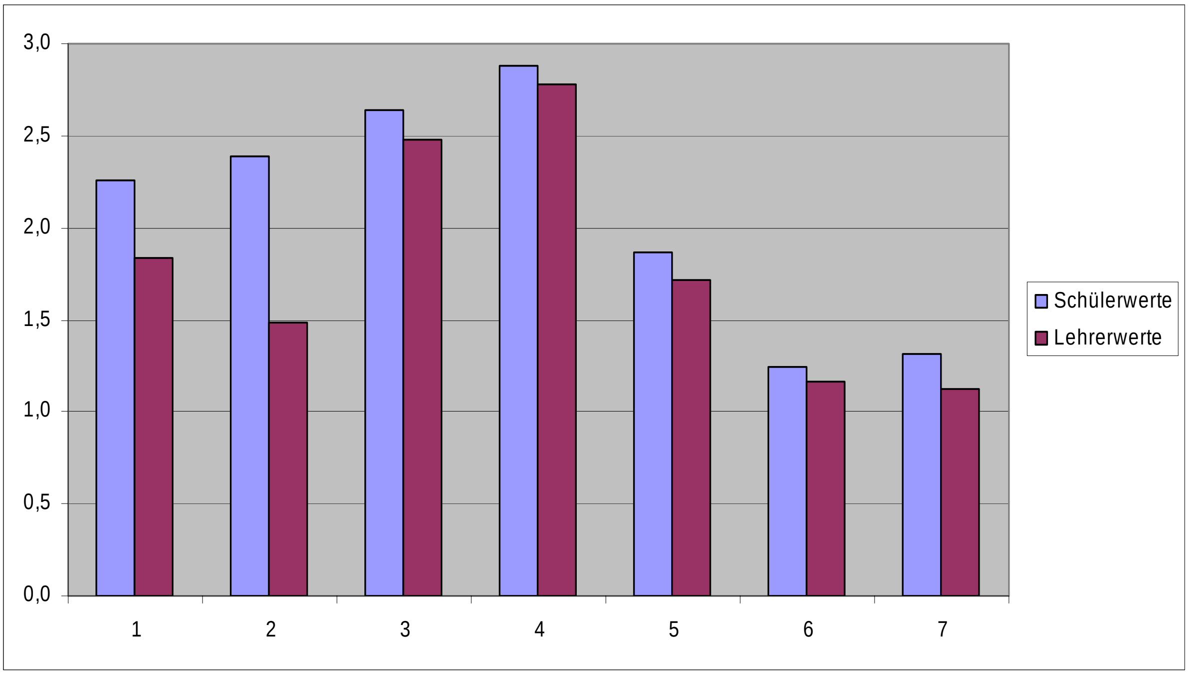
- Korrelation ist vorhanden und eindeutig
- Anstieg der Regression ist jedoch überraschend gering
- Streuung der Werte ebenfalls sehr gering

Die Noten sind fast gleichverteilt!

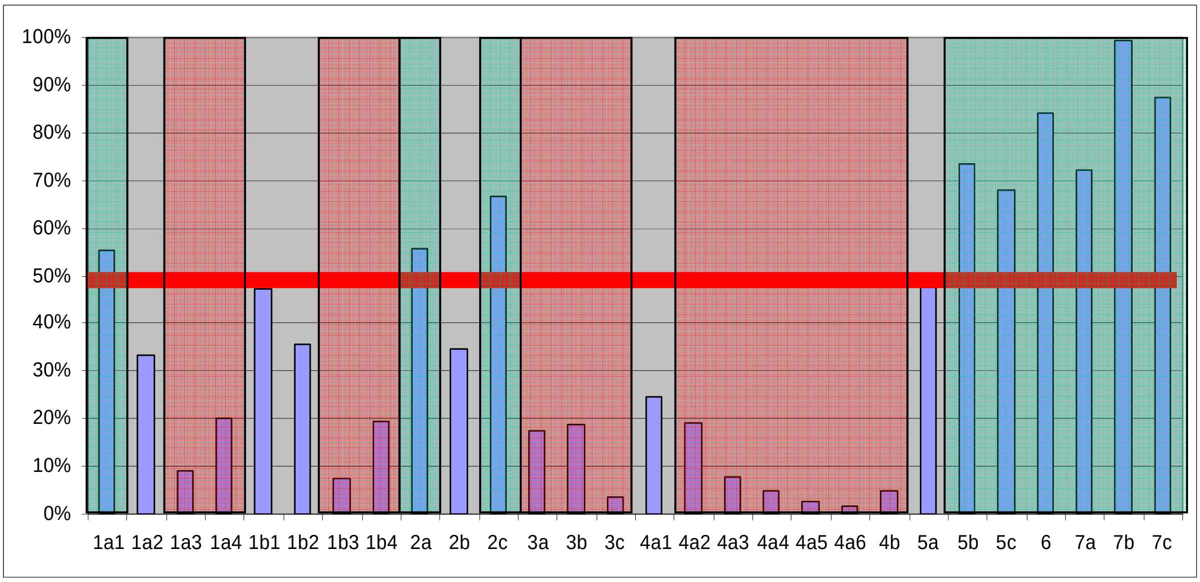
Auswertung 4. Jahrgang

- Einschätzung der Beispiele
- Betrachtung der einzelnen Beispiele
- Geschlechtsspezifische Auswertung
- Vergleich AHS-HAK

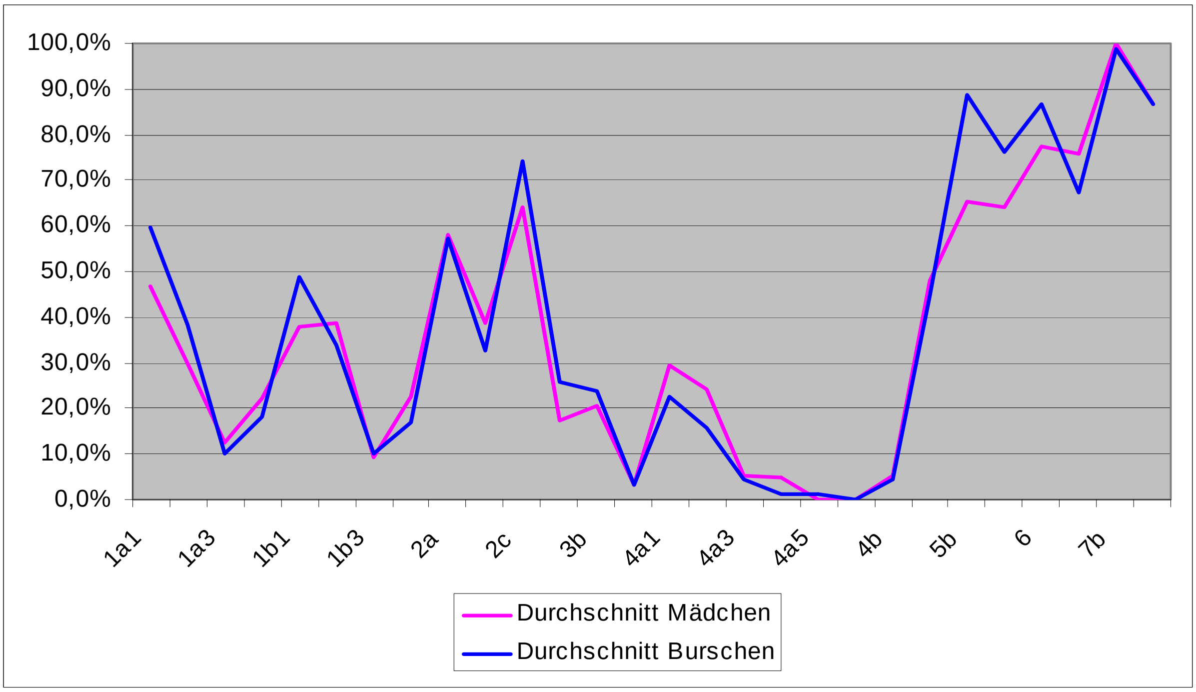
Vergleich von Lehrer- und Schülereinschätzung



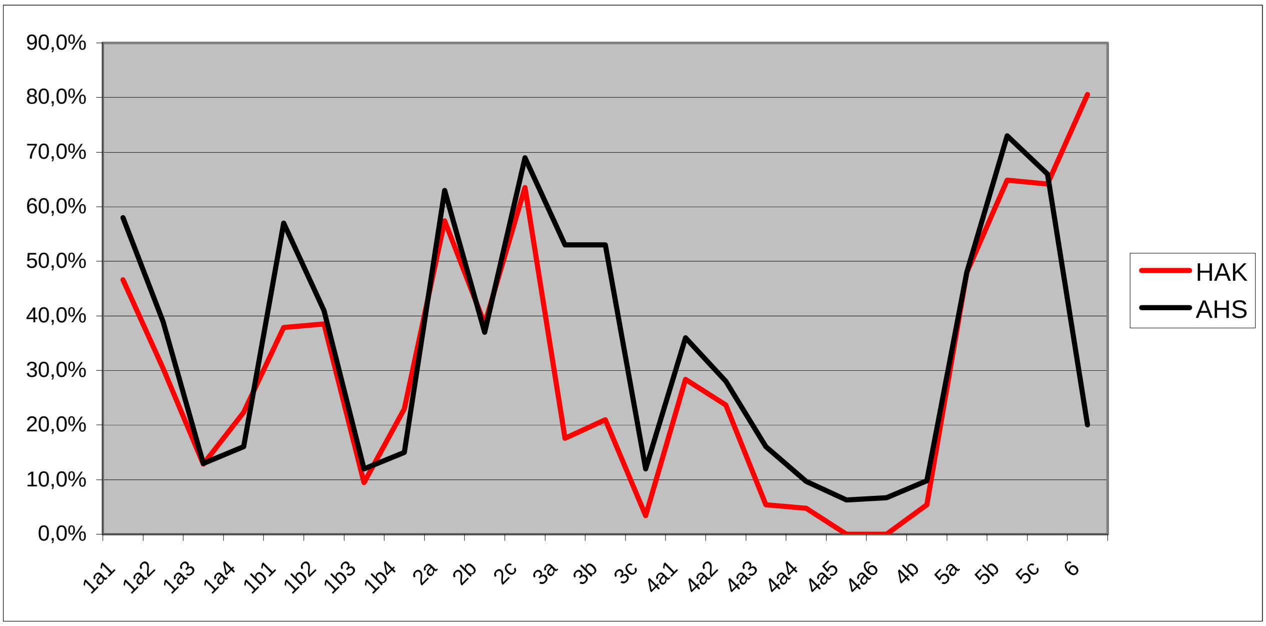
Betrachtung der einzelnen Beispiele



Geschlechtsspezifische Auswertung



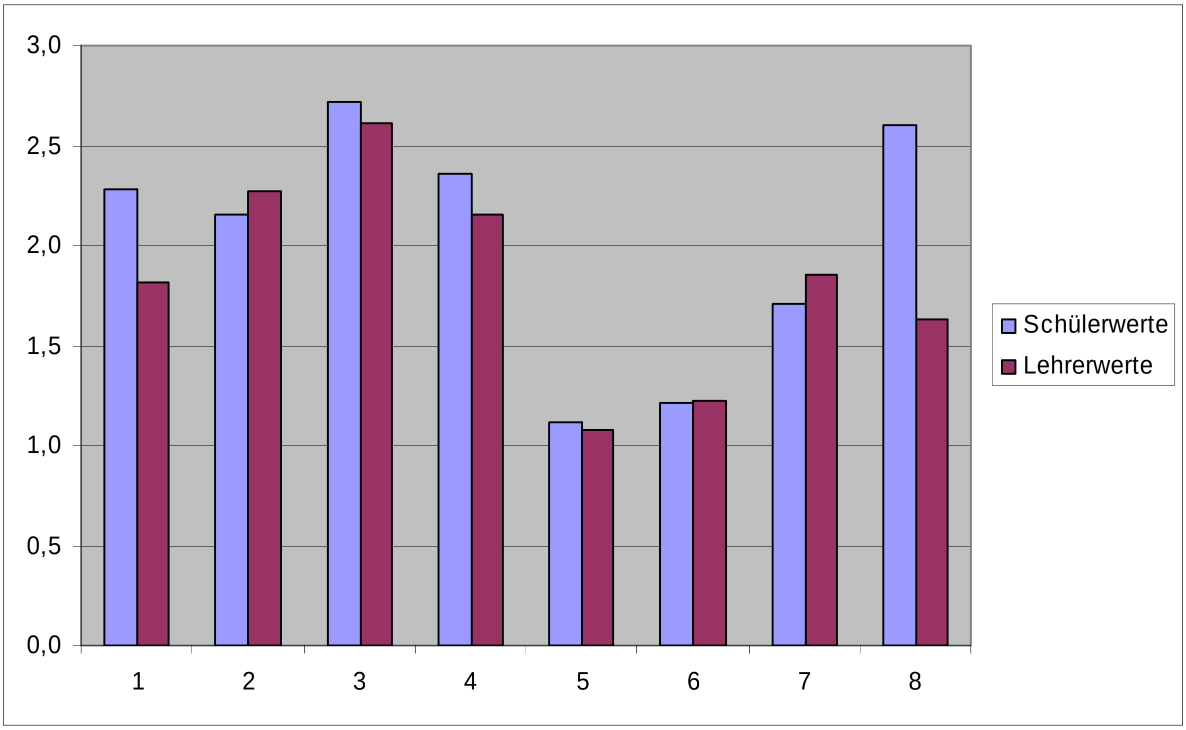
Vergleich AHS-HAK



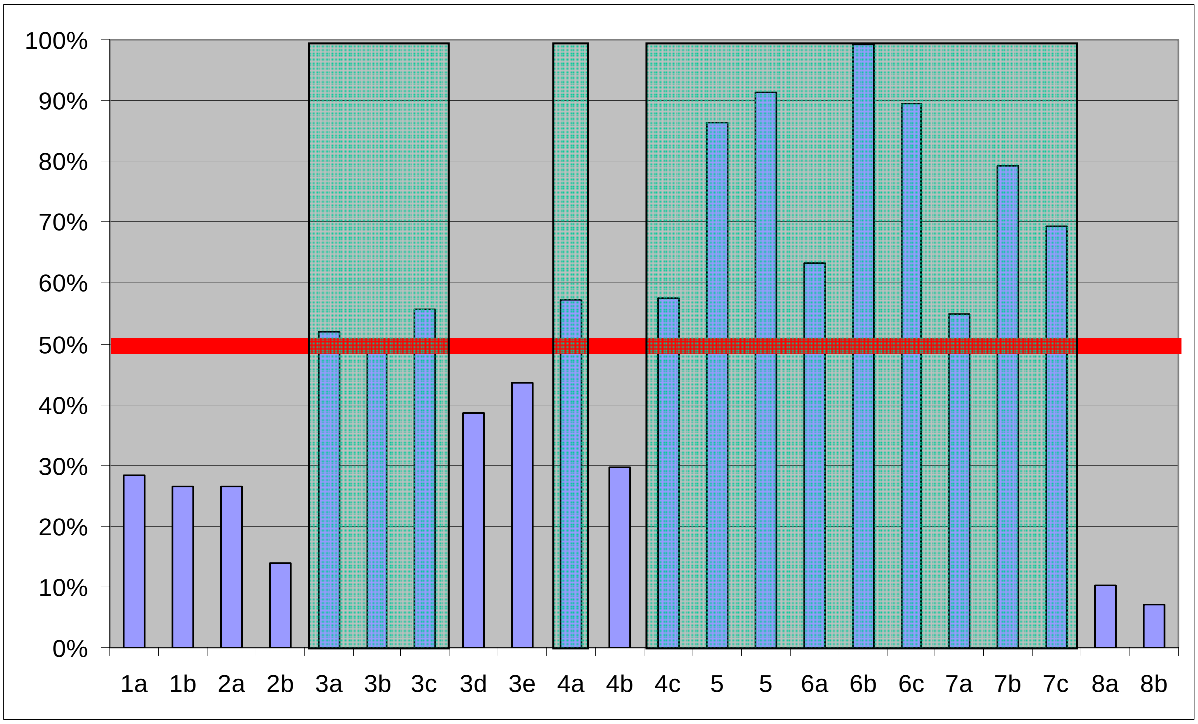
Auswertung 5. Jahrgang

- Einschätzung der Bsp
- Betrachtung der einzelnen Beispiele
- Geschlechtsspezifische Auswertung
- Vergleich AHS-HAK

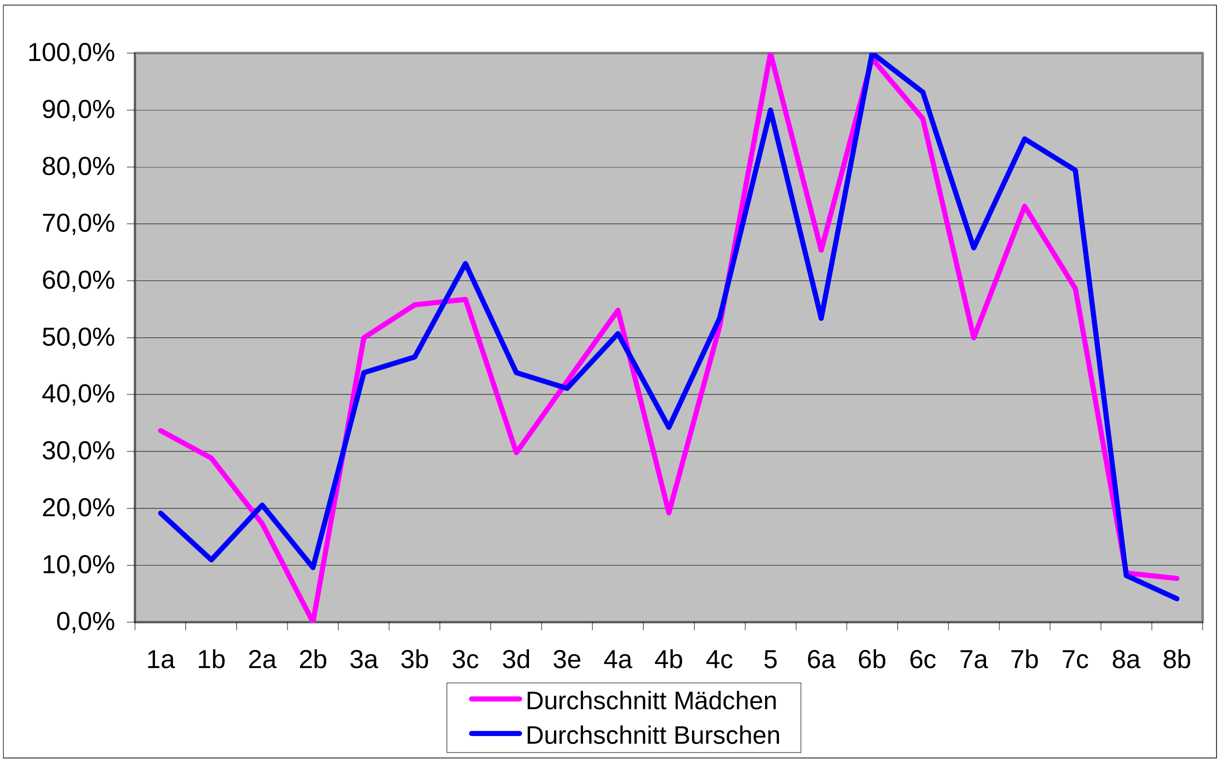
Vergleich von Lehrer- und Schülereinschätzung



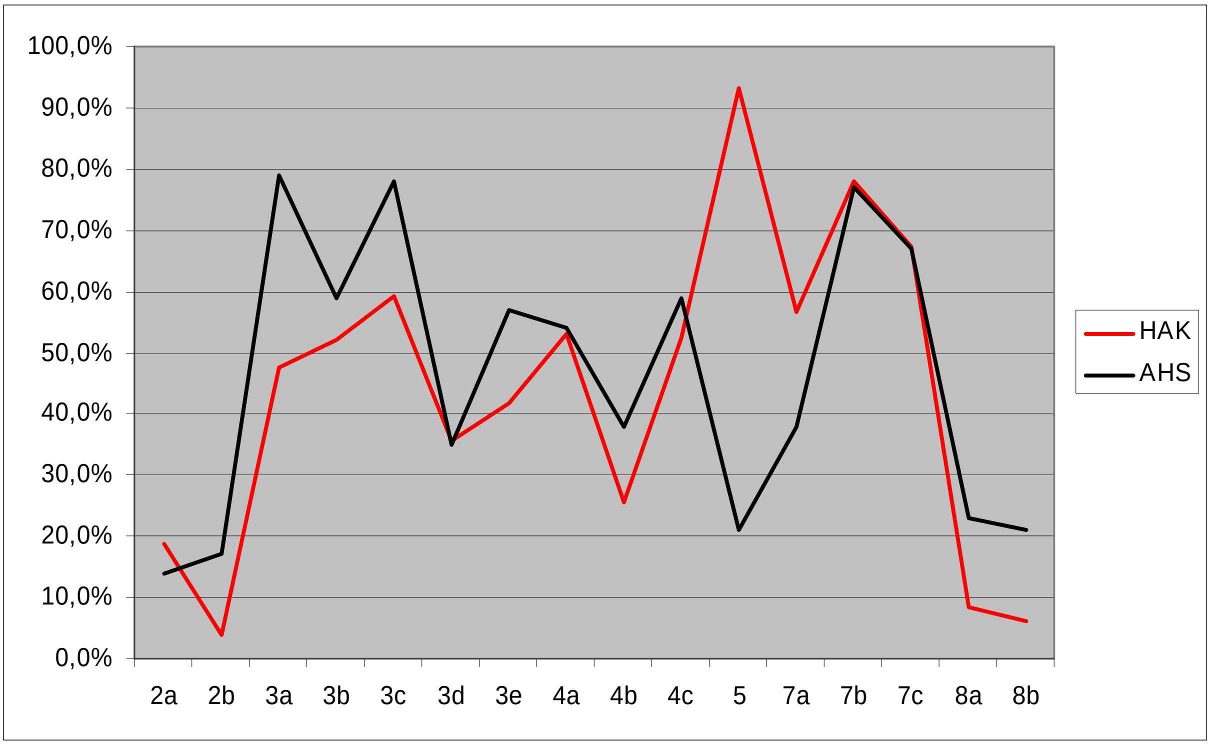
Betrachtung der einzelnen Beispiele



Geschlechtsspezifische Auswertung



Vergleich AHS-HAK



Jahrgangübergreifender Vergleich

- Beispiele zur Abschreibung
  in 3er, 4er, 5er Klasse
- Beispiele zu BruttoPreis
  in 3er, 4er, 5er Klasse
- Beispiele zu Wachstum
  in 4er, 5er Klasse

Beispielvergleich