Trigonometrie

Jeder Lehrer sollte sich zu Beginn eines Kapitels Gedanken machen, welche Bildungsaufgaben hiermit erreicht werden sollen, welches mathematische Wissen und Können der Schüler erlangen soll. Soll ein Schüler nur ein Standardbeispiel lösen können oder soll er über verschiedene mathematische Arbeitsweisen reflektieren können? Welche Ziele verfolgt er, was bezweckt er mit einem bestimmten Beispiel und was erwartet er sich vom Schüler?
Wie kann der Schüler motiviert werden? Wie kann ich ihn zum aktiven Mitarbeiten bewegen? Wie kann ich mathematisches Verständnis erwirken und somit einen noch besseren Unterrichtsertrag sichern? All dies sind didaktische Grundfragen und Grundsätze, die immer wieder neu reflektiert werden müssen.

Die folgenden Zeilen sollen dazu als Anregung dienen.

- Welche **mathematischen Grundkenntnisse** soll ein Schüler haben, d.h. was soll er am Ende des Schuljahres, bzw. nach der Matura noch wissen?.

- Welche **mathematischen Grundvorstellungen** soll ein Schüler haben, d.h. womit soll er einen bestimmten Begriffes verbinden?

- Welche **mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten** soll er erlangen, d.h. was soll er sich im Laufe eines Schuljahres aneignen?

Im ersten Teil habe ich den Versuch gemacht die Trigonometrie nach diesen Gesichtspunkten zu betrachten. Dies soll nur eine Hilfestellung für Lehrer sein, es bleibt natürlich jedem Lehrer frei eine andere Gewichtung vorzunehmen. Im Anschluß daran, im zweiten Teil, möchte ich an Hand von einigen Aufgaben zeigen, wie die einzelnen didaktischen Ziele erreicht werden können. Weiters wird im Besonderen auf die Verwendung von CAS hingewiesen, bzw. ein Bezug zu CAS angeführt.

Gleichzeitig habe ich den Versuch gemacht die Beispiele den vier verschiedenen Grundtätigkeiten, (wie darstellend - interpretatives Arbeiten, formal - operatives Arbeiten, kritisch - argumentatives Arbeiten und heuristisch - experimentatives Arbeiten) zuzuordnen. Vielfach gibt es natürlich Überschneidungen und der Lehrer möge sich überlegen, welche er insbesonders herausarbeiten möchte. Zum Teil wird es auch nötig sein die Beispiele unter Führung des Lehrers zu erarbeiten, zum Teil soll der Schüler die Beispiele allein bewältigen. Im Anschluss an jedes Beispiel ist noch auf Besonderheiten der Aufgabe hingewiesen.

Trigonometrie		
Kenntisse / Wissen	Begriffe / Vorstellungen	Fertigkeiten / Fähigkeiten
Was ist 1 Grad, was 1 Gon, was 1 Rad? (Definition und rechnerische Zusammenhänge)	Vorstellung der Winkelmaße als Teile des Einheitskreis	Umwandeln mit Hilfe des TR oder CAS
Definition von sin, cos und tan als Seitenver-hältnis im rechtwinkeligen Dreieck.	Visuelle Vorstellung von sin, cos und tan als Größen im rechtwinkeligen Dreieck	Berechnen der fehlenden Bestimmungsstücke im rechtwinkeligen Dreieck, Steigungsdreieck, usw. Allenfalls: Beispiele aus der Geographie (Breitengrade) und der Astronomie (Entfernungen von Planeten).
Definition von sin, cos und tan mit Hilfe des Einheitskreises	Visuelle Vorstellung von sin, cos und tan als Größen im Einheitskreis (erweitert auf alle 4 Quadranten)	
Zusammenhang von sin, cos und tan.		Aus einer Winkelfunktion,ohne Berechnung des Winkels, die beiden anderen Winkelfunktionen berechnen. (kritisches Denken bzgl der Lösung - welcher Quadrant)
Polarkoordinaten	Visuelle Vorstellung der Polarkoordinaten durch Festlegung eines Punktes durch Entfernung und Richtung (dadurch Erkennen des Zusammenhanges mit cartesischen Koordinaten)	Umrechnen von Polarkoordinaten in cartesische und umgekehrt.
sin x, cos x und tan x als Winkelfunktionen (Periodizität, Grenzen)	Vorstellung vom typischen Verlauf der Graphen (z.B. cos x nur um $\pi/2$ verschobener sin x)	Reduktionsformeln anwenden können.
Kenntnis des Einflusses der Formvariablen ($f(x) = a \sin (bx + c) + d$, Amplitude, Frequenz, Phasenverschiebung, vertikale Verschiebung)	Vorstellung von der Auswirkung der Variation der einzelnen Parameter (Hinweis: Erzeugen und Überprüfen mit CAS)	Zwischen graphischer und Termdarstellung übersetzen können (Hinweis: Eingehen auf Bedeutung in der Physik bei Schwingungen) Allenfalls: Beispiele aus der Physik

RG: $\sin(\alpha+\beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$ Analog für cos und tan Additionstheoreme	$\sin\alpha + \sin\beta > 1$ möglich, aber stets $\sin(\alpha+\beta) \leq 1$	mit Hilfe von CAS diese Beziehungen überprüfen (mit Graphen, Tabellen, etc.)
Allenfalls: Wissen, dass goniometrische Gleichungen unendlich viele Lösungen haben		Auflösen einfacher goniometrische Gleichungen. (Kritisches Reflektieren, da TR nur 1 Lösung liefert). Hinweis: Hier lassen sich mit Hilfe des TI92 bzw. TI89 die Lösungen (durch Intersection) sehr anschaulich ermitteln.
Kongruenzsätze (Wiederholung)		
Sinus- und Cosinussatz in Bezug zu den Kongruenzsätzen, Trigonometrische Flächenformel.		Durchführen von Berechnungen in der Ebene und im Raum. Visualisierung der Problemstellung, Rückführen auf Dreiecke (Kongruenzsätze), Lösungsstrategien entwickeln und festlegen, Überlegungen anstellen über sinnhafte Genauigkeit der Resultate. Allenfalls: Einfache Beispiele der Standortbestimmung (Navigationsprobleme) Anmerkung: Bei Anwendungsaufgaben können die Formeln als Funktionen (ev. Black Box) benutzt werden und es kann somit vielseitiger an ein Beispiel herangegangen werden (z.B. rein rechnerisch, graphisch, mit Hilfe von Tabellen etc.). Außerdem lassen sich leicht Fehlerabschätzungen durchführen und die „Sinnhaftigkeit“ allzu genauer Resultate zeigen.

Aufgaben

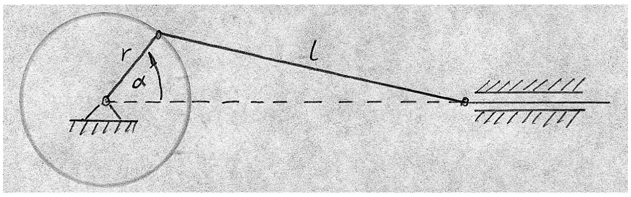
Die folgenden Beispiele sind einerseits etwas ungewöhnlichere Aufgaben, die als Anregung dienen und zeigen sollen, wie vielschichtig der Ti92, bzw. der TI89 oder andere elektronische Hilfsmittel eingesetzt werden können und so zum besseren Verständnis des Lehrstoffes beitragen. Andererseits sollen sie Material liefern um etwaige Grundkenntnisse und Grundfertigkeiten abzufragen.
Wie schon erwähnt ist eine Einteilung nach den vier mathematischen Grundtätigkeiten (siehe Lechner Einführung) erfolgt. Allerdings sind in den meisten Beispielen alle vier Tätigkeitsbereiche enthalten, doch ist sicher die Gewichtung unterschiedlich. Es bleibt natürlich jedem Lehrer überlassen diese Gewichtung zu Gunsten der einen oder anderen Tätigkeit zu verschieben.

Darstellend - interpretatives Arbeiten :

Beispiel 1 : (Taschner)

An einem Schubkurbelgetriebe mit einer 4 m langen Gelenkstange, die sich im Abstand 1 Meter um die Achse dreht, wird diese Gelenkstange aus 90˚ gegenüber der oberen Totpunktlage auf 30˚ gegenüber der oberen Totpunktlage gedreht. Welcher Kolbenhub wird dadurch erreicht?

Skizze :



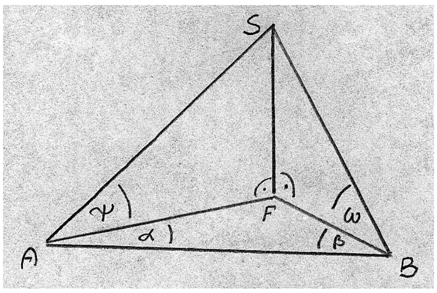
Dieses Beispiel ist mit Hilfe des Sinussatzes rasch zu lösen, allerdings liegt hier der Grundgedanke eher darin, dass der Schüler den Text versteht und graphisch übertragen kann, sodaß er aus einer neuen Skizze seine Berechnungen erstellen kann. Ebenso muss er überlegen, wie genau er das Ergebnis anführen soll, damit es sinnvoll ist.

Natürlich wird auch formal gerechnet,der Hub muss visualisiert werden und überlegt werden, welche Strecke nun wirklich zu berechnen ist. Auch besteht die Möglichkeit an Hand eines einfachen Modells (mittels eines Bleistiftes) den Bewegungsvorgang zu zeigen.

Beispiel 2 : (Reichel)

Ermittle graphisch und rechnerisch die Entfernung des Punktes F eines auf einer waagrechten Ebene stehenden lotrechten Mastes von den Endpunkten A und B der Standlinie (Vorwärtseinschneiden nach einem Punkt) sowie die Höhe des Mastes!

Skizze:



Interessant an diesem Beispiel ist, dass unterschiedliche Ergebnisse für die Höhe (der Unterschied beträgt ca 6 cm) herauskommen, wenn man einmal über den Winkel ψ und das andere mal über den Winkel ω arbeitet. Auch hier ist narürlich auch das rein Rechnerische gefragt. Bleibt zu überlegen, wieviel ich davon dem CAS überlassen möchte.

Beispiel 3 : (nach Taschner)

An der Spitze eines mit Überschallgeschwindigkeit v fliegenden schlanken Körpers entsteht eine, nach dem österreichischen Physiker Ernst Mach (geb. 1838, gest. 1916) benannte, kegelförmige Druckwellenfront, die man als *Schallknall* hören kann. Der halbe Öffnungswinkel θ des Kegels ergibt sich aus $c = v.\ \sin\theta$, wobei c die Schallgeschwindigkeit bedeutet. (In der Luft ist c = 330 m/s)

a) Wie schnell fliegt ein Flugzeug, dessen Machscher Kegel einen halben Öffnungswinkel $\theta = 37^\circ$ besitzt?

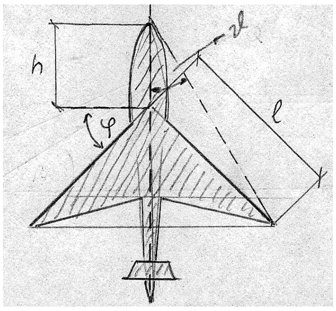
b) Wie gross ist der halbe Öffnungswinkel des Machschen Kegels bei einem mit doppelter Schallgeschwindigkeit fliegenden Flugzeug?

Ein Düsenflugzeug wird so konstruiert, dass die Tragflächen nicht in den Machkegel ragen, der (so verlangen es die Sicherheitsbestimmungen) bei der doppelten Normalgeschwindigkeit entsteht. Die Tragflächen eines Flugzeuges, das im Normalbetrieb 75% der Schall-geschwindigkeit unterwegs ist, sind 30 m lang und 20 m hinter der Flugzeugspitze von der Achse weg montiert.

c) Welchen (von der Achsennormalen aus gemessenen) Anstellwinkel φ müssen diese Tragflächen besitzen?

d) Für welche Normalgeschwindigkeit ist ein Flugzeugtyp entworfen, dessen Tragflächen 28 m lang sind und 18 m hinter der Flugzeugspitze von der Achse weg mit einem Anstellwinkel $\varphi = 18^\circ$ montiert sind?

Skizze:



Teil a) ist nur ein Einsetzen in die Formel und dient zum Arbeiten mit dem Sinus, Teil b) kann ganz ohne Rechner gearbeitet werden. Teil c) ist ein Übungsbeispiel für den Sinussatz und d) für den Cosinussatz. Dies weist alles auf formal - operatives Arbeiten hin, doch ist es notwendig erst die Angabe zu visualisieren und aus dem Text ein brauchbares mathematisches Modell zu erstellen. Allerdings glaube ich auch, dass dieses Beispiel bei den Schülern Interesse hervorruft und sie somit motiviert an diese Aufgabe herangehen werden.

Formal - operatives Arbeiten

Beispiel 4 (nach Woldron) :

Eine Klasse macht einen Schulausflug. Bei der Anfahrt mit dem Bus zeigt eine Straßentafel eine Steigung von 15 % an.

a) Wie groß ist der Steigungswinkel?
b) Wieviel Höhenmeter hat der Bus nach einer Fahrt von 1 km überwunden?
c) Welche Steigung hätte die Straße, wenn dieselbe Höhe schon nach 800 m erreicht wäre?
d) Nach wieviel m wäre derselbe Höhenunterschied erreicht, wenn die Straße 18 % Steigung angezeigt hätte?
e) Auf der Wanderkarte (1 : 5000) sind 20 m Höhenlinien eingetragen. Unter welchem Winkel steigt das Gelände an einer Stelle an, an der der Abstand zweier benachbarter Höhenlinien mit 8 mm gemessen wird?
f) Wie groß ist die Steigung in % ?

An diesem Beispiel wird das Umrechnen von Winkeln und zugehörigen Winkelfunktionen geübt, wie auch der Maßstab wiederholt, der Unterschied zwischen Anstieg und Steigung wird klargemacht. Weiters muss sich der Schüler aus der zweidimensionalen Karte eine dreidimensionale Vorstellung erzeugen.

Schließlich wäre zu diskutieren, wie genau die Angaben sein können und wie genau das Resultat sinnvoll ist. Somit ist hier auch kritisches , wie auch darstellen - interpretatives Arbeiten eingeschlossen

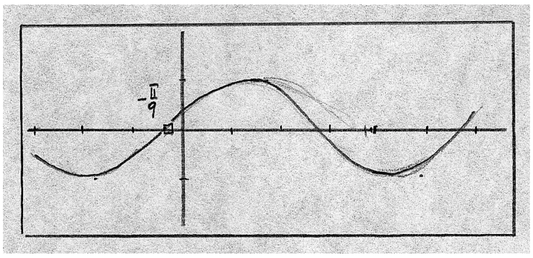
---

Beispiel 5 : (Hainscho - analog zu TIMSS entwickelt)

Eigenschaften der Winkelfunktionen kennen :

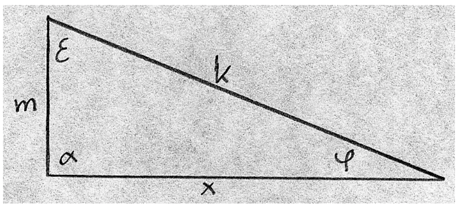
6.2 : Stelle die gegebene Kurve

a) als Sinus-
b) als Cosinusfunktion dar:



y = sin (..................)   y = cos (.................)

6.3 :



tan ε =   cos φ =   sin α =

6.4 : Ergänze die Winkel :

cos (27°) = cos (.........) = sin (...........) = sin (.............) = sin (............)
Begründe jede Deiner Antworten durch eine Skizze!

Diese Beispiele eignen sich sicher gut um ein gewisses Grundwissen zu überprüfen. Es versteht sich sicher, dass hier kein Rechner verwendet werden soll.

Kritisch - argumentatives Arbeiten

Beispiel 6 : (Bürger, Fischer, Malle, 2)

An einem Leuchtturm sind zwei Markierungen angebracht, die eine Markierung um 7 m höher als die andere. Von einem Schiff aus mißt man die Höhenwinkel zu den beiden Markierungen mit $2{,}6^\circ$ und $3{,}7^\circ$.

a) Wie weit ist das Schiff vom Leuchtturm entfernt?
b) Mit welcher Genauigkeit kann die Entfernung des Schiffes vom Leuchtturm mit den angegebenen (gerundeten) Winkelmaßen bestimmt werden. Gib Schranken an!

Hier soll dem Schüler vor allem die Auswirkung von Meßungenauigkeiten bewußt werden.

Darstellen - interpretatives und formal - operatives Arbeiten ist natürlich inkludiert. Allerdings wird man die reine Rechnearbeit mit Hilfe von CAS erledigen.

Beispiel 7 (nach Woldron) :

Gegeben sind zwei Kräfte $F1 = 190$ N und $F2 = 250$ N , wie auch der Winkel den sie miteinander einschließen ($\varphi = 87^\circ$).

a) Wie groß ist die Resultierende und welche Winkel schließt sie mit den beiden Kräften ein?
b) y1(x) gibt für die beiden gegebenen Kräfte in Abhängigkeit vom eingeschlossenen Winkel x den Betrag der Resultierenden an.
Wie interpretierst Du den höchsten, bzw. den tiefsten Punkt des Graphen?
Wie groß ist die Resultierende, wenn der eingeschlossene Winkel 90° beträgt?
Bei wieviel Grad ist die Resultierende das arithmetische Mittel der beiden Einzelkräfte?

Hier wird sowohl der Cosinussatz, wie auch der Sinussatz anzuwenden sein.Der Schüler muß abstrahieren und verallgemeinern.Hier liefert der TI92, bzw. der TI89 wieder die Möglichkeit das Problem von einer anderen Seite zu sehen. Weiters muß der Schüler Graphen deuten und wichtige Informationen diesem entnehmen können. Er wird seine Antworten begründen müssen und vielleicht neue Zusammenhänge erkennen.

Heuristisch - experimentelles Arbeiten

Beispiel 8 : (Gruppenarbeit)

Suche aus verschiedenen Lehrbüchern unterschiedliche Ableitungen des Sinussatzes (oder Cosinussatzes) und referiere darüber. Zeige auch im Speziellen, dass die Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck als Sonderfall des Sinussatzes betrachtet werden können,bzw der Pythagoreische Lehrsatz ein Sonderfall des Cosinussatzes ist.

Weise auf Vor- bzw. Nachteile der einzelnen Beweise hin. Welcher Beweis liegt Dir besonders und warum?

Hier muß geforscht, entdeckt, formuliert werden.

Beispiel 9 : (Koller)

Die Lufttemperatur schwankt täglich und hängt von zahlreichen Einflüssen ab. Untersucht man jedoch den Verlauf der langjährigen Monatsmittelwerte, so lassen sich erstaunliche Gesetzmäßigkeiten erkennen. Daraus lassen sich wichtige Schlüsse im Hinblick auf Heizungs- und Kühlungsbedarf, Landwirtschaft, Tourismus und Verkehr ziehen.

Die folgende Tabelle wurde einem Tourismusprospekt entnommen :

Lillehammer	Durchschnittliche Temperatur in ˚C		Sonnenstunden	Regentage
	Tag	Nacht	pro Tag	
Jänner	-5.7	-12.1	1.1	9
Februar	-3.7	-11.4	2.0	7
März	1.7	-7.6	4.4	5
April	8.0	-1.8	6.3	7
Mai	14.7	3.1	7.1	6
Juni	19.8	7.8	8.0	11
Juli	21.8	10..5	7.6	13
August	19.6	9.2	6.6	11
September	14.2	5.0	4.5	10
Oktober	7.0	0.5	2.6	9
November	0.6	-4.1	1.3	9
Dezember	-2.9	-8.2	0.5	1

a) Entnehmen Sie der Tabelle aus dem Reiseführer die langjährigen Mittelwerte der Luft temperatur bei Tag, bei Nacht, und stellen Sie diese auf dem Ti-92 als Scatter Plot dar.

b) Die Lufttemperatur in Abhängigkeit von der Zeit hat angenähert einen sinus- bzw. cosinus- förmigen Verlauf. Beschreiben Sie die Lufttemperaturen durch die Funktion,
$y = a \cdot \sin(\omega \cdot x + b) + x$ oder $y = a \cdot \sin(\omega \cdot (x + \varphi) + c)$
und stellen Sie diese graphisch dar.
Welche Aufgaben haben die Parameter a, b, c, und w, bzw. j?

c) Vergleichen Sie die Temperaturverläufe der Tag- und Nachttemperatur mit der Anzahl der Sonnenstunden pro Tag.

d) Stellen Sie auch die Temperaturveränderungen von einem Monat zum nächsten graphisch dar! Was fällt dabei auf?

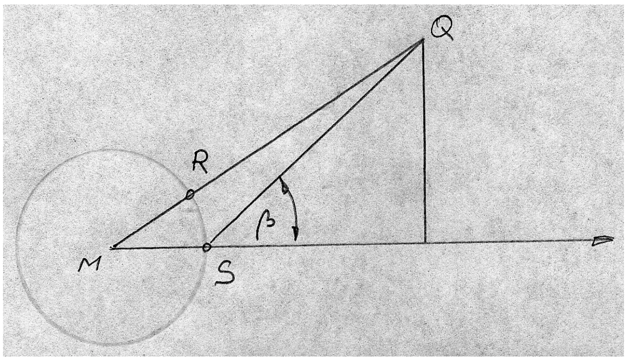
Bei diesem doch recht aufwendigen Beispiel wird relativ viel im Handling mit dem TI-92 vorausgesetzt. Es ist sicher von Vorteil, wenn hier der Lehrer lenkend eingreift. Um dem Beispiel gerecht zu werden und die Interpretation nicht zu kurz kommen zu lassen, ist es auch nötig mehr als eine Unterrichtsstunde einzuplanen (oder, wenn möglich, eine Doppelstunde zu verwenden). Doch zeigt gerade dieses Beispiel, dass Winkelfunktionen nicht nur eine Idee des Mathematiklehrers sind, sondern häufig in der Natur auftreten.

Beispiel 10 : (Idee nach Taschner)

Du hast im Unterricht sicher schon einmal Kugelstoßen dürfen und weißt daher, dass dies aus einem Kreis (r = 1,25 m) heraus geschieht und dass die Weite radial gemessen wird (siehe Skizze). Dasselbe gilt für den Diskuswurf. Da der Wurf aus einer Drehung heraus erfolgt, ist es ziemlich schwer den richtigen Abwurfwinkel zu erreichen. In der Skizze siehst Du die ideale Abwurfrichtig (S ist die Lage des Fußes). Die wirklich geworfene Weite ist SQ, die gemessene allerdings ist RQ.

a) Um wieviel cm ist die gemessene Weite kürzer als die wahre, wenn der Abwurfwinkel des Sportlers um ß = 35˚ vom idealen abweicht und die gemessene Weite RQ = 42 m beträgt?
b) Wie groß wäre der Winkel ß , wenn der Athlet gleich ½ m „verschenkt"?
Kannst Du die „verschenkte" Weite in Abhängigkeit
c) vom Winkel ß (gemessene Weite ist konstant)
d) von der gemessenen Weite (ß ist konstant)
darstellen? Stelle diese beiden Funktionen im Graphikfenster des TI-92 dar und überprüfe Deine Resultate aus a) und b) mit Hilfe der Trace Funktion. Welche Vorteile bietet diese Graphikdarstellung? (Günstige Windoweinstellung : xmin=-2, xmax=60, ymin=-0.2, ymax=1)

Skizze :



Der erste Teil des Beispiels (a und b) ist Standard und entweder über den Cosinussatz oder aber auch nur mit Hilfe des rechtwinkeligen Dreieckes zu lösen. Im zweiten Teil muss der Schüler verallgemeinern und Graphen interpretieren können.

Literaturangaben :

Bürger-Fischer-Malle : Mathematik Oberstufe Bd 2,HPT
G. Hainscho : Checkliste für Qualität im Mathematikunterricht
T. Koller : Skriptum für T³ - Zertifikatkurs (März 2000)
Reichel-Müller-Laub-Hanisch : Lehrbuch der Mathematik, Bd 6, HPT
Szirucssek-Unfried : Mathematik , 6/2, Überreuter
Texas Instruments : TI - Nachrichten Ausgabe 2/99
R.Taschner : Mathematik , 6. Klasse , Oldenburgverlag
H.Woldron : Skriptum für ein Seminar für Projektlehrer (Feb. 1999)