Austrian Center for Didactics of Computer Algebra

Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

Neue Medien und Methodik im Mathematikunterricht
(Projekt CA IV)

Projektgruppe 3

Leistungsmessung und –bewertung Qualitätsstandards

Hollabrunn, Dezember 2002

PROJEKTGRUPPE 3

Leistungsmessung und Leistungsbeurteilung, Qualitätsstandards

INHALTSVERZEICHNIS

1 EINLEITUNG

1.1 Vorwort von LSI Hofrat Mag. Dr. Helmut Heugl

Motive für die Beschäftigung mit diesen Themen:

(1) Idee der Forschungsprojekte von ACDCA war es immer, aus Beobachtungen des Schülervehaltens im regulären, computerunterstützten Unterricht Erkenntnisse für die inhaltliche und didaktische Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts zu gewinnen. Ausgelöst durch die neuen Lehr- und Lernformen ergab sich schon bald die Notwendigkeit, die Leistungsmessung und –bewertung zu untersuchen. Die traditionellen Formen der Leistungsbeurteilung, insbesondere das Übergewicht der klassischen Schularbeiten, passen nicht zum schülerzentrierten, experimentellen Lernen, das durch die neuen Werkzeuge initiiert wird. Diese Untersuchung begann als längerfristig angelegtes Projekt schon im Jahr 1998 im Rahmen des Projekts III.
Folgende Arten von Leistungsmessungen wurden untersucht und weiterentwickelt:

- **Kurzarbeiten** zur Messung unverzichtbarer Grundkompetenzen. Die Schüler sollten die Notwendigkeit der Beherrschung solcher „Bausteine“ für das Problemlösen erkennen. Je nach Ziel war die Verwendung der Technologie zugelasssen oder nicht.
- **Längere Problemlösearbeiten** zur Messung der Problemlösekompetenz unter den für Technologieunterstützung typischen Arbeitsbedingungen, das heißt, Nutzung von passenden Materialien, freie Nutzung der Technologie, bis hin zur Nutzung eines Internetzuganges. Es gab auch Versuche, solche Arbeiten in Gruppen zu machen.
- An Stelle zeitlich klar definierter schriftlicher Arbeiten konnten die Schüler **Facharbeiten** erstellen. Solche Arbeitsaufträge wurden entweder an einzelne Schüler oder an Gruppen gegeben. Eine genauere Beschreibung findet sich im Kapitel 2.4.

(2) Die Beobachtung des Schülerverhaltens in den Versuchsklassen einerseits und die Forderungen der neuen österreichischen Lehrpläne andererseits erfordern eine Schwerpunktverschiebung bei den Zielen des Lernens. Dieser neue Lernbegriff war Gegenstand unserer Untersuchungen. Es geht dabei nicht nur um

- das fachlich inhaltliche Lernen, sondern auch um
- das Methodenlernen,
- das soziale Lernen und
- das Persönlichkeitslernen.

Ein besonderes Untersuchungsfeld war dabei die Facharbeit, wo versucht wurde, diese Kompetenzen nicht nur zu messen, sondern sie auch in die Note mit einzubeziehen.

(3) Die derzeitige Diskussion in Österreich über Standards, neue Lehrpläne, neue Bestimmungen zur Leistungsbeurteilung und Berechtigungsvergabe hatten auch für unser Projekt zusätzliche Forschungsaufträge zur Folge:

- An der Schnittstelle Schule – Universität wird ja schon immer darüber diskutiert, ob die Studenten die nötigen Voraussetzungen für ein Studium mitbringen. Diese Diskussion wurde durch die Nutzung der Technologie noch verschärft, da man an der Universität vielfach der Nutzung neuer Technologien und insbesondere der Computeralgebra Systeme sehr reserviert gegenüber steht. Daher wollten wir die Erwartungen der Universitätslehrer erfragen.

- Die Frage der Standards wird ja weltweit diskutiert. Unser Zugang ergab sich aus den Erfahrungen über die Messung von Grundkompetenzen bei Kurzarbeiten. Natürlich können gerade wir durch unsere Projekte einen Beitrag zur Frage leisten, welchen Einfluss die Technologienutzung auf solche unverzichtbaren Grundkompetenzen hat.

Eine Gefahr bei der Formulierung und Einforderung von Standards sehen wir darin, dass das ausschließliche Konzentrieren und Einfordern von Standards zu einer Trivialisierung des Mathematikunterrichts führen könnte. Daher ist ein weiterer Untersuchungsbereich das Feld der Ziele beim Problemlösen.

1.2 Terminübersicht der Treffen

- Planung des zentralen Planungstreffens in St. Pölten vom 23. – 24.5.01
- Vorbesprechung und Erstellung des Programmablaufes für das Seminar in Krems-Egelsee am 3.7.01
- Seminar der Gruppe 3 (Leistungsmessung u. –beurteilung) in Krems-Egelsee vom 28. – 30.8.01
- Seminar der Gruppe 3 (Leistungsmessung, -beurteilung, Qualitätsstandards) in Berndorf vom 15. – 16.11.01
- Treffen der zentralen Planungsgruppe in Krems am 14.12.01
- Treffen der zentralen Planungsgruppe in Wien am 25.1.02
- Treffen der zentralen Planungsgruppe in Krems am 21.2.02
- Seminar CA4 in Hollabrunn vom 19. – 22.3.02
- Treffen der zentralen Planungsgruppe in Wien am 3.5.02
- Planungsseminar des CAS-IV Projektes in St. Pölten vom 8. – 9.5.02
- Treffen der zentralen Planungsgruppe in St. Pölten am 8.8.02
- Seminar der Gruppe 3 in Groß-Siegharts vom 13. – 15.9.02
- Abschlussseminar CA4 in St. Pölten vom 1. – 3.10.02

1.3 Arbeitsbereiche

- Entwicklung und Erprobung entsprechender Lern- und Prüfungsformen
- Einbeziehen der Methodenkompetenz, der Sozialkompetenz und der Persönlichkeitskompetenz in die Prüfungssituation, nicht nur Konzentration auf die Fachkompetenz. Definition des Stellenwertes der obgenannten Kompetenzen sowie Besprechung von aktuellen Erwartungshorizonten
- Diskussion und Einsatz von neuen Formen der Leistungsbeurteilung – Vorschlag für eine Neuformulierung der Leistungsbeurteilungsverordnung
- Einrichten von Diskussionsforen zur kritischen Betrachtung und Weiterentwicklung von Qualitätsmerkmalen sowie Definition von unverzichtbaren Grundkompetenzen
- Sammeln, Ordnen, Entwickeln und Kommentieren von Aufgaben
- Schülerbefragung zur Akzeptanz der neuen Modelle
- Information und Befragung der Universitätsprofessoren zum Einsatz von CAS und anderer Software, sowie zu unverzichtbaren Rechenkompetenzen von Studienanfängern

1.4 Teilnehmerliste

Name	Schule
Mag. Martin Dangl	BG/BRG Waidhofen/Thaya
Mag. Eleonora Eisler	HAK Tulln
Mag. Peter Friebel	BG Wr. Neustadt, Gröhrmühlgasse
Mag. Sieglinde Fürst	BG/BRG Krems, Piaristengasse
Mag. Gerhard Hainscho	BORG Wolfsberg
Mag. Franz Hauser	BG/BRG u. BORG Oberpullendorf
LSI HR Dr. Helmut Heugl	Landesschulrat f. NÖ St. Pölten
Mag. Helmuth Hickel	BG Wien, Albertgasse
Mag. Judith Lindenberg	BG Wr. Neustadt, Babenbergerring
Mag. Hermine Rögner	Bundesschülerheim St. Pölten
Mag. Ingrid Schirmer	BG Berndorf
Mag. Angelika Thal	BG Berndorf
Mag. Elke Werner	BG Graz, Dreihackengasse
Mag. Gerhard Woltron	Priv. Gymnasium Sachsenbrunn
Dr. Otto Wurnig	BRG Graz, Keplerstraße

2 VORSCHLAG FÜR EINE NEUREGELUNG DER SCHULARBEITEN

in MATHEMATIK in der Oberstufe bzw. ÄNDERUNGSVORSCHLÄGE für eine NEUE LEISTUNGSBEURTEILUNGSVERORDNUNG aus der Sicht der MATHEMATIK.
geleitet und koordiniert von Dir. Mag. Helmuth Hickel

Auf Grund der verschiedensten Verhandlungen im Ministerium und der Existenz vieler Erfahrungswerte in den Bereichen CAS, Jahresarbeitszeit der ACDCA-Arbeitsgruppe besteht großes Interesse, dass diese Erfahrungen auch in die neue LBVO eingearbeitet werden.

Dir. Mag. Helmuth HICKEL erläuterte seine Vorschläge zur "Schularbeitsordnung". Besonders wichtig wären neben schriftlichen Überprüfungen auch Kompetenzen zur Präsentation von Ergebnissen. Im Gegenstand "Präsentation und Rhetorik" mit zwei Wochenstunden in der 6. Klasse im Schulversuch für die Oberstufe könnten Kompetenzen wie **Fremdsprachen - Sozialkompetenz - Selbständigkeit** besonders gefördert werden.

2.1 Neuregelung bei den Mathematikschularbeiten:

- In der **5. Klasse** beträgt in Mathematik der Zeitrahmen für die Durchführung von **Schularbeiten** insgesamt **fünf Unterrichtseinheiten** und die **Anzahl** der Schularbeiten **vier bis sechs**.

- In der **6. Klasse** beträgt in Mathematik der Zeitrahmen für die Durchführung von **Schularbeiten** insgesamt **sechs Unterrichtseinheiten** und die **Anzahl** der Schularbeiten **vier bis sechs**, davon muss **mindestens eine Schularbeit** zwischen **70 und 100 Minuten** betragen.

- In der **7. Klasse** beträgt in Mathematik der Zeitrahmen für die Durchführung von **Schularbeiten** insgesamt **sieben Unterrichtseinheiten** und die **Anzahl** der Schularbeiten **vier bis sechs**, davon müssen **mindestens zwei Schularbeiten** zwischen **70 und 100 Minuten** betragen.

- In der **8. Klasse** beträgt in Mathematik der Zeitrahmen für die Durchführung von **Schularbeiten** insgesamt **sieben Unterrichtseinheiten** und die **Anzahl** der Schularbeiten **drei bis vier**, davon muss **mindestens eine Schularbeit drei Unterrichtseinheiten** betragen.

2.2 Neuregelungen bei der Leistungsbeurteilungsverordnung:

- Die Arbeitsgruppe für Leistungsmessung vertritt die Meinung, dass das Erstellen eines **Portfolios** bzw. das Erstellen und Präsentieren einer **Facharbeit (Projektarbeit)** als **neue Formen der Leistungsfeststellung** in die Leistungsbeurteilungsverordnung aufgenommen werden sollten.

- Macht ein SchülerIn eine **Facharbeit (Projektarbeit)** in einem Gegenstand, in dem es Schularbeiten gibt, so kann der/die Schüler/Schülerin die **Gesamtarbeitszeit** bei den **Schularbeiten pro Schuljahr** um **eine Unterrichtseinheit** verkürzen.

- **Regelung beim Nachholen von Schularbeiten:**
  In der Oberstufe der AHS sind, sofern im **Semester** (8. Klasse: **Schuljahr**) mehr Schularbeiten als eine vorgesehen sind, so viele versäumte Schularbeiten nachzuholen, dass für das **Semester** (8. Klasse **Schuljahr**) mindestens zwei Schularbeiten, davon **auf alle Fälle jene mit mehr als einer Unterrichtseinheit**, erbracht werden. Die Schularbeiten sind nicht nachzuholen, sofern dies im betreffenden Semester nicht möglich ist und mit anderen Leistungsfeststellungen eine sichere Leistungsbeurteilung für die Schulstufe möglich ist.

- **Regelung beim Wiederholen von Schularbeiten:**
  Wenn die Leistungen von mehr als der Hälfte der Schüler (die Zahl jener Schüler, die die Schularbeit geschrieben haben, ist ausschlaggebend) bei einer Schularbeit mit „Nicht genügend" zu beurteilen sind, so ist die Schularbeit mit neuer Aufgabenstellung aus demselben Lehrstoffgebiet und der gleichen Arbeitszeit einmal zu wiederholen.

- Die Termine aller Schularbeiten mit einer Arbeitszeit von mehr als 25 Minuten (halbe Unterrichtseinheit) sind von der betreffenden Lehrkraft mit Zustimmung des Schulleiters im 1. Semester bis spätestens vier Wochen, im 2. Semester bis spätestens zwei Wochen nach Beginn des jeweiligen Semesters festzulegen und sodann unverzüglich den Schülern nachweislich bekannt zu geben. Die Termine der Schularbeiten sind im Klassenbuch zu vermerken. Eine Änderung dieser Termine ist nur mit Zustimmung des Schulleiters möglich; eine solche Änderung ist den Schülern ebenfalls nachweislich bekannt zu geben und im Klassenbuch zu vermerken.

- Die Termine aller Schularbeiten mit einer Arbeitszeit bis zu 25 Minuten (halbe Unterrichtseinheit) (**Kurzschularbeit)** sind dem Schüler spätestens 1 Woche vorher mit Angabe des Schularbeitsstoffes bekannt zu geben und im Klassenbuch bei den schriftlichen Überprüfungen mit Angabe der Arbeitszeit zu vermerken. Weiters sind diese Termine dem Schulleiter zu melden.

- **Vorbereitungszeit bei mündlichen Prüfungen in Mathematik:**

  Nach Meinung der Arbeitsgruppe sollte in der Oberstufe bei mündlichen Prüfungen in Mathematik die Möglichkeit eingeräumt werden, den Schülern eine Vorbereitungszeit zu gewähren. Folgende Formulierung wäre denkbar:

Nach Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellungen kann eine Vorbereitungszeit bis zu maximal 20 Minuten gewährt werden. Die Entscheidung über die Gewährung einer Vorbereitungszeit trifft die Lehrkraft.

2.3 Änderung im Schulzeitgesetz:

Die Arbeitsgruppe für Leistungsmessung schlägt für die **8. Klasse** vor, die **Semestereinteilung aufzuheben**. Es gibt am Ende des Unterrichtsjahres eine Jahresbeurteilung und Mitte Dezember (Weihnachten) eine Information der SchülerInnen über den Leistungsstand zu diesem Zeitpunkt.

2.4 Definition einer FACHARBEIT:

Eine **Facharbeit** ist eine schriftliche **Hausarbeit (Einzelarbeit oder Gruppenarbeit)** zu einem Thema aus dem **Mathematiklehrplan der Oberstufe**, eventuell auch **fächerübergreifend mit einem zweiten Unterrichtsfach der Oberstufe**. Der Schüler / die Schülerin hat die schriftliche **Hausarbeit** der Lehrkraft (den Lehrkräften) **abzugeben**, dieses Thema den Mitschülern zu **präsentieren**, die **fachlichen Inhalte zu erklären** und für die Mitschüler ein **Handout** zu erstellen. (Es kann der Schwerpunkt der Facharbeit auch nur im Referatsteil (in der Präsentation) liegen; der schriftliche Teil (Konzept) entfällt dann).

Zur **Gesamtbeurteilung** werden die **Fachkompetenz**, die **schriftlichen Ausarbeitungen** (formale Richtigkeit, Zitierregeln, ...), die **Präsentation**, die **Rhetorik** und **Sozialkompetenzen** (Eingehen auf Fragen von Mitschülern, Teamfähigkeit bei Gruppenarbeiten, ...) herangezogen. Für eine **positive Gesamtbeurteilung** ist eine **positive Beurteilung der Fachkompetenz** erforderlich.

2.5 KOMMENTAR zur FACHARBEIT

Vorschläge zur Durchführung und Beurteilung von Facharbeiten

2.5.1 Was ist eine Facharbeit?

Facharbeiten können prinzipiell in jedem Unterrichtsfach verfasst werden. Sie umfassen ein deutlich abgegrenztes Gebiet und bestehen aus einer schriftlichen Arbeit mit anschließender Präsentation. Im Folgenden soll besonders auf Facharbeiten aus dem Fach Mathematik Bezug genommen werden.

Die schriftliche Arbeit soll als Vorbereitung für spätere Studien einem dem Alter des Verfassers/ der Verfasserin entsprechende Wissenschaftlichkeit aufweisen. Eigenständiges Literaturstudium, Erstellen einer Gliederung, ein klares Konzept und einheitliches Layout werden gefordert.

Die Themen der Facharbeiten können frei (mit Billigung der Lehrkraft oder aus Vorschlägen der Lehrkraft) gewählt werden. Sie erlauben sowohl fachübergreifende Aufgabenstellungen (Physik, Wirtschaftskunde usw.) wie auch rein mathematische Themenstellungen. Die Inhalte können Ergänzungen, Vertiefungen oder Wiederholungen des Lehrstoffes sein. Es sind aber auch für den Schüler / die Schülerin neue Lernstoffe denkbar.

Das Layout soll sich an den Richtlinien zur Abfassung einer Diplomarbeit orientieren. (Literaturhinweis: Skriptum von M. KARMASIN / R. RIBING Die Gestaltung wissenschaftlicher Arbeiten – Ein Leitfaden für Haus-, Seminar- und Diplomarbeiten sowie Dissertationen).

Auf eine korrekte Rechtschreibung ist zu achten. Viele Fehler erlauben – auch bei sehr gutem Inhalt – keine sehr gute Beurteilung.

2.5.2 Vorbereitung auf eine Facharbeit

Um ein langsames Hinführen zum wissenschaftlichen Arbeiten zu erzielen, ist das Angebot einer begleitenden Unterrichtsveranstaltung zweckmäßig. Dieser Unterricht sollte Hilfen zum Erstellen einer naturwissenschaftlichen Arbeit, die Erarbeitung von Präsentationstechniken, Rhetorik (Sprache, Mimik, Gestik) und den Einsatz von Medien umfassen. Der Einsatz von Videos zur Selbstbeobachtung ist hilfreich.

Der Schüler/die Schülerin erstellt vorerst ein Konzept und eine Gliederung seines/ihres Themas. Die Literatur wird der Lehrkraft bekannt gegeben.

Die Lehrkraft begleitet die Vorarbeiten, indem Fragen erörtert und Hinweise soweit gegeben werden, dass die eigenständige Arbeit des Schülers/der Schülerin gewährleistet bleibt.

Zusätzlich zu der schriftlichen Arbeit wird eine Zusammenfassung der wesentlichen Inhalte erstellt, die den MitschülerInnen als Handout übergeben wird und somit Lernhilfe ist. Spezielle Aufgabenstellungen („Hausübungen“) für die MitschülerInnen wären wünschenswert, sind jedoch sicher nicht zu jedem Thema sinnvoll oder möglich.

2.5.3 Beurteilung einer Facharbeit

Die Beurteilung einer Facharbeit ist prozess- und produktorientiert. Durch die Unterschiede in den Anforderungen der einzelnen Themenstellungen können sich Schwierigkeiten beim Vergleich der Notengebung bei den einzelnen Arbeiten ergeben. Die Beurteilung von Persönlichkeitsmerkmalen wie Gestik, Mimik, Lautstärke beim Vortrag muss einfühlsam erfolgen. Auf die Entwicklung des jungen Menschen ist Rücksicht zu nehmen. Die Beurteilung in der üblichen Notenskala muss mit einer ausführlichen verbalen Beschreibung der Stärken und Schwächen der Leistung Hand in Hand gehen. Der Schwerpunkt der Beurteilungskriterien liegt auf mathematischen Kenntnissen. Facharbeiten sollen aber ein breites Spektrum an unterschiedlichen Kompetenzen zeigen. Der Präsentation kommt hier eine hohe Bedeutung zu, denn erst dann sind Klarheit der Gedanken, exaktes Arbeiten und tieferes Verständnis ersichtlich.

Ein gewisses Problem stellt die Vermittlung an die Mitschülerinnen dar, weil man von SchülerInnen nicht das didaktische Geschick einer Lehrkraft erwarten darf. Hier wird die Lehrperson öfters helfend eingreifen müssen.

Eine Facharbeit soll nicht rein reproduktiv sein, sondern auch einen kreativ-schöpferischen Vorgang darstellen. Das Verfassen einer Facharbeit soll für die SchülerInnen nicht nur ein Motivationsschub für den Mathematikunterricht sein, sondern auch zur Stärkung des Selbstwertgefühls - „Ich habe das ganz allein geschafft!“ - und damit zur Persönlichkeitsentwicklung beitragen.

BEURTEILUNGSBOGEN für FACHARBEITEN

Fachbereichsthema: .... Datum: ....

Kandidat: ....

Vorbereitung:

	1	3	5	0
1. Eigenständiges Erarbeiten des Inhaltes				
2. Literaturbeschaffung (Literaturliste)				
3. Einbeziehung von Medien (Tafelbilder, Folien, Graphiken, CAS)				
4. Erstellen eines Konzeptes und klare Gliederung desselben				
5. Auffinden von Übungsbeispielen				
6. Fächerübergreifende Aspekte				

Schriftliche Arbeit:

	1	3	5	0
1. Fachkompetenz				
2. Exaktheit				
3. Gliederung der Arbeit				
4. Berücksichtigung des Wissensstandes der MitschülerInnen				
5. Layout (Tafelbilder, Folien, Tabellen,..........)				
6. Rechtschreibung				
7. Erstellen einer Zusammenfassung für MitschülerInnen (Handout)				
8. Qualität der Übungsbeispiele				

Präsentation:

	1	3	5	0
1. Klarer Gedankengang (Argumentieren, Erklären, Beweisen,.....)				
2. Sicherheit des Wissens (Reaktion auf Fragen, ...)				
3. Aufbau der Inhalte (Gliederung)				
4. Freier Vortrag / Sprache, kurze prägnante Sätze				
5. Herausheben von wesentlichen Inhalten				
6. Gestik / Mimik / Körperhaltung / Blickkontakt				
7. Artikulation / Lautstärke / Sprechgeschwindigkeit				
8. Sicherheit / Auftreten				
9. Didakt. Fähigkeiten(Engagement/Überzeugungskraft/Motivation)				

1 ... ausgezeichnet
3 ... zufriedenstellend, könnte noch verbessert werden
0 ... kam nicht vor
5 ... nicht zufriedenstellend, stark verbesserungsbedürftig

Verbale Beschreibung:

Note:.....................................

3 SCHNITTSTELLE SCHULE/UNIVERSITÄT

koordiniert und betreut von Dr. Otto Wurnig

3.1 Planung des Teilprojektes: Schnittstelle Schule / Universität - Brief an die Hochschullehrer

In Österreich wurde die CA-Projektserie im Schuljahr 1993/94 mit dem **DERIVE-Projekt** gestartet und 1997/98 mit dem **TI-92 Projekt** fortgesetzt. Das österreichische CA-Projekt III (1999/2000) war dann an keine Gerätetype und an kein Softwareprodukt mehr gekoppelt und wurde daher allgemeiner formuliert: „**Elektronische Lernmedien im Mathematikunterricht**" (Einfluss auf das Lehren und Lernen, den Lehrplan und die Leistungsbeurteilung).
Im Frühjahr 2001 begannen die Vorarbeiten des österreichischen CA-Projektes IV: „**Technologie im Mathematikunterricht**" in Zusammenarbeit mit T³-Österreich. Es gab vier Teams:

- Gruppe 1: Betreuungs- und Fortbildungsgruppe
- Gruppe 2: Technologiegruppe, Unterrichtsmaterialien im Licht neuer Technologien
- Gruppe 3: Leistungsmessung und –bewertung, Qualitätsstandards
- Gruppe 4: Eigenverantwortliches, technologieunterstütztes Arbeiten

Im Endbericht der Arbeitsgruppe 4 des CA-III-Projektes: Einfluss von CAS auf die Prüfungssituation, wurde bezüglich der **Schnittstelle Schule/Universität** Folgendes festgestellt:

„Die erworbenen neuen Kompetenzen und Fertigkeiten, sowie Kenntnisse im Handling von Computeralgebrasystemen sind derzeit an den Hochschulen noch kaum gefragt. Im Gegensatz dazu werden aber gerade die in den AHS teilweise schon durch neue Wege ersetzten traditionellen Methoden in den ersten Semestern an den Unis verstärkt geprüft."

Es war daher von Anfang an ein Ziel der Gruppe 3 des CA-IV-Projektes, sich Maßnahmen zu überlegen, wie die Zusammenarbeit Schule/Universität verbessert werden könnte. Als eine wichtige Maßnahme wurde beschlossen, einen Informationsbrief an die Mathematik-Hochschullehrer auszuarbeiten und mit informativen Beilagen zu versehen. Bei der Gruppentagung am 15./16.11.2001 in Berndorf wurden vor allem drei Fragen an die Uni-Lehrer formuliert:

- Welche Grundkompetenzen halten Uni-Lehrer im Fach Mathematik für unverzichtbar?
- Welche Arbeitsmittel sind bei Prüfungen zugelassen?
  (Rechner, Formelsammlung, Mitschrift, CAS)
- Werden Computeralgebrasysteme an der Uni verwendet?

Als Zusammenfassung wurde im Gedächtnisprotokoll der Novembertagung festgehalten:

Es sollen die Anfangsbedingungen für Studienanfänger festgestellt werden, bzw. es wäre wünschenswert zu wissen: ***„Was wollen die Uni-Lehrer?“***

Mit der Durchführung dieses Teilprojektes wurde Otto Wurnig beauftragt. Brief und Fragebogen samt Beilagen wurden Ende Jänner 2002 an alle Mathematik-Institute der österreichischen Universitäten über die Mitglieder der Gruppe verteilt. Die ausgefüllten Fragebögen wurden bis Mitte März 2002 zurückerwartet, damit sie eine Woche später bei einem Projekttreffen in Hollabrunn (NÖ) das erste Mal ausgewertet werden könnten. Tatsächlich trafen 33 Fragebögen zeitgerecht ein und es konnte eine erste Auswertung vorgenommen werden. Außerdem wurde besprochen, wie die Anzahl der ausgefüllten Fragebögen noch erhöht werden könnte. Tatsächlich gelang es, noch 10 weitere ausgefüllt nachgeliefert zu bekommen, so dass jetzt, wenn auch in unterschiedlichem Maße, alle Universitäten erfasst werden konnten.
Bei der Tagung „Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung“ in Schöntal (2.-5.4.2002) konnte Otto Wurnig den deutschen Lehrern die ersten Ergebnisse präsentieren. Sie zeigten sich erstaunt, dass so viele Uni-Lehrer in Österreich den Computer in Lehrveranstaltungen einsetzen und überraschend viele Hilfsmittel bei Prüfungen zulassen.

3.2 Informationsschreiben an die Hochschulprofessoren

AUSTRIAN CENTER FOR DIDACTICS OF COMPUTER ALGEBRA

Dr. Otto Wurnig, Institut für Mathematik, Universität Graz
Mitarbeiter am CA-Projekt IV des BMBWK

Graz, 25.01.2002

Betrifft: Information über die CA-Projekte des BMBWK,
Fragebogen zur Findung von Qualitätsstandards.

Sehr geehrte Frau Universitätsprofessorin!
Sehr geehrter Herr Universitätsprofessor!

In den letzten Jahren hat das Austrian Center for Didactics of Computer Algebra (ACDCA) im Auftrag des BMBWK mehrere Forschungsprojekte an den höheren Schulen Österreichs durchgeführt. Die wichtigsten Ergebnisse der Projekte wurden unter www.acdca.ac.at veröffentlicht. Wir möchten Sie mit diesem Schreiben darüber informieren und gleichzeitig ersuchen, zur Verbesserung der Zusammenarbeit den beiliegenden Fragebogen auszufüllen.

Es war den beteiligten Versuchslehrern von Anfang an bewusst, dass Computeralgebrasysteme als Werkzeuge unreflektiert eingesetzt eine Gefahr für den Ertrag des Mathematikunterrichtes werden können. Daher war ein Ziel der ACDCA, Methoden wie z.B. das White-Box/Black-Box-Prinzip von B. Buchberger (RISC Linz) zu erproben, um die Qualität des Mathematikunterrichtes an den höheren Schulen Österreichs zu steigern. Nach Durchführung der CA-Projekte I und II mit 1500 Schülern und ihren 70 Mathematiklehrern aus 46 Schulen entwickelte die Arbeitsgruppe 2 im Schuljahr 1999/2000 einen Test, um den Lernerfolg von Klassen mit und ohne CAS-unterstützten Mathematikunterricht zu vergleichen.

Um diesen Test sinnvoll zusammenstellen zu können, musste sich die Arbeitsgruppe 2 zuerst mit Qualitätsstandards im Mathematikunterricht auseinandersetzen. In der Beilage 1 ist zu Ihrer Information der im Test verwendete Zielkatalog angeführt. In Beilage 2 finden Sie ein Beispiel für ein Ziel aus dem mathematischen Allgemeinwissen mit Auswertung und je ein Beispiel aus der 5., 6. und 7. Klasse mit der dazugehörenden Auswertung. Da die Vorarbeiten für die Erstellung des Testes sehr viel Zeit in Anspruch nahmen, konnte der Leistungsvergleich erst Anfang Juni 2000 durchgeführt werden, wodurch die 8. Klassen nicht mehr teilnehmen konnten. Es haben 1277 Schüler aus 74 Klassen von 26 Schulen aus allen 9 Bundesländern daran teilgenommen: 39 Klassen mit CAS-Rechnern (TI-92 oder TI 89) und 35 Klassen mit traditionellen Rechnern (TI-30 oder ähnliche).

Die Auswertung der Daten zeigt, dass die CAS-Schüler bei 51 von 54 Aufgaben und insgesamt in allen 3 getesteten Schulstufen besser abschneiden als die „nicht CAS-Schüler“.

Die Unterschiede sind teilweise gering, in den meisten Fällen und insbesondere beim Vergleich der einzelnen Schulstufen aber signifikant. Die Auswertung aller Aufgaben und der anonyme Rohdatensatz befindet sich zur Einsichtnahme auf der Internet-Homepage www.acdca.ac.at.

Für die Auswahl der Aufgaben galten folgende Richtlinien:

- **Kurze, mit und ohne CAS lösbare Aufgaben**, die zwar durchaus anspruchsvoll, aber doch „im Kopf" lösbar sein sollen.
- Nur **Aufgaben**, die Schüler und Schülerinnen **längerfristig** beherrschen sollen.
- **Allgemeine und klassenspezifische Aufgaben** aus der gerade aktuellen und aus bereits absolvierten Klassen.

Das Lehrerteam der Arbeitsgruppe 4 hat sich im Schuljahr 1999/2000 besonders mit dem Einfluss elektronischer Lernmedien auf die Leistungsbeurteilung befasst. Das Hauptziel bei der Untersuchung war, die Leistungsmessung und –bewertung der geänderten Lernsituation im computerunterstützten Mathematikunterricht anzupassen.

Der Endbericht hält fest:

- Die Trennung in **Kurztests von Grundfertigkeiten und längere Problemlösearbeiten** (Beilage 3) macht den Schülern und Schülerinnen bewusster, dass das Erlernen von Grundkompetenzen als Voraussetzung für das Problemlösen unerlässlich ist.
- **Die Überprüfung von Grundkompetenzen beschränkt sich nicht nur auf Rechenkompetenz.** Es werden auch Formelkenntnisse, Visualisierungskompetenz, Kompetenz der Rechnernutzung, aber auch Begründungskompetenzen, sowie grundlegende Anwendungskompetenzen geprüft.
- Die Problemlösearbeiten fördern und ermöglichen dank der Rechnernutzung und der Nutzung von Lernmedien eine **verstärkte Anwendungsorientierung** und eröffnen neue Möglichkeiten zur Überprüfung von fächerübergreifendem Lernen.
- Neben der mathematischen **Fachkompetenz** gewinnen die **Methodenkompetenz**, aber auch die **Sozialkompetenz** und die **Persönlichkeitskompetenz** als Bildungsauftrag des Faches Mathematik an Bedeutung.

Durch die Trennung in Kurztests und Problemlösearbeiten **ist die Zielorientierung für die Notenfindung erkennbar wichtiger geworden und** verstärkt die Forderung nach einem präzise zu definierenden Kern **im Lehrplan (= das Unverzichtbare) bzw.** nach Qualitätsstandards **in Form von Aufgabensequenzen.**

Diese Änderungen der Ziele des Mathematikunterrichts bringen mit sich, **dass die Überprüfung von Rechenfertigkeiten an Bedeutung verliert**, wie zum Beispiel die Überprüfung von Integrationstechniken. Im Endbericht der Arbeitsgruppe 4 ist bezüglich der **Schnittstelle Schule/Universität** jedoch Folgendes zu lesen:

„Die erworbenen neuen Kompetenzen und Fertigkeiten, sowie Kenntnisse im Handling von Computeralgebrasystemen sind derzeit an den Hochschulen noch kaum gefragt. Im Gegensatz dazu werden aber gerade die in den AHS teilweise schon durch neue Wege ersetzten traditionellen Methoden in den ersten Semestern an den Unis verstärkt geprüft."

Wir ersuchen Sie daher, uns durch die Bearbeitung des Fragebogens bei der Formulierung des Kernes und der Qualitätsstandards zu helfen. Bereits aufgenommene Gespräche mit Hochschullehrern aus Mathematik lassen erkennen, dass es neben dem Kern für alle Maturanten noch zusätzlicher Qualitäten in Mathematik bedarf, wenn Studien wie Ingenieurstudien, Wirtschaftswissenschaften oder Mathematik / Physik ergriffen werden. Außerdem möchten wir eine Übersicht gewinnen, welche Hilfsmittel bei Ihren schriftlichen Mathematikprüfungen zugelassen sind, da sehr widersprüchliche Meldungen von den Universitäten zu uns gelangen. Selbstverständlich werden wir Sie über die Ergebnisse der Umfrage informieren.

Herzlichen Dank für Ihre Mitarbeit!

Für das ACDCA-Team:
Dr. Otto Wurnig e.h.
Institut für Mathematik
A-8010 Graz, Heinrichstraße 36

3.3 Fragebogen an die Hochschulprofessoren

Qualität im Mathematikunterricht

Austrian Center for Didactics of Computer Algebra

Name in BLOCKSCHRIFT: ____

Hochschule: ____

Verwenden Sie Software bzw. CAS in Ihren Lehrveranstaltungen? ☐ ja ☐ nein

Halten Sie Lehrveranstaltungen, bei denen die Studenten zur Verwendung von Computer-Algebra-Systemen (CAS) verpflichtet werden? ☐ ja ☐ nein

Falls die Studenten zu CAS verpflichtet werden, für welche(s)? ____________________

Bitte kreuzen Sie an, wo Sie den Schwerpunkt Ihrer Mathematik-Lehrveranstaltungen haben und beziehen Sie sich bei der Beantwortung weiterer Fragen auf diesen Schwerpunkt.

☐ Math. f. Ingenieurwissenschaften ☐ Math. f. Wirtschaftswissenschaften

☐ Math. f. Mathematiker/Physiker ☐ Math. f. andere Naturwissenschaften

☐ Math. f. Fachhochschulen ☐ Math. f. Studien wie Psychologie u.a.

Für **wie wichtig** halten Sie CAS-Vorkenntnisse (Mathematica, DERIVE, Mathcad, TI-92 u.ä.) für die Studienanfänger Ihres angekreuzten Schwerpunktstudiums?

☐ gar nicht ☐ wenig ☐ ziemlich ☐ unbedingt

Welche der angegebenen Hilfsmittel sind bei den Prüfungen, der von Ihnen abgehaltenen Mathematik-Lehrveranstaltungen für die Studenten zugelassen? (Bitte ankreuzen.)

☐ Formelsammlung ☐ LV-Skriptum bzw. Mitschrift ☐ Lehrbücher

☐ einfache TR ☐ programmierbare TR ☐ CAS-Systeme

☐ andere Software wenn ja, welche? ______________________________

Füllen Sie auch die 2. Seite aus und senden Sie die ausgefüllten Fragebögen **bis 15.03.2002** an **Dr. Otto Wurnig**, 8010 Graz, Heinrichstraße 36 per Post oder per Fax (**0316 380 9815**).

Alle Daten werden vertraulich behandelt und nur für statistische Auswertungen erhoben

Fragebogen Seite 2

Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar?

Herget/Heugel/Kutzler/Lehmann (ACDCA-Homepge www.acdca.ac.at) gehen der Frage nach, welche handwerklichen Rechenfertigkeiten in Zeiten der Verfügbarkeit algebraischer Taschenrechner und Computer mit CAS unverzichtbar sind. Was sollte auch in Zukunft jeder Schüler und jede Schülerin noch „**per Hand**“, d.h. mit Schreibstift und Papier können?

Im Folgenden sind einige Beispiele zur Illustration ausgewählt. Kreuzen Sie bitte eine der vier Auswahlantworten **nach dem Grad der Wichtigkeit** an:

Umformen von Brüchen: $\frac{2}{x}-\frac{x}{5}=$

☐ gar nicht ☐ wenig ☐ ziemlich ☐ unbedingt

Lösen quadratischer Gleichungen: $x^2-x-6=0$

☐ gar nicht ☐ wenig ☐ ziemlich ☐ unbedingt

Rechnen mit Potenzen: $7\cdot 10^{-27}\cdot 5\cdot 10^{18}=$

☐ gar nicht ☐ wenig ☐ ziemlich ☐ unbedingt

Lösen von Ungleichungen: $-2x<+3$

☐ gar nicht ☐ wenig ☐ ziemlich ☐ unbedingt

Differenzieren: $y=3\cdot\sin\ (2x)+4$

☐ gar nicht ☐ wenig ☐ ziemlich ☐ unbedingt

Integrieren: $\int e^{2x}\ dx=$ bzw. $\int \frac{1}{x}\ dx=$

☐ gar nicht ☐ wenig ☐ ziemlich ☐ unbedingt

Geben Sie noch einige handwerkliche Grundkompetenzen an, die Ihrer Meinung nach unverzichtbar sind oder über den angegebenen Schwierigkeitsgrad deutlich hinausgehen:

3.4 Beilage 1:

Zielkatalog des Vergleichstests

(Arbeitsgruppe 2 des CA-Projektes III)

Allgemeinwissen

A1: Eine Formel deuten und auswerten können.
A2/3: Graphen interpretieren können. (Quelle für A2: TIMSS)
A4: Einen Sachverhalt graphisch – mit Skalierung – darstellen können. (TIMSS)
A5/6/7: Mit Prozenten hantieren können. (A6: TIMSS)
A8: Die mittlere Geschwindigkeit bestimmen können.

5. Klasse:

5.1: Einen gegebenen Text in eine Gleichung übersetzen können.
5.2: Ein einfaches Gleichungssystem lösen können.
5.3: Eine Geradengleichung aufstellen können.
5.4: Die Faktorisierung einer quadratischen Gleichung kennen und anwenden können.
5.5: Elementare Rechenoperationen mit Vektoren geometrisch deuten und ausführen können.

6. Klasse:

6.1: Potenzen richtig deuten können.
6.2/3/4: Eigenschaften der Winkelfunktionen kennen.
6.5: Lineares und exponentielles Wachstum unterscheiden können.

7. Klasse:

7.1: Grundlegende Begriffe mit Funktionen kennen.
7.2/4: Die geometrische Bedeutung der Ableitung kennen.
7.3: Die Bedeutung der Ableitung kennen und richtig schließen können.
7.5: Den relativen Anteil von relativer Häufigkeit unterscheiden können.

8. Klasse:

8.1: Die Eigenschaften von Stammfunktionen kennen.
8.2: Zusammenhänge zwischen Funktion und Stammfunktion analysieren können.
8.3: Zwischen Flächeninhalt und Wert des Integrals unterscheiden können.
8.4: Die Bedeutung von Mittelwert und Standardabweichung verstehen. (TIMSS)
8.5: Die Normalverteilung und ihre Standardabweichung verstehen.

3.5 Beilage 2:

Je eine Testfrage des Vergleichstests samt Auswertung zum Allgemeinwissen

3.5.1 Allgemeinwissen

- ***Ziel:*** *Eine Formel deuten und auswerten können.*

Eine Telefongesellschaft berechnet einen ihrer Tarife nach folgender Regel:

$$K = 0{,}03m + 18$$

K bezeichnet die monatlichen Kosten in Euro, m ist die Anzahl der Minuten, die in einem Monat telefoniert werden. Diese Regel bedeutet, dass für jede zusätzliche Minute die monatlichen Kosten um wie viele Euro anwachsen?

☐ 18 €	☒ 0,03 €	☐ 18,03 €	☐ …… €

- Für diese Aufgabe ist <u>ein Punkt</u> zu vergeben, wenn die angegebene Alternative als einzige angekreuzt wurde.

		5. Klasse	6. Klasse	7. Klasse	gesamt	TIMSS
alle	arithmetisches Mittel x	0,72	0,65	0,79	0,71	0,50
	Standardabweichung σ	0,45	0,48	0,41		
CAS	arithmetisches Mittel x	0,71	**0,75**	**0,90**	**0,77**	
	Standardabweichung σ	0,45	0,43	0,30		
x	arithmetisches Mittel x	**0,72**	0,54	0,68	0,64	
	Standardabweichung σ	0,45	0,50	0,47		
Signifikanz CAS / x		0,44	**0,00**	**0,00**	**0,00**	

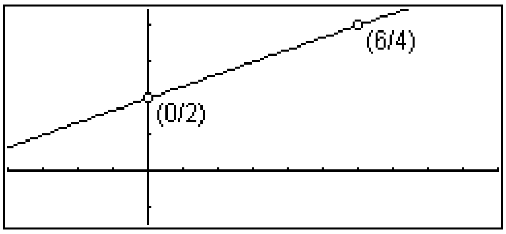
3.5.2 5. Klasse

- ***Ziel:*** *Eine Geradengleichung aufstellen können.*

Eine Gerade geht durch die Punkte $P(0/2)$ und $Q(6/4)$.

a) Wie lautet ihre Gleichung?

b) Wie groß ist ihre Steigung?



Die Geradengleichung lautet:	Die Steigung der Geraden beträgt:
$y=\frac{1}{3}\cdot x+2$	$\frac{1}{3}$

- Für die Teilaufgabe (a) ist ein Punkt zu vergeben, wenn die oben genannte oder eine äquivalente Gleichung (eventuell in Vektorform) eingetragen wurde.

- Für die Teilaufgabe (b) ist ein Punkt zu vergeben, wenn der oben genannte Wert eingetragen wurde.

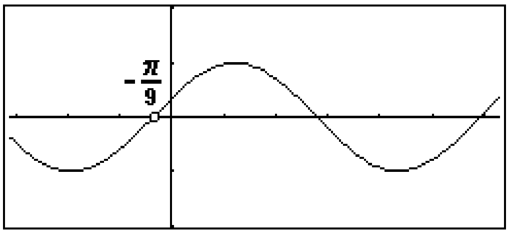
		5. Klasse a	**5. Klasse b**
alle	arithmetisches Mittel x Standardabweichung σ	0,58 0,49	0,47 0,50
CAS	arithmetisches Mittel x Standardabweichung σ	**0,62** 0,48	**0,51** 0,50
x	arithmetisches Mittel x Standardabweichung σ	0,51 0,50	0,40 0,49
Signifikanz CAS / x		**0,01**	**0,01**

3.5.3 6. Klasse

- ***Ziel:*** *Eigenschaften der Winkelfunktionen kennen.*

Stelle die gegebene Kurve

a) als Sinus-
b) als Cosinusfunktion dar:



$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{9}\right) = \sin\left(x - \frac{17\pi}{9}\right) \qquad y = \cos\left(x + \frac{29\pi}{18}\right) = \cos\left(x - \frac{7\pi}{18}\right)$$

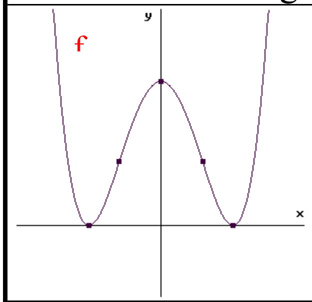
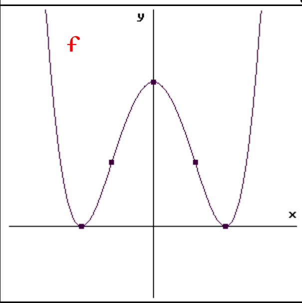
- Für die Teilaufgabe (a) ist ein Punkt zu vergeben, wenn eine der angegebenen Gleichungen eingetragen wurde.
- Für die Teilaufgabe (b) ist ein Punkt zu vergeben, wenn eine der angegebenen Gleichungen eingetragen wurde.

		6. Klasse a	**6. Klasse b**
alle	arithmetisches Mittel x	0,15	0,05
	Standardabweichung σ	0,35	0,21
CAS	arithmetisches Mittel x	0,27	0,07
	Standardabweichung σ	0,44	0,26
x	arithmetisches Mittel x	0,03	0,02
	Standardabweichung σ	0,16	0,15
Signifikanz CAS / x		0,00	0,01

3.5.4 7. Klasse

- ***Ziel:*** *Die geometrische Bedeutung der Ableitung kennen.*

Kennzeichne mit Farbe jene Bereiche der gegebenen Funktion f, wo

die erste Ableitung > 0 ist:	die zweite Ableitung > 0 ist:
	

- Bei dieser Aufgabe können <u>2 Punkte</u> erreicht werden:
- Pro Teilaufgabe ist <u>ein Punkt</u> zu vergeben, wenn jeweils der richtige Bereich (entweder als Kurvenstück oder als Intervall auf der x-Achse) richtig markiert wurde.

		7. Klasse
alle	arithmetisches Mittel x	0,66
	Standardabweichung σ	0,83
CAS	arithmetisches Mittel x	**0,82**
	Standardabweichung σ	0,88
x	arithmetisches Mittel x	0,50
	Standardabweichung σ	0,75
Signifikanz CAS / x		**0,00**

3.6 Beilage 3 : Übersicht zu den geplanten Untersuchungen zur Prüfungssituation in den Versuchsklassen

Austrian Center for Didactics of Computer Algebra

Dechant-Pfeiferstr. 3
A-2020 Hollabrunn

Tel.:+43-2952-4177-34
Fax: +43-2952-4177-20
E-Mail: acdca@pinoe-hl.ac.at

Helmut Heugl

FORSCHUNGSGRUPPE: LEISTUNGSMESSUNG, LEISTUNGSBEWERTUNG

Untersuchungen zur Prüfungssituation in den Versuchsklassen

Mögliche Untersuchungsbereiche:

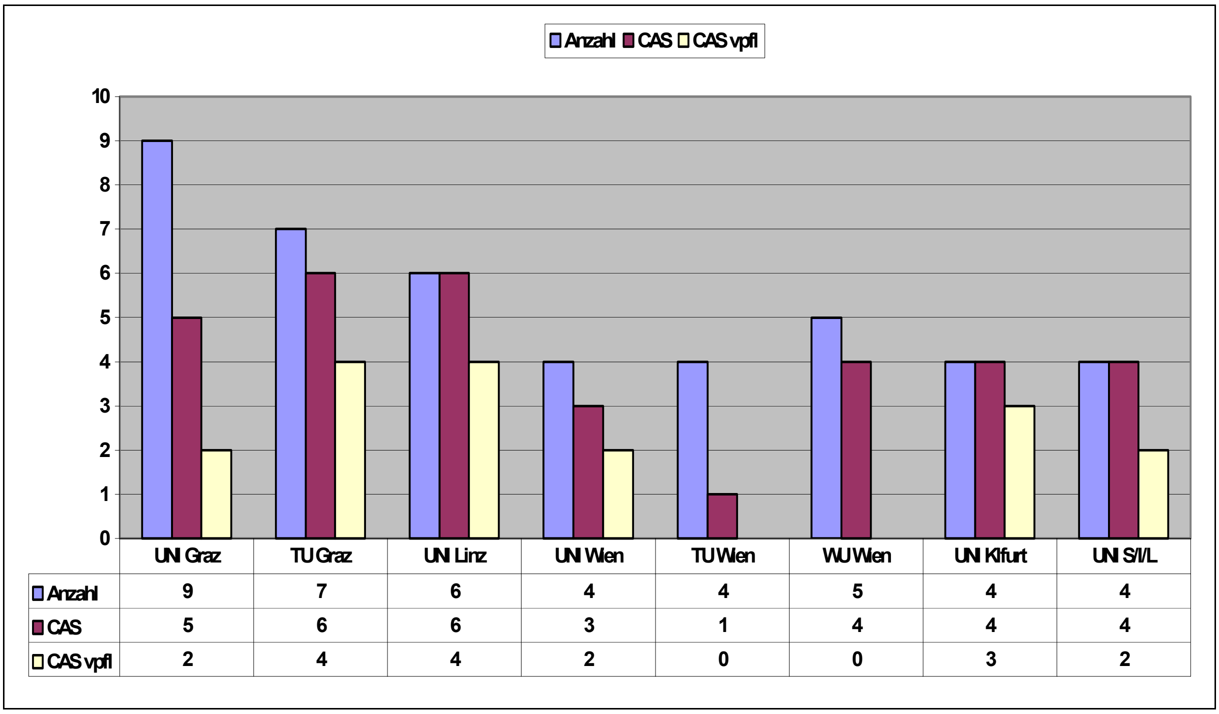
Bereich	Aktivitäten, Untersuchungsbereiche
Bereich 1: **„Stetige Fortsetzung“** der klassischen Schularbeit mit CAS	Sammeln, Entwickeln von Aufgaben. Untersuchen der Veränderung des Schüler-verhaltens. Frage der Dokumentation des Lösungsweges. Veränderung im Notenbild.
Bereich 2: **Problemlösearbeiten** mit Verwendung von Lernmedien: Stufe 1: Gemeinsam bzw. von den Lernenden entwickeltes Repetitorium. Stufe 2: Nach Vereinbarung mit dem Lehrer: Nur Heft oder nur Buch. Stufe 3: Beliebige von Schülern ausgewählte Medien.	Vorbereitung auf die Problemlösearbeit: Anleitungen zum Entwickeln des eigenen Lernmediums. Anleitung zum Nutzen von Medien beim Problemlösen. Bewusstmachen von heuristischen Strategien zum Problemlösen. Entwickeln von passenden Aufgaben und Beurteilungskriterien. Testen in der Versuchsklasse. Evaluation: Notenstatistiken. Lehrer-, Schülereindrücke. Informelle Tests gemeinsam mit Vergleichs-gruppen.
Bereich 3: **„Jahresprüfungszeit“**: z.B. 250 Minuten Zeit für schriftliche Prüfungen pro Jahr können folgendermaßen genutzt werden: *Kurze Überprüfungen von reproduktiven Fertigkeiten oder von reproduktivem Wissen* (eventuell auch ohne CAS). Dauer z.B. 20 Minuten. Beispiel: Rechenfertigkeiten beim Bruchrechnen. *Längere schriftliche Arbeiten als Problemlöse-arbeiten,* wo die Schüler auch Zeit zum Experimentieren haben und eventuell auch Lernmedien verwenden dürfen. Dauer z.B. 2 Unterrichtsstunden. Natürlich müssen die Noten gewichtet werden. Eine Variante ist auch , weniger schriftliche Prüfungen vorzusehen und dafür den übrigen Leistungen mehr Gewicht zu geben.	Vorbereiten der Schüler auf diese Prüfungs-situation durch informelle Tests und durch Lernphasen, wo in Einzelarbeit diese Situation geprobt werden kann. Bewusstmachen heuristischer Strategien (z.B. Teststrategien). Entwickeln von passenden Aufgaben und Beurteilungskriterien, Testen in der Versuchsklasse. Evaluation: Lehrer-, Schülereindrücke. Informelle Tests gemeinsam mit Vergleichsgruppen Notenstatistiken

3.7 Auswertung der Fragebögen

Nach dem Stand vom 27.09.2002 sind **43 Fragebögen**, davon 2 ohne Namensangabe, eingelangt. Diese verteilen sich, wie folgt, auf die einzelnen Universitäten in Österreich:

	U Graz	TU Graz	U Linz	U Wien	TU Wien	WU Wien	U Kft	U Sb	U Ib	U Le
Anzahl	9	7	6	4	4	5	4	1	1	2

Werden Computeralgebrasysteme an der Uni verwendet?



Von den 43 Uni-Lehrern verwenden somit 33, also **76,7%**, CAS oder Software in ihren Lehrveranstaltungen.

Die Frage: ***Halten Sie Lehrveranstaltungen, bei denen die Studenten zur Verwendung von Computer-Algebra-Systemen (CAS) verpflichtet werden?*** haben von den 33 Hochschullehrern 17 bejaht, 24 verneint und 2 nicht beantwortet.
Es fallen bei der Beantwortung zwei Universitäten, die TU Wien und die WU Wien, durch eine Nullmeldung besonders auf. Bei der TU Wien stammen alle vier aus dem Fachbereich Informatik. Ein Fragebogen war in Bezug auf Softwareeinsatz nicht ausgefüllt. Auf einem Fragebogen ist extra betont „Software ja und CAS nein“. Zwei Fragebögen zeigen ein klares Nein. Bei der WU Wien ist einmal extra festgehalten, dass Numerik-Pakete und keine Algebra-Pakete bei der Ausbildung benötigt werden.

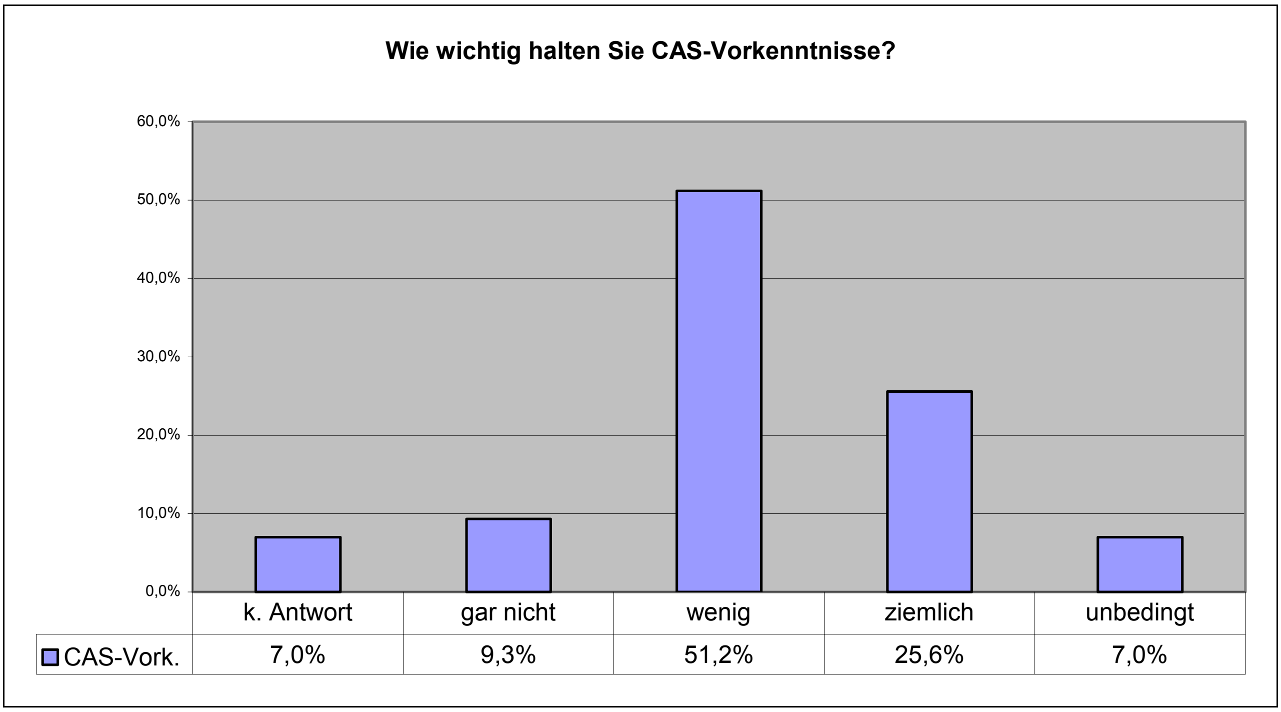
Auf die Frage: ***Falls die Studenten zu CAS verpflichtet werden, für welche?*** gab es folgende Angaben: MATHEMATICA 9 DERIVE 7 MAPLE 6 MATHLAB 1

Sehr interessant für die Einschätzung der weiteren Antworten ist die **Verteilung der Uni-Lehrer auf die Fachbereiche**, wo sie in Bezug auf die Mathematik-Lehrveranstaltungen ihren Schwerpunkt sehen:

□ Math. f. Ingenieurwissenschaften	**10**	□ Math. f. Wirtschaftswissenschaften	**9**
□ Math. f. Mathematiker/Physiker	**25**	□ Math. f. andere Naturw./Informatik	**6**
□ Math. f. Fachhochschulen	**2**	□ Math. f. Studien wie Psychologie u.a.	**0**

Bei 10 Fragebögen wurden mehrere Schwerpunkte genannt.

Es ist interessant, dass mehr als die Hälfte der Uni-Lehrer CAS-Vorkenntnisse nur für wenig wichtig halten.



In Zahlen bedeutet dies die folgende Verteilung:

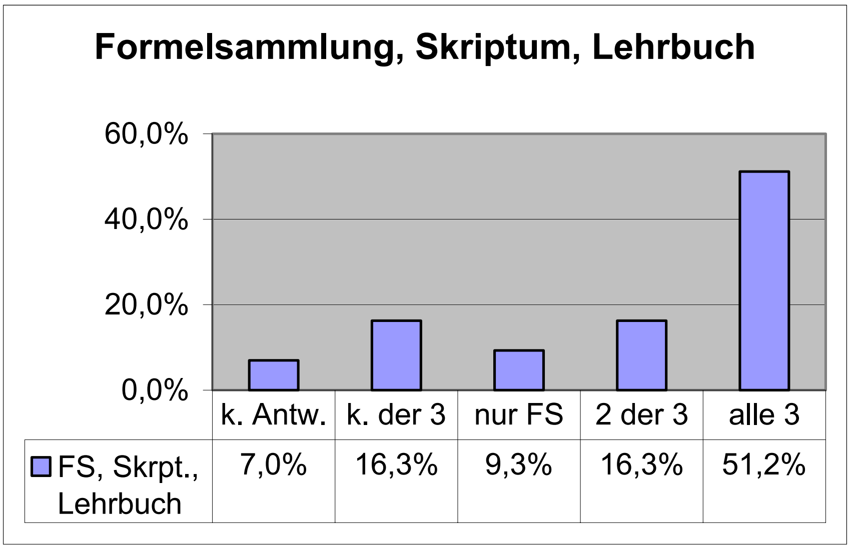
	keine Antwort	gar nicht	wenig	ziemlich	unbedingt
CAS-Vork.	3	4	22	11	3

Auf zwei Fragebögen wurde die Antwort „***wenig wichtig***“ kommentiert:

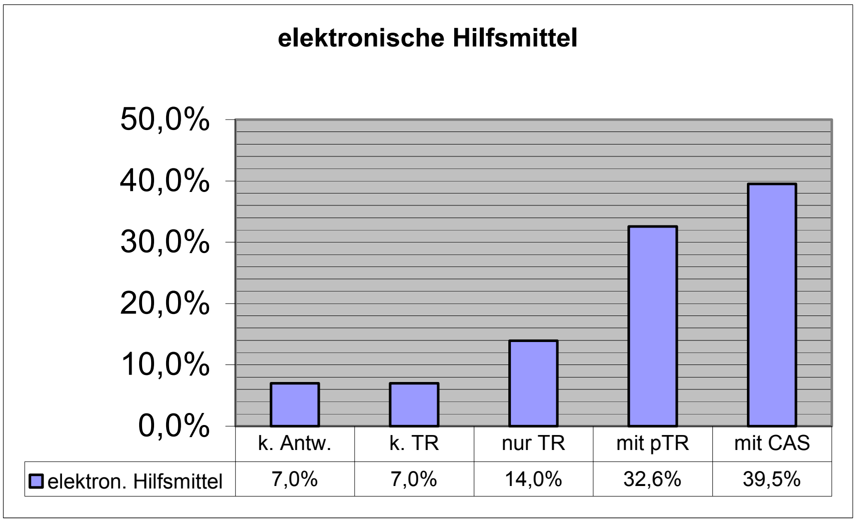
- Statt lang und breit zu behandeln, wie man CAS einsetzt (***man kann es rasch selbst lernen***), sollte man besser darüber nachdenken, wie man das abstrakte Denken hinreichend schult und moderne Inhalte (nach Wahl des Lehrers) aufnehmen.

- CAS-Vorkenntnisse sind hilfreich, aber weniger wichtig als viele andere Vorkenntnisse (z.B. ein „sicheres“ Gefühl für die wichtigsten Grundfunktionen). ***Meiner Erfahrung nach erlernen Studierende CAS-Benützung darüber hinaus so schnell wie früher das Maschinschreiben***.

Welche Arbeitsmittel sind bei Prüfungen zugelassen?
(Rechner, Formelsammlung, Mitschrift, CAS)



keine Antwort	keine der drei	nur F-heft	zwei der drei	alle drei	Summe
3	7	4	7	22	43



keine Antwort	kein TR	nur der TR	auch prog. TR	auch CAS	Summe
3	3	6	14	17	43

Welche Grundkompetenzen halten Uni-Lehrer im Fach Mathematik für unverzichtbar?

Diese zweite Seite des Fragebogens wurde auf 41 Fragebögen ausgefüllt.

	gar nicht	wenig	ziemlich	unbedingt
Umformen von Brüchen: $\frac{2}{x} - \frac{x}{5} =$	1	2	1	37
Lösen von quadratischen Gleichg.: $x^2 - x - 6 = 0$	1	5	8	27
Rechnen mit Potenzen: $7 \cdot 10^{-27} \cdot 5 \cdot 10^{18} =$	0	3	4	34
Lösen von Ungleichungen: $-2x < +3$	0	2	11	28
Differenzieren: $y = 3 \cdot \sin(2x) + 4$	2	5	12	22
Integrieren: $\int e^{2x}\,dx =$ bzw. $\int \frac{1}{x}\,dx =$	2	8	13	18
SUMME	**6**	**25**	**49**	**166**

Die Meinung der Uni-Lehrer ist somit unterschiedlich. Um diese Unterschiede besser zu erkennen, wurde die **Kategorie „unbedingt wichtig“**, die 166 mal gegeben wurde, auf die **Häufigkeit ihres Auftretens pro Person** untersucht.

„unbedingt“	0 mal	1 mal	2 mal	3 mal	4 mal	5 mal	6 mal
Anzahl der Personen	2	4	5	4	6	4	16
Prozente	4,9%	9,8%	12,2%	9,8%	14,6%	9,8%	39,0%

Somit haben **15 Personen höchstens 3 mal** die Kategorie „unbedingt wichtig“ angekreuzt, hingegen halten **16 Personen alle 6 Punkte** für unbedingt notwendig.

Drei Kommentare der **Gruppe, die alle 6 Punkte für unbedingt notwendig hält**:

- *„Das, was auf Seite 2 des Fragebogens zu leisten ist, muss jeder Maturant mit Maturazeugnis im Schlaf beherrschen. Dazu sind keine acht Jahre Unterricht nötig."*

- *„Ohne die sechs angeführten Grundkompetenzen im „handwerklichen" Sinn ist es nahezu unmöglich, die naturwissenschaftlichen Einführungsveranstaltungen des Ingenieurstudiums positiv zu absolvieren."*

- *Die SchülerInnen sollten auch in Zukunft alle diese 6 Beispiele (wegen der einfachen numerischen Daten) „per Hand" lösen können, da dies für ein Verständnis des jeweiligen Stoffgebietes unumgänglich ist.*
  Sie sollten sich aber auch bewusst sein, dass solche (und numerisch wesentlich „komplizierter" zu rechnende) Beispiele wesentlich schneller mit CAS gelöst werden können und auch dies beherrschen.
  Die Beherrschung eines mathematischen Stoffgebietes, ohne dabei die „einfachsten" Beispiele per Hand lösen zu können, ist meiner Meinung nach Unsinn."

Zwei Kommentare der **Gruppe, die nur wenige Punkte für unbedingt notwendig hält**:

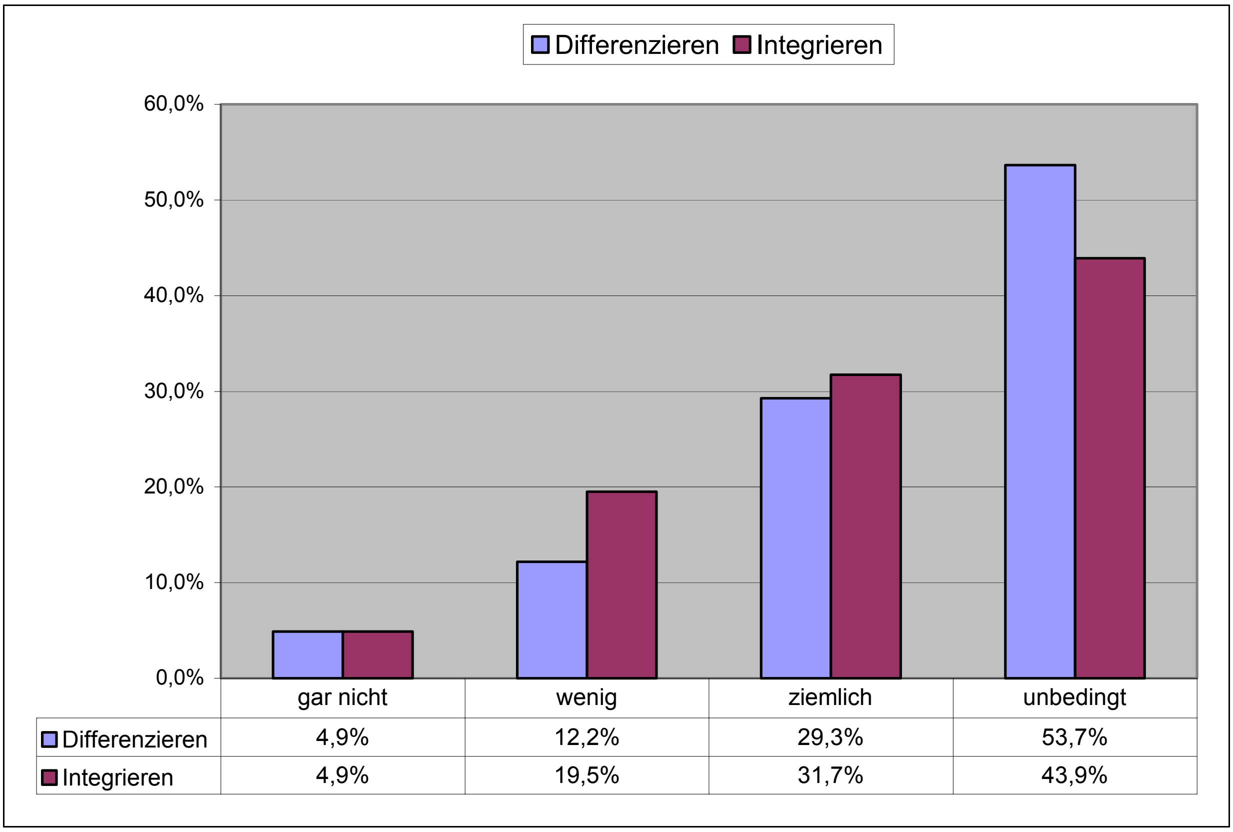
- *„Handwerkliche Grundkompetenzen gehören meiner Ansicht nach nicht zu den „unverzichtbaren" Grundkompetenzen! Es gibt viele mathematische Grundkompetenzen (wie Darstellen, Interpretieren), die ich hingegen für den Mathematikunterricht für unverzichtbar halte."*

- *„Es gibt sehr viele Grundkompetenzen, die für einen vernünftigen Mathematikunterricht unverzichtbar sind. „Handwerkliche" Grundkompetenzen im hier verstandenen Sinn gehören da m. E. aber nicht dazu.*
  Natürlich halte ich es für sinnvoll, wenn sehr einfache Umformungen, die häufig auftreten, auch „händisch" gekonnt werden – auch in einem CAS-unterstützten Unterricht, weil einfachste Umformungen besser (ökonomischer/schneller) mit der Hand ausgeführt werden als mit CAS.
  Aber ich würde keine Unterrichtszeit dafür aufwenden, um diese Dinge explizit zu üben. Auch und gerade in einem CAS-unterstützten Unterricht sollte man lernen, ökonomisch zu arbeiten und Lernende sollten „von selbst" im Laufe der Zeit draufkommen, dass es ökonomischer ist, $2x + 3 = 0$ (o. Ä.) mit der Hand zu lösen als dafür den Rechner einzuschalten."

Nach den Kommentaren soll noch einmal die **Verteilung der „unbedingt wichtig" auf die 6 Kapitel** betrachtet werden:

„unbedingt"	Brüche	Qu-Glg	Potenzen	Unglg.	Diff.	Integ.	Grd. Zahl
Anzahl	37	27	34	28	22	18	41
Prozente	90,2%	65,9%	82,9%	68,3%	53,7%	43,9%	100%

Beim Differenzieren und Integrieren gehen die Meinungen der Uni-Lehrer am weitesten auseinander!



Weitere handwerkliche Grundkompetenzen, die von den Uni-Lehrern als unverzichtbar vorgeschlagen wurden: (Ergänzung zum Fragebogen)

Allgemeine Aussagen

Verständnis der Stoffgebiete (mit und ohne CAS), Gefühl für Math.	2
graphische Fähigkeiten, Skizzieren von Funktionen (zB. $e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$)	3 Nennungen
Modellierung/Formalisierung, informelle Beschreibungen	2
Grundkonzept mathematischer Argumentation (Schlussweisen, Beweisführung)	
Variablenbegriff, Konzeptunterschiede Variable/Konstante	2
Richtiges Einsetzen in gegebene Formeln	

1) Rechnen, Umformen, Gleichungen

Kopfrechnen, Abschätzen der Lösung	4 Nennungen
Gefühl für Größenordnungen; Bruchrechnen (1/4:1/3)	
Prozentrechnen, Schlussrechnen	2
Termumformungen $x(y+z)=?$; Herausheben $(a+b)a+(a+b)b \rightarrow (a+b)^2$	6 Nennungen
Rechnen mit komplexen Zahlen; Lösen einfacher Gleichungen	
Lineare Gleichungssysteme (2x2)	4 Nennungen

2) Funktionen

Funktionsbegriff, Hintereinanderausführen von Fkt., Substitution	
Rechnen mit Logarithmen	6 Nennungen
Winkelfunktionen ($\sin(\pi/4)$, $\sin(\pi/3)$); Rechnen mit Winkelfunktionen zB. $\sin(x+y)$	

3) <u>Analysis</u>

Berechnung von Grenzwerten 2 Nennungen
Unendliche Reihen; Rechnen mit indizierten Größen und Summenzeichen
Rechnen mit Summen; Taylorreihe (1dim.-Restglied)
Wichtiger, als gewisse Integrale zu berechnen, ist die Kenntnis, was man damit machen kann.

4) <u>Andere Gebiete</u>

Vektoroperationen (inkl. skalares Produkt) 2 Nennungen
Rechnen in der Aussagenlogik
Statistik, Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung

3.8 E-mail von Univ. Prof. Dr. Bruno Buchberger

E-Mail von Bruno.Buchberger@risc.uni-linz.ac.at Sun, 24 Feb 2002 14:42:44 +0900

Betrifft: **Fragebogen zur CA**.

Lieber Herr Dr. Wurnig!

Es ist super, dass Sie sich um einen verbesserten Mathematikunterricht im Gymnasium (und an der Uni) annehmen, der auch die algorithmische Mathematik in ihrer heute möglichen Form unter Einsatz von Computern berücksichtigt.

Ich freue mich natürlich auch, dass Sie sich auf mein White-Box/Black-Box Prinzip etc. beziehen.

Nur habe ich beim Lesen des Briefs und dann auch das Fragebogens Zweifel bekommen, ob das WB/BB-Prinzip wirklich verstanden worden ist. Denn sonst könnte man ja auf S. 2 des Briefs nicht davon sprechen, dass „die Überprüfung von Rechenfertigkeiten an Bedeutung verliert“. Diese Frage ist eben weder mit ja noch nein zu beantworten. **Insbesondere ist es nicht so, dass im Zeitalter des Computers (oder der CAS) Rechenfertigkeiten überflüssig sind**. Überspitzt könnte man umgekehrt geradezu sagen, dass heute wie noch nie klar wird, **dass Mathematik zu betreiben bedeutet, Nachdenken in Operieren zu verwandeln** (und dann dem Computer zu übertragen). Aber es kommt eben auf die Zusammenschau des Gesamtprozesses an und nicht auf eine Kontraposition von Nachdenken auf der einen Seite und Operieren auf der anderen.

Genauso fraglich ist der Begriff der „*CAS-Klassen*“ oder „*CAS-Schüler“*. Mir steigt ein bisschen Angst auf, wenn ich diesen Begriff lese. Wie ist er definiert?

Genauso ist die **Frage** im Fragebogen **nach den zugelassenen Hilfsmitteln** so nicht beantwortbar (und sollte so auch nicht gestellt werden): Es hängt ja im Sinne des WB/BB-Prinzips ganz von der jeweiligen Lernsituation ab, welche Hilfsmittel sinnvoll oder sinnlos sind.

Ich sehe also, dass hier wohl noch allerorts - und insbesondere auch dort, wo ja die Zukunft der Mathematikdidaktik gemacht wird – größte Missverständnisse über im Prinzip einfache Dinge herrschen. Da ich aber nicht nur kritisieren und Bedenken äußern möchte, gebe ich hiemit meine Bereitschaft kund, den Mitgliedern des ACDCA und auch beliebig anderen, die einfachen Grundprinzipien einer ganzheitlichen Sicht der Mathematik und des Forschens und Lehrens in der Mathematik, sowie des Anwendens der Mathematik im heutigen Computer-Zeitalter aus meiner (natürlich subjektiven Sicht) zu erklären bzw. mit ihnen zu erarbeiten und zwar an Hand von Beispielen.

Beste Grüße, Bruno Buchberger.

Bruno Buchberger, Dr. phil. DDr. hc.
Professor of Computer Mathematics, Research Institute for Symbolic Computation
Johannes Kepler University, A4232 Castle of Hagenberg, Austria
Phone office: ++43 732 2468 9941, Mobile Phone: ++43 664 4211646
Fax: ++43 732 2468 9930, E-mail: Buchberger@RISC.Uni-Linz.ac.at
WWW: http://www.risc.uni-linz.ac.at/people/buchberg/

Univ.Prof. Dr. Bruno Buchberger hielt am 10.07.2002
bei der internationalen ACDCA-Tagung Visit-me den Plenarvortrag
„Teaching Without Teachers?“

4 GRUNDKOMPETENZEN UND STANDARDS

betreut und geleitet von LSI Mag. Dr. Helmut Heugl:

Motive für die Beschäftigung mit dem Thema:

- **Die Untersuchungen zum Thema „Neue Formen der Leistungsmessung und –bewertung" im Rahmen des CAS-Projektes III** [http://www.acdca.ac.at] haben zu 2 Arten schriftlicher Leistungsmessungen geführt:

  - Problemlösearbeiten: Längere Arbeiten zur Überprüfung der Problemlösekompetenz, bei denen einerseits ein CAS-Rechner und andererseits auch andere Lernmedien zugelassen waren, sowie
  - Arbeiten zur Überprüfung von Grundkompetenzen: Das sind kürzere Arbeiten, bei denen je nach Ziel Hilfsmittel wie CAS-Rechner zugelassen waren oder auch nicht.

Die dadurch entstandenen Diskussionen über die Frage „Was sind unverzichtbare Grundkompetenzen?" und die Ergebnisse der Untersuchung sind unabhängig von der verwendeten Technologie von Bedeutung für die derzeitige Standarddiskussion und für die demnächst in Kraft tretenden Lehrpläne.

- Die Kernfrage in der derzeitigen **Standarddiskussion** lautet ebenfalls „Was sind unverzichtbare Grundkompetenzen?" Daher kann unsere Erfahrung auf diesem Gebiet sowohl für die Begriffsklärung als auch für die Entwicklung von Messinstrumenten von Nutzen sein.

- Kennzeichnend für **die neuen Lehrpläne** ist einerseits die Festlegung eines Lehrplankerns, der zu erfüllen ist, andererseits aber ein niedrigerer Verbindlichkeitsgrad. Dieser scheinbare Widerspruch erfordert aber auch die Festlegung von unverzichtbaren Grundkompetenzen.

- **Die Ergebnisse von TIMSS und PISA** haben den Begriff und die Notwendigkeit des Beherrschens unverzichtbarer Grundkompetenzen in das öffentliche Bewusstsein gerückt.

4.1 Standards – wozu?

4.1.1 Die Situation in Österreich

- **Internationalisierung und Globalisierung** haben auch im Bildungsbereich neue Rahmenbedingungen geschaffen. Der Blick nach außen wird wichtiger und selbstverständlicher. Die verstärkte zwischenstaatliche Zusammenarbeit und die größere Mobilität der Menschen erfordert auch eine **gewisse Vergleichbarkeit der Qualifikationen**. [Specht, 2000].
  Im Unterschied zu Ländern wie Frankreich, Schweden oder Schweiz verfügt Österreich über kein nationales Indikatorensystem zum fortlaufenden Monitoring der Funktionstüchtigkeit („Qualität"?) des Schulsystems. Man scheint sich in Österreich nach wie vor darauf zu verlassen oder darauf zu hoffen, dass das Schulsystem und die Schüler leisten, was sie sollen [Gruber, 1999].

- Dank der **Qualitätsinitiative** des Unterrichtsministeriums kommt es in Österreich erstmals zu einer über die Arbeit des einzelnen Lehrers hinausgehenden **Einbeziehung der ganzen Schule in die Qualitätsstrategie**. Dadurch wird eine über die individuelle Arbeit hinausreichende Verantwortlichkeit der Lehrer für die ganze Schule initiiert [Eder, 1999].

- Lehrerinnen und Lehrer genießen in deutschsprachigen Ländern ein im sonstigen OECD-Bereich unübliches Vertrauen hinsichtlich ihrer Befähigung, Schülerleistungen objektiv und valide zu beurteilen [Gruber, 1999].
  Österreich gehört zu jenen Ländern, in denen **die abgebende Schule Berechtigungen vergibt**, und zwar erfolgt die Berechtigungsvergabe im Wesentlichen durch jenen Lehrer, der den Lernprozess begleitet, die Aufgaben stellt und die Arbeiten auch selbst korrigiert. Grundsätzlich ist der österreichische Weg sowohl pädagogisch als auch vom Ertrag her positiv zu bewerten, andererseits müssten aber gerade deshalb **zwecks Vergleichbarkeit gewisse Mindeststandards** eingefordert werden.

- **Die Schnittstellenproblematik:**
  - Die Abschaffung der Aufnahmsprüfung in den weiterführenden höheren Schulen führt zu Niveauverlusten an der Schnittstelle Sekundarstufe I und II und zu hohen Durchfallsraten in den ersten Jahrgängen der weiterführenden Schulen.
  - Das oft sehr unterschiedliche Niveau in verschiedenen Volksschulen macht eine objektive Reihung der Aufnahmebewerber in die allgemeinbildende höhere Schule sehr schwierig.
  - Regionale Unterschiede erschweren eine Vergleichbarkeit der Bildungsabschlüsse. In Wien gehen in manchen Bezirken 70% der Kinder in die AHS, in Niederösterreich etwa 25%, in manchen Regionen sogar nur 15%.
  - Da in Österreich fast alle höheren Schulen fast alle Berechtigungen vergeben und auch jedes Maturazeugnis - ob „gut“ oder „schlecht“ - die gleiche Berechtigung bringt (zumindest an der Universität), ist offenbar kein ausreichender Bedarf oder Leidensdruck für eine Diskussion gegeben [Gruber, 1999].

- **Die Autonomie und die neuen Lehrpläne:**
  - Die **pädagogische Autonomie** ermöglicht den einzelnen Schulen **Freiräume** beim Schulprofil und somit bei der Schwer- und Leichtpunktsetzung.
  - Kennzeichnend für die Architektur der **neuen Lehrpläne** ist die **Zurücknahme des Verbindlichkeitsgrades**, um diese autonomen Freiräume nutzen zu können. Gerade deshalb ist aber eine verstärkte Outputkontrolle notwendig, um die Vergleichbarkeit und die Erfüllung des Bildungsauftrages sicherstellen zu können.

- **Qualitätsevaluation als notwendiger Bestandteil von Qualitätsentwicklung**
  - Selbstevaluation wird positiverweise vermehrt als Instrument der Qualitätsentwicklung von Schulen eingesetzt. Aber Selbstevaluation alleine bietet nur unzureichende Möglichkeiten zur Bestimmung der eigenen Position. Vor allem schlechte Schulen brauchen eine Positionierung an externen Standards, gute Schulen wünschen sie.
  - Die Tradition der Berechtigungsvergabe und die Konzentration auf die Messung innerschulischer Qualität führt in Österreich zu einer Reserviertheit gegenüber externer Evaluation.
  - Systemevaluationen wie TIMSS und PISA haben erstmals zu einem Umdenken geführt.

- **Der Auftrag des Regierungsprogramms:**
  „Entwicklung klarer Leistungsstandards für Schulen damit unsere Kinder die beste und qualitativ hochwertigste Bildung erhalten“

4.1.2 Begriffsklärung

(a) Definitionen im Brockhaus

Richtmaß, Richtschnur. - Der durch Vereinheitlichung geschaffene feste Maßstab für ein bestimmtes Produkt gleicher Qualität. - Standardisierungen sollen Normen schaffen.

(b) Klarstellungen durch das BMBWK:

Der Lehrplan als Steuerungsinstrument – Standards als Evaluationsgrundlage
Mit der Zielorientierung des Lehrplans sind Standards im Prinzip bereits vorgegeben. Ausgehend von diesem differenzierten steuerungsorientierten Dokument werden Standards formuliert, die wesentliche inhaltliche, soziale und methodische Grundkompetenzen bezeichnen. Schülerinnen und Schüler sollen diese an definierten Zeitpunkten ihrer Schullaufbahn erreicht haben (z.B. am Ende der Sekundarstufe I und II).

(c) Standards als Beitrag zur Qualitätsentwicklung im Schulwesen [Specht, 2000]

Nationale Standards sind ein Schlüssel für die Verbindung zwischen den Prinzipien der Autonomie und Qualitätsentwicklung am Standort und der Sicherung von Kohärenz und Qualität im Gesamtsystem.

Standards

- eine begrenzte Anzahl von Kernkompetenzen, gesellschaftlich konsensfähig und indikativ für die Gesamtleistungen der Schule,
- nicht nur auf Fachleistungen bezogen, sondern auf Bildungsleistungen der Schule im weitesten Sinn,
- ein Gegenstand fortlaufender systembezogener Evaluation,
- Beurteilungsgrundlage dafür, ob eine stärkere Externalisierung notwendig und sinnvoll ist,
- Lieferung von Referenzdaten für die Selbstevaluation an Schulen und in der Region.

(d) Einteilung der Standards

- Input- oder Prozess-Standards geben bestimmte Ausstattungsmerkmale des Bildungswesens an (z.B.: Klassenschülerzahlen, Ausbildungsniveau der Lehrer usw.)
- Inhaltliche Standards: Geben an, was normalerweise gelehrt werden sollte.
- Leistungsstandards (performance): Geben das erwartete Schülerendverhalten an, um erfolgreich abschließen zu können.
- Ergebnisstandards (outcome): Beziehen sich auf Einheiten wie Schule oder Universitäten oder das gesamte System.

(e) Principles and Standards for School Mathematics, USA [www.nctm.org/standards/]

- <u>Principles</u> for School Mathematics reflect basic perspectives on which educators should base decisions that effect school mathematics.
- <u>Standards</u> describe an ambitious and comprehensive set of goals for mathematics instruction, partly goals in the mathematical content areas (e.g. algebra, geometry, data analysis, probability a.s.o) and partly goals for the process of problem solving, reasoning and proof, connections, communication, and representation.

(f) The National Curriculum for England [www.nc.uk.net]

The National Curriculum lies at the heart of our policies to raise standards. It determines the content of what will be taught, and sets attainment targets for learning.

The structure of the National Curriculum:

- The programs of study – set out what pupils should be taught in mathematics
- Attainment targets and level descriptions – set out the knowledge, skills and understanding that pupils of different abilities and maturities are expected to have at the end of each key stage. Attainment targets consist of eight level descriptions of increasing difficulty, plus a description for exceptional performance above level 8.

4.1.3 Welche Dimensionen sollen abgedeckt werden?

(1) Schlüsselqualifikationen, allgemeine Grundkompetenzen

(siehe allgemeiner Teil des Lehrplans)

Wenn man den Bildungsauftrag, der im allgemeinen Teil des Lehrplans ausgedrückt wird, ernst nimmt, darf man sich nicht nur auf fachliche Fertigkeiten und Kompetenzen beschränken. Der Bildungsauftrag des Lehrplans beinhaltet **einen neuen, erweiterten Lernbegriff** [Klippert, H. 2000]:

- das inhaltlich-fachliche Lernen
- das methodisch-strategische Lernen
- das sozial-kommunikative Lernen
- das affektive Lernen (inklusive der Persönlichkeitsentwicklung)

Dementsprechend müsste man Standards entwickeln, die alle bei diesen 4 Lernbereichen entwickelten Kompetenzen abdecken.

Weiters müssten auch **Standards betreffend der Vernetzungskompetenz** formuliert werden, wie etwa in den Bildungsbereichen des Lehrplans der Sekundarstufe I gefordert.

Ein weiterer Paradigmenwechsel, der sich aus dem neuen Lehrplan entnehmen lässt, ist die Forderung nach Ausgewogenheit zwischen Produkt- und Prozessmessung. Im traditionellen Unterricht überwiegt die Produktmessung. Erst die stärkere Betonung der Prozessmessung macht aber die Umsetzung des oben beschriebenen, neuen Lernbegriffes realisierbar. Daher wäre auch eine Formulierung von **Prozess-Standards** notwendig.

(2) Standards für einzelne Fachbereiche

Wir brauchen möglichst präzise und verständlich formulierte **unverzichtbare Grundkompetenzen**, die das erwartete Schülerendverhalten in diesem Fachbereich an bestimmten Stellen der Schullaufbahn beschreiben.

Darüber hinaus müsste der Beitrag des jeweiligen Faches zur Erreichung der in (1) beschriebenen Schlüsselqualifikationen und allgemeinen Grundkompetenzen ausgedrückt werden. Die Bedeutung der **fachlichen Grundkompetenzen** muss an ihrem **Beitrag zu diesen allgemeinen Kompetenzen** gemessen werden können.

Typisch für das österreichische System der Leistungsmessung und der Berechtigungsvergabe ist das Messen kurzfristig verfügbarer Kompetenzen im jeweiligen Lernprozess (z.B. bei Schularbeiten). **Bei den fachlichen Standards handelt es sich dagegen um langfristige Kompetenzen**, die auch noch nach längerer Zeit, wie etwa am Ende der Grundschule, der Sekundarstufe I oder II verfügbar sein müssen. Daher wird das **Anspruchsniveau wegen der längeren Verfügbarkeit niedriger** sein müssen als bei den kurzfristigen Kompetenzen während des aktuellen Lernprozesses.
Fachliche Standards beschreiben daher nicht, was ein Schüler können muss, um am Ende einer Schulstufe in einem Fach ein **„Genügend“** zu erhalten. Das Wesentliche, das der

Schüler überwiegend beherrschen muss, um ein Genügend zu erhalten, ergibt sich aus dem Unterrichtsprozess, also aus der Schwerpunktsetzung des Lehrers in dieser Schulstufe („Lehrerkern“).

Um die **Unterschiede im Bildungsauftrag und im Niveau zwischen verschiedenen Schularten** berücksichtigen zu können, müssen für die einzelnen fachlichen Standards verschiedene Niveaus definiert werden (siehe „levels“ in „National Curriculum for England“).

4.1.4 Wozu Standards? – Einsatzbereiche

- Standards als Beitrag zur internationalen (zumindest EU-weiten) Vergleichbarkeit **und Durchlässigkeit der Bildungssysteme.**

- **Standards als Bildungsauftrag der Gesellschaft an die Schule** in Form verbaler Zielvorgaben. Solche Standards sollen sich nicht nur auf Fachleistungen beziehen sondern auch auf Bildungsleistungen der Schule im weiteren Sinn (z.B.: dynamische Qualifikationen wie Selbstvertrauen, Sozialkompetenz, Lernbereitschaft, Teamfähigkeit, usw.) [Specht, 2000].

- **Standards als Grundlage der Systemevaluation.** Für eine solche systembezogene Evaluation genügen aber nicht allein verbale Zielvorgaben, es müssen auch Instrumente entwickelt werden, mit denen man das Erreichen solcher Standards messen kann. TIMSS und PISA sind erste größere Versuche in diese Richtung.

- **Standards als Grundlage für die Qualitätsevaluation einzelner Schulen** und als Ausgangspunkt für die Entwicklung eines Schulprofils. Auch für diesen Einsatzbereich sind valide Messinstrumente nötig. Diese Qualitätsevaluation kann entweder extern oder in Form einer Selbstevaluation der Schule erfolgen.

- **Standards zur Selbstevaluation** mit dem Ziel der Qualitätsmessung in einzelnen Fächern. Damit können die Lehrer und Schüler überprüfen, wie weit die vorgegeben Standards erreicht werden, ohne dass damit auch einen Notendruck ausgeübt wird.

- **Standards als ein Instrument der Berechtigungsvergabe**. Wie schon im ersten Kapitel ausgeführt ist bei der österreichischen Art der Berechtigungsvergabe eine Vergleichbarkeit der Bildungsabschlüsse kaum möglich. Derzeit ist es zwar nicht erwünscht die Berechtigungsvergabe durch den einzelnen Lehrer mit sehr wenig Möglichkeiten zur Objektivierung in Frage zu stellen und auch nicht die Vergabe fast aller Universitätsberechtigungen durch alle höheren Schulen. Aber wenn man sich in anderen Ländern umsieht und die Forderungen der Universitäten nach mehr Vergleichbarkeit ernst nimmt, sollte man möglichst unvoreingenommen auch über diese Art der Nutzung von Standards nachdenken. Ich wünsche mir keinesfalls eine vollzentrale Berechtigungsvergabe aber eine **teilzentrale Matura**, bei der etwa in Mathematik unverzichtbare Grundkompetenzen zentral geprüft werden. Die Problemlösekompetenz sollte dagegen weiterhin vom Lehrer geprüft werden, der den Lernprozess begleitet. Dies wäre für mich ein wichtiger und guter Einsatzbereich für Standards.

Zusammenfassung:
Wir brauchen Standards als Zielvorgaben und für Messinstrumente

- wegen der internationalen Vergleichbarkeit,
- wegen der Vergleichbarkeit und Durchlässigkeit der Schulen innerhalb Österreichs,
- wegen der spezifisch österreichischen Berechtigungsvergabe,
- wegen der pädagogischen Autonomie,
- wegen der aktuellen Lehrplanarchitektur,
- wegen der notwendigen Qualitätsevaluation,
- weil die Lehrpläne eine andere Funktion haben.

4.2 Grundkompetenzen in Mathematik

4.2.1 Begriffsklärung

Da ja Standards unserer Meinung nach ein Überbegriff für die jeweiligen fachlichen Grundkompetenzen darstellen, gilt die im Kapitel 4.1.2 vorgenommene Begriffsklärung für Standards in wesentlichen Teilen auch für die fachlichen Grundkompetenzen.

Eine wesentliche Grundlage für die Frage nach unverzichtbaren Grundkompetenzen ist ein bestimmtes Bild der Mathematik. Die wohl treffendsten Deutungen von Mathematik lauten:

Mathematik als Technik des Problemlösens - und
Mathematik als Sprache

Im Sinne der ersten Deutung sind die Grundkompetenzen jene unverzichtbaren „Bausteine“, welche für das eigentliche Ziel der Mathematik - nämlich das Problemlösen - eine notwendige Voraussetzung darstellen.
Passend zur zweiten Deutung könnte man sagen: Grundkompetenzen sind jene „Sprachkonstrukte“ (aber nicht nur einzelne Vokabel), welche notwendig sind, um „über etwas in dieser Sprache zu reden“.

Einigkeit herrscht in der Arbeitsgruppe über folgende Punkte:

- **Es handelt sich um langfristige Kompetenzen**, die auch noch nach längerer Zeit verfügbar sein müssen. Sie sind zu unterscheiden von jenen kurzfristigen Kompetenzen, die im jeweiligen Lernprozess etwa bei Schularbeiten abgeprüft werden. Daher wird das Anspruchsniveau wegen der längeren Verfügbarkeit niedriger sein müssen als bei den kurzfristigen Kompetenzen während des aktuellen Lernprozesses. **Diese langfristigen Grundkompetenzen beschreiben daher nicht, was ein Schüler können muss, um am Ende einer Schulstufe in einem Fach ein „Genügend“ zu erhalten**. Das Wesentliche, das der Schüler überwiegend beherrschen muss, um ein Genügend zu erhalten, ergibt sich aus dem Unterrichtsprozess, also aus der Schwerpunktsetzung des Lehrers in dieser Schulstufe („Lehrerkern“).
- Um die Unterschiede im Bildungsauftrag und im Niveau zwischen verschiedenen Schularten berücksichtigen zu können, müssen für die einzelnen fachlichen Grundkompetenzen **verschiedene Niveaus für verschiedene Schularten** definiert werden (siehe „levels“ in „National Curriculum for England“).

- Fachliche **Grundkompetenzen** sind mehr als nur auf Inhalte beschränkte **Fertigkeiten**
  Kompetenz:
  - Vermögen, Fähigkeit; Ggs.: Inkompetenz (s. Duden).
  - Regeln nutzen und verstehen, sich begründet für etwas zu entscheiden
  - was? – wie? – warum?

  Fertigkeit:
  - Regeln nutzen
  - was? – wie?

- Die Diskussion über die „Unverzichtbarkeit" und die Entwicklung von Messinstrumenten oder Evaluationsmaterialien erfordert ein **Klassifikation der Grundkompetenzen** nach vorher vereinbarten Kriterien.

4.2.2 Klassifikation von Grundkompetenzen

Warum eine Klassifikation?

- Die Klassifikation spiegelt ein bestimmtes Bild der Mathematik wider und begründet damit die Notwendigkeit gewisser Kompetenzen.
- Die Klassifikation ermöglicht ein strukturiertes Vorgehen bei der Suche nach Grundkompetenzen
- Die Klassifikation macht die Auflistung der Grundkompetenzen übersichtlicher und erleichtert das Verstehen für die Lehrenden und Lernenden.
- Die Klassifikation ist eine notwendige Grundlage für die Evaluation und Bewertung der Ergebnisse von Grundkompetenzmessungen.

Wenn man die Bedeutung eines Faches im Lichte des neuen Lehrplans betrachtet, darf man sich nicht nur auf inhaltliche Fertigkeiten und Kompetenzen beschränken. Der Bildungsauftrag des Lehrplans beinhaltet **einen neuen, erweiterten Lernbegriff** [Klippert, H. 2000]:

- das inhaltlich-fachliche Lernen
- das methodisch-strategische Lernen
- das sozial-kommunikative Lernen
- das affektive Lernen (inklusive der Persönlichkeitsentwicklung)

Dementsprechend müsste man Grundkompetenzen entsprechend allen bei diesen 4 Lernbereichen entwickelten Kompetenzen entwickeln. Dies um so mehr als Untersuchungen zeigen, dass der Mathematikunterricht wesentliche Beiträge zu allen 4 Kompetenzbereichen liefern kann [ACDCA, 2000], nämlich zur

- inhaltlichen Kompetenz
- Methodenkompetenz
- Sozialkompetenz
- Persönlichkeitskompetenz

Würde man versuchen, die gesamte Bildungs- und Lehraufgabe des Mathematkunterrichts zu erfassen, also alle wichtigen, im Fach Mathematik erworbenen, Kompetenzen zu klassifizieren, müsste man ein **mehrdimensionales System** entwickeln, da diese Kompetenzen nicht neben einander sondern eng miteinander vernetzt erworben und genutzt werden.
Ein weiterer Paradigmenwechsel, der sich aus dem neuen Lehrplan entnehmen lässt, ist die Forderung nach Ausgewogenheit zwischen Produkt- und Prozessmessung. Im traditionellen Mathematikunterricht überwiegt wegen des dominierenden Gewichtes der Schularbeit eindeutig die

Produktmessung. Erst die stärkere Betonung der Prozessmessung macht aber die Umsetzung des oben beschriebenen, neuen Lernbegriffes realisierbar.

> *Wenn aber das Ziel dieser Arbeitsgruppe auch die* ***Entwicklung von Messinstrumenten*** *ist, muss man sich auf jene Kompetenzdimensionen beschränken, die durch solche Instrumente auch gemessen werden können. Somit wird der Schwerpunkt auf der inhaltlichen und teilweise auf der Methodendimension liegen. Die in der Folge vorgeschlagenen Klassifikationen von Grundkompetenzen beziehen sich also nur auf eine „echte Teilmenge“ jener Kompetenzen, die im Fach Mathematik erworben werden können.*

Wir haben uns auf ein **dreidimensionales System** geeinigt. Folgende Dimensionen sollen erfasst werden:

(1) **Die mathematisch-inhaltliche Dimension** (content): Kompetenzen, die bei der Behandlung bestimmter mathematischer Inhalte notwendig sind.
(2) **Die mathematische Handlungsdimension** (performance): Die Kompetenz, typische mathematische Tätigkeiten auszuführen und dafür notwendige heuristische Strategien zu beherrschen.
(3) **Die Dimension des Anspruchsniveaus** (complexity): Ordnung nach Komplexitätsgrad, nach Schwierigkeit für den Lernenden.

(1) Die mathematisch-inhaltliche Dimension (content)

Man könnte natürlich die Überschriften des Lehrplans selbst nehmen. Andererseits ist es wichtig, eine nach fachlichen Gesichtspunkten gegliederte, und international akkordierte Liste dessen zu formulieren, was am Ende der Sekundarstufe I oder der Sekundarstufe II gekonnt werden soll.

Für die Sekundarstufe I eignet sich vor dem Hintergrund des österreichischen Lehrplans am besten jene Gliederung, die Prof. H.C. Reichel in seinem Lehrplankommentar vorgeschlagen hat [Reichel, H.C., 2000]. Sie entstand noch dazu im Zuge der Auswertung und Analyse der TIMSS-Ergebnisse.

A **Rechnen und Zahlverständnis**
Kopfrechnen und sowohl algorithmisches als auch näherungsweises Rechnen; Abschätzen von Ergebnissen

B **Algebra**
Verwendung von Variablen und von formalisierten Rechenregeln

C **Raumvorstellung und Grundtatsachen der Geometrie**
Zeichnungen, Skizzen; Symmetrie, Kongruenz, Ähnlichkeit

D **Größen, Maße und Verhältnisse zwischen diesen (auch Prozentrechnen)**
Situationen des täglichen Lebens, Schätzen, Umgang mit Fehlern

E **Funktionen und funktionale Abhängigkeit, graphische Darstellungen**
Erstellen von graphischen Darstellungen und Ablesen aus solchen; Beschreibung praktischer Situationen durch mathematische Funktionen und praktische Interpretationen formaler Beschreibungen

F **Sichtweisen der Statistik**
Interpretation statistischer Aussagen, Beschreibung von Situationen mittels mathematisch korrekter statistischer Formulierungen - dafür gibt es oft mehrere Möglichkeiten; exemplarische Kritik an der statistischen Sichtweise und an Bilddarstellungen

Eine genauere Spezifizierung findet man im zitierten Papier.

Für die Sekundarstufe II warten wir mit der endgültigen Gliederung auf den neuen Lehrplan, der am Beginn des nächsten Jahres fertig werden soll.

Derzeit arbeitet die Gruppe an folgenden Bereichen

- **Analytische Geometrie**
- **Analysis**
- **Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik**

(2) Die mathematische Handlungsdimension (performance)

Dabei handelt es sich um eine Auflistung von Kompetenzen und Strategien, die für alle Bereiche und Ebenen der mathematischen Bildung relevant sind und auch den Beitrag des Faches Mathematik zur Allgemeinbildung ausdrücken sollen.

Entscheidend beim Finden von Kompetenzklassen ist der Blickwinkel, aus dem man solche Klassifikationen betrachtet: Damit verbunden ist natürlich **ein bestimmtes Bild der Mathematik und ihrer Rolle für die Gesellschaft:**

Nimmt man als Grundlage etwa die eingangs verwendete Definition:
„Mathematik - Problemlösen", so sind eine Leitidee die 3 Phasen des Problemlöseprozesses,

- das Modellieren,
- das Operieren,
- das Interpretieren.

Beschreibt man wie Bruno Buchberger den Weg des Lernenden in die Mathematik als Weg auf einer Spirale [Heugl u.a., 1996], so findet man bei jedem Durchlauf

- die heuristische oder experimentelle Phase
- die exaktifizierende Phase
- die Anwendungsphase

oder nach Bernhard Kutzler

- die induktive Phase
- die deduktive Phase
- die produktive Phase

Aus den bei dieser Art des „Mathematiktreibens" abgeleiteten Tätigkeiten, lassen sich dann Kompetenzklassifikationen ableiten.

Beispiele in der Literatur zur Dimension (1) „ein bestimmtes Bild von Mathematik“:

Performance Expectations im TIMSS-Framework

Im TIMSS-Framework findet man unter dem Titel „Perfomance Expectations“ folgende Klassifikation:

1. Knowledge	- Wissen
2. Using routine procedures	- Verwendung von Routinefertigkeiten
3. Investigation and problem solving	- Experimentieren und Problemlösen
4. Mathematical reasoning	- Mathematisches Begründen, Beweisen
5. Communication	- Kommunikation

Nimmt man diese Klassifikation für Aufgabensequenzen zur Standardmessung ergibt sich das Problem, dass „Communication“ doch eher bei Prozessmessungen und nicht bei der Produktmessung in Form schriftlich zu bearbeitender Aufgabensequenzen gemessen werden kann.

Klassifikation mathematischer Tätigkeitsbereiche

[Lechner, J. 2000]
Mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten äußern sich darin, dass SchülerInnen gewisse Aktivitäten ausführen können:

Tätigkeitsbereich 1: **Darstellend-interpretierendes Arbeiten**

umfasst alle Aktivitäten, die mit dem Übersetzungsprozess von Situationen, Zuständen und Prozessen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik und wieder zurück im weitesten Sinne zu tun haben.

Tätigkeitsbereich 2: **Formal-operatives Arbeiten**

umfasst alle kalkülmäßigen und algorithmischen Aktivitäten, das heißt die Anwendung von Verfahren, Rechenmethoden, Techniken usw.

Tätigkeitsbereich 3: **Kritisch-argumentatives Arbeiten**

umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, mit Begründen und mit Beweisen zu tun haben.

Tätigkeitsbereich 4: **Heuristisch-experimentelles Arbeiten**

umfasst alle Aktivitäten, die mit zielgerichtetem Entdecken, mit Variation von Parametern und dem Aufstellen von Vermutungen zu tun haben - also mit dem Nutzen erworbener heuristischer Strategien.

Diese Klassifikation spiegelt auch schon unsere Erfahrungen im computerunterstützten Mathematikunterricht wider, wo ein deutlich schülerzentrierter experimenteller Unterrichtstil zu beobachten ist. Auch die Schwerpunktsverschiebung von der ausführenden zur planenden Tätigkeit ist erkennbar.

BLK-Programm SINUS Sachsen:

Sicherung von Basiswissen - Verständnisvolles Lernen auf unterschiedlichen Niveaus

Gesamtheit grundlegender Qualifikationen bzw. Kompetenzen im Sinne von sicher anwendbarem Können zur Lösung einfacher formaler und anwendungsbezogener Aufgaben, die elementare Anforderungen zur Reorganisation, zum Transfer und zur Lösung von Problemen stellen:

(1) Grundlegende Kompetenzen im Umgang mit ausgewählten mathematischen Objekten.
(2) Kompetenzen beim Problemlösen und im Anwenden der Mathematik.
(3) Kompetenzen im Erklären, Begründen, Beweisen und Werten.
(4) Kompetenzen im Verknüpfen mathematischer Inhalte durch Analogie- und Querverbindungen und im Herstellen von Beziehungen zu Unterrichtsgegenständen anderer Fächer.

Competences im PISA-Framework

[Neubrand, M. 2001]

Mathematical thinking skill	-	mathematische Denkfähigkeit (beinhaltet die Fähigkeit, mathematische Fragestellungen zu erkennen, Situationen mathematisch passend einzuordnen)
Mathematical argumentation skill	-	mathematische Argumentationsfähigkeit (bein–haltet die Fähigkeit, mathematisch sauber zu begründen inklusive der dazu gehörenden heuristischen Strategien)
Modelling skill	-	Modellierfähigkeit (die Fähigkeit zu inner- und außermathematischen Problemen passende Modelle zu finden)
Problem posing and solving skill	-	Problemgenerier- und –lösungsfähigkeit
Representation skill		Darstellungsfähigkeit
Symbolic, formal and technical skill	-	Symbolische, formale und technische Fähigkeiten, wie zum Beispiel Rechenfertigkeit mit Zahlen und Variablen
Communication skill	-	Kommunikationsfähigkeit (die Fähigkeit, mittels der Sprache der Mathematik zu kommunizieren)
Aids and tools skill	-	Fähigkeit im Umgang mit Hilfsmitteln und Werkzeugen

Zu kritisieren ist, dass beim realistischen Treiben von Mathematik diese Kompetenzen kaum neben- oder hintereinander, sondern immer eng miteinander vernetzt erforderlich sind. Dies zeigt sich schon an deutlichen Überschneidungen einzelner Kompetenzen:

Mathematische Denkfähigkeit halten wir überhaupt für eine übergeordnete Kompetenz, die bei allen anderen angeführten Kompetenzen eine notwendige Bedingung sein sollte (wenngleich dies bei den formalen technischen Fertigkeiten häufig in der Praxis nicht der Fall ist).

Die Kompetenz „problem posing and solving skill" beinhaltet eigentlich auch fast alle übrigen Kompetenzen, Modellieren, Operieren, Repräsentieren und natürlich auch Argumentieren usw.

Dementsprechend werden im internationalen Framework die in dieser Liste aufgezählten Kompetenzen nicht einzeln zur Erfassung von Facetten der einzelnen Items herangezogen, sondern in 3 relativ umfangreiche Kompetenzklassen gebündelt:

Class 1: reproduction, definitions, and computations;
Class 2: connections and integration for problem solving;
Class 3: mathematical thinking, generalisation and insight.

(3) Dimension Anspruchsniveau (complexity)

Gerade bei dieser Dimension gibt es in der Gruppe noch wichtige offene Fragen:

- Sind mit Grundkompetenzen nur kleinste inhaltliche Bausteine für das Problemlösen gemeint oder ist auch die Kompetenz inkludiert, solche Bausteine miteinander zu verknüpfen, also auch langfristiger Kompetenzen zum Lösen von einfachen Prototypen von Problemen?
- Inwieweit beeinflussen die Werkzeuge (wie zum Beispiel CAS) den Komplexitätsgrad?
- Wie definiert man die unterschiedlichen Anspruchsniveaus (levels) für verschiedene Schularten?

Derzeit wurde noch keine Definition von Komplexitätsklassen gefunden. Die Notwendigkeit dafür ergibt sich aber schon allein aus der Anpassung der Messinstrumente an das unterschiedliche Niveau verschiedener Schularten.

Beispiele zum Typ (3) „Anspruchsniveau"

Bildung von differenzierten Kompetenzklassen im deutschen PISA-Framework

[Neubrand, M. 2001]

Auch in diesem Framework geht man davon aus, dass die durch die Items zu erfassenden Lern- und Denkprozesse nicht aus einer unverbundenen Nebeneinanderstellung von separierten Kompetenzen bestehen können. Es wird versucht, in Kompetenzklassen Items zusammenzufassen, die qualitativ unterschiedliche Denkprozesse erfordern.

Klasse 1A: Technische Fertigkeiten
Klasse 1B: Einschrittige Standardmodellierungen
Klasse 2A: Begriffliche Modellierungen
Klasse 2B: Mehrschrittige Modellierungen (ggf. integrativ / repetitiv)
Klasse 3: Strukturelle Verallgemeinerung

Zu Klasse 1A: Diese Klasse ist deutlich enger zu sehen als die „Symbolic, formal and technical skills". Es geht hier um Aufgaben, bei denen lediglich das Abarbeiten eines in der Aufgabe selbst angesprochenen Algorithmus und keine Modellierung erforderlich ist.

Zu Klasse 1B: Einfache, einschrittige Modellierungen, bei denen lediglich die Übersetzung in ein Modell aus einem eng begrenzten, bekannten mathematischen Gebiet erforderlich ist.

Zu Klasse 2A: Die Modellierung greift nun nicht mehr auf ein einziges Standardmodell zurück. Es muss ein Zusammenhang zwischen Wissenselementen hergestellt werden, der sich nicht nur auf die Durchführung eines Algorithmus beschränkt.

Zu Klasse 2B: Im mathematischen Modell sind mehrere Schritte zu kombinieren, Wissen aus mehreren Zusammenhängen oder Gebieten ist einzusetzen, einzelne Wissenselemente sind mehrmals zu verwenden und aufeinander zu beziehen.

Zu Klasse 3: Den Übergang zur („höchsten") Klasse 3 markieren Aufgaben, in denen ausdrücklich eine Verallgemeinerung der Situation, das Entwerfen einer umfassenden Strategie, die Einbettung einer gegebenen Situation in einen allgemeinen mathematischen Zusammenhang erforderlich ist.

Wir halten dieses Schema für die Klassifikation von Grundkompetenzen für nicht geeignet, da die Kompetenzen der Klasse 3 („Strukturelle Verallgemeinerung") nicht mehr als Grundkompetenzen zu bezeichnen sind. Grundkompetenzen sollen ja Werkzeuge oder Bausteine sein, aus denen solche höheren Kompetenzen entwickelt werden können. Selbst bei der Klasse 2B müsste noch hinterfragt werden, ob es sich dabei um Grundkompetenzen handelt. Andererseits werden wichtige Grundkompetenzen nicht deutlich durch dieses Schema vertreten.

Taxonomie von Lernzielen nach Bloom:

Wissen
    Verstehen
        Anwenden
            Analyse
                Synthese
                    Bewertung

Eine in der Didaktik häufig verwendete Taxonomie, wobei auch hier überlegt werden müsste, ob „Synthese" als Grundkompetenz zu bezeichnen ist.

Verknüpfung verschiedener Taxonomien

In Anlehnung an Lernzieltaxonomien von Bloom und anderen, die im Buch von E. Wittmann „Grundfragen des Mathematikunterrichts" [Wittmann, E. 1981] aufgelistet werden, wären folgende Stufen denkbar:

S1: Reproduktives Wissen und reproduktive Fertigkeiten.
S2: Anwenden von Bekanntem.
S3: Analyse: Aus verschiedenem Bekannten soll die richtige Entscheidung getroffen werden.
S4: Synthese: Aus verschiedenem Bekannten soll eine neue Strategie entwickelt werden.
S5: Offene Aufgaben: Es muss zuerst das Problem erkannt und formuliert werden, um überhaupt mit der Suche nach einer Strategie beginnen zu können.

Für das Projekt „Mathematische Grundkompetenzen für die Sekundarstufe II", das ja auch zum Ziel hat, Grundkompetenzen zu messen, erscheinen uns nur S1 bis S3 von Bedeutung zu sein. S4 halten wir für eine höhere Kompetenz und S5 ist eher durch Prozessmessung zu bewerten als durch eine Produktmessung.

4.2.3 Ein Vorschlag für ein 3-dimensionales Klassifikationsschema:

(1) Die mathematisch-inhaltliche Dimension

Algebra	**Zahlen, Arithmetik, Algebra**	umfasst... *
Geometrie	**Konstruktive Geometrie, Analytische Geometrie,** **Trigonometrie**	umfasst ...*
Analysis	**Funktionenlehre** **Analysis**	umfasst... *
Stochastik	**Statistik** **Wahrscheinlichkeitsrechnung**	umfasst...*
Anderes	**????**	umfasst...*

*....daran arbeiten derzeit verschiedene Arbeitsgruppen (siehe dazu Kapitel 4.3)

(2) Die mathematische Handlungsdimension

M	**Modellbilden, Mathematisieren**	umfasst alle Aktivitäten, die mit dem Übersetzungsprozess von Situationen, Zuständen und Prozessen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik zusammenhängen. Es handelt sich um die Kompetenz, sich für einen Lösungsweg zu entscheiden und diesen zu planen.
O	**Operieren, Rechnen**	umfasst die Anwendung von Verfahren, Rechenmethoden oder Techniken, die für das mathematische Modell eine mathematische Lösung ergeben. Damit ist diese Kompetenz weiter zu sehen als die reine Rechenfertigkeit. Eine Lösung kann auch durch Visualisierung oder durch Verwenden von Tabellen usw. gefunden werden.
I	**Interpretieren und Dokumentieren**	umfasst die verschiedenen Ebenen des Interpretierens und Dokumentierens, wie etwa ▪ die Analyse der Brauchbarkeit des Modells, ▪ das innermathematische Interpretieren der Korrektheit der Lösung, ▪ das Untersuchen der Brauchbarkeit der mathematischen Lösung für das praktische Problem, ▪ die Dokumentation des Lösungsweges und des Ergebnisses

A	**Argumentieren und Begründen**	umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, mit Begründen und mit Beweisen zu tun haben. Dies inkludiert auch ein Argumentieren betreffend die Entscheidung für ein bestimmtes Modell oder für einen bestimmten Algorithmus. Das Begründen und Beweisen umfasst induktive Vorformen mathematischen Schließens bis hin zu deduktiven Schlussfolgerungen.

Beispiele für Schüleraktivitäten passend zu den 4 Kompetenzbereichen:

Bereich M: Modellbilden, Mathematisieren

- Präzisieren von Sachverhalten (aus einem unscharf verbal formulierten Problem ein Textkonzentrat machen)
- Finden einer geeigneten Formel
- Entscheiden für einen bestimmten Rechengang
- Finden einer geeigneten graphischen Darstellung
- Aufstellen einer Tabelle
- Entscheiden für ein bestimmtes angebotenes Modell
- Entscheiden für einen geometrischen Konstruktionsweg
- Verbalisieren der Arbeitsschritte
- Entscheiden für einen Funktionsprototypen (Gleichung, Graph, Tabelle)
- Entscheiden für einen bestimmten Größenvergleich („um wieviel“, „wieviel mal“)

Bereich O: Operieren, Rechnen

- Kopfrechnen mit einfachen Zahlen
- Rechnen mit Näherungswerten
- Schätzen
- Beherrschen numerischer Rechenverfahren (z.B.: Rechnen mit Dezimalzahlen, Brüchen usw.)
- Zwischen verschiedenen Darstellungsformen übersetzen können (Bruchzahlen – Dezimalzahlen; dm^3 – Liter; usw.)
- Beherrschen algebraischer Rechenverfahren
- Gleichungen lösen
- Formeln umformen
- In Formeln einsetzen
- Graphisches Lösen
- Lösen durch Bearbeiten von Tabellen
- Geometrische Konstruktionen durchführen können
- Statistische Kenngrößen ermitteln
- Mit Rechenwerkzeugen umgehen können

Bereich I: Interpretieren und Dokumentieren

- Interpretieren eines verbal formulierten Problems im Hinblick auf eine geeignete Modellentscheidung
- Innermathematisches Interpretieren der Korrektheit der Lösung (durch mathematisches Argumentieren, durch eine geeignete Probe)
- Interpretieren von Graphen
- Interpretieren von Größenbeziehungen in einer Tabelle
- Interpretieren statistischer Daten
- Interpretieren der Brauchbarkeit und Korrektheit einer vorgegebenen Lösung
- Interpretieren der Brauchbarkeit einer mathematischen Lösung für das praktische Problem
- Formulieren einer zum Problem passenden Antwort
- Interpretieren der sinnvollen Genauigkeit
- Dokumentieren des Lösungsweges, entweder verbal oder durch mathematische Argumentation
- Dokumentieren des Ergebnisses

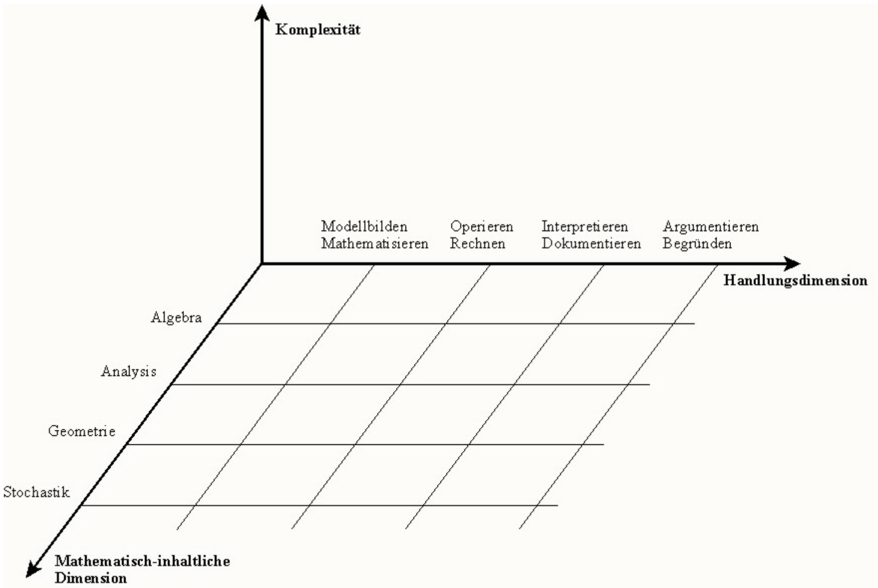
Bereich A: Argumentieren und Begründen

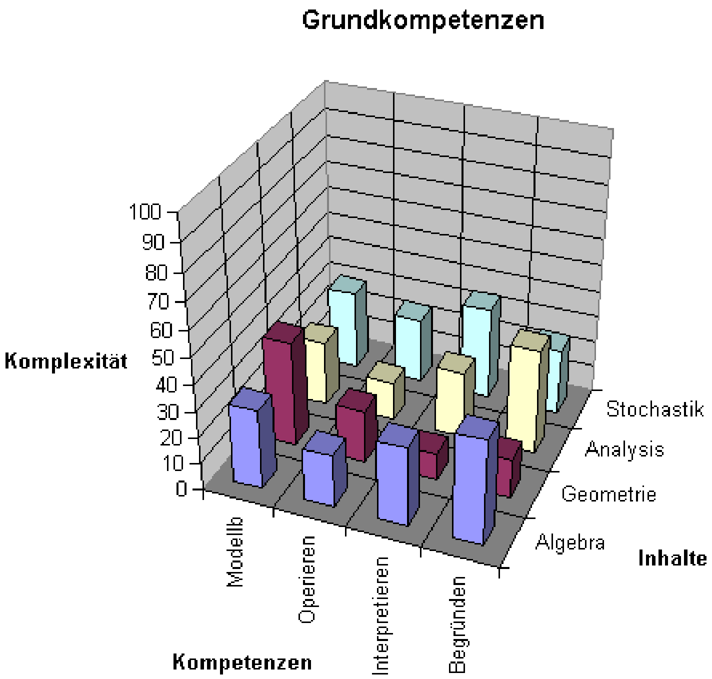
- Begründen der Entscheidung für ein Modell
- Begründen der Entscheidung für eine bestimmte Lösung
- Durch Experimentieren zu einer Vermutung kommen und diese begründen (induktives Schließen)
- Innermathematische Begründung der Rechenschritte, des Konstruktionsganges.
- Argumentationsbasis klären (was kann man voraussetzen?)
- Fehler begründen
- Aufgrund einer vereinbarten Argumentationsbasis einen Algorithmus, einen Satz, ein Ergebnis begründen
- Deduktives Schließen

(3) Die Komplexität

Vorläufig hat die Gruppe dafür keine Festlegung getroffen. Einigkeit besteht nur darüber, dass Grundkompetenzen bei niedrigen Komplexitätsgraden einzuordnen sind.
Wesentlich ist aber, dass der Komplexitätsgrad einer Handlungskompetenz bei verschiedenen Inhalten verschieden sein kann. Auch das verwendete Werkzeug könnte den Komplexitätsgrad beeinflussen.

Versuch einer Visualisierung des dreidimensionalen Schemas:





Als Beispiel für die Beeinflussung der Höhe des Komplexitätsgrades könnte etwa die Nutzung des Werkzeuges CAS genommen werden: Dies würde eine Verringerung der Komplexität beim Operieren, dafür aber eine Erhöhung der Komplexität beim Begründen und Interpretieren zur Folge haben.

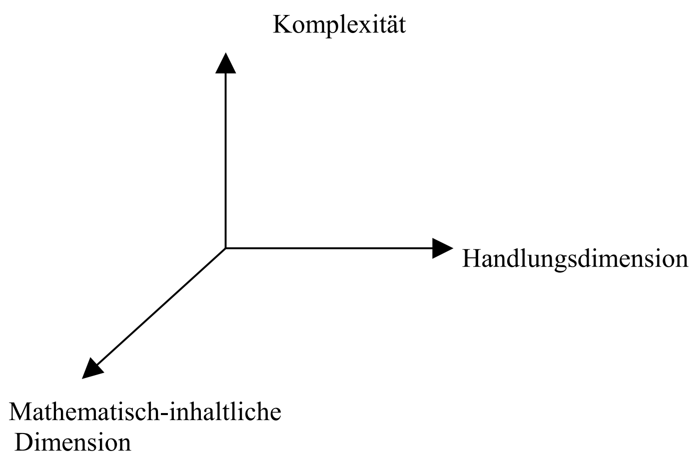
4.3 Die mathematisch-inhaltliche Dimension in der Sekundarstufe II

4.3.1 GRUNDKOMPETENZEN in der LINEAREN und NICHTLINEAREN ANALYTISCHEN GEOMETRIE (Dir. Mag. Helmuth Hickel)

Mathematisch – inhaltliche Dimension:	**Handlungsdimension: Modellbilden, Interpretieren, Dokumentieren, Argumentieren**
Lage eines Punktes bzw. einen Vektor mit Hilfe von kartesischen Koordinaten finden und angeben.	
Eine Definition eines Vektors angeben.	Rechengesetze interpretieren.
Vektoraddition, -subtraktion, -multiplikation mit einem Skalar durchführen und geometrisch deuten.	
Mittelpunkt einer Strecke bestimmen.	
Betrag eines Vektors bestimmen können; Begriff des Einheitsvektors	als Länge eines Vektors deuten
Skalares Produkt von Vektoren berechnen und damit den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen.	Anwendungen des skalaren Produktes kennen.
Parallelität und Orthogonalität von Vektoren erkennen und anwenden; Normalvektor im R_2 und R_3 bestimmen.	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow$ orthogonal ($\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{o}$)
Geradengleichung aufstellen: Im R_2 gegeben: 2 Punkte oder Punkt und Richtungsvektor oder Punkt und Normalvektor oder Steigung und y-Abschnitt. Im R_3 gegeben: 2 Punkte oder Punkt und Richtungsvektor. Wechsel der Darstellungsformen von Geraden.	Gerade als Graph einer linearen Funktion deuten
Die Gleichung einer Ebene aufstellen; Gegeben: 3 Punkte oder 1 Punkt und 2 geeignete Vektoren oder 2 geeignete Gerade oder Punkt und Normalvektor. Wechsel der Darstellungsformen von Ebenen	Die verschiedenen Darstellungsformen von Ebenen deuten
Die Normalebene auf eine Gerade durch einen Punkt aufstellen. ***Die Normale auf eine Ebene durch einen Punkt aufstellen.***	
$\text{Lagebeziehung} \left\{ \begin{matrix} \text{Punkt - Gerade} \\ \text{zwei Geraden} \\ \text{Punkt - Ebene} \\ \text{Gerade - Ebene} \\ \text{zwei Ebenen} \end{matrix} \right\} \text{rechnerisch deuten.}$	2 lineare Gleichungen in 2 Variablen lösen und geometrisch deuten.

Winkel zwischen 2 Geraden, Winkel zwischen Gerade und Ebene, Winkel zwischen 2 Ebenen bestimmen.	
Vektorielles Produkt kennen und geometrisch deuten.	Anwendungen des vektoriellen Produktes kennen
Abstand eines Punktes von einer Geraden, Abstand eines Punktes von einer Ebene, Abstand zweier paralleler Geraden bestimmen.	
Kreisgleichung aus Mittelpunkt und Radius bestimmen.	
Lagebeziehung Gerade – Kreis feststellen und das zugehörige Gleichungssystem lösen.	
Schnittwinkel zwischen Gerade und Kreis bestimmen.	***Schnittwinkel als Winkel zwischen Gerade und Tangente definieren.***
Tangente in einem Punkt des Kreises aufstellen.	
Die Gleichung eines Kreises aus 3 Punkten der Kreislinie bestimmen.	
Kugelgleichung aus Mittelpunkt und Radius angeben.	

Inhalte, die kursiv und fett geschrieben sind, stellen einen um eine Stufe höheren Schwierigkeitsgrad (Richtung Komplexität) dar.



4.3.2 Grundkompetenzen in der ANALYSIS (Mag. Sieglinde Fürst)

Inhaltliche Grundkompetenzen, Operieren, Rechnen	**Modellbilden, Begründen, Interpretieren,**
Reelle Funktion (allgemein): Mit dem Funktionsbegriff arbeiten. Verschiedene Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen (Text Graph, Term, Gleichung, Parameterdarstellung, rekursive Darstellung, Wertetabelle) kennen und Wechsel zwischen den Darstellungsformen und Bezeichnungsweisen durchführen. Funktionsgleichung ↔ Funktionsterm (zB. $s(t)=\frac{g}{2}\cdot t^2$ oder $y(x)=\frac{g}{2}\cdot x^2$ oder $y=\frac{g}{2}\cdot x^2$) Definitions- und Wertemenge finden. Skizzieren einer Funktion unter Berücksichtigung der wesentlichen Eigenschaften (z.B. Nullstellen eingrenzen, Symmetrie). Berechnen von Funktionswerten und von Argumenten bei gegebenen Funktionswerten. *Schnitt* von zwei (einfachen) Funktionen algebraisch und graphisch durchführen.	Funktionen erkennen, Gegenbeispiele finden Zusammenhänge von Größen durch eine Funktion ausdrücken können (...hängt von....ab) WINDOW-Einstellungen bei CAS-Systemen bzw. Eingabe von Funktionen Aus Texte funktionale Zusammenhänge erkennen. Aus dem Graphen Eigenschaften einer Funktion ablesen. Zeigen, dass ein Punkt auf dem Graphen liegt.
Spezielle Funktionen: 1. *Lineare Funktionen:* Homogene und inhomogene lineare Funktionen graphisch aus zwei Punkten, den Abschnitten auf den Achsen und mittels k und d darstellen.	k und d deuten. Homogene lineare Funktion als direktes Verhältnis deuten. Aus dem Term die Lage der Funktion erkennen.
2. *Rationale Funktionen der Form* $y=\frac{c}{x}$: Ein indirektes Verhältnis aus dem Term erkennen und den zugehörigen Graphen zeichnen. Möglichkeiten zur Unterscheidung von „direktem“, „indirektem“ und „keines von beiden“ Verhältnis finden (Wertetabelle, Funktionsterm, Verhältnisgleichung, Graph)	Zusammenhänge der Struktur $A = B \cdot C$ von Größen funktional deuten (z.B. Ohmsches Gesetz).
3. *Quadratische Funktionen*: Eigenschaften der Grundparabel $y = x^2$.	Geometrische Deutung der Koeffizienten in $y = ax^2 + b$, insbesondere $a < 0$. Verbalisieren von quadratischen Zusammenhängen (verdoppeln - vervierfachen)
4. *Polynomfunktionen*: Zusammenhang zwischen Grad und Verlauf verstehen.	
5. *Winkelfunktionen*: Begriff der Periodizität,.	Definitionsbereich wissen.
6. *Exponentialfunktionen*: Prozentuelle Änderung pro Argumenteinheit ist konstant; Prozentuelle Änderung aus einem Term angeben , $a^x \leftrightarrow e^{kx}$.	Modelle für Wachstumsprozesse (linear, exponentiell), diskretes und kontinuierliches Wachstum. Zinseszinsrechnung als ein Beispiel erkennen.

7. *Folgen* als Funktion über N erkennen.	Geometrische Reihen zur Lösung von Problemen der Finanzmathematik verwenden.
8. Definition der *Betragsfunktion* wissen, Betragsfunktion zeichnen.	Verschiebung im Koordinatensystem bei z.B. $\|x+1\|$ statt $\|x\|$ erkennen.
9. *Funktionen in mehreren Variablen:* z.B. Schaltfunktion, Schreibweise kennen z.B.: F(x,y)	
Eigenschaften von Funktionen 1. *Umkehrfunktion*: Begriff der Umkehrfunktion kennen, einige wichtige „Funktionenpaare" kennen (Potenzen-Wurzeln; Exponential- und Logarithmusfunktionen), Rechenregeln für Logarithmen beherrschen, einfache Exponentialgleichungen mittels Logarithmieren lösen.	Graphischer Zusammenhang von Umkehrfunktionen, ev. Änderung des Definitionsbereiches berücksichtigen.
2. *Nullstelle*: Begriff Nullstelle Zerlegung einer Polynomfunktion in Linearfaktoren – Anzahl von Nullstellen –Art von Nullstellen	Geometrische Deutung der Diskriminante bei quadratischen Funktionen. Reelle Funktionen müssen paarweise komplexe Nullstellen haben.
3. *Begriff der Monotonie*: Definition, einfache Monotoniebeweise	
4. Begriff des Grenzwerts*: Einfache Grenzwerte ermitteln. Unterschied zwischen Grenzwert einer Folge und einer reellen Funktion verstehen.*	Summe unendlich vieler Glieder kann ein endlicher Wert sein.
5. Eine Vorstellung von *Stetigkeit* einer Funktion haben.	
Begriff des *Differenzenquotienten* kennen, ihn verbal und geometrisch deuten. Den *Differentialquotient*en als Grenzwert verstehen, ihn verbal und geometrisch deuten. Mittels Grenzwertdefinition bei einfachen Funktionen den Differentialquotienten errechnen.	Lineare Approximation einer Kurve durch die Sekante bzw. Tangente. Differenzen- und Differentialquotient z.B. als mittlere und als Momentangeschwindigkeit interpretieren.
Regeln für das Differenzieren kennen und auf einfache Funktionen anwenden.	
Begriffe lokale *Extremstelle*, absolute Extremstelle und Terrassenpunkt unterscheiden.	Art der Extremstellen graphisch oder mit Hilfe der Differentialrechnung begründen. Kosten- Nachfrage- und Gewinnfunktionen mittels Differentialrechnung diskutieren.
Zusammenhang zwischen *Monotonie*, *Krümmung* und Differentialquotient herstellen.	
Zu empirischen Daten (Informationen) passende Funktionen ermitteln.	
Optimierungsaufgaben mit Mitteln der Differentialrechnung oder graphisch lösen.	Einfache Extremwertaufgaben mit keiner bzw. einer Nebenbedingung lösen.
Das *bestimmte Integral* als Zahl zwischen Obersumme und Untersumme verstehen. Das *bestimmte Integral* als Summe vieler kleiner Produkte kennen. Berechnung des bestimmten Integrals mittels Stammfunktionen.	Verstehen, dass die Güte der Näherung von der Intervalllänge abhängt. Integral durch endliche Summen annähern.

Integrieren als Umkehrung zum Differenzieren verstehen.	
Polynomfunktion, Winkelfunktionen, e^x integrieren, $\int \frac{1}{x} dx$ wissen.	
Anwendung der Integralrechnung auf Flächen- und Volumsberechnungen.	Wissen, dass Methoden der Differential- und Integralrechnung in vielen Anwendungen benötigt werden (z.B. Kosten, Arbeit, Leistung, Induktionsspannung, Weg, Geschwindigkeit, etc.)
Die Differentialgleichung y´= k.y als wichtiges Modell erkennen und die Lösung wissen.	

4.3.3 Grundkompetenzen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Mag. Martin Dangl)

Arbeitspapier zu Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Grundkompetenzen

1) Zum Wahrscheinlichkeitsbegriff

Wahrscheinlichkeit als Maß für eine Erwartung, dass ein Ereignis E eintritt.
Ausgedrückt durch eine Zahl P(E) mit $0 \leq P(E) \leq 1$;

Sicheres Ereignis – Wahrscheinlichkeit 1;
Unmögliches Ereignis – Wahrscheinlichkeit 0.
Gegenereignis: $P(\neg E) = 1 - P(E)$

2) Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten

- ✓ **Verschiedene Methoden, um zu Wahrscheinlichkeiten zu kommen**

  - Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil

  - Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit

  Dadurch auch verschiedene Deutungen von Wahrscheinlichkeitsaussagen

- ✓ **Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil**
  Mathematische Beschreibung von Zufallsexperimenten (Spezialfall: Laplace-Experimente)
  - Grundwissen

    Abhängige und unabhängige Ereignisse
    Sowohl-Als Auch–Wahrscheinlichkeit
    Entweder-Oder-Wahrscheinlichkeit
    Pfaddiagramme
    (Bedingte Wahrscheinlichkeit?)
    $$P(A) = \frac{A}{G}$$
- ✓ **Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit**
  Auswertung und entsprechende grafische Darstellung von Versuchsreihen
  (→ beschreibende Statistik)
  Entsprechende Deutung und Einschätzung von Wahrscheinlichkeitsaussagen, die auf Grund von Häufigkeitsverteilungen erstellt werden.

3) Diskrete Zufallsvariable und deren Verteilungen
- ✓ **Begriff der Zufallsvariablen**
  Den Begriff (Definition) zur Beschreibung entsprechender Aufgaben verwenden können.
  Was bedeutet „diskret"?

- ✓ **(Relative oder absolute) Häufigkeitsverteilungen**
  zur Auswertung entsprechender Versuchsreihen erstellen
  Berechnung des Mittelwertes und der empirischen Standardabweichung

- ✓ **Wahrscheinlichkeitsverteilungen**
  von entsprechenden Zufallsexperimenten erstellen und grafisch darstellen.
  Berechnung des Erwartungswertes und der Standardabweichung.

- ✓ **Zusammenhang Häufigkeitsverteilung – Wahrscheinlichkeitsverteilung**
  Bedeutung des Stichprobenumfanges.
  Bei großem Umfang nähert sich die Häufigkeitsverteilung der Wahrscheinlichkeitsverteilung an
  Wiederholungen einer Versuchsserie zeigen nur geringe Schwankungen in den Verteilungen.

4) Die Binomialverteilung

Als Spezialfall einer diskreten Verteilung

- ✓ **Grundwissen**
  unter welchen Voraussetzungen ist eine Zufallsvariable binomialverteilt?
  Anwendung der entsprechenden Formel

5) Stetige Zufallsvariable und ihre Verteilungen

- ✓ **Begriff einer stetigen Zufallsvariablen**
  Den Begriff zur Modellierung von entsprechenden Problemstellungen anwenden können.

- ✓ **(Relative oder absolute) Häufigkeitsverteilungen**
  Unterschied zum diskreten Fall: Einteilung des Wertebereiches der Zufallsvariablen in Teilintervalle.
  Darstellung der Verteilung durch Tabelle oder grafisch durch Histogramme.

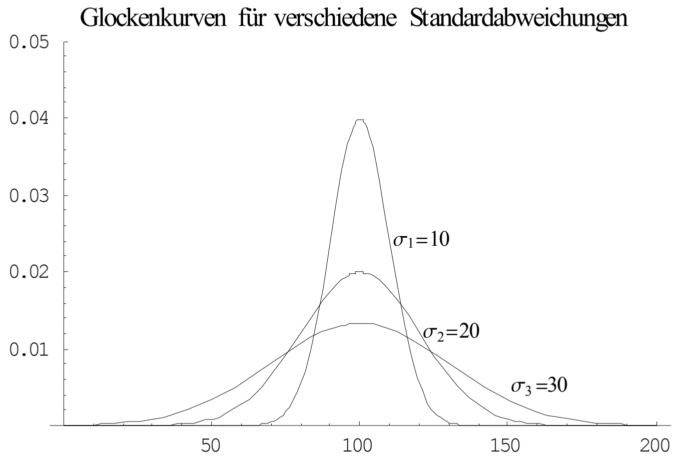
- ✓ **Wahrscheinlichkeitsverteilung**
  Wird grafisch dargestellt durch eine stückweise stetige, nichtnegative Funktion (Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion) mit
  $P(a \le X \le b)$ entspricht dem Inhalt der entsprechenden Fläche unter dem Graphen
  Der Gesamtflächeninhalt unter dem Graphen ist gleich 1.

- ✓ **Zusammenhang Häufigkeitsverteilung – Wahrscheinlichkeitsverteilung**
  Bei Vergrößerung des Stichprobenumfanges nähern sich die relativen Häufigkeitsverteilungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung an.

6) Normalverteilung

- ✓ **Die Gaußsche Glockenkurve φ**
  Beschreibt die Normalverteilung
  [Termdarstellung von φ: $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ eventuell verzichtbar]

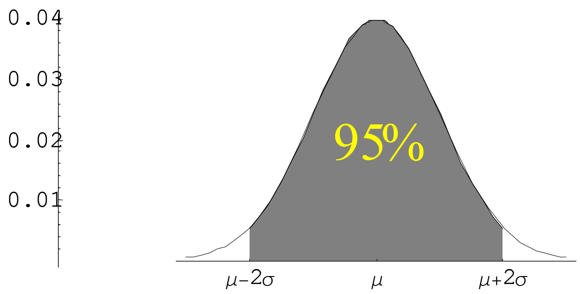
- Die Form der Gaußschen Glockenkurve skizzieren;
- Einfluss der Parametern μ (Erwartungswert) und σ (Standardabweichung) grafisch angeben.



✓ **Bedeutung der Normalverteilung**
als Grenzverteilung der Binomialverteilung.
Zum praktischen Rechnen: Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung.
In der Praxis: Sehr viele Zufallsvariable sind (annähernd) normalverteilt.

✓ **Wichtige Abschätzungen**

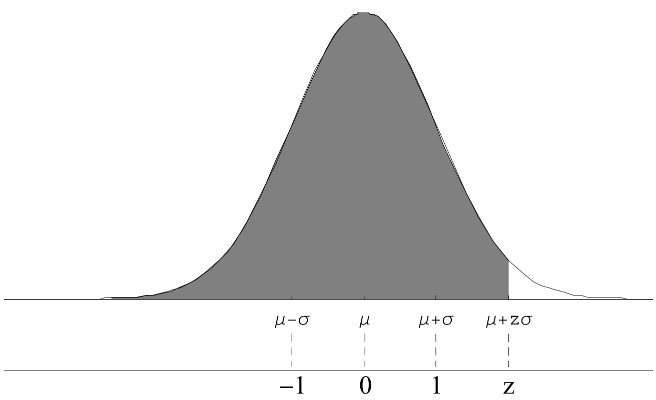
$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0{,}70$
$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \approx 1$



✓ **Standardisierung der Glockenkurve**

- Alle Glockenkurven können durch eine standardisierte re–präsentiert werden.
- Transformationsformeln für die Intervallgrenzen anwenden.
- tabellarischer Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $\Phi(z)=P(X \leq \mu+z\cdot\sigma)$.

[Mathematischer Hintergrund verzichtbar]



7) Testen von Hypothesen

- ✓ **Die Grundidee („Logik") eines statistischen Tests verstehen**
  Der Test als Analogon zu einem indirekten Beweis. (Malle)
  Analogie zu einem Indizienverfahren bei Gericht.
  Worin besteht der Test? An einer entsprechenden Grafik (Glockenkurve) erläutern.

  - Was ist die Behauptung, die durch den Test möglicherweise verworfen werden soll? Was ist ihre Negation?
    Nullhypothese; Alternativhypothese.

  - Wann gilt das Stichprobenergebnis als sehr unwahrscheinlich?
    Unter welcher Voraussetzung?

  - Was bedeutet „Irrtumswahrscheinlichkeit"?
    Z. B.: „Eine Behauptung wird durch einen statistischen Test mit der maximal zugelassenen Irrtumswahrscheinlichkeit α_0 verworfen."

  - Festlegen von α_0.
    Was bedeutet es für das Testergebnis, wenn α_0 extrem klein ist?

  - Angenommen, die Behauptung kann durch den Test mit der maximal zugelassenen Irrtumswahrscheinlichkeit α_0 nicht verworfen werden. Was folgt daraus?

  - „Einseitig" bzw. „zweiseitig" testen?
    Wie lautet die Alternativhypothese?

- ✓ **Durchführung des Tests mit Hilfe der Normalverteilung**
  - Berechnung von μ und σ aus n (Stichprobenumfang) und p (Nullhypothese):

  $\mu = n \cdot p\,; \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$
  [Mathematischer Hintergrund?]

  - Grafische Darstellung

  Verwendung der Glockenkurve zur Interpretation des Ergebnisses.

8) Schätzen von Anteilen

- ✓ **Problemstellung**
  Ein unbekannter relativer Anteil p einer Grundgesamtheit soll durch eine Stichprobe abgeschätzt werden.
  [→ Zusammenhang relative Häufigkeit – Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil]
  Punktschätzung – Intervallschätzung

- ✓ **Was ist ein Konfidenzintervall?**

  - Ein 95%-Konfidenzintervall besteht aus allen Schätzwerten für p, die durch einen zweiseitigen Anteilstest mit der Signifikanz 0,05 nicht verworfen werden können. [Berechnung eines Konfidenzintervalls verzichtbar]

5 OFFENE AUFGABENSTELLUNGEN ZUM THEMA PROBLEMLÖSEN

von Mag. Gerhard Hainscho

5.1 Gedanken zu einer neuen Aufgabenkultur

Bereits im Rahmen des Forschungsprojektes „Neue Medien und Methodik im Mathematikunterricht“ beschäftigte sich die damalige Projektgruppe 2 in den Jahren 1999 und 2000 intensiv mit der Frage nach Qualität im Mathematikunterricht. Entsprechend unserer Auffassung bedeutet diese Frage eine Auseinandersetzung mit dem Thema auf zumindest 3 verschiedenen Ebenen:

1. Formulierung und Reflexion einer „***Bildungsphilosophie***“
2. Formulierung und Evaluation von ***Zielen*** des Mathematikunterrichts
3. Konkretisierung der Ebenen (1) und (2) durch Erstellung bzw. Auswahl adäquater ***Aufgaben*** für den Mathematikunterricht

Die damals begonnene Diskussion wurde auch im Rahmen des neuen Forschungsprojektes

„Technologie im Mathematikunterricht“

in den Jahren 2001 und 2002 fortgesetzt. Die folgenden Gedanken beschäftigen sich vorwiegend mit der untersten der genannten Ebenen, also der Erstellung bzw. Auswahl „qualitätsvoller“ Aufgaben für den Mathematikunterricht, wobei die „Qualität“ der Aufgaben mehr umfassen muss als nur das mechanisierbare Rechnen, keinesfalls aber mit größerer Schwierigkeit verwechselt werden darf. Der Schwierigkeitsgrad einer Aufgabenstellung hängt hauptsächlich von der mehr oder weniger gezielten Vorbereitung ab, eventuell von der Unterrichtsform, aus der Formulierung der Aufgabe alleine kann jedenfalls *nicht* auf ihr Anspruchsniveau geschlossen werden.

Auch im oben erwähnten Vorgängerprojekt wurde bereits eine Reihe von Aufgaben vorgestellt, und zwar - angeregt durch die Diskussion um Qualitätsstandards - vorwiegend zur Überprüfung mathematischer Grundkompetenzen. Zur Präzisierung dieses Begriffs möchten wir anmerken, dass nach unserer Interpretation

Grundkompetenzen < Kernbereich < Unterrichtsinhalte < Studierfähigkeit

gilt. Mit anderen Worten: (mathematische) Grundkompetenzen stellen eine unterste Ebene dar, gewissermaßen die Bausteine, die die Bearbeitung und Lösung von (mathematischen) Aufgaben erst ermöglichen. Da aber - um bei diesem Bild zu bleiben - einzelne Bausteine erst dann ihren Zweck erfüllen, wenn sie zu einem Gebäudeganzen zusammengefügt werden, wollen wir den Blick nicht allzu sehr auf Aufgaben zu einzelnen, isolierten Grundkompetenzen beschränken, sondern exemplarisch zeigen, wie erst die Kombination solcher Kompetenzen zu „echten“, interessanten Aufgabenstellungen führt. Ein Schwerpunkt der Projektarbeit war daher die Erstellung und Erprobung solcher Aufgaben.

Die im Folgenden als ein Produkt unserer Arbeit vorgestellten Aufgaben sollen eine Reihe von Kriterien erfüllen:

- Die Aufgaben sollen ***vernetztes Denken*** erfordern, d.h. mathematische Inhalte verschiedener Themenkreise bzw. Schulstufen sollen innerhalb einer Aufgabe vorkommen, auch außermathematische Fragen können eingebaut werden. Solche Aufgaben eignen sich besonders zur Wiederholung bzw. zur Arbeit in höheren Klassen, um bestimmte Themen von einer höheren Warte aus überblicksmäßig zu bearbeiten.

  Angaben wie z.B. „5. / 7. Klasse" bedeuten, dass sowohl Inhalte der 5. als auch der 7. Klasse AHS zur Lösung der Aufgabe benötigt werden.

- Das mathematische ***Niveau*** der Aufgaben soll nicht allzu hoch liegen; im Konkreten geht es in den folgenden Aufgaben „nur" um quadratische Gleichungen und Funktionen, die mit Methoden bearbeitet werden, wie sie von der 5. bis zur 8. Klasse AHS gelernt werden.

- Die Aufgaben sollen eine ***Vielfalt an Kompetenzen*** erfordern, also neben der typischen Rechenkompetenz des traditionellen Mathematikunterrichts auch höhere Kompetenzen wie Modellbilden, Methodenwahl, Argumentieren und Begründen, Neuinterpretieren bekannter mathematischer Modelle in anwendungsorientierten Fragestellungen und anderes mehr. Auch allgemeinere und nicht spezifisch mathematische Kompetenzen wie Recherchieren und Präsentieren sollen gefordert werden.

- Die Aufgaben sollen Ausblicke auf ***typische Arbeitsweisen der Mathematik*** ermöglichen. Z.B. erfolgt durch die Analyse der Parameter einer Funktionsgleichung ein typisch mathematischer Blickpunktwechsel, wonach Funktionen selbst als mathematische Objekte neu bzw. anders betrachtet werden.

- Die Aufgaben sollen die ***historische Entwicklung der Mathematik*** einbeziehen.

- Die Aufgaben sollen ***offen*** sein für unterschiedliche Unterrichtsformen, Werkzeuge und Problemlösestrategien.

- Die spezielle Rolle der ***Technologie*** - insbesondere von Computeralgebra-Systemen - wird bei jeder Aufgabe besonders hervorgehoben.

Zu allen vorgestellten Aufgaben liegt eine Ausarbeitung vor, gelegentlich werden auch Handling-Hinweise für den Einsatz eines CAS-Rechners (TI-92 Plus) gegeben. Obwohl hin und wieder verschiedene Lösungsansätze dargestellt werden, sind in der Regel weitere Ansätze möglich.

Im Gegensatz zu anderen Zielen der Projektgruppe 3 wurden die vorliegenden Aufgaben *nicht* zum Zweck der Leistungsmessung bzw. für den Einsatz in Prüfungssituationen entwickelt, obwohl natürlich auch diese Möglichkeit besteht, insbesondere wenn man bedenkt, dass es erklärtes Ziel der Gruppe ist, bestehende Formen der Leistungsmessung durch neue bzw. alternative Möglichkeiten zu erweitern. Eine Übersicht über diese und andere Ergebnisse des Forschungsprojektes finden Sie auf den Internet-Seiten von ACDCA: http://www.acdca.ac.at/.

Die Auswahl der Aufgaben ist keine Wertung, welche mathematischen Inhalte unbedingt behandelt werden sollten, sondern umgekehrt: *Wenn* man diese Inhalte behandeln möchte, *dann* erscheinen uns die vorliegenden Aufgaben als wertvoll.

Alle Aufgaben sind als eine exemplarische Auswahl unserer Vorstellungen und Ziele zu sehen, vor allem aber als Anregung für die Entwicklung eigener Aufgaben in diesem Stil.

5.2 Quadratische Funktionen

Die quadratische Parabel $y = x^2$ (gepunktet) ist im Koordinatensystem nach rechts unten verschoben. N_1 (3 | 0) und N_2 (7 | 0) sind die Nullstellen der neuen Kurve (Abb. 1).

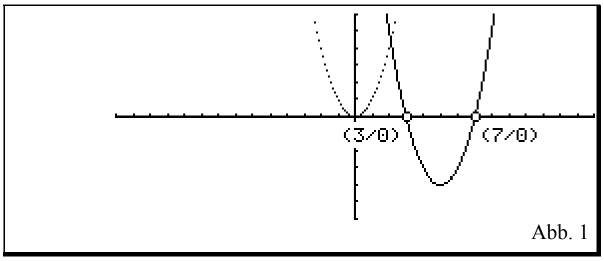


Abb. 1

a) Wie lautet die Gleichung der neuen Kurve?

b) Ermittle mit und ohne Differentialrechnung die Koordinaten des Scheitels der neuen Kurve.

c) Berechne die Nullstellen der in a) ermittelten quadratischen Parabel:
   - Löse die entsprechende quadratische Gleichung durch Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat.
   - Wiederhole die Rechnung mit mindestens einer weiteren Methode.

d) Welche Aussage bezüglich der Anzahl der reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung lässt sich aus der geometrischen Deutung ableiten?

e) Welche Aussage bezüglich der Anzahl der reellen Lösungen einer Gleichung 3. Grades lässt sich aus der geometrischen Deutung ableiten?

Zusatzfragen

A) Wie lässt sich „Lösen einer Gleichung“ für Gleichungen der Form
   - $F(x) = 0$
   - $F(x) = x$
   - $F(x) = G(x)$

geometrisch deuten?

B) Für welche x aus der Menge der reellen Zahlen gilt
   - $x^2 - 10x + 21 < 0$
   - $x^2 - 8x + 12 > 0$

C) Wer war François Vièta? Wann und wo hat er gelebt, mit welchen mathematischen Themen hat er sich beschäftigt, welche Bücher hat er geschrieben? Erstelle eine Präsentation mit den Ergebnissen deiner Recherche und vergiss nicht, alle Informationsquellen zu nennen!

D) Wie lautet der Fundamentalsatz der Algebra? Wer hat ihn wann bewiesen? Erstelle eine Präsentation mit den Ergebnissen deiner Recherche und vergiss nicht, alle Informationsquellen zu nennen!

Ziele	- Algebraische Beschreibung und Behandlung geometrischer Situationen. - Geometrische Deutung algebraischer Terme. - Methodenkompetenz, vernetztes Denken, Argumentieren und Begründen. - Recherchieren und Präsentieren.
CAS	Nicht zwingend erforderlich, aber hilfreich als Werkzeug - für numerische und symbolische Berechnungen; - zur Visualisierung von Funktionen.

Lösungen

a) Satz von Vieta (François Viète oder Vièta, 1540 - 1603):

> Sei $x^2 + px + q = 0$ eine quadratische Gleichung mit den Lösungen x_1, x_2
> $\Rightarrow$ $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{y = (x-3)\cdot(x-7) = x^2 - 10x + 21}}$

b) Lösung mit Differentialrechnung:

- $y = x^2 - 10x + 21$

$y' = 2x - 10 = 0$

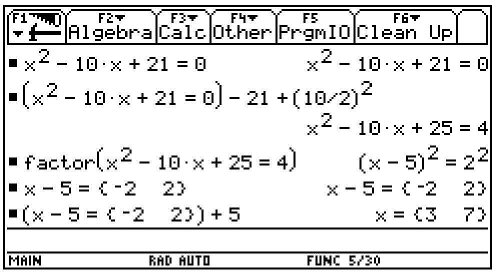
$\underline{\underline{S(5|-4)}}$

Lösung ohne Differentialrechnung:

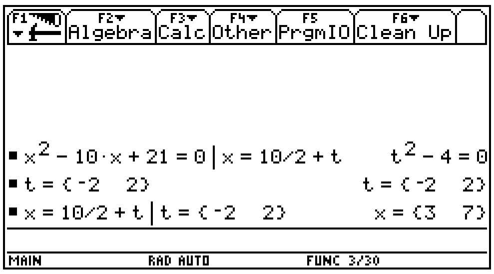
- Mitte der Nullstellen: $x = \frac{1}{2}\cdot(3+7) = 5$, $y(5) = -4$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{S(5|-4)}}$
- ***oder:*** $y = x^2 - 10x + 21 = (x-5)^2 - 4$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{S(5|-4)}}$

c) Nullstellen (Abb. 2):

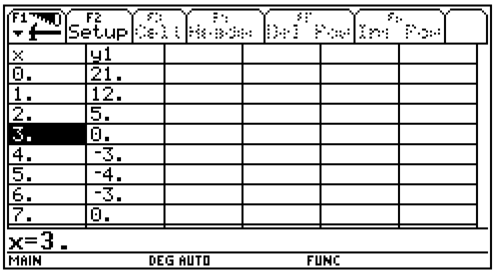
Lösung mit „quadratischer Ergänzung“



Lösung mit Substitution



Tabellierung
ermöglicht numerische Lösung mit beliebiger Genauigkeit



Faktorisierung
mit Begründung: ein Produkt ist 0, wenn ...

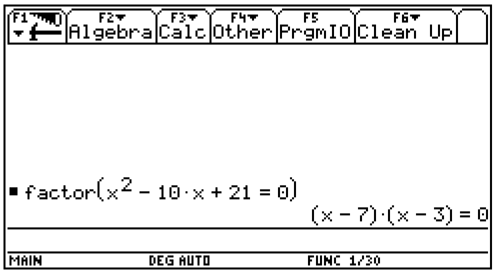
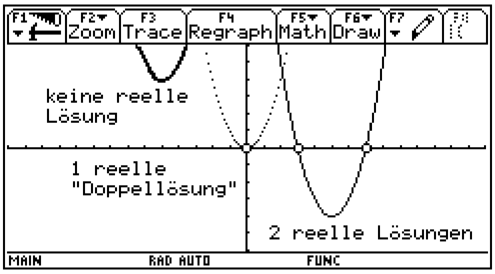


Abb. 2

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{N_1(3\,|\,0)}},\ \ \underline{\underline{N_2(7\,|\,0)}}$$

d) **3 Fälle** je nach Lage der quadratischen Parabel: 0, 1, 2 reelle Lösung(en);

e) Für jede Lage der kubischen Parabel: **mindestens eine reelle Lösung** (Abb. 3):



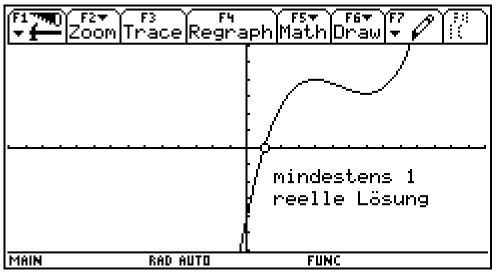


Abb. 3

A)

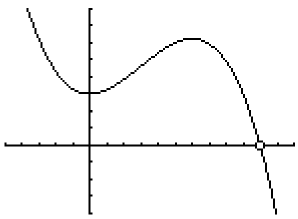
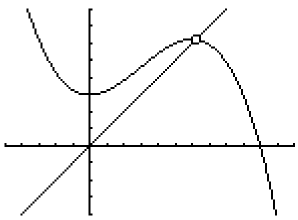
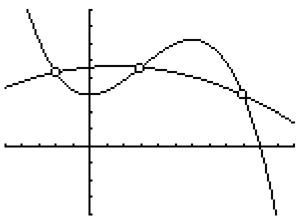
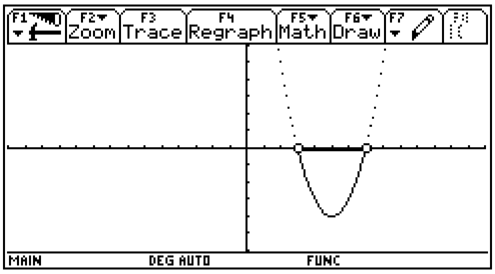
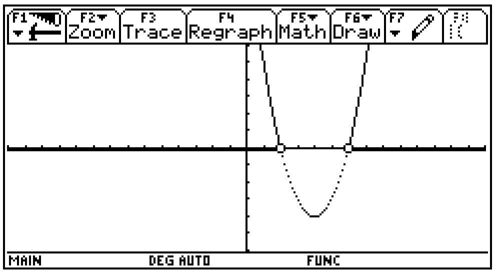
$F(x)=0$:		Ermittlung von **Nullstellen** *bzw.* Schneiden mit der ***x*-Achse**
$F(x)=x$:		Ermittlung von **Fixpunkten** *bzw.* Schneiden mit der **1. Mediane**
$F(x)=G(x)$:		Ermittlung von **Schnittpunkten** *bzw.* Schneiden mit einer **anderen Kurve**

Abb. 4

B)



$x^2 - 10x + 21 < 0$ für $\underline{\underline{3 < x \ \wedge \ x < 7}}$



$x^2 - 8x + 12 > 0$ für $\underline{\underline{x < 2 \ \vee \ x > 6}}$

Abb. 5

5.3 Reflexion

Gegeben sind die Parabel *par*: $y^2 = 4x$ und die Gerade g_1: $y = 6$ (Abb. 1).

a) Ermittle die Koordinaten des Brennpunktes sowie die Gleichung der Leitlinie l der gegebenen Parabel!

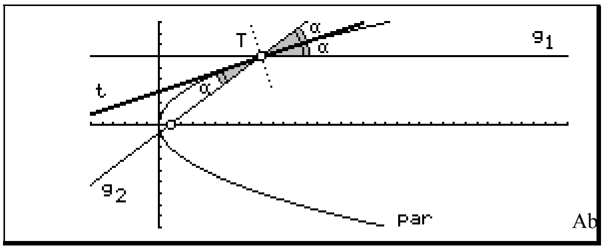
b) Ermittle die Koordinaten des Schnittpunktes T von *par* und g_1!

c) Ermittle die Gleichung der Tangente t an die Parabel in diesem Schnittpunkt!

d) Welchen Winkel schließen g_1 und t ein? Ermittle außerdem den exakten Wert von $\tan 2\alpha$!

e) Spiegle g_1 an t; ermittle die Gleichung der gespiegelten Geraden g_2!

f) Ermittle die Koordinaten der Nullstelle von g_2! Was fällt auf?



Ab

g) Wiederhole die Rechnung für die Parabel *par*: $y^2 = 2px$ und die Gerade g_1: $y = c$.

h) Formuliere die beobachtete Eigenschaft in Worten! Kennst du Anwendungen dieser Eigenschaft?

Zusatzfragen

A) Zeige, dass weder Ellipsen noch Hyperbeln diese Reflexionseigenschaft besitzen.

B) Die Gleichung $y = \frac{x^2}{8}$ beschreibt einen Schnitt durch einen Parabolspiegel (Abb. 2).

Im Brennpunkt befindet sich eine Lichtquelle, die einen Lichtkegel mit Öffnungswinkel 2φ in Richtung Scheitel wirft.

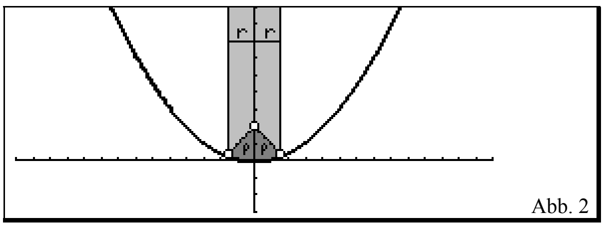


Abb. 2

- Wie groß ist der Radius der Lichtsäule für $\varphi = 30°$ / $\varphi = 45°$ / $\varphi = 90°$?
- Stelle den Radius der Lichtsäule als Funktion $r(\varphi)$ für $0° < \varphi < 90°$ grafisch dar!

Ziele	- Algebraische Beschreibung und Behandlung geometrischer Situationen, Festigung von Rechentechnik. - Erkennen und Nachweis geometrischer Gesetze. - Methodenkompetenz, vernetztes Denken, Argumentieren und Begründen.
CAS	Nicht zwingend erforderlich, aber hilfreich als Werkzeug - für numerische und symbolische Berechnungen; - zur Visualisierung von Funktionen.

Lösungen

a) $2p = 4 \;\Rightarrow\; p = 2 \Rightarrow \underline{\frac{p}{2} = 1}$

$\underline{\underline{F(1|0)}}$, l: $\underline{\underline{x = -1}}$

b) $par \cap g_1$:

```
■ solve(y² = 4·x and y = 6, {x  y})
                                    x = 9 and y = 6
```

$\underline{\underline{T(9|6)}}$

c) Tangente (Lösung mit Polaren = Tangentengleichung):

```
■ y1·y = p·(x1 + x) | x1 = 9 and y1 = 6 and p = 2
                                        6·y = 2·(x + 9)
■ expand(solve(6·y = 2·(x + 9), y))     y = x/3 + 3
```

oder (Lösung mit implizitem Differenzieren):

$y^2 = 4x \;\Rightarrow\; 2y \cdot y' = 4, \;\; y' = \frac{2}{y}, \;\; \underline{y'(9) = \frac{1}{3}}$

```
■ y = k·x + d | x = 9 and y = 6 and k = 1/3
                                              6 = d + 3
■ solve(6 = d + 3, d)                             d = 3
```

t: $\underline{\underline{y = \frac{1}{3} \cdot x + 3}}$

d) $\angle\, g_1\, t$:

$\tan \alpha = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\alpha = 18{,}435°}}$

$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \underline{\frac{3}{4}}$

e) g_2:

$$k_2 = \tan 2\alpha = \frac{3}{4}$$

```
■ y = k·x + d | x = 9 and y = 6 and k = 3/4
                                        6 = d + 27/4
■ solve(6 = d + 27/4, d)                  d = -3/4
```

g_2: $\underline{\underline{y = \frac{3}{4} \cdot x - \frac{3}{4}}}$

f) Nullstelle: $y = 0$

```
■ solve(3/4·x - 3/4 = 0, x)                   x = 1
```

$\underline{\underline{N(1 \mid 0)}}$

$\Rightarrow$ **Nullstelle = Brennpunkt**

g) $y^2 = 2px$

$\underline{\underline{F(\frac{p}{2} \mid 0)}}$, l: $\underline{\underline{x = -\frac{p}{2}}}$

$par \cap g_1$:

```
■ solve(y^2 = 2·p·x and y = c, {x  y})
                                   x = c^2/(2·p) and y = c
```

$\underline{\underline{T(\frac{c^2}{2p} \mid c)}}$

Tangente:

```
■ y1·y = p·(x1 + x) | x1 = c^2/(2·p) and y1 = c
                                   c·y = (2·p·x + c^2)/2
■ expand(solve(c·y = (2·p·x + c^2)/2, y))
                                   y = p·x/c + c/2
```

t: $\underline{\underline{y = \frac{p}{c} \cdot x + \frac{c}{2}}}$

$$\tan\alpha = \frac{p}{c} \;\Rightarrow\; \tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \underline{\frac{2cp}{c^2 - p^2}}$$

g_2:

$$\blacksquare\ y = k \cdot x + d \mid x = \frac{c^2}{2 \cdot p} \text{ and } y = c \text{ and } k = \frac{2 \cdot c \cdot p}{c^2 - p^2}$$

$$c = \frac{c \cdot p^2}{c^2 - p^2} + c + d$$

$$\blacksquare\ \text{solve}\left(c = \frac{c \cdot p^2}{c^2 - p^2} + c + d, d\right) \qquad d = \frac{-c \cdot p^2}{c^2 - p^2}$$

$$g_2\text{: } \underline{\underline{y = \frac{2cp}{c^2 - p^2} \cdot x - \frac{cp^2}{c^2 - p^2}}}$$

Nullstelle: $y = 0$

$$\blacksquare\ \text{factor}\left(\frac{2 \cdot c \cdot p \cdot x}{c^2 - p^2} - \frac{c \cdot p^2}{c^2 - p^2} = 0\right)$$

$$\frac{c \cdot p \cdot (2 \cdot x - p)}{(c + p) \cdot (c - p)} = 0$$

$$\blacksquare\ \text{solve}\left(\frac{c \cdot p \cdot (2 \cdot x - p)}{(c + p) \cdot (c - p)} = 0, x\right)$$

$$x = \frac{p}{2} \text{ or } \frac{c \cdot p}{(c + p) \cdot (c - p)} = 0$$

$$\underline{\underline{N(\frac{p}{2} \mid 0)}}$$

$\Rightarrow$ **Nullstelle = Brennpunkt**

h) Für jede Parabel gilt: achsenparallele Strahlen werden durch den Brennpunkt reflektiert.

Anwendung: Parabolspiegel, z.B. bei Satelliten-Antennen, Teleskopen ($\rightarrow$ Arecibo, ...), Solarkraftwerken ($\rightarrow$ Odeillo, ...), Richtmikrophonen, Scheinwerfern, ...

A) Zur Widerlegung reicht jeweils ein konkretes Gegenbeispiel:

Ellipse

zB.: $ell: 3x^2 + 4y^2 = 48$, $g_1: y = 3$

Brennpunkte: $\frac{3x^2}{48} + \frac{4y^2}{48} = 1$

$\Rightarrow\ e^2 = a^2 - b^2 = \frac{48}{3} - \frac{48}{4} = \underline{4}$

$\underline{\underline{F_1(-2 \mid 0)}}$, $\underline{\underline{F_2(2 \mid 0)}}$

$ell \cap g_1$:

```
■ solve(3·x² + 4·y² = 48 and y = 3, {x  y})
        x = 2 and y = 3 or x = -2 and y = 3
```

$\underline{\underline{T_1(-2 \mid 3)}}$, $\underline{\underline{T_2(2 \mid 3)}}$

Tangente in T_1:

```
■ 3·x1·x + 4·y1·y = 48 | x1 = -2 and y1 = 3
                                  12·y - 6·x = 48
■ expand(solve(12·y - 6·x = 48, y))
                                       y = x/2 + 4
```

$\underline{\underline{t_1: y = \frac{1}{2} \cdot x + 4}}$

$\tan\alpha = \frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \underline{\frac{4}{3}}$

g_2:

```
■ y = k·x + d | x = -2 and y = 3 and k = 4/3
                                     3 = d - 8/3
■ solve(3 = d - 8/3, d)                 d = 17/3
```

$\underline{\underline{g_2: y = \frac{4}{3} \cdot x + \frac{17}{3}}}$

Nullstelle: $y = 0$

```
■ solve(4/3·x + 17/3 = 0, x)          x = -17/4
```

$\underline{\underline{N(-\frac{17}{4} \mid 0)}}$

$\Rightarrow$ **Nullstelle ≠ Brennpunkt**

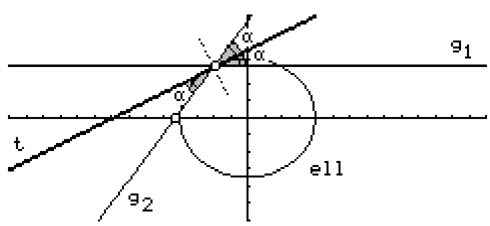


Abb. 3

Hyperbel

zB.: $hyp: 4x^2 - y^2 = 20$, $g_1: y = 4$

Brennpunkte: $\frac{4x^2}{20} - \frac{y^2}{20} = 1$

$\Rightarrow\ e^2 = a^2 + b^2 = \frac{20}{4} + 20 = \underline{25}$

$\underline{\underline{F_1(-5 \mid 0)}}$, $\underline{\underline{F_2(5 \mid 0)}}$

$hyp \cap g_1$:

```
■ solve(4·x² - y² = 20 and y = 4, {x  y})
        x = 3 and y = 4 or x = -3 and y = 4
```

$\underline{\underline{T_1(-3 \mid 4)}}$, $\underline{\underline{T_2(3 \mid 4)}}$

Tangente in T_2:

```
■ 4·x1·x - y1·y = 20 | x1 = 3 and y1 = 4
                                  12·x - 4·y = 20
■ solve(12·x - 4·y = 20, y)         y = 3·x - 5
```

$t_2: \underline{\underline{y = 3 \cdot x - 5}}$

$\tan\alpha = 3\ \Rightarrow\ \tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \underline{-\frac{3}{4}}$

g_2:

```
■ y = k·x + d | x = 3 and y = 4 and k = -3/4
                                    4 = d - 9/4
■ solve(4 = d - 9/4, d)                d = 25/4
```

$\underline{\underline{g_2: y = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{25}{4}}}$

Nullstelle: $y = 0$

```
■ solve(-3/4·x + 25/4 = 0, x)          x = 25/3
```

$\underline{\underline{N(\frac{25}{3} \mid 0)}}$

$\Rightarrow$ **Nullstelle ≠ Brennpunkt**

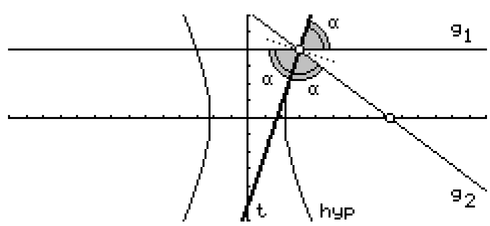


Abb. 4

Mit CAS-Unterstützung ist die Rechnung auch allgemein machbar; z.B. für

Ellipse: $ell: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $g_1: y=c$

$ell \cap g_1$:

$$\blacksquare\ \text{solve}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ and } y=c, \{x \quad y\}\right)$$

$$x=\frac{-a\cdot\sqrt{b^2-c^2}}{b} \text{ and } y=c \text{ and } \frac{a^2\cdot(b^2-c^2)}{b^2}\ge 0 \text{ and } a\ne 0 \text{ and } b\ne 0 \text{ or } x=\frac{a\cdot\sqrt{b^2-c^2}}{b} \text{ and}\blacktriangleright$$

$$\underline{\underline{T_1(-\frac{a\cdot\sqrt{b^2-c^2}}{b}\mid c)}},\quad \underline{\underline{T_2(\frac{a\cdot\sqrt{b^2-c^2}}{b}\mid c)}}$$

Tangente in T_1:

$$\blacksquare\ \frac{x1\cdot x}{a^2}+\frac{y1\cdot y}{b^2}=1 \mid x1=\frac{-a\cdot\sqrt{b^2-c^2}}{b} \text{ and } y1=c$$

$$\frac{c\cdot y}{b^2}-\frac{\sqrt{b^2-c^2}\cdot x}{a\cdot b}=1$$

$$\blacksquare\ \text{expand}\left(\text{solve}\left(\frac{c\cdot y}{b^2}-\frac{\sqrt{b^2-c^2}\cdot x}{a\cdot b}=1, y\right)\right)$$

$$y=\frac{b\cdot\sqrt{b^2-c^2}\cdot x}{a\cdot c}+\frac{b^2}{c}$$

t_1: $\underline{\underline{t_1: y=\dfrac{b\cdot\sqrt{b^2-c^2}}{a\cdot c}\cdot x+\dfrac{b^2}{c}}}$

$$\tan\alpha=\frac{b\cdot\sqrt{b^2-c^2}}{a\cdot c} \quad\Rightarrow\quad \tan 2\alpha=\frac{2\cdot\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\underline{\frac{2abc\cdot\sqrt{b^2-c^2}}{a^2c^2-b^2\cdot(b^2-c^2)}}$$

g_2:

$$\blacksquare\ y=k\cdot x+d \mid x=\frac{-a\cdot\sqrt{b^2-c^2}}{b} \text{ and } y=c \text{ and } k=\frac{2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{b^2-c^2}\cdot c}{a^2\cdot c^2-b^2\cdot(b^2-c^2)}$$

$$c=\frac{-2\cdot b^2\cdot(b^2-c^2)^2}{(a^2\cdot c^2-b^2\cdot(b^2-c^2))\cdot c}-\frac{2\cdot b^2-c\cdot(2\cdot c+d)}{c}$$

$$\blacksquare\ \text{solve}\left(c=\frac{-2\cdot b^2\cdot(b^2-c^2)^2}{(a^2\cdot c^2-b^2\cdot(b^2-c^2))\cdot c}-\frac{2\cdot b^2-c\cdot(2\cdot c+d)}{c}, d\right)$$

$$d=\frac{(a^2\cdot(2\cdot b^2-c^2)-b^2\cdot(b^2-c^2))\cdot c}{a^2\cdot c^2-b^2\cdot(b^2-c^2)}$$

$$\blacksquare\ y=\frac{2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{b^2-c^2}\cdot c}{a^2\cdot c^2-b^2\cdot(b^2-c^2)}\cdot x+\frac{(a^2\cdot(2\cdot b^2-c^2)-b^2\cdot(b^2-c^2))\cdot c}{a^2\cdot c^2-b^2\cdot(b^2-c^2)}$$

Nullstelle: $y = 0$

$$\blacksquare\ \text{factor}\left(y = \frac{2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{b^2-c^2}\cdot c\cdot x}{a^2\cdot c^2 - b^2\cdot(b^2-c^2)} + \frac{\left(a^2\cdot(2\cdot b^2-c^2)-b^2\cdot(b^2-c^2)\right)\cdot c}{a^2\cdot c^2-b^2\cdot(b^2-c^2)}\right)$$

$$y = \frac{c\cdot\left(2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{b^2-c^2}\cdot x + a^2\cdot(2\cdot b^2-c^2)-b^2\cdot(b^2-c^2)\right)}{a^2\cdot c^2-b^2\cdot(b^2-c^2)}$$

$$\blacksquare\ \text{solve}\left(\frac{c\cdot\left(2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{b^2-c^2}\cdot x + a^2\cdot(2\cdot b^2-c^2)-b^2\cdot(b^2-c^2)\right)}{a^2\cdot c^2-b^2\cdot(b^2-c^2)} = 0, x\right)$$

$$x = \frac{-\left(a^2\cdot(2\cdot b^2-c^2)-b^2\cdot(b^2-c^2)\right)}{2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{b^2-c^2}} \text{ or } \frac{c}{a^2\cdot c^2-b^2\cdot(b^2-c^2)} = 0$$

$\Rightarrow$ **Nullstelle $\neq$ Brennpunkt**

B)

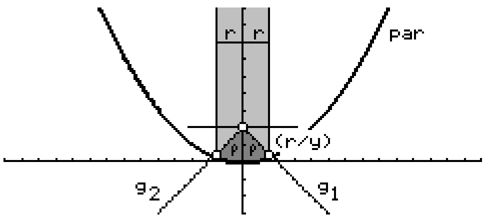


Abb. 5

$$y = \frac{x^2}{8} \;\Rightarrow\; x^2 = 8y$$

$$2p = 8 \;\Rightarrow\; p = 4 \Rightarrow\; \underline{\frac{p}{2} = 2}$$

$$\underline{\underline{F(0\,|\,2)}}$$

Gleichung von g_1

- für $\varphi = 30°$:

  $k = -\tan 60° = -\sqrt{3}$, $d = 2$

  $g_1 : \underline{\underline{y = -\sqrt{3}\cdot x + 2}}$

  $par \cap g_1$:

  $$\blacksquare\ \text{solve}\left(y = \frac{x^2}{8} \text{ and } y = -\sqrt{3}\cdot x + 2, \{x \quad y\}\right) \mid x > 0$$
  $$x = -4\cdot(\sqrt{3}-2) \text{ and } y = -2\cdot(4\cdot\sqrt{3}-7)$$

  $\underline{\underline{r_{30} = 4\cdot(2-\sqrt{3}) = 1{,}072}}$

- für $\varphi = 45°$:

  $k = -\tan 45° = -1$, $d = 2$

  $g_1 : \underline{\underline{y = -x + 2}}$

par $\cap$ g_1:

$\blacksquare\ \text{solve}\left(y=\frac{x^2}{8} \text{ and } y=-x+2, \{x \quad y\}\right) \mid x>0$

$x=4\cdot(\sqrt{2}-1) \text{ and } y=-2\cdot(2\cdot\sqrt{2}-3)$

$$\underline{\underline{r_{45}=4\cdot(\sqrt{2}-1)=1{,}657}}$$

- für $\varphi = 90°$:

  $k=0$, $d=2$

  g_1: $\underline{\underline{y=2}}$

  par $\cap$ g_1:

  $\blacksquare\ \text{solve}\left(y=\frac{x^2}{8} \text{ and } y=2, \{x \quad y\}\right) \mid x>0$

  $x=4 \text{ and } y=2$

  $$\underline{\underline{r_{90}=4}}$$

- für beliebige Werte von φ:

  $$k=-\tan\ (90-\varphi)=-\frac{1}{\tan\varphi},\ d=2$$

  $$\underline{\underline{g_1: y=-\frac{1}{\tan\varphi}\cdot x+2}}$$

  par $\cap$ g_1:

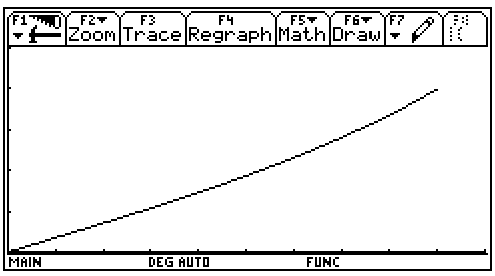
  $\blacksquare\ \text{solve}\left(y=\frac{x^2}{8} \text{ and } y=\frac{-1}{\tan(\varphi)}\cdot x+2, \{x \quad y\}\right) \mid x>0$

  $x=\frac{4\cdot\left(|\cos(\varphi)|-(\cos(\varphi))^2\right)}{\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)} \text{ and } y=\frac{-2\cdot\left(2\cdot|\cos(\varphi)|-(\cos(\varphi))^2-1\right)}{(\sin(\varphi))^2} \text{ and } \sin(\varphi)\neq 0 \text{ or}$ ▸

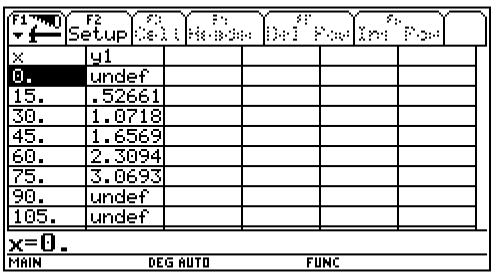
  $\blacksquare\ \frac{4\cdot\left(|\cos(\varphi)|-(\cos(\varphi))^2\right)}{\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)} \to r(\varphi) \qquad \text{Done}$

Grafische Darstellung (Abb. 6):

y1=r(x) | 0 < x and x < 90



◆ [WINDOW] - x = 0..100 / y = 0..5



x	y1
0.	undef
15.	.52661
30.	1.0718
45.	1.6569
60.	2.3094
75.	3.0693
90.	undef
105.	undef

x=0.

MAIN DEG AUTO FUNC

◆ [TblSet] - tblStart = 0 / Δtbl = 15

Abb. 6

5.4 Parabelsegment

Gegeben sind die Parabel $par: y = -\frac{x^2}{4} - 1$ und die Gerade $g_1: y = \frac{1}{2}x - 13$ (Abb. 1).

a) *par* und g_1 schneiden einander. Ermittle die Koordinaten der Endpunkte P und Q der so entstehenden Sehne!

b) Ermittle die Koordinaten der Endpunkte R und S der zu PQ parallelen Sehne g_2 durch (0 | -7)!

c) Ermittle die Koordinaten der Mittelpunkte der Sehnen PQ und RS sowie die Gleichung der Geraden g_3 durch diese Mittelpunkte!

d) Schneide *par* mit g_3 und ermittle die Gleichung der Tangente an die Parabel in diesem Schnittpunkt T in der Form $y = kx + d$. Was fällt auf?

e) Ermittle die Fläche des von par und g_1 gebildeten Parabelsegments. Nach Archimedes beträgt die Fläche dieses Segments 4/3 der Fläche des Dreiecks PQT. Überprüfe diese Behauptung!

f) Wiederhole gegebenenfalls die Berechnung der Dreiecksfläche PQT mit der Polygonformel von Carl Friedrich Gauß, wie sie im Vermessungswesen verwendet wird!

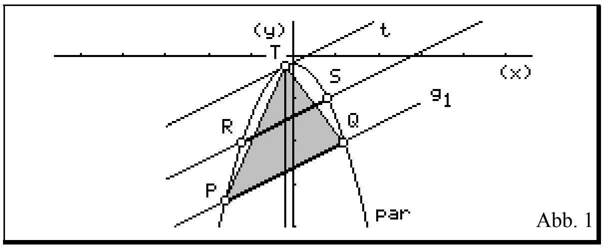


Abb. 1

Zusatzfragen

A) Erläutere die Polygonformel von Gauß durch Skizze und Rechnung!

B) Entwickle ein Programm `APOLY`, das die Koordinaten eines beliebigen nicht überschlagenen Polygons aus der Tabelle `POLYDAT` des `Data/Matrix Editors` entnimmt und daraus die Fläche mit Hilfe der Polygonformel berechnet!

C) Erläutere die Methode des Archimedes zur Bestimmung der Fläche eines Parabelsegments durch „Ausschöpfung“ („Exhaustion“)! Vergleiche insbesondere seine Methode der Bestim– mung einer unendlichen Summe mit den Methoden der modernen Mathematik!

Ziele	- Algebraische Beschreibung und Behandlung geometrischer Situationen, Festigung von Rechentechnik. - Erkennen und Nachweis geometrischer Gesetze. - Betonung historischer Aspekte der Mathematik. - Methodenkompetenz, vernetztes Denken, Argumentieren und Begründen.
CAS	Nicht zwingend erforderlich, aber hilfreich als Werkzeug - für numerische und symbolische Berechnungen; - zur Visualisierung von Funktionen; - zur Entwicklung von (Programm)Modulen.

Lösungen

a) $par \cap g_1$:

```
■ solve(y = -x^2/4 - 1 and y = 1/2·x - 13, {x  y})
                 x = 6 and y = -10 or x = -8 and y = -17
```

oder:

```
■ solve(-x^2/4 - 1 = 1/2·x - 13, x)
                                   x = 6 or x = -8
■ y = 1/2·x - 13 | x = 6                  y = -10
■ y = 1/2·x - 13 | x = -8                 y = -17
```

$\underline{\underline{P(-8 \mid -17)}}$, $\underline{\underline{Q(6 \mid -10)}}$

b) $g_2 \parallel g_1$ durch (0 | -7) ... k gegeben, d ersichtlich:

$g_2 : \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x - 7}}$

$par \cap g_2$:

```
■ solve(y = -x^2/4 - 1 and y = 1/2·x - 7, {x  y})
                 x = 4 and y = -5 or x = -6 and y = -10
```

$\underline{\underline{R(-6 \mid -10)}}$, $\underline{\underline{S(4 \mid -5)}}$

c) $M_{PQ} = \frac{1}{2} \cdot (P + Q)$, $M_{RS} = \frac{1}{2} \cdot (R + S)$

$$\blacksquare\ 1/2 \cdot \left(\begin{bmatrix} -8 \\ -17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix} \right) \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ -27/2 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare\ 1/2 \cdot \left(\begin{bmatrix} -6 \\ -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} \right) \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ -15/2 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{M_{PQ}(-1 \mid -\frac{27}{2})}}$, $\underline{\underline{M_{RS}(-1 \mid \frac{15}{2})}}$

g_3 lotrecht: $\underline{\underline{x = -1}}$

d) $par \cap g_3$:

```
■ solve(y = -x^2/4 - 1 and x = -1, {x  y})
                               x = -1 and y = -5/4
```

$\underline{\underline{T(-1 \mid -\frac{5}{4})}}$

Steigung und Gleichung der Tangente:

```
■ d/dx(-x^2/4 - 1) | x = -1                          1/2
■ y = k·x + d | x = -1 and y = -5/4 and k = 1/2
                                       -5/4 = d - 1/2
■ solve(-5/4 = d - 1/2, d)                   d = -3/4
```

$t : \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}}}$

$\Rightarrow$ $g_1 \parallel g_2 \parallel t$, g_3 konjugierter Durchmesser

e) Fläche des Parabelsegments:

$$\blacksquare \int_{-8}^{6} \left(-\frac{x^2}{4} - 1 - (1/2 \cdot x - 13) \right) dx \qquad \frac{343}{3}$$

$$\underline{\underline{A_{seg} = \frac{343}{3}}}$$

Fläche des Dreiecks *PQT*:

	x	y	Δx	Σy
P	-8	-17		
Q	6	-10	14	-27
T	-1	-5/4	-7	-45/4
P	-8	-17	-7	-73/4

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \left| -14 \cdot 27 + 7 \cdot \frac{45}{4} + 7 \cdot \frac{73}{4} \right| = \underline{\frac{343}{4}}$$

$$\underline{\underline{\frac{A_{seg}}{A_{\Delta}} = \frac{4}{3}}}$$

A) Polygonformel von Gauß (Carl Friedrich Gauß, 1777 - 1855)
Polygonflächen lassen sich als Summe bzw. Differenz von Trapezen berechnen (Abb. 2):

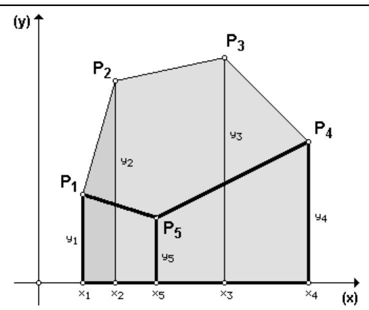


Abb. 2

$$A = \frac{(y_2 + y_1) \cdot (x_2 - x_1)}{2} + \frac{(y_3 + y_2) \cdot (x_3 - x_2)}{2} + \frac{(y_4 + y_3) \cdot (x_4 - x_3)}{2} - \frac{(y_5 + y_4) \cdot (x_4 - x_5)}{2} - \frac{(y_1 + y_5) \cdot (x_5 - x_1)}{2}$$

$$A = \frac{(y_2 + y_1) \cdot (x_2 - x_1)}{2} + \frac{(y_3 + y_2) \cdot (x_3 - x_2)}{2} + \frac{(y_4 + y_3) \cdot (x_4 - x_3)}{2} + \frac{(y_5 + y_4) \cdot (x_5 - x_4)}{2} + \frac{(y_1 + y_5) \cdot (x_1 - x_5)}{2}$$

Allgemeine Formel („die Vorzeichen regeln sich von selbst“):

$$\underline{\underline{A = \frac{1}{2} \cdot \left| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{i+1} + y_i) \right|}} \quad \text{mit } x_{n+1} = x_1 \text{ und } y_{n+1} = y_1$$

B) Polygonformel mit Data/Matrix Editor und Programm

[APPS] - 6: Data/Matrix Editor - 3: New - Variable = POLYDAT (Abb. 3):

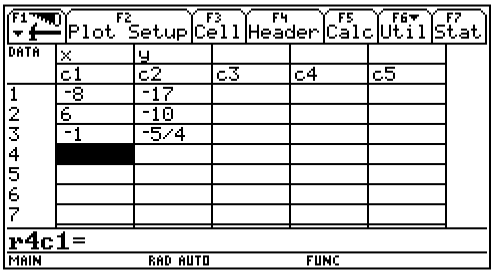


Abb. 3

[APPS] - 7: Program Editor - 3: New - Variable = APOLY (Abb. 4):

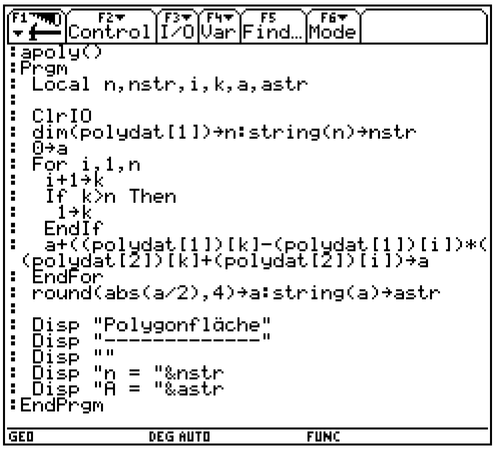


Abb. 4

[◆] [HOME] - `apoly()` (Abb. 5):

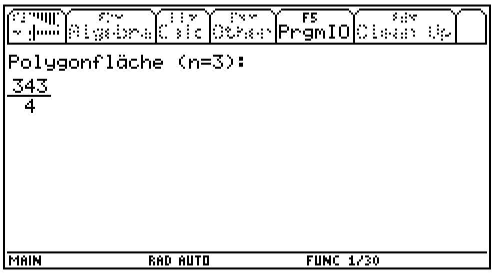


Abb. 5

C) **Ausschöpfungsmethode nach Archimedes** (Archimedes von Syrakus, 3. Jh. v. Chr.)

Idee: ∞ Folge von Dreiecksflächen (Abb. 6):

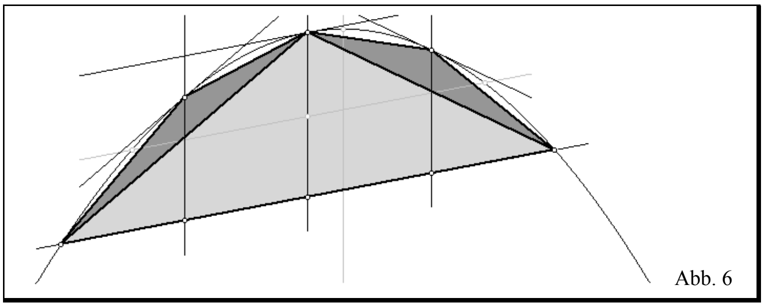


Abb. 6

Ohne Beweis:

1 Dreieck	=					A_0
2 Dreiecke	=			A_1	=	$1/4 \cdot A_0$
4 Dreiecke	=	A_2	=	$1/4 \cdot A_1$	=	$1/16 \cdot A_0$
...						
n-Dreiecke	=	$A = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ...\right) \cdot A_0$				

modern (Summenformel für geometrische Reihen):

$$A = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \cdot A_0 = \frac{4}{3} \cdot A_0$$ □

Archimedes:

- $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$ kann nicht größer sein als $\frac{4}{3}$, denn:

  $1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}$

  $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \quad = \quad \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$

  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{21}{16} \quad = \quad \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$

  ...

... stets wird ein positiver Wert von 4/3 abgezogen.

- $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$ kann nicht kleiner sein als $\frac{4}{3}$, denn: wäre die Summe kleiner als $\frac{4}{3}$, dann gäbe es einen positiven Unterschied $\frac{4}{3} - (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots)$; gerade diese Differenz wird aber mit jedem Schritt immer kleiner, d.h. sie unterläuft jeden gegebenen Wert.
- Daher gilt: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{4}{3}$

Literatur: Rudolf Taschner: Das Unendliche. Mathematiker ringen um einen Begriff. Berlin, Heidelberg u.a. 1995 <Springer>.

5.5 Wurfparabel 1

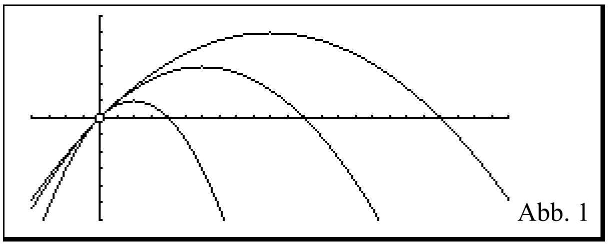


Abb. 1

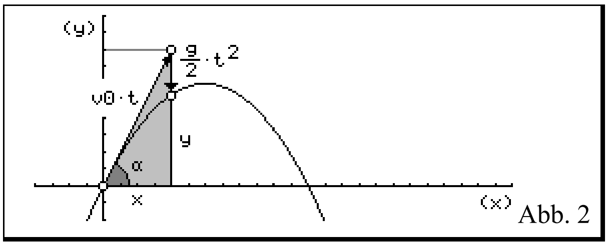


Abb. 2

a) $y = ax^2 + bx + c$ ist die allgemeine Gleichung einer quadratischen Parabel.
- Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten a, b und c erfüllen, damit die Parabel **unten offen** ist, **durch den Ursprung** geht und ihren **Scheitel im 1. Quadranten** hat (Abb. 1)?
- Nenne mindestens drei konkrete Beispiele solcher Parabeln, die alle Bedingungen erfüllen!
- Welche geometrische Bedeutung hat der Parameter b?

b) Ermittle je drei Beispiele solcher Parabeln, die die Punkte A(12 | 0) bzw. B(16 | 2) „treffen"!

c) Interpretiere die Parabeln als Bilder einer Wurfbewegung („schiefer Wurf").
- Welche Beschriftungen der Achsen sind denkbar?
- Was bedeutet dabei jeweils der Abszissenwert der rechten Nullstelle?

d) Drücke x und y mit Hilfe der Größen v_0 und α aus (Startgeschwindigkeit und -richtung, Abb. 2)!
Wie lautet nun die Gleichung der Wurfparabel
- in Parameterform ($x(t)$, $y(t)$)?
- in parameterfreier Form ($y(x)$)?

Interpretiere die ursprünglichen Parameter a und b mit Hilfe der Größen v_0 und α!

e) Stelle die Wurfparabel für v_0 = 15 m/s, α = 60° und g = 10 m/s² grafisch dar.
- Wann und wo erfolgt der Aufprall am Boden?
- Ermittle die maximale Wurfhöhe!

f) Welche der folgenden Gleichungen lassen sich als Wurfparabel interpretieren?
- p_1: $y = x^2 + 3 \cdot x$
- p_2: $y = -2 \cdot x^2 + 3 \cdot x$
- p_3: $y = -\frac{1}{20} \cdot (2 + \sqrt{3}) \cdot x^2 + (2 + \sqrt{3}) \cdot x$

Ermittle für g = 10 m/s² (wo möglich) α und v_0 aus der gegebenen Gleichung!

g) Welche(n) Startwinkel muss man wählen, um für v_0 = 10 m/s und g = 10 m/s² die Wurfweite $5 \cdot \sqrt{3}$ m zu erzielen?

h) Für welche(n) Startwinkel erzielt man bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 maximale Wurfweite? Wie groß ist diese?

Ziele	- Analyse der Bedeutung von Parametern in einer Funktionsgleichung. - Anwendung und Neuinterpretation mathematischer Modelle in anwendungsorientierten Fragestellungen. - Modellbilden, vernetztes Denken.
CAS	Nicht zwingend erforderlich, aber hilfreich als Werkzeug - zum Umformen und Lösen von Gleichungen; - zur Visualisierung von Funktionen; - zum Testen von Vermutungen.

Anwendungen

A) Ein Basketball-Spieler ist gerade 5 m vom Korb entfernt, dessen Ring sich 3,05 m über dem Boden befindet; er wirft den Ball aus 2,60 m Höhe und trifft (Abb. 3).

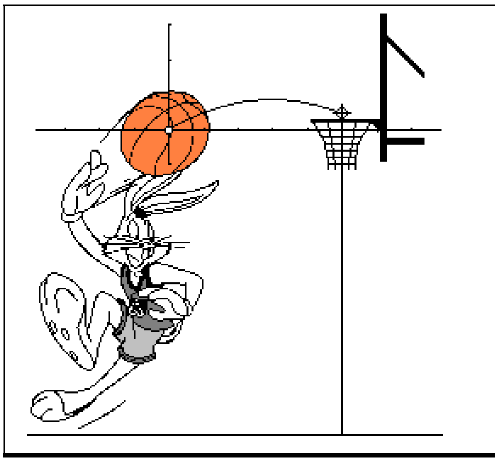


Abb. 3

a) Welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss der Ball haben, wenn ihn der Spieler unter $\alpha = 30°$ wirft?

b) Welche(n) Winkel α muss der Spieler wählen, wenn er den Ball mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 9$ m/s wirft?

c) Ermittle die Gleichungen der entsprechenden Wurfparabeln und stelle sie grafisch dar!

d) Nenne einige Unterschiede zwischen mathematischem Modell und Wirklichkeit! Was hältst du von der Aussage: „Wenn ich einen Ball werfe, bringe ich nie eine Parabel zusammen!?“

Bildquelle: http://www.spacejam.com/cmp/junior/coloring.html [04. 05. 2002]

B) Die Düsen eines Springbrunnens befinden sich in der Mitte des Beckens auf Höhe des Wasserspiegels; sie erzeugen Fontänen, deren Tropfen mit Winkeln zwischen 15° und 90° nach oben geschleudert werden (Abb. 4). Ihre Anfangsgeschwindigkeit ist durch Einstellung der Wasserpumpe regulierbar; $g = 10$ m/s^2.

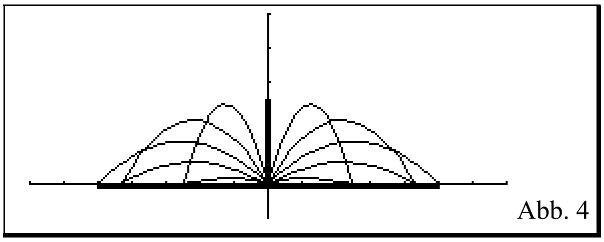


Abb. 4

a) Auf welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist die Pumpe einzustellen, wenn die Fontänen maximal 50 cm nach außen spritzen dürfen?

b) Ermittle die maximale Höhe der Fontänen!

c) Ermittle die Gleichung der Hüllkurve aller Fontänen!

d) Stelle Fontänen und Hüllkurve grafisch dar!

e) Ermittle das Volumen des benetzten Luftraums!

Literatur: Günter Schmidt: Mathematik erleben. Experimentieren, Entdecken, Modellieren und Veranschaulichen mit dem TI-92. Freising 1995 <TI Lehrerhandreichung BTI-TI13>.

Lösungen

a) $y = ax^2 + bx + c$

- unten offen : negative Krümmung ... $y'' = 2a < 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a < 0}$
- $y(0) = 0$: $\boldsymbol{c = 0}$
- Scheitel : $y' = 2ax + b = 0 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{b}{2a} > 0 \;\Rightarrow\; -b < 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{b > 0}$

oder: Mitte der Nullstellen: $x = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) = -\dfrac{b}{2a} > 0$ ...

$\underline{\underline{y = ax^2 + bx \;\; mit \;\; a < 0 \;\; und \;\; b > 0}}$

Beispiele (Abb. 1): `y1=a·x^2+b·x|a={-1/4 -1/12 -1/20} and b=1`

$y'(0) = b \;\Rightarrow\;$ $\underline{\underline{b \text{ ... Steigung im Ursprung}}}$

b) $y(12) = 0 \;\Rightarrow\; 144a + 12b = 0 \;\Rightarrow\; b = -12a$

Beispiele (Abb. 5): $y2 = a \cdot x^2 + b \cdot x \mid a = \{-1/8 \quad -1/12 \quad -1/24\}$ and $b = {}^{-}12 \cdot a$

$y(16) = 2 \;\Rightarrow\; 256a + 16b = 2 \;\Rightarrow\; b = -16a + 1/8$

Beispiele (Abb. 6): $y3 = a \cdot x^2 + b \cdot x \mid a = \left\{\frac{-3}{128} \quad \frac{-7}{128} \quad \frac{-11}{128}\right\}$ and $b = {}^{-}16 \cdot a + 1/8$

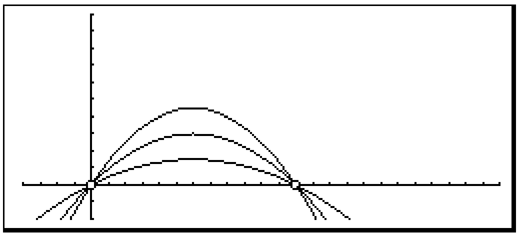


Abb. 5

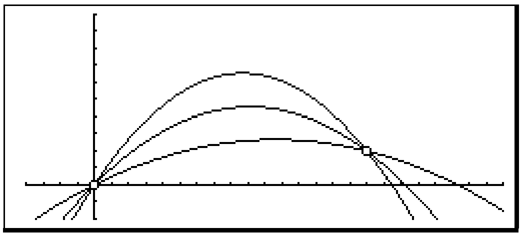


Abb. 6

c)

Achsen	**rechte Nullstelle**
t - y	Zeitpunkt des Aufpralls am Boden
x - y	horizontale Entfernung von Start- und Aufprallpunkt = Wurfweite

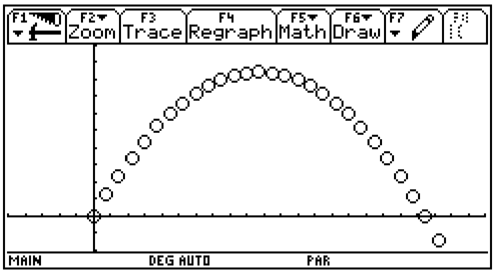
d)

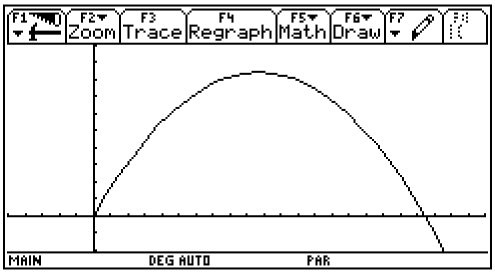
$$\cos\alpha = \frac{x}{v_0 \cdot t} \qquad \Rightarrow \underline{x = v_0 \cdot (\cos\alpha) \cdot t} \;\Rightarrow\; t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{y + \frac{g}{2} \cdot t^2}{v_0 \cdot t} \qquad \Rightarrow \underline{y = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot (\sin\alpha) \cdot t} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{y = \underbrace{-\frac{g}{2} \cdot \frac{1}{v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}}_{a} \cdot x^2 + \underbrace{(\tan\alpha)}_{b} \cdot x}}$$

e) Grafische Darstellung für v_0 = 15 m/s, α = 60° und g = 10 m/s^2 (Abb. 7):

MODE - Graph = PARAMETRIC





xt1=15·cos(60)·t
yt1=-5·t^2 + 15·sin(60)·t

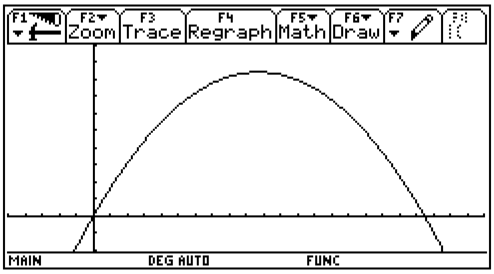
F6 Style - 5: Animate

xt2=15·cos(60)·t
yt2=-5·t^2 + 15·sin(60)·t

F6 Style - 1: Line

◆ [WINDOW] - t = 0..3 / $tstep$ = 0.1 / x = -5..23 / y = -2..10

MODE - Graph = FUNCTION

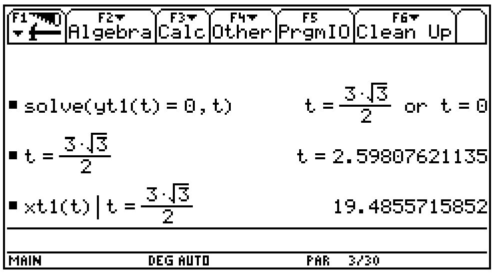


$$y1=-5\cdot\frac{1}{15^2}\cdot\frac{1}{(\cos(60))^2}\cdot x^2+\tan(60)\cdot x$$

◆ [WINDOW] - x = -5..23 / y = -2..10

Abb. 7

Zeitpunkt des Aufpralls, Wurfweite und maximale Wurfhöhe (Abb. 8):



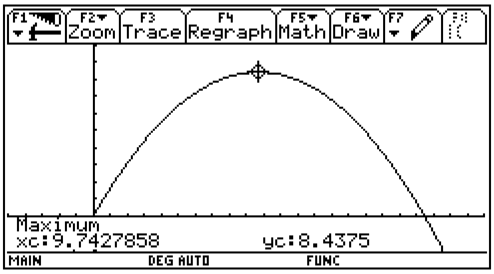


Abb. 8

f) p_1: keine Wurfparabel: $a = 1 > 0$

p_2: Wurfparabel:

$$\tan\alpha = 3 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\alpha = 71{,}565°}}$$

$$-5\cdot\frac{1}{v_0^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 71{,}565} = -2 \;\Rightarrow\; v_0^2 = 25 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{v_0 = 5\ \text{m/s}}}$$

p_3: Wurfparabel:

$$\tan\alpha = 2+\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\alpha = 75°}}$$

$$-5\cdot\frac{1}{v_0^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 75} = -\frac{2+\sqrt{3}}{20} \;\Rightarrow\; v_0^2 = 400 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{v_0 = 20\ \text{m/s}}}$$

g) $y(5\cdot\sqrt{3}) = 0$:

$$-5\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot 75 + (\tan\alpha)\cdot 5\cdot\sqrt{3} = 0 \qquad |\text{SOLVE } (..., \alpha)\ |\ 0 \le \alpha \text{ AND } \alpha \le 90$$

$\underline{\underline{\alpha = 30°}} \vee \underline{\underline{\alpha = 60°}}$ (Abb. 9):

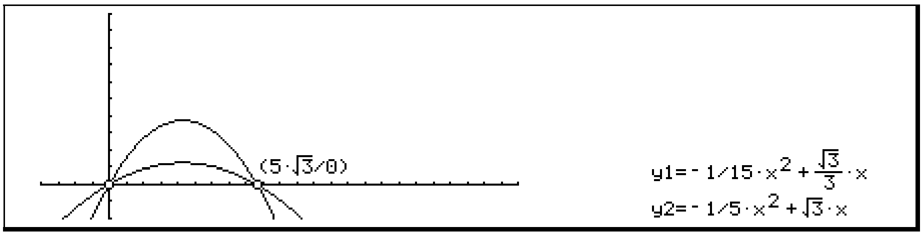


Abb. 9

h) $y = 0$: $-\frac{g}{2}\cdot t^2 + v_0\cdot(\sin\alpha)\cdot t = t\cdot(-\frac{g}{2}\cdot t + v_0\cdot\sin\alpha) = 0 \;\Rightarrow\; t = 0 \vee \underline{t = \frac{2}{g}\cdot v_0\cdot\sin\alpha}$

$$x = v_0\cdot(\cos\alpha)\cdot t \;\mid\; t = \frac{2}{g}\cdot v_0\cdot\sin\alpha \;\Rightarrow\; \underline{x = \frac{2}{g}\cdot v_0^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$x' = \frac{2}{g}\cdot v_0^2\cdot(2\cdot\cos^2\alpha - 1) = 0 \qquad |\ \text{SOLVE } (..., \alpha)\ |\ 0 \le \alpha \text{ AND } \alpha \le 90$$

$\underline{\underline{\alpha = 45°}}$ ... unabhängig von v_0 und g

$$x'' = -\frac{8}{g}\cdot v_0^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$x''(45°) = -\frac{8}{g}\cdot v_0^2\cdot\sin 45\cdot\cos 45 = -\frac{4}{g}\cdot v_0^2 < 0 \;\Rightarrow\; x_{\max} = \frac{2}{g}\cdot v_0^2\cdot\sin 45\cdot\cos 45 = \underline{\underline{\frac{v_0^2}{g}}}$$

Grafische Darstellung für v_0 = 10 m/s und g = 10 m/s² (Abb. 10):

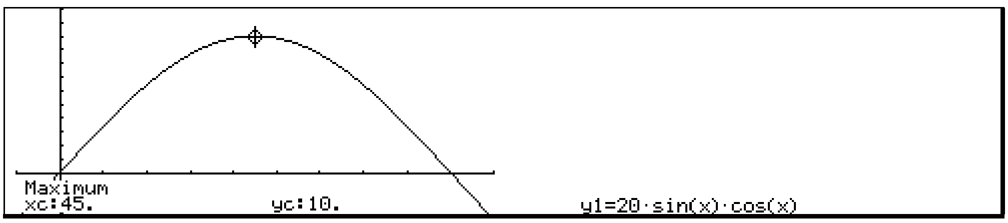


Abb. 10

A) Basketball

Lokales Koordinatensystem:
Ursprung = Ballmitte $\Rightarrow$ Abwurf in $A(0 \mid 0)$; relative Korbhöhe = 3,05 - 2,60 = 0,45
$\Rightarrow$ Ziel Z(5/0,45)

a) Wurfparabel: $y = ax^2 + bx = -\frac{g}{2} \cdot \frac{1}{v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot x^2 + (\tan \alpha) \cdot x$

$$b = \tan \alpha = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y(5) = 0{,}45\text{:}\quad 25a + \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{3} = 0{,}45 \;\Rightarrow\; a = -0{,}09747$$

$$a = -\frac{g}{2} \cdot \frac{1}{v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = -5 \cdot \frac{1}{v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 30} = -0{,}09747 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{v_0 = 8{,}27 \text{ m/s}}}$$

p_1: $\underline{\underline{y = -0{,}09747 \cdot x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x}}$

b) Wurfparabel: $y = ax^2 + bx = -\frac{g}{2} \cdot \frac{1}{v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot x^2 + (\tan \alpha) \cdot x$

$y(5) = 0{,}45$: $-5 \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot 25 + (\tan \alpha) \cdot 5 = 0{,}45 \mid$ SOLVE (..., α) $\mid$ $0 \leq \alpha$ AND $\alpha \leq 90$

$\underline{\underline{\alpha = 24{,}96°}} \vee \underline{\underline{\alpha = 70{,}18°}}$

p_2: $\underline{\underline{y = -0{,}0751 \cdot x^2 + 0{,}4655 \cdot x}}$

p_3: $\underline{\underline{y = -0{,}5369 \cdot x^2 + 2{,}7745 \cdot x}}$

c) Grafische Darstellung (Abb. 11):

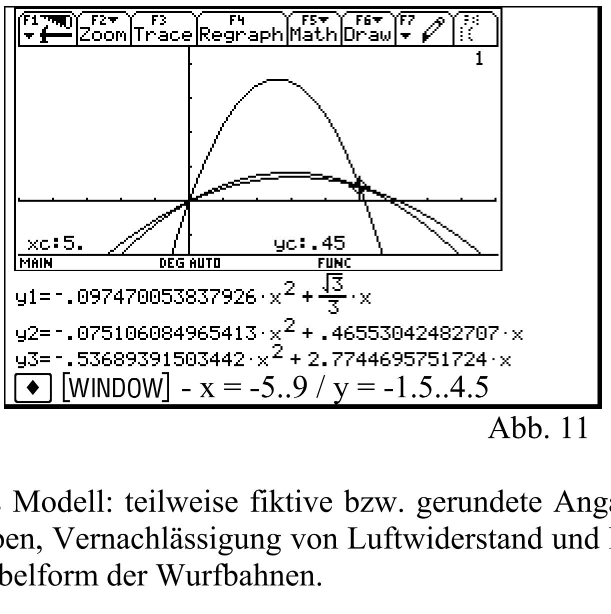


Abb. 11

Mathematisches Modell: teilweise fiktive bzw. gerundete Angaben, Abwurf und Ziel punktförmig und exakt gegeben, Vernachlässigung von Luftwiderstand und Drall, keine Analyse der Spieltaktik, ...; Essenz: Parabelform der Wurfbahnen.

B) Springbrunnen

a) Maximale Wurfweite $x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$: $\frac{v_0^2}{10} = 0{,}5 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{v_0 = \sqrt{5}\ \text{m/s}}}$

b) Wurfhöhe $y = -\frac{g}{2}\cdot t^2 + v_0\cdot(\sin\alpha)\cdot t$, maximale Höhe für $\boldsymbol{\alpha = 90°}$:

$$y = -\frac{g}{2}\cdot t^2 + v_0\cdot t$$

$$y' = -g\cdot t + v_0 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{t = \frac{v_0}{g}}$$

$$y_{\max} = -\frac{g}{2}\cdot t^2 + v_0\cdot t \;\;\Big|\; t = \frac{v_0}{g} \;\Rightarrow\; \underline{y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}},\;\; y_{\max} = \frac{5}{20} = \underline{\underline{0{,}25\ m}}$$

c) Die Hüllkurve einer Funktionenschar $F(x,y,\lambda)=0$ erhält man durch Elimination des Parameters λ aus den Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial\lambda} = 0$ und $F(x,y,\lambda)=0$:

$$y = -\frac{g}{2}\cdot\frac{1}{v_0^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot x^2 + (\tan\alpha)\cdot x \;\;\Big|\; \frac{\partial}{\partial\alpha}$$

$$0 = -\frac{g}{2}\cdot\frac{1}{v_0^2}\cdot\frac{2\cdot\sin\alpha}{\cos^3\alpha}\cdot x^2 + \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot x \;\;\Big|\; \cdot\cos^2\alpha$$

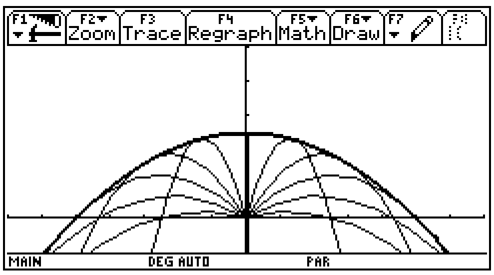
$$0 = -\frac{g}{v_0^2}\cdot(\tan\alpha)\cdot x^2 + x \;\Rightarrow\; \underline{\tan\alpha = \frac{v_0^2}{g\cdot x}} \;\Rightarrow\; 1+\tan^2\alpha = 1 + \frac{v_0^4}{g^2\cdot x^2} = \underline{\frac{g^2\cdot x^2 + v_0^4}{g^2\cdot x^2}}$$

$$y = -\frac{g}{2}\cdot\frac{1}{v_0^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot x^2 + (\tan\alpha)\cdot x \;\;\Big|\; \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha$$

$$y = -\frac{g}{2}\cdot\frac{1}{v_0^2}\cdot(1+\tan^2\alpha)\cdot x^2 + (\tan\alpha)\cdot x = -\frac{g}{2}\cdot\frac{1}{v_0^2}\cdot\frac{g^2\cdot x^2 + v_0^4}{g^2} + \frac{v_0^2}{g}$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{g}{2v_0^2}\cdot x^2 + \frac{v_0^2}{2g}}} \text{ bzw. für } v_0 = \sqrt{5} \text{ und } g = 10\text{: } \underline{\underline{y = -x^2 + \frac{1}{4}}}$$

d) Grafische Darstellung (Abb. 12):



Fontänen:

```
xt1=√5·cos(α)·t|α = {15  30  45  60  75}
yt1=-5·t²+√5·sin(α)·t|α = {15  30  45  60  75}
xt2=-xt1(t)
yt2=yt1(t)
xt3=√5·cos(α)·t|α = 90
yt3=-5·t²+√5·sin(α)·t|α = 90
```

Hüllkurve:

```
y1=-x²+1/4
```

◆ [WINDOW] - t = 0..0.5 / $tstep$ = 0.05 / x = -0.7..0.7 / y = -0.1..0.5

Abb. 12

e) $y = -x^2 + \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x^2 = -y + \frac{1}{4}$; $V_y = \pi\cdot\int_0^{0,25} x^2 dy = \pi\cdot\int_0^{0,25} -y + \frac{1}{4} dy = \frac{\pi}{32} = \underline{\underline{0{,}098\ m^3}}$

5.6 Wurfparabel 2

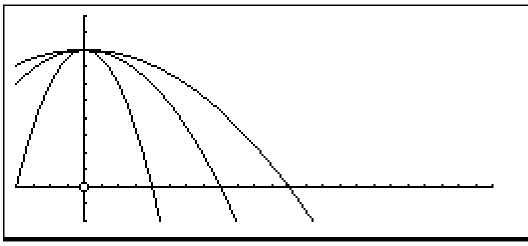


Abb. 1

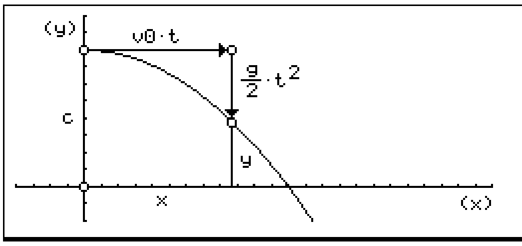


Abb. 2

a) $y = ax^2 + bx + c$ ist die allgemeine Gleichung einer quadratischen Parabel.
   - Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten a, b und c erfüllen, damit die Parabel **unten offen** ist und ihren **Scheitel auf der *y*-Achse** hat (Abb. 1)?
   - Nenne mindestens drei konkrete Beispiele solcher Parabeln, die diese Bedingungen erfüllen!

b) Ermittle je drei Beispiele solcher Parabeln, die die Punkte $A(12 \mid 0)$ bzw. $B(16 \mid 2)$ „treffen"!

c) Interpretiere die Parabeln als Bilder einer Wurfbewegung („horizontaler Wurf")!
   - Welche Beschriftungen der Achsen sind denkbar?
   - Was bedeutet dabei jeweils der Abszissenwert der rechten Nullstelle?

d) Drücke x und y mit Hilfe der Größen v_0 und c aus (Startgeschwindigkeit und Abwurfhöhe, Abb. 2).
   Wie lautet nun die Gleichung der Wurfparabel
   - in Parameterform $(x(t), y(t))$?
   - in parameterfreier Form $(y(x))$?

   Interpretiere den ursprünglichen Parameter a mit Hilfe der Größe v_0!

e) Stelle die Wurfparabel für eine Abwurfhöhe von 8 m, v_0 = 15 m/s und g = 10 m/s^2 grafisch dar!
   - Wann und wo erfolgt der Aufprall am Boden?
   - Mit welcher Geschwindigkeit erfolgt der Aufprall am Boden?

f) Welche der folgenden Gleichungen lassen sich als Wurfparabel interpretieren?
   - p_1: $y = x^2 + 3$
   - p_2: $y = -2 \cdot x^2 + 3$
   - p_3: $y = -2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 4$

   Ermittle für g = 10 m/s^2 - wo möglich - v_0 aus der gegebenen Gleichung!

g) Welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss man wählen, um bei einer Abwurfhöhe von 0,8 m und g = 10 m/s^2 eine Wurfweite von 5 m zu erzielen?

h) Welcher Sonderfall ergibt sich für die Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 0?

Ziele	- Analyse der Bedeutung von Parametern in einer Funktionsgleichung. - Anwendung und Neuinterpretation mathematischer Modelle in anwendungsorientierten Fragestellungen. - Modellbilden, vernetztes Denken.
CAS	Nicht zwingend erforderlich, aber hilfreich als Werkzeug - zum Umformen und Lösen von Gleichungen; - zur Visualisierung von Funktionen; - zum Testen von Vermutungen.

Anwendungen

Dieter Jörgensen
Der Rechenmeister
Berlin 1999 <Rütten & Loening>

Kniff Sebastiano dann sein linkes Auge nochmals etwas kräftiger zu, hielten reihum alle den Atem an. Es war soweit.

Er schnippte.

Und mit der Präzision eines florentinischen Uhrwerks war es jedesmal dasselbe Ergebnis. Die vordere Münze flog so weit durch die Schankstube, wie es kein anderer je fertiggebracht hätte, und manches Mal verzichteten die Gegner auf ihren eigenen Schuß. Die hintere Münze dagegen rutschte bei Sebastiano völlig kraftlos gerade noch über die Tischkante und fiel senkrecht nach unten auf den Boden. Zufrieden klaubte sich Sebastiano seine beiden Münzen auf und ließ seinen herausfordernden Blick nach dem nächsten Mitspieler die Runde machen. ...

Nur Tartaglia hatte woanders hingesehen, als Sebastiano schnippte. Seit neun Tagen tat er das. Denn vor neun Tagen war es ihm aufgefallen. Beide Münzen schlugen im selben Augenblick auf dem Boden auf. Immer. Man konnte es sehen, aber noch eindeutiger war es jedesmal zu hören. Niemals klapperte es zweimal. ...

Das bedeute schließlich, sagte Tartaglia, daß Fallbewegung und Flugbewegung gemeinsam, jede mit ihrem Anteil, die parabolische Schußbahn der Münze Stück für Stück einträchtig zusammenfügten, bis der Aufschlag auf den Boden dem Wunder dann ein Ende mache. ...

Nur Wentworth wäre jetzt aufgesprungen von seinem Stuhl. Weil der Engländer blitzartig erkannt hatte, daß mit diesem Beweis der Gleichzeitigkeit von künstlicher und natürlicher Bewegung die Physik des Aristoteles nun ein für alle Mal zertrümmert war.

(S 344 - 345 / S 352 - 353)

A) Obige Textstelle aus Dieter Jörgensens Buch „Der Rechenmeister“ beschreibt ein Spiel, bei dem zunächst jeder Spieler zwei Münzen auf eine Tischplatte legt, eine davon genau an die Kante. Die andere Münze wird gegen die erste gestoßen; wessen Münze am weitesten fliegt, der hat gewonnen.

   a) Wie weit von der 0,75 m hohen Tischkante fällt die Münze zu Boden, wenn sie eine Anfangsgeschwindigkeit von 10 m/s hat?

   b) Welche Anfangsgeschwindigkeit muss die Münze haben, wenn sie 4,5 m weit fliegt?

   c) Im Textauszug wird ein Mann namens Tartaglia erwähnt. Wer war Tartaglia? Wann und wo hat er gelebt, mit welchen mathematischen Themen hat er sich beschäftigt, welche Bücher hat er geschrieben? Erstelle eine Präsentation mit den Ergebnissen deiner Recherche und vergiss nicht, alle Informationsquellen zu nennen.

B) Ein Stuntman möchte mit seinem Motorrad vom Flachdach eines Wolkenkratzers über eine 20 m breite Straße auf das Dach des Nachbarhauses springen. Dieses ist um eine Etage niedriger, der Höhenunterschied beträgt 3,1 m (Abb. 3).

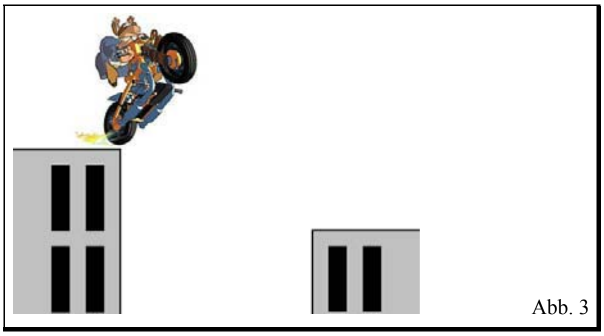


Abb. 3

a) Welche Geschwindigkeit muss er mindestens erreichen, damit sich der Sprung ausgeht?
b) Welche Geschwindigkeit darf er höchstens haben, wenn er nur 10 m Spielraum für seine Landung hat?
c) Nenne einige Unterschiede zwischen mathematischem Modell und Wirklichkeit!

Bildquelle: http://people.freenet.de/jfeldhusen/Andere.htm [06. 05. 2002]

Lösungen

a) $y = ax^2 + bx + c$

- unten offen : negative Krümmung ... $y'' = 2a < 0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{a < 0}$
- Scheitel : $y' = 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{2a} = 0 \qquad \Rightarrow$ $\boldsymbol{b = 0}$

oder: Axialsymmetrie bezüglich y-Achse ...

$\underline{\underline{y = ax^2 + c \ \ mit \ \ a < 0}}$

Beispiele (Abb. 1): `y1=a·x^2+c|a={-1/2 -1/8 -1/18} and c=8`

b) $y(12) = 0 \Rightarrow 144a + c = 0 \Rightarrow c = -144a$

Beispiele (Abb. 4): `y2=a·x^2+c|a={-1/18 -1/24 -1/36} and c=-144·a`

$y(16) = 2 \Rightarrow 256a + c = 2 \Rightarrow c = -256a + 2$

Beispiele (Abb. 5): `y3=a·x^2+c|a={-3/128 -1/64 -1/128} and c=-256·a+2`

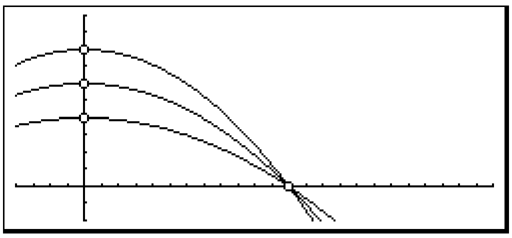


Abb. 4

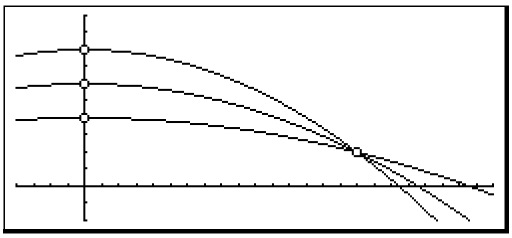


Abb. 5

c)

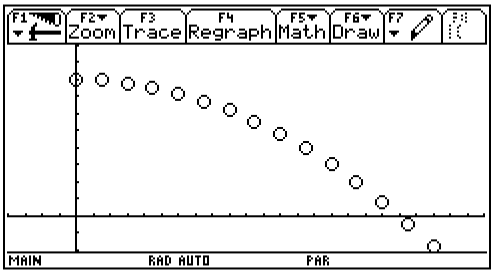
Achsen	rechte Nullstelle
t - y	Zeitpunkt des Aufpralls am Boden
x - y	horizontale Entfernung von Start- und Aufprallpunkt = Wurfweite

d) $x = v_0 \cdot t \qquad \Rightarrow \; t = \dfrac{x}{v_0}$

$$y = c - \frac{g}{2} \cdot t^2 \qquad \Rightarrow \; \underline{\underline{y = \underbrace{-\frac{g}{2} \cdot \frac{1}{v_0^2}}_{a} \cdot x^2 + c}}$$

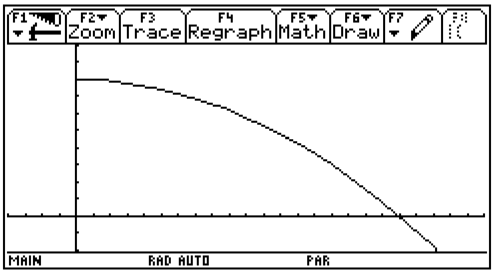
e) Grafische Darstellung für Abwurfhöhe c = 8 m, v_0 = 15 m/s und g = 10 m/s^2 (Abb. 6):

[MODE] - Graph = PARAMETRIC



xt1=15·t
yt1=-5·t^2 + 8

[F6] Style - 5: Animate

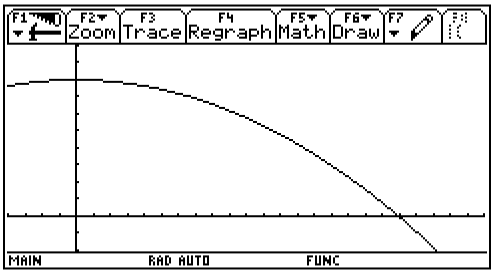


xt1=15·t
yt1=-5·t^2 + 8

[F6] Style - 1: Line

[◆] [WINDOW] - t = 0..3 / tstep = 0.1 / x = -4..24 / y = -2..10

[MODE] - Graph = FUNCTION



$y1 = -5 \cdot \frac{1}{15^2} \cdot x^2 + 8$

[◆] [WINDOW] - x = -4..24 / y = -2..10

Abb. 6

Zeitpunkt des Aufpralls und Wurfweite (Abb. 7):

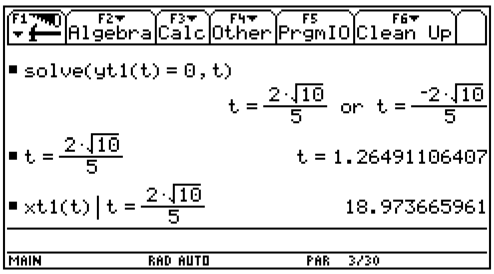


Abb. 7

Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t (Vektoraddition), Aufprallgeschwindigkeit (Abb. 8):

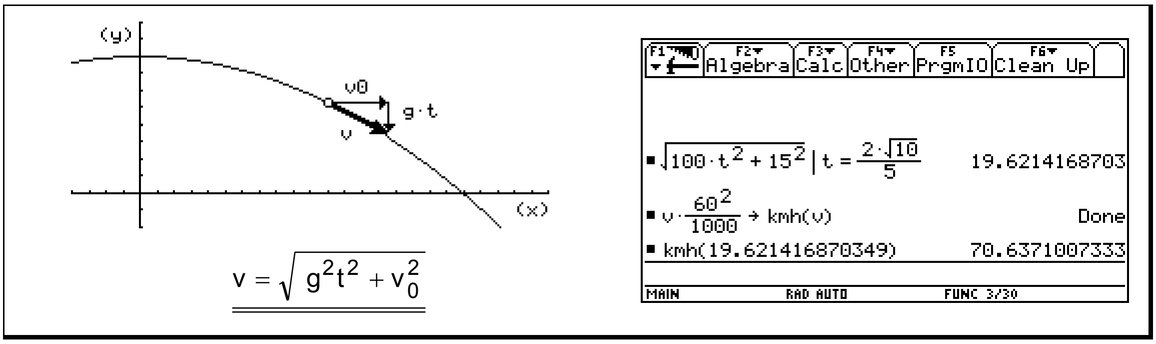


Abb. 8

f) p_1: keine Wurfparabel: $a = 1 > 0$

p_2: Wurfparabel:

$$-5\cdot\frac{1}{v_0^2} = -2 \;\Rightarrow\; v_0^2 = 2{,}5 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{v_0 = 1{,}581\ \text{m/s}}}$$

p_3: Interpretation als Wurfparabel mit verschobenem Scheitel denkbar:

$$y = -2\cdot x^2 + 3\cdot x + 4 = -2\cdot(x - \frac{3}{4})^2 + \frac{41}{8} \;\Rightarrow\; \underline{S\left(\frac{3}{4}\middle|\,\frac{41}{8}\right)}$$

$$t = 1 \;\Rightarrow\; y = \frac{41}{8} - 5 = \frac{1}{8}; \qquad -2\cdot x^2 + 3\cdot x + 4 = \frac{1}{8}\ \Big|\ \text{SOLVE}\ (\ldots, x)\ \Big|\ x > 0$$

$$x = \frac{2\cdot\sqrt{10} + 3}{4} = 2{,}331; \qquad v_0 = x - \frac{3}{4}; \quad \underline{\underline{v_0 = \frac{\sqrt{10}}{2} = 1{,}581\ \text{m/s}}}$$

oder:

Bei Verschiebung des Scheitels um 3/4 nach rechts wird ax^2 zu $a \cdot (x - 3/4)^2$, d.h. bei x^2 steht derselbe Parameter

$$a = -5\cdot\frac{1}{v_0^2} = -2 \;\Rightarrow\; v_0^2 = 2{,}5 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{v_0 = 1{,}581\ \text{m/s}}}$$

g) $y(5) = 0$: $-5\cdot\frac{1}{v_0^2}\cdot 5^2 + 0{,}8 = 0$ $\quad\Big|$ SOLVE (..., v_0) $\Big|$ $v_0 > 0$

$\underline{\underline{v_0 = 12{,}5\ \text{m/s}}}$ (Abb. 9):

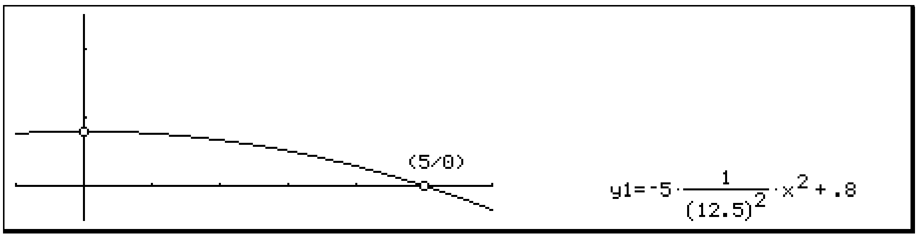


Abb. 9

h) Sonderfall für $v_0 = 0$: **freier Fall**

$x = 0$; $\qquad y = c - \frac{g}{2}\cdot t^2$

A) Münzspiel

a) $y=-\frac{g}{2}\cdot\frac{1}{v_0^2}\cdot x^2+c=-5\cdot\frac{1}{10^2}\cdot x^2+0{,}75=0$ | SOLVE (..., x) | $x>0$

$\underline{\underline{x=3{,}873\ \ m}}$ (Abb. 10)

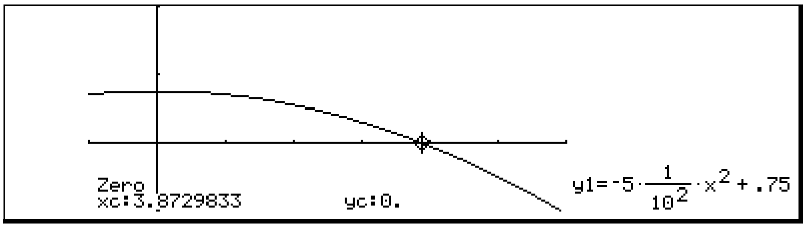


Abb. 10

b) $y=-\frac{g}{2}\cdot\frac{1}{v_0^2}\cdot x^2+c$

$y(4{,}5)=0$: $-5\cdot\frac{1}{v_0^2}\cdot 4{,}5^2+0{,}75=0$ | SOLVE (..., v_0) | $v_0>0$

$\underline{\underline{v_0=11{,}619\ \ \text{m/s}}}$ (Abb. 11)

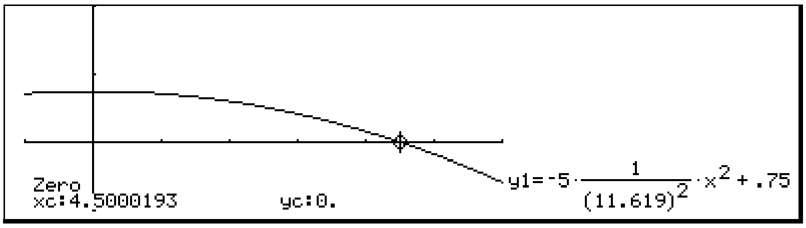


Abb. 11

B) Stuntman

a) $y=-\frac{g}{2}\cdot\frac{1}{v_0^2}\cdot x^2+c$

$y(20)=0$: $-5\cdot\frac{1}{v_0^2}\cdot 20^2+3{,}1=0$ | SOLVE (..., v_0) | $v_0>0$

$\underline{\underline{v_0=25{,}4\ \ \text{m/s}=91{,}44\ \ \text{km/h}}}$ (Abb. 12)

b) $y(30)=0$: $-5\cdot\frac{1}{v_0^2}\cdot 30^2+3{,}1=0$ | SOLVE (..., v_0) | $v_0>0$

$\underline{\underline{v_0=38{,}1\ \ \text{m/s}=137{,}16\ \ \text{km/h}}}$

(Abb. 12)

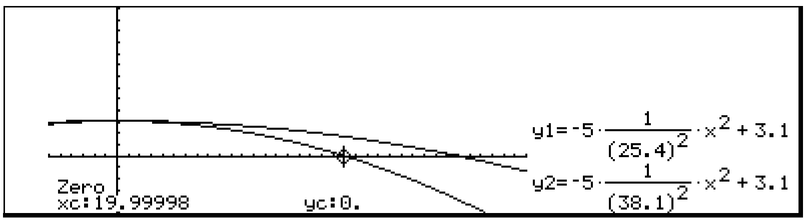


Abb. 12

c) Mathematisches Modell: ungefährlicher; teilweise fiktive bzw. gerundete Angaben, punktförmige Objekte, Vernachlässigung von Luftwiderstand, ...; Essenz: Parabelform der Wurfbahnen.

6 SCHÜLERBEFRAGUNG ZUR AKZEPTANZ DER NEUEN MODELLE

erstellt von Mag. Sieglinde Fürst

6.1 Die erfasste Stichprobe

Am Ende des Schuljahres 2001/2002 wurde in den am Schulversuch teilnehmenden Klassen ein Fragebogen ausgegeben. Befragt wurden 7. Klassen der Richtung Gymnasium, Realgymnasium, Oberstufenrealgymnasium und Handelsakademie (3. Jahrgang). Alle SchülerInnen der Stichprobe hatten geänderte Schularbeitszeiten (Kurzschularbeiten und Schularbeiten mit 100 Minuten), aber nicht alle erhielten Problemlösearbeiten und verfassten Projektarbeiten, sodass die Zahl der Befragten je nach Fragestellung zwischen 53 und 73 schwankt.

6.2 Die Auswertung

Es standen immer vier Antworten zur Auswahl, zwei zustimmende und zwei ablehnende. In der Auswertung wurden die zustimmenden und die ablehnenden Antworten zu je einer zusammengefasst.

- Fragebogen zum Schulversuch

Drei Jahre Schulversuch "Geänderte Methoden zur Leistungsfeststellung und –beurteilung im Mathematikunterricht" sind zu Ende. Wir wollen versuchen, unsere Erfahrungen in eine neue Verordnung zur Leistungsbeurteilung einfließen zu lassen. Deine Meinung ist daher sehr wichtig, bitte antworte gewissenhaft!

a) männlich ☐ weiblich ☐

b) Mathematiknote:
Sehr gut ☐ Gut ☐ Befriedigend ☐ Genügend ☐ Nicht genügend ☐

c) Art der geänderten Leistungsbeurteilung in deiner Klasse:
Geänderte Schularbeitsdauer ☐ Problemlösearbeiten ☐ Projektarbeiten/ Facharbeiten ☐

Nimm zu den folgenden Sätzen, die deinen Schulversuch und den allgemeinen Teil betreffen, nach den Kategorien 1. trifft völlig zu, 2. trifft eher zu, 3. trifft eher nicht zu, 4. trifft gar nicht zu Stellung.

	1.	2.	3.	4.
Geänderte Schularbeitsdauer / Kurzschularbeit				
1) Es ist eine positive Änderung, die Schularbeitsdauer flexibel gestalten zu können.	☐	☐	☐	☐
2) Es ist vorteilhaft, Kurzschularbeiten kurzfristig und nicht schon zu Semesterbeginn ansetzen zu können.	☐	☐	☐	☐
3) In Kurzschularbeiten sollte grundlegendes, vom Werkzeug unabhängiges Wissen abgefragt werden. (Nur mit Papier und Stift!)	☐	☐	☐	☐
4) Man sollte auf Kurzschularbeiten verzichten!	☐	☐	☐	☐
5) Kurzschularbeiten sind schwieriger als herkömmliche Schularbeiten.	☐	☐	☐	☐

Problemlösearbeiten				
6) Problemlösearbeiten sind schwieriger als herkömmliche Schularbeiten.	□	□	□	□
7) Ich will wissen, ob ich imstande bin, den Mathematiklehrstoff auf neue Situationen anzuwenden.	□	□	□	□
8) Es sollte für eine positive Beurteilung genügen, sehr ähnliche Beispiele wie in der Schulübung lösen zu können.	□	□	□	□
9) Man sollte nur für Problemlösearbeiten alle Hilfsmittel zulassen.	□	□	□	□
10) Man sollte für Problemlösearbeiten einen größeren Zeitrahmen haben: „Ich kann so lange arbeiten, bis ich zu einem gewissen Abschluss gekommen bin“.	□	□	□	□
Projektarbeiten/Facharbeiten				
11) Projektarbeiten sind prinzipiell eine sinnvolle Neuerung.	□	□	□	□
12) Ich glaube durch das Verfassen einer Projektarbeit viel gelernt zu haben.	□	□	□	□
13) Für Projektarbeiten sollte der Schüler/die Schülerin das Unterrichtsfach frei wählen können.	□	□	□	□
14) Eine Projektarbeit in einem Fach wie Mathematik oder Physik unterscheidet sich in den Anforderungen nicht von anderen Fächern.	□	□	□	□
15) Eine begleitende Unterrichtsveranstaltung zum Gestalten und Präsentieren von Projektarbeiten ist notwendig.	□	□	□	□
16) Es genügt eine Projektarbeit schriftlich vorzulegen.	□	□	□	□
17) Durch die Präsentation meiner Arbeit konnte ich Erfahrungen für zukünftiges Lernen und Studieren sammeln.	□	□	□	□
18) Der Inhalt von Projektarbeiten sollte über den Lehrstoff der jeweiligen Schulstufe hinausgehen.	□	□	□	□
19) Der Inhalt von Projektarbeiten sollte nicht Prüfungsstoff sein.	□	□	□	□
Fragen von allgemeinem Interesse:				
20) Mir sind einige große Prüfungen lieber als die „ständige Beobachtung der Mitarbeit“.	□	□	□	□
21) Ich halte den Einsatz folgender Hilfsmittel bei Schularbeiten (nicht nur bei reinen Problemlöseschularbeiten) für sinnvoll:				
TI-92	□	□	□	□
Formelsammlung	□	□	□	□
Buch	□	□	□	□
Hefte	□	□	□	□
22) Man sollte SchülerInnen mehr Möglichkeiten geben, eigenständig Wissen zu sammeln und selbständig zu arbeiten.	□	□	□	□
23) Eine Erweiterung des Angebots an Wahlpflichtfachstunden zur Entwicklung individueller Interessens- und Begabungsschwerpunkte könnte Leistungen von Schülern spezifisch fördern.	□	□	□	□
24) Ich halte eine umfassende Allgemeinbildung für ein erstrebenswertes Ziel.	□	□	□	□
25) Der Schulversuch hat für mich eine zusätzliche Belastung gebracht.	□	□	□	□
26) Mathematik zählt zu meinen Lieblingsfächern.	□	□	□	□
27) Ich werde Mathematik vermutlich für meine weitere Ausbildung benötigen.	□	□	□	□

Noch zwei Fragen

(1) Überlege, ob und wodurch du mittels des Schulversuchs etwas für dich persönlich profitiert hast. Was hast du profitiert?

(2) Gib an, ob und was man vom Schulversuch in eine allgemein gültige Prüfungsordnung übernehmen könnte/sollte!

Auswertung des Fragebogens:

1+2: 1. trifft völlig zu, 2. trifft eher zu
3+4: 3. trifft eher nicht zu, 4. trifft gar nicht zu

Die Angaben sind Prozent der für diese Frage gültigen Antworten. Zu- bzw. Ablehnungen über 80% sind fett gedruckt.

Geänderte Schularbeitsdauer / Kurzschularbeit	**1+2**	**3+4**
1. Es ist eine positive Änderung, die Schularbeitsdauer flexibel gestalten zu können.	**89**	11
2. Es ist vorteilhaft, Kurzschularbeiten kurzfristig und nicht schon zu Semesterbeginn ansetzen zu können.	78	22
3. In Kurzschularbeiten sollte grundlegendes, vom Werkzeug unabhängiges Wissen abgefragt werden. (Nur mit Papier und Stift!)	36	64
4. Man sollte auf Kurzschularbeiten verzichten!	11	**89**
5. Kurzschularbeiten sind schwieriger als herkömmliche Schularbeiten.	14	**86**
Problemlösearbeiten		
6. Problemlösearbeiten sind schwieriger als herkömmliche Schularbeiten.	74	26
7. Ich will wissen, ob ich imstande bin, den Mathematiklehrstoff auf neue Situationen anzuwenden.	72	28
8. Es sollte für eine positive Beurteilung genügen, sehr ähnliche Beispiele wie in der Schulübung lösen zu können.	74	26
9. Man sollte nur für Problemlösearbeiten alle Hilfsmittel zulassen.	42	58
10. Man sollte für Problemlösearbeiten einen größeren Zeitrahmen haben: „Ich kann so lange arbeiten, bis ich zu einem gewissen Abschluss gekommen bin“.	59	41
Projektarbeiten/Facharbeiten		
11. Projektarbeiten sind prinzipiell eine sinnvolle Neuerung.	**92**	8
12. Ich glaube durch das Verfassen einer Projektarbeit viel gelernt zu haben.	**84**	16
13. Für Projektarbeiten sollte der Schüler/die Schülerin das Unterrichtsfach frei wählen können.	79	21
14. Eine Projektarbeit in einem Fach wie Mathematik oder Physik unterscheidet sich in den Anforderungen nicht von anderen Fächern.	35	65
15. Eine begleitende Unterrichtsveranstaltung zum Gestalten und Präsentieren von Projektarbeiten ist notwendig.	62	38
16. Es genügt eine Projektarbeit schriftlich vorzulegen.	27	73
17. Durch die Präsentation meiner Arbeit konnte ich Erfahrungen für zukünftiges Lernen und Studieren sammeln.	77	23
18. Der Inhalt von Projektarbeiten sollte über den Lehrstoff der jeweiligen Schulstufe hinausgehen.	52	48
19. Der Inhalt von Projektarbeiten sollte nicht Prüfungsstoff sein.	44	56
Fragen von allgemeinem Interesse:		
20. Mir sind einige große Prüfungen lieber als die „ständige Beobachtung der Mitarbeit“.	40	60
21. Ich halte den Einsatz folgender Hilfsmittel bei Schularbeiten (nicht nur bei reinen Problemlöseschularbeiten) für sinnvoll:		
TI-92	**98**	2
Formelsammlung	**100**	0
Buch	57	43
Hefte	75	25

22. Man sollte SchülerInnen mehr Möglichkeiten geben, eigenständig Wissen zu sammeln und selbständig zu arbeiten.	**82**	18
23. Eine Erweiterung des Angebots an Wahlpflichtfachstunden zur Entwicklung individueller Interessens- und Begabungsschwerpunkte könnte Leistungen von Schülern spezifisch fördern.	**93**	7
24. Ich halte eine umfassende Allgemeinbildung für ein erstrebenswertes Ziel.	**89**	11
25. Der Schulversuch hat für mich eine zusätzliche Belastung gebracht.	33	67
26. Mathematik zählt zu meinen Lieblingsfächern.	56	44
27. Ich werde Mathematik vermutlich für meine weitere Ausbildung benötigen.	59	41

6.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Zu nahezu 100% befürworten die SchülerInnen den Schulversuch und wünschen sich eine Übernahme in das Regelschulwesen.
Kurzschularbeiten werden unabhängig von Leistung und Geschlecht als positive Neuerung gesehen (89%). In den freien Antworten findet sich mehrmals, dass man mittels Kurzschularbeiten zum Mitlernen gezwungen wird und kleinere Stoffkapitel lernt, was sich vorteilhaft auf das Verständnis auswirkt.
Problemlösearbeiten werden von allen SchülerInnen kritischer gesehen. Hohen Anforderungscharakter sehen 74%. Die Beurteilung der Schwierigkeit variiert hier stark von Klasse zu Klasse (88% der 7RG Piaristengasse erleben Problemlösen als schwer gegenüber nur 62,5% der ORG-SchülerInnen).
Einen gewissen Widerspruch zeigen die Fragen 7 und 8. 74% wollen wissen, ob sie den Stoff auf neue Situationen anwenden können, aber 72% meinen, es müsste für eine positive Note genügen, ähnliche Beispiele wie in der Schule lösen zu können. Interessant ist, dass keine große Mehrheit für Zulassung aller Hilfsmittel (58% dagegen) und unbeschränkter Zeit (59% dafür) ist. Projektarbeiten werden als sinnvolle Neuerung gesehen, weil die Schülerinnen finden, dabei viel gelernt zu haben. Allerdings halten es 79% für günstig, das Unterrichtsfach frei wählen zu können. Viele meinen, durch die Präsentation für ihr zukünftiges Leben viel gelernt zu haben. Fragen von allgemeinem Interesse: 100% wollen Formelsammlungen und 98% den TI bei Schularbeiten verwenden. Bei Verwendung von Buch (57%) und Heften (75%) ist das Votum nicht mehr so eindeutig. Die SchülerInnen deklarieren sich als Befürworter einer Allgemeinbildung (89%), wollen eigenständig arbeiten und Wissen erwerben (82%) und würden ein verstärktes Angebot von Wahlpflichtfächern zur Förderung von Begabungsschwerpunkten begrüßen (93%). Ein Drittel der Befragten hat den Schulversuch als zusätzliche Belastung gespürt. Beachtliche 56% zählen Mathematik zu ihren Lieblingsfächern.
Freie Antworten: Hier fallen bei Frage 1 die fast ausschließlich positiven Stellungnahmen auf. Nahezu jeder/jede, hat das Gefühl persönlich profitiert zu haben. Mit diesem Hintergrund ist es verständlich, dass bei Punkt 2 von den SchülerInnen der Vorschlag kommt, den Schulversuch mit Projektarbeiten (in Fächern der eigenen Wahl als Ersatz für eine Schularbeit) und flexibler Schularbeitsdauer in das Regelschulwesen zu übernehmen.

Einige freie Antworten:

(1) Überlege, ob und wodurch du mittels des Schulversuchs etwas für dich persönlich profitiert hast! Was hast du profitiert?

- Bessere Zeiteinteilung.
- Durch die Tests lernt man leichter für die Schularbeiten.
- Das sture Lernen der durchgemachten Beispiele fällt Dank des Versuches weg, sondern man muss verstehen, was man lernt, das hilft auch später für die Uni.
- Verschiedenste Probleme von den verschiedensten Seiten zu beleuchten und nicht nur einen Lösungsweg ins Auge fassen.
- Ich finde, dass sowohl Kurzschularbeiten als auch Problemlösearbeiten uns Schülern sehr geholfen haben, auch wenn einige die Problemlösearbeiten als zu schwierig ansehen. Die Kurzschularbeiten bieten den Vorteil, dass man vor langer Zeit erlernten Stoff nicht mühsam in einem Stück durchackern muss, dass die zu lernenden Einheiten wesentlich übersichtlich und verständlicher werden. Man wird sozusagen gezwungen, über das ganze Jahr hinweg mitzulernen, wozu ich persönlich mich nie durchringen konnte. Die Problemlösearbeiten finde ich insofern eine sehr gute Methode, als man mit realitätsnahen Beispielen konfrontiert wird und nicht nur mit abstrakten, realitätsfernen Gebilden. Die Komplexität der Problemlösearbeiten hat mir persönlich sicherlich dazu verholfen, mir eine relativ analytische Denkweise anzugewöhnen, die sicher in vielen Lebensbereichen von Nutzen ist.
- Ich habe profitiert: selbstständiges Sammeln von Material; selbstständiges Erarbeiten eines Stoffgebietes; präsentieren von Projektarbeiten (freies Reden und Erklären); wichtige Grundkenntnisse durch Kurzschularbeiten.
- Durch die Projektarbeit habe ich viel dazugelernt: selbstständiges Erarbeiten eines Stoffgebietes, verfassen einer Mappe, Layout.
- Erfahrung, man lernt vorzutragen und das Verfassen einer Projektarbeit, auch Stoff zu sammeln (woher bekomme ich was?).
- Es ist eine gute Vorbereitung für Arbeiten, die beim Studium und im Berufsleben unausweichlich sind.
- Ich weiß eigentlich nicht genau, in welcher Weise ich profitiert habe, da ich nie einen „normalen“ Unterricht erlebt habe.
- Projektarbeiten sind eine ideale Möglichkeit, gute Noten durch persönliches Interesse zu erlangen. Man bekommt besseren Einblick in ein Spezialgebiet, aber die Problemlösearbeiten sind mir ein Kaliber zu hoch. Weniger Begabte beißen hier 100%ig ab! So schön auch alles ist, all das erfordert zusätzlich Kraft und Ressourcen und ab und zu gibt´s auch ein Leben hinter Mathematik.
- Ich habe durch eigenständiges Arbeiten bei Problemlösearbeiten und dem Verfassen von Projektarbeiten profitiert.
- Eigenständiges Erlernen von Stoffgebieten, fächerübergreifendes Arbeiten, Vortragen von mathematisch-physikalischen Inhalten, Problemlösen, Hilfe beim Verfassen von Fachbereichsarbeiten und wissenschaftlichen Arbeiten.
- Ich habe den Umgang mit dem TI erlernt, analytisches Denken wurde gefördert, man beschränkt sich nicht mehr auf rechnen!
- Organisatorisch war das Projekt anspruchsvoll, im Grunde war es ein Referat mit überhöhtem Arbeitsaufwand. Zeiteinteilung und Engagement sind wichtige Anforderungen!
- Habe nichts profitiert - ließ andere arbeiten
- Man lernt in der Gruppe zu arbeiten.
- Teamwork ist toll!
- Gestaltung der Mappe und des Handouts macht Spaß.

- Habe gelernt Informationen zu sammeln und selbstständig auszuarbeiten.
- Verbesserung des Präsentationsverhaltens - Steigerung der Verantwortung innerhalb der Gruppe.
- Man kennt sich besser aus, weil man selbstständig arbeitet.
- Kenne mich beim Thema meiner Projektarbeit wirklich gut aus!
- Ich habe Spaß am Arbeiten mit dem TI-92. Ich konnte meine vorherige Abneigung abbauen. Durch das praxisbezogene Arbeiten wirkt Mathematik nicht mehr wie ein abstrakter Gegenstand für Freaks (persönliche Einstellungsänderung).
- Ich habe erkannt, wie der wirkliche sinnvolle Unterricht auszusehen hat. Man wird direkter mit dem Stoff des jeweiligen Faches konfrontiert und kann sich so ein besseres und tieferes Bild des Faches machen.
- Ich habe mehr gelernt als früher, da für die Kurzschularbeiten immer nur ein Kapitel durchgenommen wird. So wird alles genauer gelernt. Früher war es schlechter, da mehrere Kapitel bei jeder Schularbeit waren.
- Ich habe moderne Mittel und schnelleres Rechnen kennen gelernt. Mir gefällt die Verwendung des TI-92 und der Unterlagen bei der Schularbeit.
- Ich habe gelernt, Wichtiges zusammenzuschreiben und damit bei der Schularbeit zu arbeiten.
- Ich habe erfahren, wie man Probleme mit Hilfsmitteln löst.
- Durch die Verwendung von Hilfsmitteln (TI-92, Heft, ...) werden die Schularbeiten und Kurzschularbeiten leichter. Der TI-92 ist enorm wichtig bei Berechnungen und außerdem kann man sich mit Hilfe des Graphikfensters vieles besser vorstellen.
- Ich habe gelernt, wie man Wissen notieren muss, um es anwenden zu können. Ich habe gelernt, mit dem TI-92 umzugehen und mein Wissen wurde dadurch sinnvoll erweitert.
- Ich lerne jetzt selbstständiger und problemorientierter. In Mathematik schreibe ich nicht stur ab, sondern löse die Probleme individuell.
- Der Stoff ist leichter zu verstehen, da es kurze Tests gibt. Diese Kurzschularbeiten fördern die Bereitschaft zum Mitlernen.
- Man lernt auf spezifische Probleme einzugehen und lernt nicht nur stur auswendig.

(2) Gib an, ob und was man vom Schulversuch in eine allgemein gültige Prüfungsordnung übernehmen könnte/sollte.

- Mehrmalige Überprüfungen
- Geänderte Schularbeitsdauer; Kurzüberprüfungen; Mitarbeit sollte auch in anderen Fächern so stark mit eingerechnet werden wie in Mathematik.
- Ich denke, dass die Kurzschularbeiten und die Problemlösearbeiten unbedingt als allgemein gültige Prüfungsordnung eingeführt werden sollten, auch wenn dadurch die Schwierigkeit des Mathematikunterrichts wahrscheinlich noch ansteigt, weil Schüler es gewöhnt sind, in der Mathematik bloß die gegebenen Beispiele auf die einmal eingelernten umzumünzen. Aber genau diese Vorgangsweise kann in der Realität fast nie angewandt werden.
- Ich denke, dass man den gesamten Schulversuch in eine allgemein gültige Prüfungsordnung übernehmen sollte, da es dadurch möglich wird, die Leistungen eines Schülers besser zu beurteilen.
- Kurzschularbeiten mit Grundkompetenzen (2mal)
- Projektarbeit, Problemlösearbeit, Kurzschularbeit (2 mal)
- Die Projektarbeit (freiwillig!) ja, prüfen derselben nein!
- Ich bin für Projektarbeiten, die man statt einer Schularbeit machen kann. Sie sollten aber nicht verpflichtend sein! (2mal)

- Referate und Projektarbeit. Allgemein mehr Möglichkeiten, sich die Note zu verdienen.(2mal)
- Man sollte eher wenig übernehmen, da Schüler die Projektarbeit nie so gut wie ein Lehrer rüberbringen.
- Projektarbeiten übernehmen, Kurzschularbeit weg, immer TI verwenden, Hefte und Bücher beim Problemlösen.
- Projektarbeiten (Vorbereitung auf Fachbereichsarbeiten, selbstständiges Arbeiten; präsentieren von selbst erlerntem Stoff) und Kurzschularbeiten (Grundlagen werden abgeprüft)
- Die Projektarbeit soll eine Schularbeit ersetzen.
- Alle Hilfsmittel zu verwenden ist super!
- Über die Projektarbeiten sollte unbedingt eine große Wiederholung gemacht werden, wo die Handouts verwendet werden dürfen, damit alle aufpassen müssen.

7 SCHULARBEITEN:

7.1 Beispiele für Kurzschularbeiten

5. Klasse:

Gestaltet von: Mag. Sieglinde Fürst

1. Kurzarbeit:

1) $a = b + \frac{r}{M} \qquad M = ?$

Gib bei jedem Umformungsschritt die entsprechende Regel (elementare Äquivalenz) an!

4 Punkte

2) Ein Kapital K_0 wird 7 Jahre zu 2% p.a. verzinst und dann noch 3 Jahre zu 1,5% verzinst. Gib eine Formel für das Kapital nach 10 Jahren an!

4 Punkte

3) Die Gesamtzahl der Schüler einer Schule ist a. p% davon sind weiblich.
   a) Wie viele Mädchen und wie viele Burschen gibt es an der Schule?
   b) t % der Burschen und r % der Mädchen sind Internatsschüler.
   Wie viele Schüler sind Internatsschüler ?
   Wie viel Prozent aller Schüler wohnen nicht im Internat?

6 Punkte

4) Gegeben sind zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Gib die Rechenregeln für die 4 Grundrechnungsarten (+; - ; . ; :) an!

4 Punkte

5) Stelle durch einen Bruch dar und kürze, wenn möglich!

$$\frac{\frac{m-k}{m}}{m} - \frac{k-m}{\frac{k}{m}} =$$

6 Punkte

2. Kurzschularbeit:

1) Leite eine Formel zur Lösung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ her!

5 Punkte

2) Welchen Wert muss k annehmen, dass die Gleichung $x^2 + kx - (k^2 - 5) = 0$ genau eine Lösung hat? Wie heißt diese Lösung?Was lässt sich über die Anzahl der (reellen) Lösungen einer quadratischen Gleichung aussagen? Kannst du deine Aussage begründen und geometrisch erklären?

8 Punkte

3) Wie lautet jene quadratische Gleichung, deren Lösungen -5 und 3 sind?

3 Punkte

4) Gib für die Zahl 5 das neutrale und das inverse Element bezüglich der Addition und Multiplikation von reellen Zahlen an! Schreib die Gesetze vom neutralen und vom inversen Element auch allgemein auf!

4 Punkte

5) Zerlege $x^2 + 6x - 7$ in Linearfaktoren!

4 Punkte

Gestaltet von Mag. Ingrid Schirmer:

Art: ohne TI-92 **Dauer:** 30 min

1) a. Gib eine quadratische Gleichung an, die folgende Lösungen besitzt:

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -5$

b. Löse folgende quadratische Gleichungen in R!

$x^2 + 6x + 9 = 0$

$x^2 - 16 = 0$

$x^2 + 9 = 0$

2) Was kann man aufgrund der angegebenen Bedingungen über die Koeffizienten p und q der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ aussagen? Begründe!

a. Die Lösungen unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

b. Eine Lösung ist der Kehrwert der anderen.

c. Genau eine Lösung ist 0.

3) a. Zeichne die Graphen folgender Funktionen ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$):

$$y_1(x) = -\frac{1}{2x}$$

$$y_2(x) = |x| - 3$$

$$y_3(x) = (x-2)^2$$

b. Wenn du die Funktion $y_2(x)$ um eine Einheit nach oben verschiebst, ergibt sich welche neue Funktionsgleichung?

c. Ebenso verschiebe $y_3(x)$ um 5 Einheiten nach links; welche neue Funktionsgleichung ergibt sich?

4) a. Ermittle die Lösungsmenge L für $G = \mathbb{R}$ rechnerisch mittels Fallunterscheidung:

$|1 - 2x| \geq 3$

b. Ermittle die Lösungsmenge L für $G = \mathbb{R}$ grafisch:

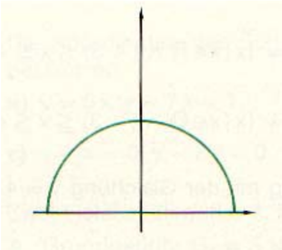
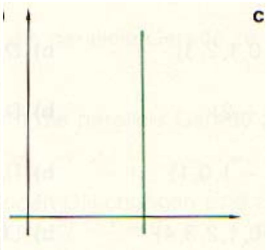
$|x - 2| = 1 + \operatorname{sgn}(x)$

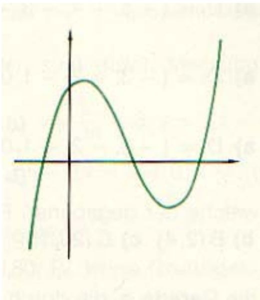
ZB: Verändere eine Zahl in der Gleichung von 4b so ab, dass es nur eine Lösung gibt!

Gestaltet von: Mag. Hermine Rögner

1. Kurzarbeit:
Dauer: 15 min **ohne TI-92**

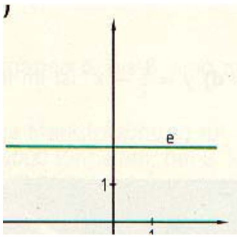
1) Welcher der gegebenen Graphen stellt eine Funktion dar? Begründe! Stelle diesen Sachverhalt auch graphisch dar! Beschreibe das Monotonieverhalten einer dieser Funktionen! (8 Punkte)

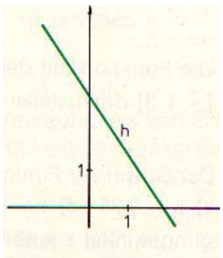





2) Wie lautet die Definition für eine streng monoton fallende Funktion? (4 Punkte)

3) Wie lautet die Gleichung zu den gezeichneten Geraden *e* und *h*? *k* und *d* sind nur näherungsweise zu ermitteln! Was versteht man unter dem Differenzenquotienten einer linearen Funktion? (7 Punkte)





4) Skizziere die folgende Funktion: $f(x) = |x-2|-1$.
Wie lautet die Wertemenge dieser Funktion? (5 Punkte)

2. Kurzarbeit:
Dauer: 15 min **ohne TI-92**

1) Aus einem Hausübungsheft ist die folgende Lösung einer Gleichung (G = R) gegeben:

$$\frac{1}{x-3}+\frac{4}{x+3}=\frac{6}{x^2-9}$$
$$1(x+3)+4(x-3)=6$$
$$x+3+4x-12=6$$
$$5x-9=6$$
$$5x=15$$
$$x=3 \rightarrow L=\{3\}$$

Gib in jeder Zeile die durchgeführten Rechenschritte an, erkläre, welchen Fehler der Schüler gemacht hat, und führe die Korrektur durch!

(9 Punkte)

2) Die wahren Aussagen sind anzukreuzen! Falsche Aussagen sind zu korrigieren und zu begründen!

a. Eine Ungleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten der Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert und die Ordnungsrelationen unverändert lässt.
b. Für die Lösungsmenge der Ungleichung $x < x$ gilt: $L = \{\ \}$.
c. Um die Lösung einer Gleichung zu ermitteln, ist es mitunter sinnvoll, wenn man die Gleichung mit Null multipliziert.

(5 Punkte)

3) Folgende Ungleichung ($G=\mathbb{R}$) ist gegeben:

$$\frac{w-11}{(2w-1)\cdot(4w-5)} \geq 0$$

Ermittle die Definitionsmenge! Gib die Bedingungen der einzelnen zu unterscheidenden Fälle an! Welche Menge ist zum Ermitteln der Teillösungsmenge und der Gesamtlösungsmenge notwendig?

(10 Punkte)

6. Klasse:

Gestaltet von: Mag. Sieglinde Fürst

1. Kurzschularbeit

1. Löse die Gleichung sin x = - 0, 64 mit Hilfe des Einheitskreises! (Einheit = 5 cm)
4 Punkte

2. Beantworte folgende Fragen:
   Welcher Winkel erfüllt die Gleichung cos x = -1? x = ...

   Welcher Winkel erfüllt die Gleichung sin x = cos x ? x = ...

   In welchem Quadranten liegt x, wenn gilt sin x = - 0.5? ....

   In welchem Quadranten liegt x, wenn gilt tan x = - 0.5? ....
4 Punkte

3. Gib die Schaltfunktion einer Schaltung an, welche das in der Schaltwerttabelle beschriebene Verhalten besitzt! Vereinfache die Schaltung und gib eine Gatterdarstellung an!

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

8 Punkte

4. a) Vereinfache und stelle das Ergebnis mit positiven Hochzahlen dar:

$$\frac{a^{-6}b^{-3}}{(2y-x)^{-4}} \cdot \frac{(b^{-2})^{3}}{a^{4} \cdot (2y-x)^{-2}}$$

   b) Es gibt Laser, die Energie in extrem kurzen Pulsen abstrahlen. Die Pulsdauer beträgt $4 \cdot 10^{-9}$ Sekunden. Die abgestrahlte Energie in dieser Zeit $1{,}2 \cdot 10^{4}$ Joule. (1Ws = 1J). Berechne die Leistung in Watt, die dabei abgestrahlt wird!
   (Hinweis für physikalische Blindgänger: Energie = Arbeit = Leistung mal Zeit)
8 Punkte

Zusatz: Wenn du bei 3) die zur Umformung verwendeten Gesetze der Schaltalgebra angeben kannst, gibt es Zusatzpunkte!

2. Kurzschularbeit

Gegeben ist a^x.

a) Welche Voraussetzung muss man treffen, dass eine reelle Funktion vorliegt?
b) Welches Monotonieverhalten kann auftreten? Unter welchen Umständen?
c) Skizziere den Verlauf der Graphen für die unter b) genannten Fälle!
d) Wie verhalten sich diese Graphen (Funktionen) für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$?
e) Wie lauten die Umkehrfunktionen von $y = 2^x$ und $y = e^x$?

2 Zusatzpunkte: Wie kann man Umkehrfunktionen algebraisch bzw. geometrisch ermitteln?

f) Welches Verhalten ist für <u>alle</u> Exponentialfunktionen typisch? (SATZ + Beweis)

(20 Punkte)

1. a) Berechne: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n}{5n^2 + 4} =$

   b) Wie erkennt man auf den ersten Blick, ob die gegebene Folge der Form

   $a_n = \frac{c_r \cdot n^r + c_{r-1} \cdot n^{r-1} + \ldots + c_o}{d_s n^s + d_{s-1} n^{s-1} + \ldots + d_o}$ (c_i und d_i sind irgendwelche reelle Zahlen)

   einen Grenzwert hat? Wann ist sie eine Nullfolge?

(8 Punkte)

2. Forme unter Benutzung der Rechenregeln für Logarithmen so um, dass die Logarithmanden möglichst einfach sind:

   $\log \frac{x^2 \cdot (x+y)^3}{y} =$

(4 Punkte)

3. Stelle als Logarithmus eines einzigen Logarithmanden dar:

   $\frac{1}{2} \log x - 2 \cdot \log y - 3 \cdot \log z =$

(4 Punkte)

4. Berechne die Basis: ${}^{x}\log 8 = -\frac{1}{3}$

(3 Punkte)

5. Berechne den Numerus: ${}^{\frac{1}{4}}\log x = 0{,}5$

(3 Punkte)

6. Vereinfache auf ein Wurzelzeichen: $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} =$

(3 Punkte)

Gestaltet von: Mag. Ingrid Schirmer-Saneff

Art: ohne TI-92 **Dauer**: 30 min

1. Beweise, dass für spitze Winkel gilt:

$$\cos\alpha = \sqrt{(1-\sin\alpha).(1+\sin\alpha)}$$

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

Gelten diese Formeln auch für stumpfe Winkel? Begründe deine Antwort!

2. a) Welche Winkel haben den gleichen Sinuswert wie $\alpha = 32°$?
   b) Welche Winkel haben den gleichen Kosinuswert wie $\alpha = 59°$?
   c) Für welche α ist $\sin\alpha > 0$?
   d) Für welche α ist $\cos\alpha < 0$?
   e) Stimmt die Formel $\sin(\alpha\text{-}90°) = \cos\alpha$?
   Begründe die Richtigkeit oder forme um!
   f.) Ebenso für $\cos(\alpha+720°) = \cos\alpha$!

3. Die Sinusfunktion:
   a) Warum ist diese Funktion eine Winkelfunktion?
   b) Erkläre die Zuordnung mit Hilfe des Einheitskreises (Skizze)!
   c) Gib den Wertebereich, Maxima, Minima und Nullstellen an!
   d) Gegeben ist $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Bestimme $\sin\alpha$ und $\tan\alpha$, ohne α zu berechnen!

4. Gegeben ist eine Raute mit α und e. Gib ein Modell für die Berechnung von U und A an!

ZB: Wie schnell ist Linz bei der täglichen Rotation der Erde um ihre Achse? Der Erdradius beträgt etwa 6378 km. Linz liegt in 48,3° nördlicher Breite. Gib für die Berechnung ein Modell an!

---

1) 12 2) 14 3) 12 4) 10 zB: 6 **VIEL GLÜCK!!!**

Gestaltet von: Mag. Hermine Rögner

Dauer: 20 min **ohne TI-92**

1) Welche verschiedene Formen der Geradendarstellung gibt es? Gib je ein Beispiel dazu an!

2) Wann sind zwei Geraden g und h im Raum windschief?

3) Gib eine Parameterdarstellung jener Geraden an, welche durch den Punkt P geht und zu der von den Geraden g und h aufgespannten Ebene normal steht!

$$g: X = s\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}; \qquad h: X = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}; \qquad P(0\,|\,4\,|\,-1)$$

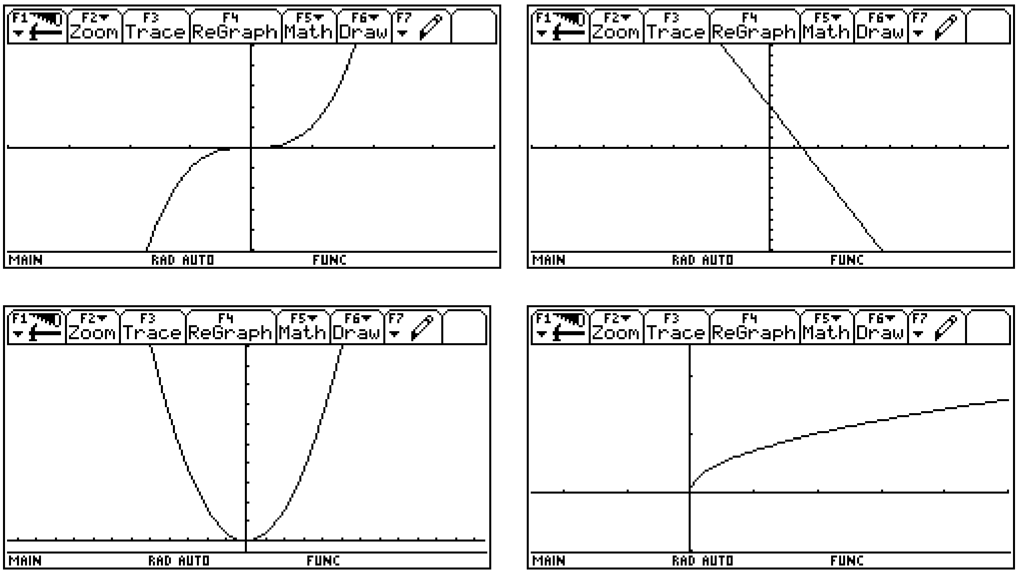
4) Von einem Quadrat kennt man die Koordinaten zweier diagonal gegenüberliegender Eckpunkte. Ermittle rechnerisch die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte des Quadrats!
$B(4 \mid -6)$, $D(-2 \mid 2)$

Gestaltet von: Mag. Ingrid Schirmer-Saneff

Art: ohne TI-92 **Zeit:** 30 Minuten

1) Welche Aussagen sind wahr? Stelle gegebenenfalls richtig und begründe deine Entscheidung!
- Die Punkte $P_1(-1 \mid 1)$, $P_2(0 \mid 0)$ und $P_3(1 \mid 1)$ liegen auf der Kurve der Funktion f: $y = x^8$
- Beim Potenzieren einer Potenz dürfen die Exponenten nicht miteinander vertauscht werden.
- Die Koordinaten des Punktes $T(1 \mid 1)$ erfüllen alle Funktionsgleichungen der Form $y = x^{1/n}$

2) Ordne die folgenden Funktionsgleichungen ihren Funktionsgraphen zu!
f_1: $y = \sqrt{x}$, $f_2 : y = x^2$, $f_3 : y = x^3$, $f_4 : y = -3x + 4$



3) Vereinfache: $\sqrt[3]{125 \cdot x^6 \cdot y^3}$

Berechne: $0{,}1^{\frac{1}{2}} \cdot 1000^{\frac{1}{2}}$

Schreibe als Potenz: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}}}$

4) Erkläre den Begriff „Parameterdarstellung“ anhand ihrer allgemeinen Form und einer Skizze. Benenne die einzelnen Teile und gib an, ob es sich um Skalare oder Vektoren handelt.

5) Gib ein Modell für die Berechnung folgender Aufgabe an:
Geg.: 3 Punkte A, B, T
Ges.: a) Liegt T auf derselben Geraden wie A und B?
b) Liegt T innerhalb der Strecke AB oder außerhalb?

Erkläre deine Vorgangsweise Schritt für Schritt.

Punkteverteilung: 1) 7 2) 4 3) 6 4) 4 5) 7

Notenschlüssel: sehr gut: 27-28 gut: 24-26 befriedigend: 17-23 genügend: 14-16

☺ Viel Glück !!! ☺

7. Klasse:

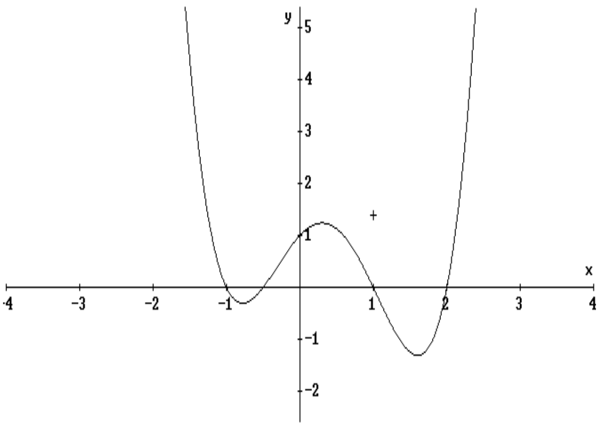
Gestaltet von: Mag. Sieglinde Fürst

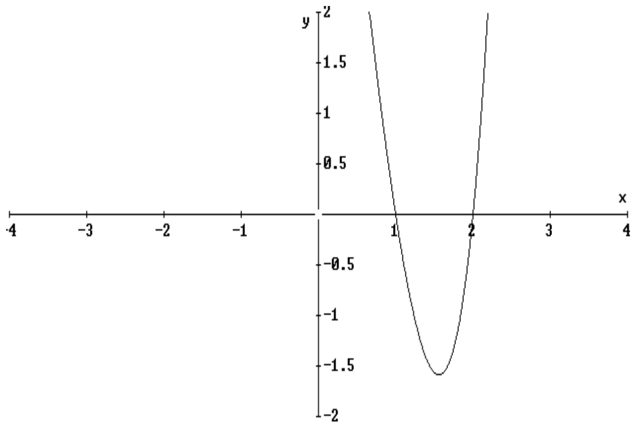
1. Kurzschularbeit (ohne TI) 20. Dezember 2001 .... 7R

a) $f(x) = x^n$, $n \in N^*$. Berechne den Differentialquotienten mittels Grenzübergang!

b) Gib zwei (davon eine geometrische) Deutungen der Begriffe „Differenzenquotient“ und „Differentialquotient“ (Eine Skizze ist mit Lineal und Bleistift zu machen!!).

c) Die Zeichnung (links) zeigt das Bild einer (reellen) Polynomfunktion mit lauter reellen Nullstellen. Welchen Grad hat sie?
Wie könntest du den zugehörigen Funktionsterm bestimmen? (Ansatz genügt)
Kennzeichne jene Bereiche der Funktion, in denen $f'(x) < 0, f'(x) > 0$ und $f'(x) = 0$ ist!





d) Was lässt sich über den Grad der rechts abgebildeten (reellen) Polynomfunktion sagen? (Hinweis: Die Funktion hat nur an den abgebildeten Stellen einen Schnitt mit der ersten Achse!)

e) Bilde die angegebenen Differentialquotienten:

- $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ $\quad \frac{dF}{dr} = ?$
- $U = E_k \cdot \left(r_i - \frac{r_i^2}{r_a} \right)$ $\quad \frac{\partial U}{\partial r_i} = ?$ $\quad \frac{\partial U}{\partial r_a} = ?$

Hinweis für Interessierte: U ist die Spannung eines Kugelkondensators mit dem Außenradius r_a und dem inneren Radius r_i, bei dem eine kritische Feldstärke E_k zum Durchschlagen führt.

Mögliche Punkte	9	9	9	9	36
Erreichte Punkte					

7.2 Beispiele für Problemlösearbeiten

5. Klasse:

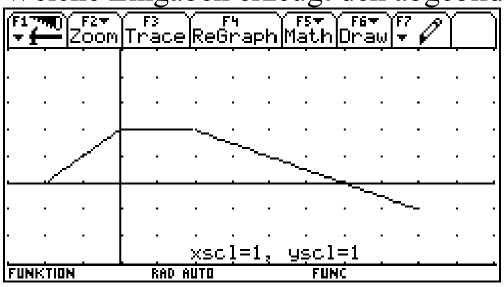
Gestaltet von: Mag. Hermine Rögner

5C TI-92 100 Minuten

1. Eine Leihwagenfirma *A* vermietet ein Auto zu folgendem Tarif: eine Fixgebühr von € 48,-- und € 0,30 pro gefahrenem Kilometer; eine zweite Firma *B* verlangt keine Fixgebühr, hat aber eine höhere Kilometergebühr von € 0,42 pro gefahrenem Kilometer.
   a) Ermittle beide Kostenfunktionen!
   b) Bei wie vielen gefahrenen Kilometern sind die Kosten in beiden Fällen gleich? Berechne das *grafisch mit dem TR* (gib die Befehle an!) und übertrage die Zeichnung ins Heft! Kontrolliere mit dem Befehl `SOLVE`! Unter welchen Voraussetzungen wird man ein Auto bei der Firma *A*, wann bei der Firma *B* mieten? Begründe!
   c) In welchem Kilometerbereich ist der Preisunterschied weniger als € 10,--?

(10 Punkte)

2. Welche Eingaben erzeugt den abgebildeten Graphen?



(7 Punkte)

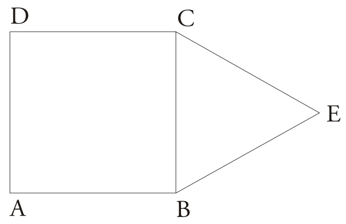
3. Gegeben ist eine Gleichung eines linearen Gleichungssystems: $3x + 5y = 2$. Gib eine zweite Gleichung jeweils so an, dass das lineare Gleichungssystem eine, keine, unendlich viele Lösungen besitzt. Was bedeuten diese einzelnen Fälle graphisch?

(7 Punkte)

4. Wenn zwei Röhren gleichzeitig geöffnet sind, kann ein Wasserbecken in vierzig Minuten gefüllt werden. Fließt das Wasser zwanzig Minuten nur durch die erste Röhre in das Becken und wird diese Röhre dann geschlossen, so muss das Wasser noch achtzig Minuten durch die zweite Röhre zufließen, um das Becken zu füllen. Es ist zu berechnen, wie lange das Wasser durch jede Röhre allein zufließen müsste, um das Becken zu füllen. Stelle das Gleichungssystem auf und löse dieses!

(8 Punkte)

5. Der Querschnitt eines Projektils hat die in der Skizze dargestellte Form: Dabei ist *ABCD* ein Quadrat und *BEC* ein gleichseitiges Dreieck. Die gesamte Länge des Projektils beträgt 1,5 cm. Berechne seinen Durchmesser! Stelle dafür eine geeignete Gleichung auf! Um welche Art von Gleichung handelt es sich dabei? Löse die Gleichung!



(10 Punkte)

6. Weintrauben werden nach der Lese gepresst. Der Traubenmost fließt zunächst in ein schachtförmiges, mehrere Meter tiefes Becken mit quadratischer Grundfläche (Quadratseite a = 15 dm) und steht dort h dm hoch. Gib das Volumen als Funktion von h an. Um welche Proportionalität handelt es sich dabei und wie sieht das Monotonieverhalten dieser Funktion aus?

(6 Punkte)

V I E L   E R F O L G   ! ! !

6. Klasse:

Gestaltet von: Mag. Sieglinde Fürst

1. Schularbeit 22. November 2000 6R

Ein Kirchturmdach wird restauriert:

1. Es hat die Form einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundkante a = 6,8 m und dem Neigungswinkel einer Seitenfläche zur Grundfläche $\alpha = 70{,}3^\circ$. Für die Zimmermanns–arbeiten soll die Länge s eines Dachbalkens entlang der Seitenkante und entlang der Höhe h (= Dachsteher), sowie der Neigungswinkel β einer Seitenkante zur Grundfläche berechnet werden. Wie groß ist die neu einzudeckende Dachfläche?

(12 Punkte)

2. Von der Kirchturmspitze werden, um das neue Kreuz aufzurichten, ein 40 m und ein 45 m langes Seil so zum Boden gespannt, dass zwischen den Seilen ein Winkel von 45° liegt. Wie weit sind die Befestigungspunkte S und P der Seile am Boden voneinander entfernt? Welche Winkel schließen die Seile mit der Strecke SP ein?

(12 Punkte)

3. Du schließt an deinem 17. Geburtstag einen Bausparvertrag auf 2 Millionen Schilling ab. Das heißt, du musst in den nächsten 10 Jahren 800 000 S ansparen (Verzinsung 4,5%)und erhältst 10 Jahre später 2 Millionen S (= Eigenkapital + Kredit). Wie groß muss deine jährliche Einzahlung sein, beginnend am Ende des Jahres vor deinem 17. Geburtstag, 10 mal getätigt, damit du am Ende des Jahres, in dem du deinen 27. Geburtstag gefeiert hast, über 800 000 S Eigenkapital verfügen kannst?

(12 Punkte)

4. Indiana Jones findet eine alte Schatzkarte mit folgender Anweisung: Von Death City gehe 2500 Schritte nach Osten, dann 1500 Schritte nach Norden. Dort liegt der Indian Rock. Gehst du von Death City 9000 Schritte nach Osten und 4000 Schritte nach Norden, so kommst du zu einem Baum am Snake River. Von der Richtung Indian Rock – Baum muss man sich ca. 30° nach Norden halten, dann liegt der Schatz genau 5000 Schritte entfernt. Indiana Jones rechnet kurz nach und macht sich nach Osten auf den Weg.
   a) Wie viele Schritte muss er nach Osten und dann nach Norden gehen um direkt zum Schatzversteck zu gelangen?
   b) Der alte Joe, von dem die Karte stammt, hatte keinen Kompass, d.h. die Größe des Winkels ist nur auf 5° genau geschätzt. Mit welcher Abweichung muss Indiana Jones rechnen?

(12 Punkte)

4. Schularbeit, am 15. Mai 2001 (zweistündig) 6R

1. Gegeben sei die Zahlenfolge $a_n = \left\langle \frac{7n+4}{5n-1} \right\rangle$.
   a) Stelle eine Monotoniebehauptung auf und beweise sie!
   b) Berechne den Grenzwert der Folge!
   c) Gib eine Definition des Begriffs „Grenzwert“ und führe mit dem in b) errechneten Wert einen exakten Grenzwertbeweis!
   d) Ab dem wie vielten Glied liegen die Glieder der Folge in einer ε - Umgebung, wenn $\varepsilon = 0{,}001$ ist?
   e) Erkläre die Begriffe Supremum und Infimum! Kannst du sie bei der gegebenen Folge angeben?

2. a) Zeige, dass die Punkte A, B, C mit $A(10 \mid 1 \mid 1)$, $B(0 \mid 4 \mid 3)$, $C(-6 \mid 2 \mid 8)$ eine Ebene E_1 aufspannen und ermittle ihre Gleichung!
   b) Ist die Ebene E_1 zur Ebene E_2 : $2x + y - 3z = 11$ parallel? (Begründung!)
   c) Zeige, dass die Gerade $g: X = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit der Ebene E_2 den Schnittpunkt $S(1 \mid 18 \mid 3)$ hat!
   d) Lege durch S eine zur Ebene E_1 normale Gerade h und berechne den Durchstoßpunkt F von h und E_1!
   e) Berechne die Länge der Strecke SF!

   3 Zusatzpunkte: Welchen Körper bilden die Punkte A, B, C, S und wie kann die Strecke SF in diesem Zusammenhang gedeutet werden? Kannst du – ohne es auszuführen – eine zweite Methode zur Berechnung der Länge SF angeben?

3. Im Jahre 1992 lebten $5{,}48 \cdot 10^9$ Menschen auf der Erde. Zur Prognose der Bevölkerungszahl dienen verschiedene Wachstumsmodelle:

a) *Modell 1:* Die jährliche Wachstumsrate betrage 2,2%. Welches Wachstumsmodell wird dieser Aussage gerecht? Gib eine Formel zur Berechnung der Weltbevölkerung in t Jahren an!

b) *Modell 2:* Zur Errechnung der Weltbevölkerung in t Jahren wird die Formel $N(t) = \dfrac{K \cdot N_0 \cdot a^t}{N_0 \cdot a^t + (K - N_0)}$ verwendet. K wird mit $11 \cdot 10^9$ angenommen und $N_0 = 5{,}48 \cdot 10^9$. Erkläre das hier verwendete Wachstumsmodell, insbesondere den Wert K! Die Befürworter des Modells 2 prognostizieren für das Jahr 2025 (also 33 Jahre nach 1992) $8{,}47 \cdot 10^9$ Menschen. Berechne den Wert von a!

c) Berechne mittels beider Modelle, in welchem Jahr die Weltbevölkerung auf $10 \cdot 10^9$ Menschen angewachsen sein wird!

4. Ein (bestimmter) Raucher führt seinem Blut eine tägliche Nikotinmenge von 0,02 mg zu. Andererseits wird täglich 1% des im Blut vorhandenen Nikotins abgebaut. Zu Beginn sei im Blut kein Nikotin enthalten.

a) Berechne den Nikotingehalt am 1.(Es wird nur Nikotin zugeführt, aber noch nichts abgebaut!), 2., 3., 4., 5., ... n-ten Tag!

b) Begründe, dass eine geometrische Reihe entsteht!

c) Gib eine rekursive Darstellung an und zeige, dass die Termdarstellung (= Summe der Reihe) $s_n = 0{,}02 \cdot \dfrac{1-0{,}99^n}{1-0{,}99} = 2 - 2 \cdot 0{,}99^n$ lautet.

d) Beweise, dass der Nikotingehalt im Blut insgesamt steigt, der Körper mit dem Abbau also nicht nachkommt! Gibt es einen Grenzwert? (= Langzeitverhalten des Nikotingehalts)

e) 1 mg Nikotin im Blut ist ein gefährlicher Schwellenwert. Wird bei diesem Rauchverhalten dieser Wert jemals erreicht oder sogar überschritten? Wenn ja, wann?

f) Stelle den Nikotingehalt am TI graphisch dar! (Angabe der Window- Einstellungen, Skizze im Heft!)

7. Klasse:

Gestaltet von: Dr. Otto Wurnig

1. Semesterschularbeit 3. 2. 2000 (100 Minuten)

1) Die Punkte $A = [3,0,-1]$, $B = [1,4,-1]$ und $C = [-2,0,4]$ liegen auf einer Kugel, deren Mittelpunkt in der Ebene ε: $2x + 3y - 8z = 4$ liegt.

a) Stelle die Kugelgleichung auf!

b) Berechne das Volumen jener Pyramide, die das Dreieck ABC zur Grundfläche hat und deren Spitze der tiefste Punkt der Kugel k: $(x+2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 25$ ist!

2) Der Mittelpunkt der Ellipse E: $16x^2 + 25y^2 = 400$ ist der Scheitel einer Parabel, deren Brennpunkt mit dem rechtsseitigen Brennpunkt der Ellipse zusammenfällt. (SKIZZE!)

a) Wie lauten die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten und die Koordinaten der Berührungspunkte?

b) Berechne den Schnittwinkel, den die Ellipse E mit der Parabel P: $y^2 = 12x$ einschließt!

3) Angenommen, ein punktförmiges Objekt bewegt sich längs der durch
f: $x \to$ (1/4) $\cdot$ ($x^3 + 2x^2 - 3x$), [-2;2] $\to$ R
beschriebenen Kurve und trifft auf eine Wand, die durch die Gleichung $x = 2$ beschrieben wird. Unter welchem Winkel α trifft das Objekt auf der Wand auf ?
Mache am Beginn eine am Graphik-Fenster orientierte SKIZZE!

Zusatzaufgabe:
Gegeben ist ein Rechteck mit 15 cm Länge und 8 cm Breite. In den vier Ecken sind gleich große Quadrate auszuschneiden. SKIZZE! Die dadurch entstehenden Rechteckstreifen sind aufzubiegen, damit eine oben offene Schachtel entsteht.
Wie groß sind die Quadratseiten zu wählen, damit das Volumen der Schachtel möglichst groß wird?

2. Semesterschularbeit 17.06.2002 (100 Minuten)
HÜ-Heft, Formelsammlung, TI-92

1) Eine gängige Verpackungsform für Getränke ist die zylinderförmige Aludose mit 1 Liter Inhalt.
   a) Gib eine Termdarstellung der Funktion O: $x \to O(x)$ an, wobei x der Radius der Dose in cm und $O(x)$ der Oberflächeninhalt einer solchen Dose ist. (Dicke vernachlässigt)
   b) Zeichne den Graphen dieser Funktion im Intervall [2, 9] und bestimme in diesem Intervall die Extremstelle [x, $O(x)$].

2) Der Ellipse $36x^2 + 9y^2 = 324$ (2. Hauptlage) ist ein symmetrisches 6-Eck von größtem Umfang einzuschreiben, dessen Diagonale die große Achse der Ellipse ist. Bestimme den maximalen Umfang des 6-Ecks mit den Methoden der Differenzialrechnung! Skizze!

3) In einer Großstadt sind erfahrungsgemäß 7% der U-Bahn-Fahrgäste Schwarzfahrer.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einem U-Bahn-Waggon mit 40 Fahrgästen genau 3 Schwarzfahrer bzw. mindestens 4 Schwarzfahrer befinden?
   b) Unter wie vielen Fahrgästen ist mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Schwarzfahrer zu erwarten?

   Zeichne zu den ersten drei herausgegriffenen Fahrgästen den betreffenden Baum!

Zusatzaufgabe (eventuell als Alternative zu Beispiel 1 oder Beispiel 2):
Die Kostenfunktion eines Betriebes lautet: $K(x) = 0{,}0007x^3 - 0{,}63x^2 + 360x + 28900$ (x ist dabei der monatliche Umsatz in Stück). Der Verkaufspreis beträgt 1200 € pro Stück.
   a) Bestimme die Erlösfunktion $E(x)$, die Gewinnfunktion, die Gewinnschwelle und den größtmöglichen Gewinn.
   b) Wie ändern sich der maximale Gewinn und die Grenzen des Gewinnbereichs, wenn der Verkaufspreis von 1200 € auf 1000 € herabgesetzt wird?

Gestaltet von: Mag. Ingrid Schirmer-Saneff

1. Schularbeit, am 28. 11. 2001 7C Arbeitszeit: 75min

Materialien: TI-92, SÜ-Heft, HÜ-Heft, Schulbuch

Differentialrechnung

1. Ein Intercity bremst

Der Intercity-Express (ICE) fährt mit hohen Geschwindigkeiten bis zu 300 km/h. Bei normalen Bremsvorgängen braucht er recht lange, um von einer hohen Geschwindigkeit zum Stillstand zu kommen, der Bremsweg ist dann entsprechend lang. In Bild 1 ist eine Stroboskopaufnahme eines solchen Bremsvorgangs im 10-Sekunden-Takt auf dem TI-92 dargestellt. Der Bremsvorgang beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$, nach 2 Minuten und 20 Sekunden kommt der Zug zum Stillstand.
Die genaue Auswertung des Bildes liefert die Werte der Tabelle 2 und die Eingabe der Tabelle in den Data/Matrix-Editor ergibt den Scatter Plot von Bild 3.

a) Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Zug zu Beginn des Bremsvorgangs? Welche Geschwindigkeit hat er nach der Hälfte der Bremszeit? Zu welchem Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit noch gerade halb so groß wie die Anfangsgeschwindigkeit?
b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten nach 2000 bzw. 4000 m?
c) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat der ICE für den gesamten Bremsvorgang? **ZB:** Gibt es einen Zeitpunkt, an dem die Momentangeschwindigkeit genau so groß ist wie diese Durchschnittsgeschwindigkeit?
d) Was lässt sich über die Änderung der Geschwindigkeit während des Bremsvorgangs aussagen?

2. Don't drink and drive!

Ein betrunkener Autofahrer fährt auf einer 12m breiten Straße Schlangenlinie (betrachte zur vereinfachten Rechnung die Bewegung des Massenmittelpunktes), wobei er zuerst den rechten Fahrbahnrand berührt, nach 200 m über die Mittellinie auf die andere Fahrbahnseite kommt und in einem Bogen nach weiteren 100 m wieder auf seinen Fahrstreifen zurückkehrt.

a) Ermittle eine Funktion, die diese Bewegung beschreibt und skizziere die Funktion! (Maßstab angeben!)
b) Wie weit kommt der Radfahrer auf die Gegenfahrbahn?
c) Gibt es einen "Punkt", wo er die Richtung des Lenkradeinschlags ändert? Wenn ja, in welcher Entfernung vom Fahrbahnrand und wo ist er?
d) Ist es möglich, mittels Regression am TI eine Funktion zu ermitteln? Wenn ja, welche?
e) Vergleiche die in a) und d) ermittelten Funktionen in Bezug auf Wirklichkeitsnähe!

3. Denksportaufgaben:

Was ist jeweils das größtmögliche Ergebnis?

a) Denk dir zwei Zahlen zwischen 1 und 100, wobei die zweite gleich 100 abzüglich der ersten Zahl ist! Bilde das Produkt der gedachten Zahlen!

b) Denk dir zwei Zahlen zwischen 1 und 100, wobei die zweite gleich 100 abzüglich der ersten Zahl ist! Bilde das um 1000 vermehrte Produkt aus 3 Werten: der um 60 verminderten ersten Zahl, der um 60 verminderten zweiten Zahl und der um 50 verminderten zweiten Zahl!

ZB: Pazifischer Fisch

Der Zusammenhang zwischen der Länge (in m) und dem Gewicht (in kg) einer speziellen Fischart im Pazifik ist durch $G(L) = 10{,}375\ L^3$ gegeben. Die Änderungsrate der Länge ist durch $L'(t) = 0{,}36 - 0{,}18\ L$ gegeben, wobei t in Jahren gemessen wird.

a) Bestimme eine Formel für die Änderungsrate des Gewichts $G'(t)$ in Abhängigkeit von L!

b) Bestimme die Gewichtsänderung, wenn ein Fisch 30 kg wiegt! (Unter Verwendung der in a) gefundenen Formel)

1) 17 2) 17 3) 14

VIEL GLÜCK !!!!

Gestaltet von: Mag. Sieglinde Fürst

2. Schularbeit (100 Minuten 23. Jänner 2002 .... 7R

1. Eine sphärische Linse (besteht aus zwei Kugelflächen) wird symmetrisch von einem Strahl durchsetzt (siehe Skizze). Die Kugel 1 hat den Mittelpunkt $M_1(4 \mid 2 \mid 4)$ und den Radius $r = 5$ cm. Die Kugel 2 hat ihren Mittelpunkt im Koordinatenursprung und ebenfalls den Radius $r = 5$ cm. Der Lichtstrahl trifft im Punkt $Q(4 \mid -2 \mid 1)$ auf die erste Kugel.

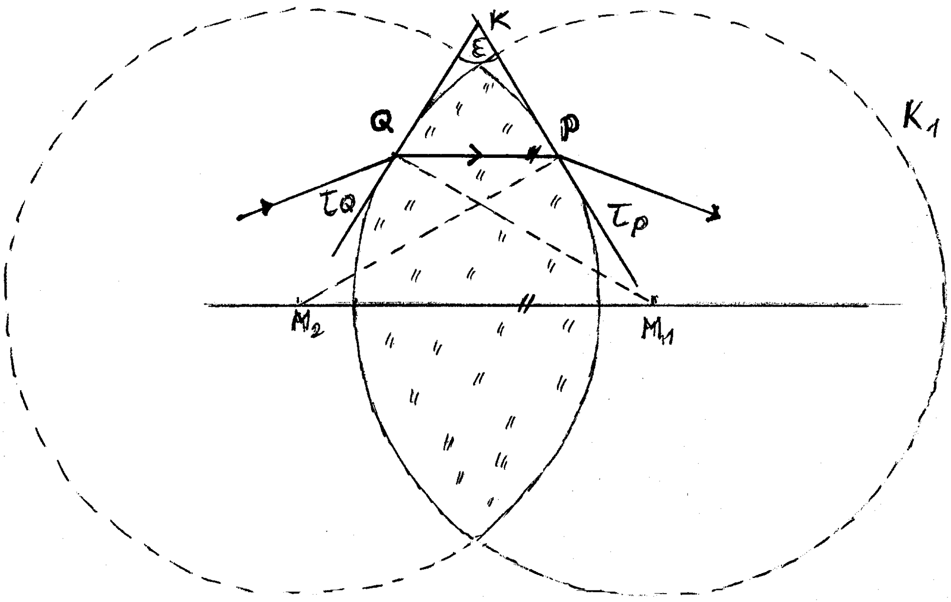
a) Berechne den Punkt P bei symmetrischem Strahlendurchgang, dh. der Strahl verläuft parallel zur Achse durch die Kugelmittelpunkte.

b) Man kann sich die Linse durch ein Prisma, das die Tangentialebenen in P und Q bilden, ersetzt denken. Berechne diese Ebenen!

c) Berechne die Schnittgerade der Ebenen (= brechende Kante)!

d) Berechne den Winkel ε!

Zusatzfrage (1 Punkt): Könnte man in diesem Fall die Näherungsformel zur Berechnung der Gesamtablenkung $\vartheta = \varepsilon \cdot (n - 1)$ anwenden? Begründung!



16 Punkte

2. Ein betrunkener Autofahrer fährt auf einer 12 m breiten geraden Straße „Schlangenlinie“ (betrachte zur vereinfachten Rechnung nur die Bewegung des Massenmittelpunktes), wobei er zuerst den rechten Fahrbahnrand berührt, nach 200 m (Straßenlänge) über die Mittellinie auf die andere Fahrbahnseite gerät und in einem Bogen nach weiteren 100 m (Straßenlänge) wieder auf seinen Fahrstreifen zurückkehrt.
   a) Ermittle eine Funktion, die den Weg des betrunkenen Autofahrers beschreibt! Skizziere den Verlauf der Funktion (Maßstab angeben!)
   b) Wie weit kommt der Autofahrer auf die Gegenfahrbahn?
   c) Gibt es einen Punkt, wo er die Richtung des Lenkradeinschlages ändert? Wenn ja, in welcher Entfernung vom Fahrbahnrand und wie viele Meter (Straßenlänge) nach Berührung des rechten Außenrandes geschieht dies?
   d) Ermittle aus den gegebenen Daten mittels Regression am TI eine Funktion! Welche ist das?
   e) Vergleiche die in a) durch Rechnung und in d) durch Näherung ermittelten Funktionen auf Wirklichkeitsnähe!

16 Punkte

3. Die Kostenfunktion eines Produktionsbetriebes kann näherungsweise durch die Funktion $K(x) = 0{,}05x^3 - 3x^2 + 100x + 1000$ beschrieben werden (x sind die Mengeneinheiten ME des erzeugten Produktes).
   a) Zeige, dass bei steigender Produktionsmenge die Kosten stets zunehmen!
   b) Die Firmenleitung möchte die Produktionskosten pro erzeugter Mengeneinheit $\overline{K}(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ minimieren. Gelingt dies? Wenn ja, bei welcher erzeugten Menge ist dies der Fall? Wie groß sind dann die Kosten pro Mengeneinheit?
   c) Überprüfe mittels Zeichnung am TI, dass tatsächlich ein Minimum vorliegt! (Angabe der WINDOWS-Einstellungen!) Skizziere den Verlauf der Funktion $\overline{K}(x) = \dfrac{K(x)}{x}$! Kannst du das Minimum auch durch Rechnung nachweisen? Wie muss man vorgehen?

d) Die Produktionskapazität der Firma ist mit 30 ME begrenzt. Wie viele Mengeneinheiten können unter diesen Umständen erzeugt werden, damit die sogenannte Stückkostenfunktion $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ minimal wird?

16 Punkte

Viel Erfolg bei der ersten Schularbeit,
bei der Mathematikhefte und Buch als Hilfsmittel erlaubt sind!

8 FOLDER:

gestaltet von Mag. Hermine Rögner

Leistungsbeurteilung und Qualitätsstandards

Die Anforderungen eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts und die Verwendung neuer Technologien (Computeralgebrasysteme) erweitern die bisherigen Möglichkeiten **Leistungen zu erbringen**.

- Problemlösen
  offene Aufgaben ohne „Kochrezepte“
- Facharbeiten
  eigenverantwortliches Präsentieren
- Referate
  mit Begleitung des Arbeitsprozesses
- Portfolios
  Dokumentation des Lernprozesses
- Hand-outs
  Materialien von SchülerInnen für SchülerInnen

Leitideen wie Eigenverantwortlichkeit werden durch diese vielfältigen Möglichkeiten der Leistungserbringung gefördert und konkretisiert.

- Projektleitung:

  Landesschulinspektor
  HR Mag. Dr. Helmut Heugl

- Projektkoordination:

  Mag. Walter Klinger
  Mag. Walter Wegscheider

ACDCA am PI-Hollabrunn
Abt. AHS

Dechant-Pfeifer-Straße 3
A-2020 Hollabrunn

- E-Mail: acdca@pinoe-hl.ac.at

Neue Lernkultur

- **Mathematik lernen mit Hilfe verschiedener Methoden**
- **Mathematik lernen mit allen Sinnen**
- **Mathematik eigenverantwortlich lernen**

Gleichzeitig soziale, kommunikative und methodische Kompetenzen entwickeln, pflegen und fördern.

Für einen derartigen Mathematikunterricht entwickeln wir

- **Stationenbetriebe**

  und
- **Lernspiralen**

In Seminaren und Workshops werden diese Materialien für LehrerInnen von LehrerInnen hergestellt.

Info und Downloads unter:
www.acdca.ac.at
www.tibs.at/nlk

Didaktische Betreuung und Englisch als Arbeitssprache

Es gibt immer mehr LehrerInnen, die ihren naturwissenschaftlichen Unterricht verändern wollen.

Wir bieten eine dauernde didaktische Betreuung durch erfahrene LehrerInnen an.

In einem **IT-gestützten Mathematikunterricht** ergeben sich viele Möglichkeiten Englisch als Arbeitssprache zu nutzen (Fachterminologie, Fachliteratur, Erschließen von fremdsprachigen Quellen im Internet).

Die Gruppe stellt eine umfangreiche Liste von Antworten auf der Homepage unter

- **FAQ “FREQUENTLY ASKED QUESTIONS“**

bereit.

Neben Tipps und Tricks zum Gebrauch der Technologie findet man wertvolle Hinweise zur Behebung von Hard- und Software–problemen.

Einstiegs- und Argumentationshilfen für innovationsbereite KollegInnen werden angeboten!

Unterrichtsmaterialien im Lichte neuer Technologien

Die Verwendung neuer Technologien fordert

- Grundkenntnisse der Informations- und Kommunikationstechnologie
- Nutzung mathematischer Inhalte im Internet

und ermöglicht

- offenere Fragestellungen zu klassischen Beispielen
- Beispiele mit realitätsnäheren Aufgabenstellungen

Im Rahmen des Projektes werden folgende Angebote auf- und ausgebaut:

- Linksammlung
- themenzentrierte Unterrichtsmaterialien
- Aufgabensammlungen
- Literaturhinweise
- Vorstellung von Neuigkeiten im Technologiebereich
- Hinweise zu Fortbildungsveranstaltungen

Der derzeitige Projektschwerpunkt ist die Erstellung einer ergänzenden Aufgabensammlung für den computeralgebra-unterstützten Mathematikunterricht.

Literatur

ACDCA (Austrian Center for Didactics of Computer Algebra)
Bericht über das Projekt CAS III – 1999/2000: www.acdca.ac.at

Eder Ferdinand, Univ. Prof. Dr., Universität Linz:
Internationaler Workshop „Evaluation und Qualität im Bildungswesen“, Blumau, 1999. Tagungsband des Zentrums für Schulentwicklung, Hans-Sachsgasse 3/II, 8010 Graz.

Gruber Karl Heinz, Univ. Prof. Dr., Universität Wien
Internationaler Workshop „Evaluation und Qualität im Bildungswesen“, Blumau, 1999. Tagungsband des Zentrums für Schulentwicklung, Hans-Sachsgasse 3/II, 8010 Graz.

Klippert, H.:
Methodentraining. Beltz Praxis, S30ff. Beltz Verlag Weinheim und Basel, 2000. ISBN: 3-407-62409-3

Heugl, H., Klinger, W., Lechner, J.:
Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen.
Addison-Wesley Publishing Company, Bonn 1996. ISBN 3-8273-1082-2

Lechner, J.:
Erarbeitung eines Kommentars zum Oberstufenlehrplan für einen CAS-unterstützten Unterricht. In Bericht über das Projekt CAS III – 1999/2000: www.acdca.ac.at

Neubrand, M., u.a.:
PISA-Expertengruppe Mathematik, Sprecher: Prof. Dr. Michael Neubrand: Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung. Erschienen in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik Vol. 33 (2), pp 45-59, 2001

Reichel, H.C.:
8.1.1 Lehrplan 2000. ÖBV/HPT Verlagsgmbh, Wien 2000. ISBN 3-209-03157-6

Specht, Werner, Dr. Zentrum für Schulentwicklung, Graz
Vortrag bei der Konferenz der Landesschulinspektoren, 2000

Wittmann, E.:
Grundfragen des Mathematikunterrichts, S 48ff. Vieweg Verlag Braunschweig, 1981.
ISBN 3-528-58332-0