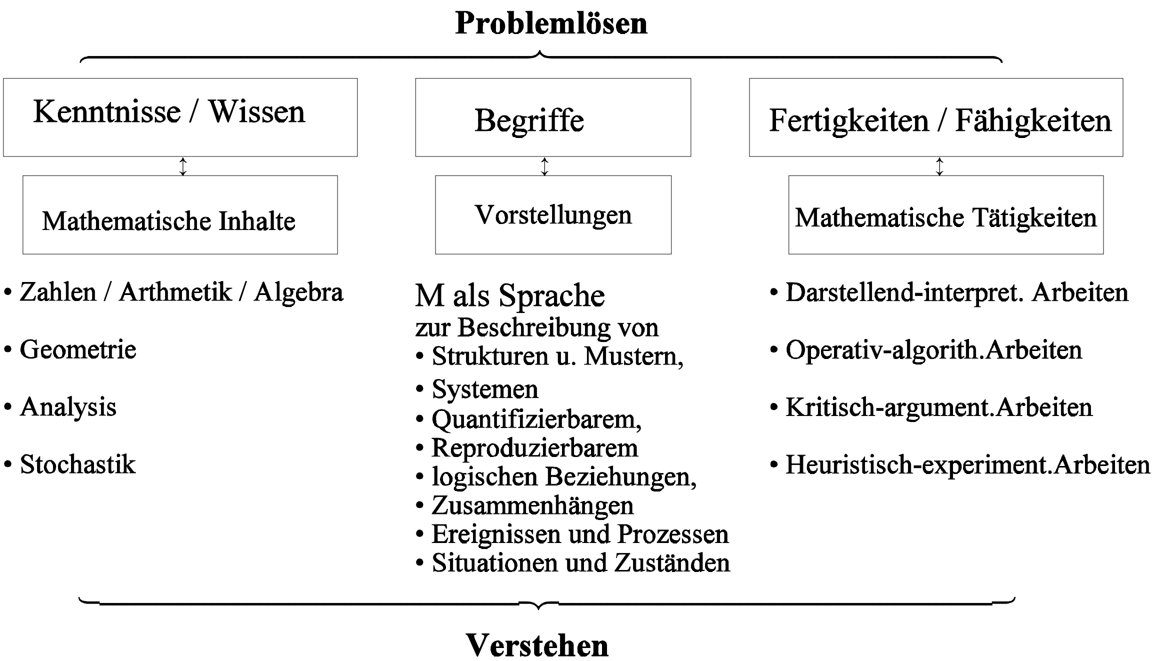
Grundwissen, Grundvorstellungen, Grundtätigkeiten

Josef Lechner

Jeder Lehrplan beschreibt Kenntnis- und Wissenselemente, Begriffe- und Vorstellungen, Fertigkeiten und Fähigkeiten, die die Lernenden im Laufe ihres Lernprozesses aufbauen sollen. Meist sind diese Konzepte nicht klar getrennt, sondern werden in Form von - oft kaum unterscheidbaren - Lernzielen und Lerninhalten angegeben.

Zumeist wird auch die Bedeutung der Ziele hervorgehoben und die Inhalte dabei als im Grunde austauschbar hingestellt. In jüngster Zeit werden weiters Selbst-, Sozial- und Sachkompetenz als *die* wesentlichen Ziele schulischen Lernens beschworen, gleichzeitig wird jede Form des Detailwissens als negativ hingestellt und exemparisches Lernen als einzig mögliche Lernform und Gruppenarbeit als unabdingbare Voraussetzung für erfolgreiches Lernen betrachtet. Vieles davon ist richtig und gut, aber viel zu oft werden die verschiedenen Aspekte und Betrachtungsebenen durcheinander-gebracht. Heraus kommt ein unverdaulicher Brei an inhaltsleeren didaktischen Schlagwörtern, wie der neue Unterstufenlehrplan („Lehrplan `99“) höchst unangenehm vor Augen führt.

So einfach kann mathematisches Lernen nicht gesehen werden. In der Mathematik sind die Inhalte eben nicht beliebig austauschbar. Wer als mathematisch gebildet gelten will, muss Kenntnisse und Wissen zumindest in den Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik aufweisen können. Auch die Begriffsbildung hat in der Mathematik eine andere - grundlegendere - Bedeutung als in anderen Wissenbereichen. Über die *Begriffsbildung* werden die „Gegenstände der Mathematik“ (seien es nun Zahlen, Variablen, Gleichungen, Funktionen, Vektoren, die Mandelbrotmenge oder was auch immer) erst erschaffen. Begriffe werden also zu Bausteinen und müssen auf der Seite des / der Mathematik-Treibenden mit adäquaten Vorstellungen korrespondieren sollen sie erfolgreich einsetzbar sein. Untrennbar und doch verschieden vom Wissen und von den Begriffen sind die mathematischen Fähigkeiten, die in zumindest vier verschiedenen Qualitäten auftreten können: als Fähigkeiten im Darstellen und Interpretieren, als operativ-algorithmische Fähigkeiten, als Fähigkeiten im Argumentieren, Begründen und Beweisen und als heutistische-experimentelle Fähigkeiten.



Folgen wir der Darstellung, so müssen in Mathematik Kompetenzen zumindest in drei Bereichen aufgebaut werden:

- Kompetenzen, die sich auf Kenntnisse und Wissen beziehen und sich im Vertrautsein mit mathematischen Inhalten (hauptsächlich) in den Bereichen Zahlen / Arithmetik / Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik äußern.
- Weiters Kompetenzen beim Begriffsbilden, beim Verknüpfen mathematische Begriffe mit adäquaten Grundvorstellungen. Ziel dabei ist es, Mathematik als Sprache mit eigener Syntax, Semantik und Pragmatik zu verstehen.
- Schließlich und insbesondere Kompetenzen im (praktischen) Umgang mit den Inhalten und Begriffen. Diese mathematischen Fertigkeiten und Fähigkeiten äußern sich in mathematischen Tätigkeiten wie eben Darstellen und Interpretieren, Operieren und algorithmischen Arbeiten, Begründen, Argumentieren, Beweisen und heurischisch-experimentellem Vorgehen.

Mit dem Ganzen sollen übergeordnete Ziele erreicht werden: einerseits soll es der/dem Lernenden möglich werden, die Strukturen, Prozesse und Vorgänge der umgebenden Welt besser verstehen zu können, andererseits sollen sie/er fähig werden, Probleme mit mathematischen Hilfmitteln lösen zu können.

Ausgehend vom aktuellen Oberstufenlehrplan soll nun versucht werden, die wesentlichen Inhalte zu identifizieren und in den vier angeführten Inhaltsbereichen aufzulisten (Abschnitt 1). Weiters soll auf den Begriffsbildungsprozess und die - zumeist stark vernachlässigte - Rolle der Vorstellungen, die die Lernenden mit den Begriffen verbinden, eingegangen werden (Abschnitt 2). Schließlich sollen die mathematischen Grundtätigkeiten näher charakterisiert werden (Abschnitt 3). Es sei darauf hingewiesen, dass darüber hinaus im Kapitel Lehrinhalte versucht wurde, eine Darstellung des Oberstufenlehrplans zu geben, die nach Kenntnisse/Wissen, Begriffe/Vorstellungen und Fertigkeiten/Fähigkeiten unterscheidet.

1 Grundwissen

Im Folgenden wird eine Darstellung dessen gegeben, was im gegenwärtigen Oberstufenlehrplan an Wissen vermittelt werden soll. Natürlich muss dabei beachtet werden, dass der aktuelle Oberstufenlehrplan ein Rahmenlehrplan ist und damit Schwerpunktsetzungen der / des Lehrenden möglich (und angesichts der zur Verfügung stehenden Zeit auch notwendig) sind. Schwerpunktsetzung heisst aber, dass einige Inhalte Vertiefungen und Erweiterungen erfahren sollen.

Was z.Z. für die Schüler Grundwissen ist, wird damit durch die Schwerpunktsetzungen der Lehrenden definiert (in dem eben manche Inhalte kürzer, andere umfassender unterrichtet werden) und ist den Schülern als „Matura-Kernstoff“ bekannt zu geben. Jeder „Matura-Kernstoff“ (Grundwissen) wird damit eine Teilmenge der im folgenden angegebenen Lehrinhalte sein.

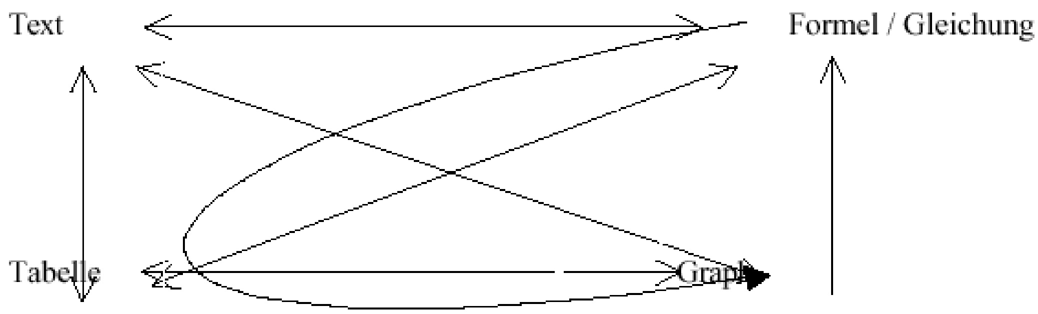
1.1 Zahlen - Arithmetik - Algebra

Die Bereiche Zahlen, Aufbau der Zahlenmengen, Zusammenhänge von Zahlenmengen und Rechenoperationen sind ab der 5.Klasse (Stufe 9) sehr stark mit dem Ausbau des arithmetischen und algebraischen Wissens verbunden, so dass eine Trennung der drei Teilbereiche kaum sinnvoll erscheint. Auch ist darauf hinzuweisen, dass Arithmetik hier sehr weit verstanden wird. Aspekte der Zahldarstellung und numerische Verfahren werden damit als Weiterentwicklung arithmetischer Kenntnisse (der Unterstufe) betrachtet.

Formeln / Sprache Mathematik / Modellbildung

„Zu den wesentlichen Fähigkeiten beim Anwenden von Mathematik gehört – im Bereich der Grundbildung ... ebenso wie im Bereich der höheren mathematischen Allgemeinbildung - das Übersetzen von einer verbal gegebenen Darstellungsform in eine mathematische (algebraische D., grafische D. oder auch Tabellen) bzw. umgekehrt die Interpretation einer in mathematischer Form gegebenen Information in Worten.

Insbesondere beim Arbeiten mit Funktionen treten diese Übersetzungsqualifikationen deutlich zutage, und zwar vor allem bei Aufgaben, die als Arbeiten mit einem impliziten (noch nicht formalisierten) Funktionsbegriff im Sinne von "Abhängigkeit zwischen zwei Größen" bezeichnet werden können. In dieser Form tritt der Funktionsbegriff in der Sekundarstufe I häufig auf (impliziter Funktionsbegriff).



Die Vorteile von Formeln – allgemeiner: von symbolischen Darstellungen - , nämlich die kompakte Darstellung und die Möglichkeit der regelhaften Umformung, sind evident. Dennoch nimmt das algorithmische Arbeiten mit Termen und Gleichungen (insb. das rein mechanische Arbeiten) in österreichischen Schulen einen viel zu hohen Stellenwert ein. (Oft werden viel zu komplexe Terme bearbeitet, wie sie in der Praxis mathematischer Anwendungen nie vorkommen.) Dagegen beschränkt sich das Aufstellen von Formeln meist auf das Lösen von Textgleichungen. Das Interpretieren von Formeln wird kaum als Unterrichtsziel wahrgenommen, empirische Untersuchungen zeigen z. T. gravierende Defizite auf diesem Gebiet.“ (FISCHER/KRONFELLNER, 1999)

Katalog der Kenntnis- und Wissenselemente:

Zahlen und Rechenobjekte

- Eigenschaften, Darstellung und Charakterisierung natürlicher, ganzer, rationaler, irrationaler bzw. reeller und komplexer Zahlen
- Rechenregeln und Zahlenmengen
- Komplexe Zahlen (Darstellungen und Rechenregeln)
- Vektoren und ihre Rechenregeln (Addition, skalare Multiplikation, Skalarprodukt, Vektorprodukt). Vektoren als n-Tupel zur kompakten Darstellung des parallelen Rechnens mit mehreren Größen.
- Matrizen
- Polynome
- Rechenregeln bzw. algebraische Strukturen (Gruppe, Ring, Körper)
- Teilbarkeit, Primfaktoren, Primfaktorzerlegung
- Besondere Zahlen (π, e, i, figurierte Zahlen, ...)

Arithmetik-Numerik

- Stellenwertsystem und Zahldarstellungen
- Periodizität
- Darstellungen von Zahlen in Rechenmaschinen
- Fehlerintervalle, Rechenregeln für Intervalle
- Näherungsverfahren für Nullstellen, Wurzeln, Flächen
- Iterationsverfahren zur Lösung von Differenzen- und Differentialgleichungen

Variable und Formeln

- Aufstellen von Formeln aus Texten und Tabellen
- Aufstellen von Gleichungen und Gleichungssystemen aus Texten
- Formulierung von Folgen und Funktionen aus Texten
- Modellbildung mittels Varablen und Formeln
- Interpretation von Termen, Gleichungen, Folgen, Funktionen

Gleichungen und Ungleichungen

- Formeln als Gleichungen
- Lineare Gleichungen
- Quadratische Gleichungen
- Algebraische Gleichungen höherer Ordnung (Hauptsatz der Algebra)
- Spezielle Gleichungen: Betragsgleichungen, Exponential- und Wurzelgleichungen, logarithmische Gleichungen, goniometrische Gleichungen
- Gleichungen mit komplexen Zahlen
- Lineare Gleichungssysteme
- Nichtlineare Gleichungssysteme
- Charkterisierung von Zahlenmengen (und geometrisch von Strecken, Flächen und Volumina) durch Ungleichungen
- Lineare und nichtlineare Ungleichungen
- Lineare Optimierung

1.2 Geometrie

Die Geometrie tritt im aktuellen Oberstufenlehrplan zumeist indirekt in Erscheinung, v.a. bei den Kapiteln zur analytischen Geometrie, bei der nichtlinearen analytischen Geometrie, weiters im Rahmen der Trigonometrie, einige geometrische Inhalte finden sich auch im Rahmen der Analysis bei geometrischen Optimierungsaufgaben, bei Flächen-, Oberflächen, Volumsberechungen oder Bogenlängen. Schließlich beinhalten auch Elemente der Graphentheorie geometrische Aspekte.

„Die rechnerische Behandlung geometrischer Fragestellungen, aber auch die geometrische Deutung rechnerischer Aufgabenstellungen gehört zu den Kerngebieten der Mathematik der Neuzeit. Der erste Teil hat traditionell einen hohen Stellenwert in der österreichischen Schule (zumindest AHS), der zweite Teil weniger. Die rechnerische Behandlung geometrischer Probleme ist einer der Bereiche, wo Schüler selbständig Lösungswege finden können. Oft werden allerdings komplexe Lösungswege routinisiert (z. B. Abstand windschiefer Geraden mittels Vektorprodukt, Berührbedingung, ...). Kernstoff sollten bestimmte Basiskonzepte und –techniken sein, die längerfristig behalten werden und mit denen kreativ gearbeitet werden kann.“ (FISCHER/KRONFELLNER, 1999)

Katalog der Kenntnis- und Wissenselemente:

Koordinatensysteme

- Kartesisches Koordinatensystem
- Polarkoordinatensystem
- Gaußsche Zahlenebene

Analytische Geometrie

- Darstellungsformen der Geraden (Funktionsdarstellung, implizite Darstellung, Parameterdarstellung, Normalvektordarstellung, Zweipunktform, Abschnittsform)
- Skalares Produkt
- Lagebeziehungen von Geraden
- Darstellungsformen der Ebene (Funktionsdarstellung, implizite Darstellung, Parameterdarstellung, Normalvektordarstellung)
- Lagebeziehungen von Ebenen, von Ebenen und Geraden
- Abstandberechnungen (Punkt - Gerade, Punkt - Ebene, Gerade - Ebene, Ebene - Ebene, Gerade - Gerade)
- Orthogonalität, Parallelität, Winkelberechnungen
- Vektorielles Produkt (Orthogonalität, Flächen- und Rauminhalte, algebraische und geometrische Eigenschaften)
- Kegelschnittskurven (Gleichungen, Tangenten an diese Kurven legen)

Trigonometrie

- Winkelfunktionen (Sinus-, Cosinus-, Tangensfunktion)
- Winkelmaße
- Auflösungsfälle im Dreieck (Sinus- und Cosinussatz)

Differential- und Integralrechnung

- Steigung, Krümmung
- Flächen- und Volumsberechnungen

Kurven

- Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel
- Bogenlänge, Mantelfläche

Graphen

- Knoten-Kanten-Graphen (Gerichteter und ungerichteter Graph, ebener Graph, zusammenhängender Graph, vollständiger Graph, bewerteter und unbewerteter Graph, Wegenetze, Eulersche Linie, Hamiltonsche Linie, Beziehungsdiagramme, Flussdiagramme)
- Netzplan, kritischer Weg, Pufferzeit

1.3 Analysis

Die Analysis-Inhalte ziehen sich wie ein roter Faden durch die Oberstufe: Funktionen („eindeutige" Abhängigkeit zweier Größen), Folgen (Entwicklung in (diskreten) Schritten), Ableitungen (Änderung, Änderungsprozesse) und Integrale (Kumulation, Kumulierungsprozesse) bilden hier die wesentlichen Stichworte.

Allgemeines

- Eigenschaften von Funktionen (Definitions- und Wertemenge, Abbildungseigenschaften, Monotonie, Steigung, Krümmung, Extremstellen, Wendepunkte, Stetigkeit, Symmetrie, Periodizität)
- Parametervariation, Transformation
- Verkettung von Funktionen
- Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes

Einige Grundfunktionen:

- Lineare Funktion (Steigung, Ordinatenabschnitt)
- Quadratische Funktion
- Betragsfunktion, Gaußklammerfunktion, Vorzeichenfunktion, Integerfunktion
- Abschnittweise definierte Funktionen
- Potenzfunktionen (natürliche, ganze, rationale und reelle Exponenten) und entsprechende Rechenregeln
- Polynomfunktionen und rationale Funktionen
- Winkelfunktionen (Zusammenhänge, Additionstheoreme)
- Exponentialfunktionen und entsprechende Rechenregeln
- Logarithmusfunktionen und entsprechende Rechenregeln

Grenzprozesse

- Endliche und unendliche Zahlenfolgen
- Grenzwerte von Zahlenfolgen (Umgebung, Häufungspunkt und Grenzwert)
- Eigenschaften und Charakterisierung von Folgen
- Explizite und rekursive Folgen
- Näherungsverfahren (für Nullstellen, Wurzeln, Flächen)
- Summenfolgen
- Potenzreihen

Differentialrechnung

„Der Differenzenquotient und seine verschiedenen Deutungen sollten im Unterricht einen höheren Stellenwert erhalten als bisher; dieser Begriff ist nicht nur ein notwendiger, möglichst schnell zu überwindender Ausgangspunkt auf dem Weg zum Differentialquotienten. Zum Ausgleich für diese Ausweitung kann bei der Fundierung des Differentialquotienten an Anspruch und Zeit eingespart werden: für den Kernstoffbereich genügt ein anschaulicher Grenzwert"begriff", aufbauend auf der Idee des unbegrenzten Näherns und eine Beschränkung auf Polynomfunktionen. (Differentiationsregeln, die über das Arbeiten mit Polynomfunktionen hinausgehen, verlieren durch Computer und Symbolic Calculation Software an Bedeutung und sind bestenfalls Spezialistenwissen, das den Kernstoffbereich deutlich übersteigt.) Der Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen der Ableitung und dem Monotonieverhalten bildet die Basis für die Ermittlung von (lokalen) Extremstellen (Monotoniewechsel!) und von Kurvenverläufen. Schwerpunkt sollte auf Deutungen (und Bedeutungen) der zugrundeliegenden Begriffe und nicht auf das rein algorithmische Anwenden gelegt werden.“ (FISCHER/KRONFELLNER, 1999)

- Änderungsmaße
- Mittlere und lokale Änderung
- Differenzenquotient und Differentialquotient
- Ableitungsregeln (Ableitung von Summen, Produkten, verketteten Funktionen)
- Ableitungen von Funktionen (Potenz-, Polynom-, rationale, Winkel-, Exponential-, Logarithmusfunktionen)
- Monotonie, Steigung, Krümmung
- Ermittlung von Extrema und Wendepunkten
- Funktionsdiskussion und Funktionen aus Teilinformationen ermitteln
- Optimierungsrechnung

Integralrechnung

„Wie bei der Differentialrechnung sollte auch bei der Integralrechnung dem "präinfinitesimalen Teil des Begriffsbildungsprozesses" mehr Bedeutung beigemessen werden. Anhand der üblichen Problemstellungen aus der Geometrie (Flächeninhalt, Volumina, ggf. auch Bogenlänge) und aus der Physik (Weglänge, Arbeit, ...) kann folgendes Muster herausgearbeitet werden: Wird eine Größe c durch Produktbildung aus zwei anderen Größen a, b erhalten, $c=a\times b$, falls a, b konstant sind, so kann man für den Fall, dass a nicht konstant ist, c näherungsweise durch das "verallgemeinerte Produkt"

$c = a_1 \times \Delta b_1 + a_2 \times \Delta b_2 + ...$

erhalten werden. Im geometrischen Kontext sind dies Summen von Inhalten von (dünnen) Streifen, Scheiben, bzw. von kleinen Strecken. Zur Verbesserung des Näherungswerts kann man mehr (und daher auch dünnere) Streifen, ... nehmen. Führt man diesen Näherungsprozess unbegrenzt fort, gelangt man zum Integral im Sinne einer "unendlichen Summe von unendlich vielen unendlich dünnen Streifen, ...". (FISCHER/KRONFELLNER, 1999)

- Umkehrung der Ableitung („Aufleitung“)
- Rekonstruktionen von Funktionen auf Grund ihrer Änderungsrate
- Berechnung von Flächeninhalten (Unter-, Ober-, Zwischensummen), Flächeninhaltsfunktion
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Flächenberechnungen, Volumsberechnungen, Bogenlängen, Mantelflächen, physikalische Arbeit und Energie
- Numerische Integrationsverfahren
- Riemannscher Integralbegriff

Differenzen- und Differentialgleichungen
- Grundlegende Wachstumsmodelle (linear, exponentiell, begrenzt, logistisch, periodisch, ...)
- Diskrete und kontinuierliche Beschreibung von Wachstumsvorgängen
- Wachstumsmodelle mit einer, mit zwei oder mehreren Zustandsgrößen
- Einfache Differentialgleichungen

1.4 Stochastik

„Die Beschreibende Statistik gehört zu jenen Inhalten des Mathematikunterrichts, bei denen die spätere Verwendbarkeit, sei es in Beruf, Studium oder privat-öffentlichem Leben am wahrscheinlichsten ist. Dementsprechend hat sie bereits beim "Allgemeinwissen" einen hohen Stellenwert. Weil das Erreichen eines hohen diesbezüglichen Standards allerdings noch nicht gesichert ist und weil fortgeschrittenere Konzepte und differenziertere Betrachtungsweisen als Teil weiterführender Bildung sinnvoll erscheinen, wird ein entsprechendes Kapitel auch in diesem Teil vorgeschlagen. Dabei fließen auch neuere Entwicklungen der Wissenschaft ein (Renaissance graphischer Methoden, "Exploratory Data Analysis").“ (FISCHER/KRONFELLNER, 1999)

Katalog der Kenntnis- und Wissenselemente:

Beschreibende Statistik
- Graphische Darstellungsmöglichkeiten für Daten (Histogramme, Kreisdiagramme, Stengel-Blatt-Diagramme, Kastenschaubilder, ...)
- Absolute und relative Häufigkeiten, Häufigkeitsverteilungen
- Zentralmaße wie arithmetisches Mittel, Modalwert, Median
- Streuungsmaße: Spannweite, Quartilen, mittlere absolute und quadratische Abweichung
- Zusammenhang zwischen Merkmalen (Streudiagramme, Regression, Korrelation)

Wahrscheinlichkeitstheorie

- Grundbegriffe wie Zufallsexperiment, Zufallsgerät, Ergebnis, Ereignis, ...
- Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit (Günstige / mögliche Ergebnisse)
- Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil, als relative Häufigkeit und als subjektives Vertrauen
- Graphische Darstellungsmöglichkeiten wie Mengen- oder Baumdiagramm
- Gegenwahrscheinlichkeit, Multiplikationsregel, Additionsregel, totale Wahrscheinlichkeit
- Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Zufallsvariable und ihre Verteilungen, Erwartungswert und Varianz, diskrete und stetige Zufallsvariablen
- Binomialverteilung (Binomialkoeffizient, Erwartungswert und Varianz einer binomialverteilten Zufallsvariablen)
- Normalverteilung (Gaußsche Glockenkurve, Dichtefunktion)

Beurteilende Statistik

- Testen von Hypothesen über relative Anteile (ein- und zweiseitige Anteilstests, Nullhypothese, Gegenhypothese)
- Konfidenzintervalle für relative Anteile

2 Grundvorstellungen

Wir werfen über die Erfahrungswelt ein Netz der Begriffe
und suchen sie darin zu fangen
Frey, 1967

Wie eingangs angedeutet, spielen Begriffe und damit die Begriffsbildung eine besondere Rolle in der Mathematik. Geeignet gefasste Begriffe sind sozusagen das Werkzeug, mit dem die Mathematik gebaut wird. Das Verstehen von Mathematik ist auf das Engste mit dem Verstehen der Begriffsbildungen verbunden. Dieses Verstehen ist in der Regel ein Prozess, in dem verschiedene Stufen identifiziert werden können.

2.1 Stufen des Begriffsverständnisses

In seiner 'Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht' unterscheidet H.-J. VOLLRATH fünf verschiedene Aspekte (Stufen) des Begriffsverständnisses (VOLLRATH, 1984):

• **Intuitives Begriffsverständnis** (Begriff als Phänomen)
- Begriff als Phänomen in der Umwelt und der Mathematik
- Wurzeln des Begriffs in der Umwelt des Schülers
- Welche Bedeutung besitzen Phänomene bei der Genese eines Begriffes?

• **Inhaltliches Begriffsverständnis** (Begriff als Träger von Eigenschaften)
- Erfassen von Eigenschaften in verschiedenen Darstellungen
- Lösen von Problemen mit Hilfe von Eigenschaften

• **Integriertes Begriffsverständnis** (Begriff als Teil eines Begriffsnetzes)
- Erkennen von Zusammenhängen zwischen Funktionseigenschaften
- Aufzeigen von Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen verschiedenen Funktionstypen

• **Formales Begriffsverständnis** (Begriff als formales Objekt)
- Kenntnis verschiedener Definitionen
- Anwendung des Begriffs im Rahmen von Beweisen

• **Strukturelles Begriffsverständnis** (Begriff als strukturierbares Objekt)
- Kenntnis wichtiger Verknüpfungen von Funktionen
- Vorstellung von Verknüpfungen in den entsprechenden Darstellungsformen
- Begründung von Eigenschaften von Verknüpfungen
- Kenntnis der Verknüpfungsgebilde von Funktionen

Seit VOLLRATH 1984 diese Stufenschema zum Begriffslehren im Mathematikunterricht entwickelt hat, wurden für eine Reihe von wesentlichen Begriffen derartige Stufenschemata ausgearbeitet: Zum Funktionsbegriff von VOLLRATH selbst (1984, S.215-216), zum Iterationsbegriff von WEIGAND (1989, S.53-54), zum Folgenbegriff von WEIGAND (1993, S.146-147), zum Begriff Abbildungen von HOLLAND (1996, S.184-188), zum Begriff des Grenzwert von HAYEN (1988, S.72-95), sowie zum Integralbegriff (von Bürger). BÜRGER verfolgt allerdings ein etwas abgewandeltes Stufenschema.

H.-G.WEIGAND gibt in seiner Arbeit „Zum Verständnis von Iterationen im Mathematikunterricht“ (WEIGAND, 1989, a.a.O.) ein Beispiel, wie ein derartiges Stufenschema beim Iterationsbegriff aussehen könnte.

Beispiel 1.1 Ein Stufenschema zum Erwerb des Iterationsbegriffes (Weigand, 1989, S.53-54)

1.Stufe: *Intuitives Begriffsverständnis*

- Die Schüler erleben die Iteration als sukzessives Wiederholen eines Musters, einer Gesetzmäßigkeit oder einer Aktion.
- Sie erkennen die Iteration als eine grundlegende Denkweise bei der Längen, Flächen- und Zeitmessung.
- Mit dem Iterationsbegriff sind Vorstellungen vom konstruktiven Aufbau der natürlichen Zahlenreihe verbunden.
- Die Schüler verwenden iterative Strategien, wie z.B. das systematische Suchen oder das Programmieren von ‚Schleifen‘ zum Lösen von Aufgaben.

2.Stufe: *Inhaltliches Begriffsverständnis*

- Die Schüler kennen Eigenschaften von Iterationsfolgen (Monotonie, Divergenz, Oszillation).
- Sie erkennen die Konvergenz eines Iterationsverfahrens am schließlich konstanten numerischen Verhalten der Iterationswerte.
- Sie können einfache Iterationsverfahren und Einschachtelungsverfahren konstruieren und mit Hilfe rekursiv definierter Folgen darstellen.
- Sie kennen verschiedene Veranschaulichungen von Iterationsfolgen.

3.Stufe: *Integriertes Begriffsverständnis*

- Die Schüler können Iterationsverfahren zum Lösen von Gleichungen konstruieren und mit Hilfe eines Rechners durchführen.
- Sie erkennen die Wechselbeziehung zwischen der Iterationsfunktion, der Iterationsfolge und der Wahl des Startwertes.
- Die Schüler können das konvergente Verhalten einer Iterationsfolge mit Hilfe des Grenzwertbegriffs beschreiben.
- Sie kennen die Iteration als wichtiges Strukturelement eines Algorithmus und unterscheiden zwischen iterativen und rekursiven Prozessen.
- Sie erfassen diskrete Situationen (etwa Wachstumsprozesse) mit Hilfe von Differenzengleichungen.

4. Stufe: *Kritisches Begriffsverständnis*

- Die Schüler können Iterationsverfahren hinsichtlich ihrer Einsatzmöglichkeiten beurteilen.
- Sie können Iterationsverfahren modifizieren und optimieren.
- Sie können Fehlerabschätzungen bei Iterationsverfahren durchführen.
- Sie kennen die Bedeutung von Intervallschachtelungen für die Existenz und Eindeutigkeit bei

der Zahlenbereichserweiterung.

5. Stufe: *Formales Begriffsverständnis*

- Die Schüler kennen die Begriffe kontrahierende Abbildung, abstoßender und anziehender Fixpunkt.
- Sie kennen den Fixpunktsatz und können Konvergenzbeweise für Iterationsverfahren führen.
- Sie kennen Eigenschaften der Iterierten von Funktionen.
- Sie können Beweise mit Hilfe der Vollständigen Induktion führen.
- Sie kennen numerische Lösungsverfahren von Differentialgleichungen und können explizite Lösungen von Differenzengleichungen gewinnen.

2.2 Begriffe gehen mit Vorstellungen einher

Jeder mathematische Begriff als *elementare Einheit einer mathematischen Theorie* ist stets mit intuitiven Vorstellungen und Begleitvorstellungen auf Seiten des Lernenden bzw. ganz allgemein auf Seiten des Mathematik Treibenden verbunden. (E.FISCHBEIN, R.V.HOFE). Mathematisches Denken ohne Vorstellungen gibt es nicht. „Im günstigsten Fall können solche Vorstellungen das mathematische Denken positiv beeinflussen. Sie können jedoch auch in die Irre führen, wenn sie sich als Fehlvorstellungen verfestigen und ein tragfähiges Begriffsverständnis verhindern". (R.V.HOFE, 1996). Für das Mathematiklernen stellt sich daher die Frage, „wie man mit diesem intuitiven Denken umgeht, ob man etwa annimmt, dass sich adäquate Vorstellungen bei einem angemessenen formalen Umgang mit Mathematik von selbst einstellen, oder ob man die Ausbildung von Grundvorstellungen bewußt begleitet und fördert" (R.V.HOFE, a.a.O)

Dieser Ansatz hat den Vorteil, das er eine Sensibilisierung des Lehrers für Denkprozesse seiner Schüler bewirkt: Verständigungsprobleme zwischen Schülern und Lehrern haben im wesentlichen ihre Ursache darin, dass mathematische Begriffe und Symbole vom Schüler oft anders gedeutet werden, als es im Sinne des Lehrers adäquat wäre. Weiters besteht die berechtigte Hoffnung, dass es zu einem behutsameren Umgang mit Schülerfehlern kommt.

2.3 Aufbau von Grundvorstellungen

Wenn wir davon ausgehen, dass Begriffe die „Bausteine" jeder mathematischen Theorie bilden (z.B. der Begriff der Teilbarkeit als Baustein für weite Bereiche der Zahlentheorie oder der Begriff der Funktion als Baustein der Analysis), so kommt gerade in einem CAS-unterstützten Mathematikunterricht dem Erwerb von Begriffen und der Ausbildung tragfähiger Grundvorstellungen eine besondere Bedeutung zu. CAS sind nicht nur vielseitige Werkzeuge, die einerseits leicht durchschaubare, aber rechenaufwendige Umformungen und Verfahren übernehmen, andererseits insbesondere durch ihre Darstellungsmöglichkeiten in effektiver Weise die Begriffsbildung unterstützen. Darüber hinaus können sie durch Anregung von Denkprozessen zur Festigung von Grundvorstellungen beitragen.

Wenn es durch CAS zu einer Verlagerung von „Handkalkülkompetenzen" hin zu „Strategie-kompetenzen" kommt, muss auf die Entwicklung entsprechend tragfähiger Grundvorstellungen stärker geachtet werden. Grundvorstellungen sind die *Träger der Bedeutung* des mathematischen Inhalts und repräsentieren für das Individuum den *Kern* des Inhalts (W.BLUM/B.WIEGAND, 1998, S 30). So gesehen machen Grundvorstellungen Inhalte erst *anwendbar*. (G.MALLE).

Im Unterricht treten häufig Iterationen auf. Iterationen sind ein wesentliches Werkzeug der Mathematik, nicht nur seit Entwicklung der Systemdynamik mit ihren Simulationsmodellen. Sie sind allgegenwärtig, bereits beim babylonischen Wurzelziehen oder der Exhaustionmethoden des Archimedes treten sie auf. So wichtig iterative Prozesse in der Mathematik also sind, so wenig werden sie im Unterricht thematisiert. Gerade hier ist es wichtig, mit den Schülern eine entsprechende Grundvorstellung zu entwickeln. Das Konzept der Grundvorstellungen kann zum Verstehen dessen beitragen, was im Mathematikunterricht „Thema ist". Schüler wollen verstehen, zu oft ist der Unterricht deswegen wenig ertragreich, weil dieses *Verstehen-Wollen* zu wenig beachtet wird, den Schülern zu wenig Anhaltspunkte geliefert werden, die angebotenen Inhalte mit Bedeutung zu erfüllen. Wer den *Kern der Sache* erkennt, braucht sich außerdem um die Fülle der Einzelheiten nicht allzu große Sorgen machen.

Beispiel 1.2 Eine Grundvorstellung für die Iteration

Die Iteration ist dadurch gekennzeichnet, dass - ausgehend von einem Anfangszustand - durch Anwendung stets derselben Handlung (Aktion) neue Zustände entstehen und ein System dadurch eine zeitliche Entwicklung durchläuft.

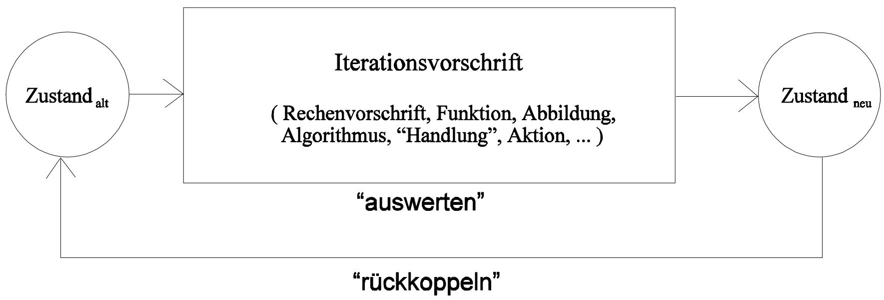


Abb.1.1: *Grundvorstellung der Iteration als zyklische Maschine*

Derartige Diagramme lassen sich in verschiedenen Zusammenhängen finden (z.B. ZEITLER/NEIDHARDT 1993, PEITGEN/JÜRGENS/SAUPE, 1992). Einigermaßen systematisch werden sie bereits bei PEITGEN u.a. verwendet, wo etwa die „Ein-Schritt-Rückkoppelungs-Maschine", „Zwei-Schritt-Rückkoppelungs-Maschine" oder „Rückkoppelungs-Maschine mit Glückrad" besprochen wird (a.a.O., S.36 ff)

Im Folgenden soll uns diese Vorstellung einer zyklisch arbeitenden Maschine als *die* Grundvorstellung beim Umgang mit dem Begriff der Iteration dienen. Da Iterationen sehr oft im Zusammenhang mit Algorithmen auftreten werden, ist es erforderlich, dieses Bild noch etwas genauer zu fassen:

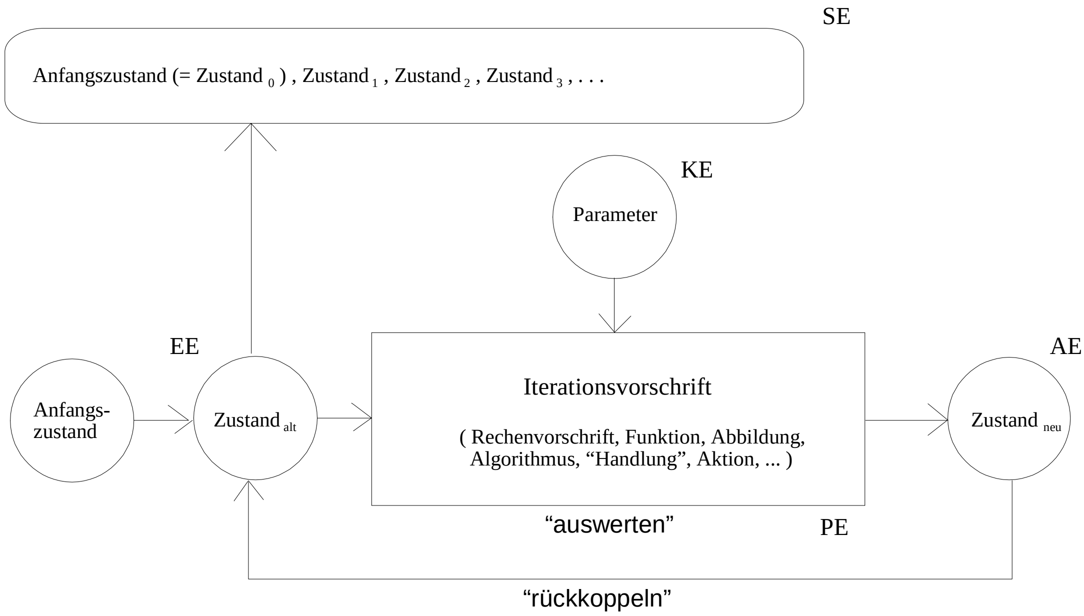


Abb.1.2: *Die Teile der zyklischen Maschine*

PE...Prozessoreinheit	KE...Kontrolleinheit	SE...Sammeleinheit
EE...Eingabeeinheit	AE...Ausgabeeinheit	

Das Typische und m.E. Wesentliche an der Iteration ist ihr zyklischer Verlauf, der sich durch drei Punkte charakterisieren lässt:

- Ein Prozessoreinheit verändert einen vorliegenden Zustand, Gesteuert wird er dabei durch eine Iterationsvorschrift. „Prozessor“ ist hier sehr weit zu sehen: das kann ein Taschenrechner oder ein Computer sein, der stets nach dem gleichen Algorithmus eine Berechnung durchführt, aber auch ein Schüler der nach der gleichen Formel immer wieder dieselben Auswertungen vornimmt.

- Der neue Zustand wird durch Rückkoppelung zum alten Zustand, d.h. er wird neuerlich der Auswertung durch die Iterationsvorschrift unterworfen u.s.f.. Um eine Rückkopplung überhaupt zu ermöglichen, müssen alter und neuer Zustand in ihrer Struktur übereinstimmen.

- Die durch diesen Prozess erzeugten Daten müssen gesammelt und dargestellt werden, um die Iteration nutzbar zu machen und die Ergebnisse interpretieren zu können.

Prozess und Produkt, lokale und globale Sichtweise

Die gesammelten Zustände, die die Iteration erzeugt, sind das Produkt, an dem man bei der Iteration interessiert ist. Wir können daher eine prozesshafte und eine produkthafte Seite unterscheiden.

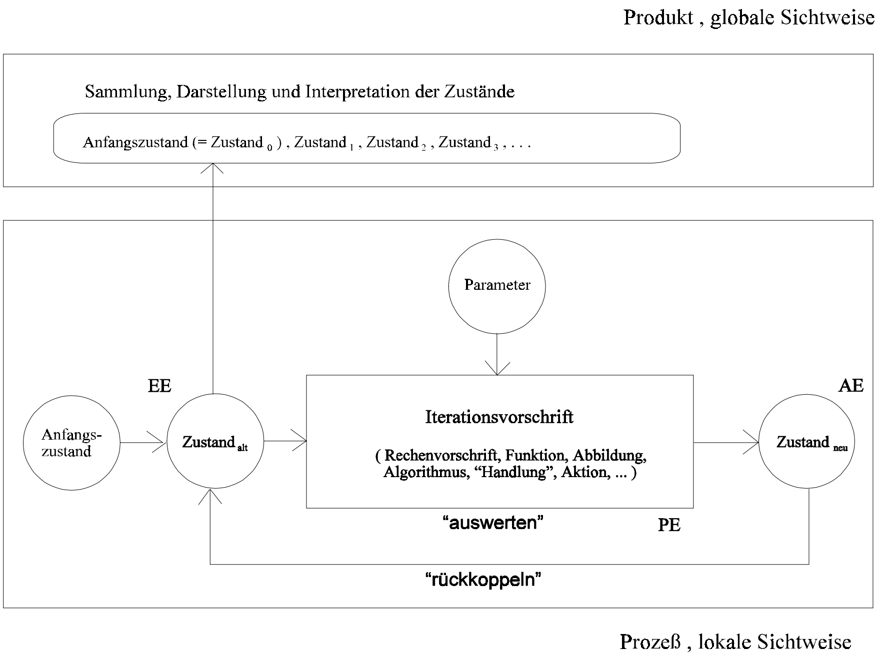


Abb.1.3: *Iterationsprozess und Iterationsprodukt*

Das Schöne bei der Iteration ist der Umstand, dass es genügt, „von einem Schritt zum nächsten zu denken“. Diese lokale Beschreibung (des Iterationsprozesses) enthält dann implizit die globale Sicht (das gesamte „Szenario“). Die lokale Betrachtungsweise impliziert also die lokale, die Sicht auf das Ganze. Denken wir nur an ein einfaches Schuldtilgungsbeispiel: es genügt (bei iterativer Vorgangsweise), wenn man nur angibt, wieviel an Zinsen pro Jahr hinzukommen und wie groß die abzuziehende Annuität ist. Um eine Gesamtsicht zu bekommen, müssen wir die Iteration ‚laufen lassen‘ und die Ergebnisse interpretieren. Dazu können uns die verschiedenen Darstellungsformen für die Ergebnisse der Iteration (also zumeist eine Liste oder Tabelle von Werten) helfen.

3 Grundtätigkeiten

Mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten äußern sich darin, dass eine Schülerin oder ein Schüler gewisse Aktivitäten ausführen kann, die als Ausprägung dieser Fähigkeiten angesehen werden können. (BÜRGER in FISCHER/MALLE, 1985, S.281) Diese Aktivitäten können sehr vielfältig sein, z.B. eine außermathematische Situation durch ein mathematisches Modell beschreiben, mathematische Kalküle anwenden können, Sachverhalte mit mathematischen Argumenten begründen können oder etwa in neuartigen Problemstellungen kreativ heuristische Techniken einsetzen können.

Eine Analyse der für ein produktives mathematisches Arbeiten erforderlichen Fertigkeiten und Fähigkeiten zeigt, dass diese zumindest vier Aktivitätsbereichen (Qualitäten) zugeordnet werden können. Das Bearbeiten von mathematischen Aufgaben und Problemstellungen ist ein komplexer Vorgang, der in der Regel eine Vielfalt an Tätigkeiten erfordert. Es liegt auf der Hand, dass eine Aufgaben- oder Problemstellung (je nach Grad der Bearbeitung und Routine liegt ersteres oder zweiteres vor), umso anspruchsvoller ist, je mehr und je verschiedenartiger die zur Bearbeitung notwendigen Aktivitäten sind.

Für die Lehrenden ist es wichtig, zwischen den einzelnen Tätigkeitsbereichen klar differenzieren zu können. Oft wird es (etwa in der Unterrichtssituation, aber durchaus auch in der Leistungsbeurteilung) günstig sein, nicht zu viele unterschiedliche Aktivitäten bei einer Aufgabe zu verlangen. Wichtig und wünschenswert ist es aber, in der Unterrichtssituation und damit auch in der Leistungsbeurteilung insgesamt eine *ausgewogene Mischung* aller vier im folgenden beschriebenen Tätigkeitsbereiche zu finden.

Im Anschluss an die Skizzierung der einzelnen Tätigkeitsbereiche wird kurz versucht, die Rolle, die neuen Technologien innerhalb des besprochenen Bereiches zukommt bzw. zukommen könnte, anzudeuten.

3.1 Darstellend-interpretierendes Arbeiten

So fängt denn alle menschliche Erkenntnis
mit Anschauungen an,
geht von da zu Begriffen,
und endigt mit Ideen.
Immanuel Kant (1724-1804, Kritik der reinen Vernunft)

Dieser Tätigkeitsbereich ist - insbesondere in der österreichischen didaktischen Literatur - sehr gut beschrieben (siehe etwa BÜRGER, 1981).

3.1.1 Begriffsdefinition

Darstellend-interpretierendes Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit dem *Übersetzungsprozess* von Situationen, Zuständen und Prozessen aus der *Alltagssprache in die Sprache der Mathematik* und auch *wieder zurück* im weitesten Sinne zu tun haben.

Dieser Tätigkeitsbereich umfasst aber auch alle Aktivitäten, die mit der *Übersetzung einer Darstellung* in eine *andere innerhalb der Mathematik* zu tun haben.

Dazu gehören etwa:

- Erstellen von mathematischen Modellen außermathematischer Situationen, Zustände oder Prozesse
- Sachverhalte in eine andere Darstellung (in eine andere „Sprache“) übersetzen (z.B. Realität <-> Modell, Algebra <-> Geometrie, Term <-> Graphik, ...)
- verbales Beschreiben mathematischer Sachverhalte
- Beschreiben von Sachverhalten durch Wortformeln
- formales Beschreiben von Sachverhalten
- graphisches Darstellen von Sachverhalten
- Darstellen mit Hilfe von Computeralgebra-Systemen und
  anderen mathematischen Arbeitsumgebungen
- Erstellen von Scripts in mathematischen Umgebungen
- Programmieren von Modulen
- Zwischen verschiedenen Notationen übersetzen können (z.B. Schreibweisen bei Differentialrechnung, Notation im Heft und im verwendeten Werkzeug, ...)
- schematisches Darstellen von Sachverhalten
- Mathematische Aussagen in Bezug auf Inhalt, Bedeutung, Konsequenzen, ... beschreiben
- Mathematische Begriffe hinsichtlich Inhalt, Bedeutung, „Grundvorstellungen“, ... beschreiben
- Übersetzen von Darstellungen in andere Darstellungen oder Beschreibungen
- Beschreiben geometrischer Sachverhalte mit algebraischen Mitteln
- geometrisch-zeichnerisches Darstellen von Objekten, speziell von räumlichen Objekten
- Darstellen statistischer Daten durch Diagramme
- Beschriebene Sachverhalte und Zusammenhänge verständlich und „handfest“ verdeutlichen und begründen können.
- Vorgegebene Lösungsstrategien / Lösungsdarstellungen oder Rechenergebnisse interpretieren und analysieren

- Veranschaulichen von Rechenergebnissen durch Graphiken
- Veranschaulichen von allgemeinen Zusammenhängen mit konkreten numerischen Daten
- Formulieren mathematischer Sachverhalte
- Exemplifizieren von Rechenschritten
- Interpretieren von Rechenergebnissen
- Interpretieren von formalen Darstellungen
- Interpretieren mathematischer Modelle
- Interpretieren graphischer Darstellungen
- Testen von Modulen
- Testen von Zwischenschritten und Ergebnissen

Wenn wir Mathematik neben der Muttersprache und den Fremdsprachen als eine dritte Form der Sprache - mit einer eigenen Grammatik (den Rechenregeln und Konstruktionsvorschriften) und einem spezifischen Vokabular (den Zahlen, Variablen, Gleichungen, Funktionen, Vektoren, Matrizen u.s.f.) - betrachten, dann erscheint Darstellen und Interpretieren als Übersetzung bzw. Rückübersetzung in und von dieser Sprache in die Alltagssprache. Durch diese Übersetzung machen wir ein Problem zugänglich für den ungeheuren Vorrat an Verfahren, Techniken, Methoden und Lösungsstrategien, den die Mathematik für solche Situationen und Prozesse bereitstellt, für die eine derartige Übersetzung möglich ist bzw. glückt. R.FISCHER (FISCHER, 1996, S.42) ‚definiert' Mathematik kurz und bündig als:

Mathematik = Darstellen + Operieren + Interpretieren.

Wie können CAS bei diesem Übersetzungsprozess helfen? Nun: einerseits wird er schwieriger, da zum ÜbersetzungsProzess von der Problemstellung in die mathematische Sprache noch der in die mathematische Arbeitsumgebung des CAS hinzukommt, andererseits gewinnen wir aber dadurch einen (einfachen) Zugang zu einer Fülle an verschiedenen Darstellungsformen, die uns bei der Bearbeitung und v.a. bei der Interpretation unserer Ergebnisse hilfreich sein können.

3.1.2 Technologieeinsatz beim darstellend-interpretierenden Arbeiten

Der Einsatz mathematischer Arbeitsumgebungen (MAU) - als Überbegriff für die verschiedensten Computeralgebra-Systeme (CAS), dynamischen Geometriesoftware-Produkte (DGS) sowie Tabellenkalkulationen (TK) und weiterer Spezialprogramme verwendet (siehe Kapitel: „Technologien für den Mathematikunterricht) - liegt hier primär in ihrer Rolle als **Visualisierungswerkzeuge**. „Während Visualisierung ohne Technologie oft aufwendig ist und auch mit erheblichen Rechenaufwand verbunden ist, unterstützt der leichtere Zugang zu graphischen Darstellungen das mathematische Verständnis und erleichtert auch die Interpretation praktischer Ergebnisse" (HEUGL, 1999, S.4). In der einschlägigen Literatur werden eine Reihe weiterer Einsatzformen angegeben, die hier einzuordnen sind, wie z.B. CAS als Graphikwerkzeug, als geometrisches Werkzeug, als Funktionenlupe, als Modellierwerkzeug, als Maschine zum Ausführen von Simulationen.

3.1.3 Beispiele für darstellend-interpretierendes Arbeiten

Beispiel 1.3 *Begrenztes Wachstum - Gib eine verbale, eine systemische und eine formale Darstellung begrenzten Wachstums an!*

(a) Verbale Darstellung

Wachstum um einen festen Anteil der Differenz zwischen einer Wachstumsgrenze und dem aktuellen Bestand (Wachstum proportional zum „Freiraum", zur „Restkapazität").

oder

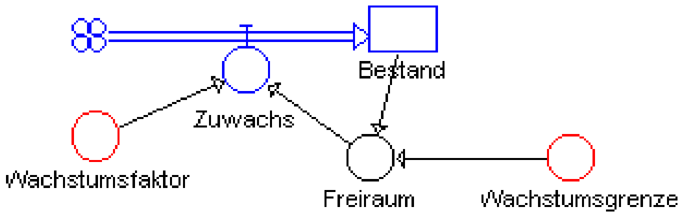
Ein Wachstum, bei dem die Änderungsrate proportional zum Freiraum ist, heißt beschränktes Wachstum.

oder

neuer Bestand = alter Bestand + Zuwachs und:

der Zuwachs ist proportional zum jeweils letzten Freiraum.

(b) Systemische Darstellung des begrenzten Wachstums (Flußdiagramm)!



(c) Formale Beschreibung

α) Diskretes Modell

$y_{n+1} - y_n = k.(G - y_n) \qquad k = k_{disk} \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow$ Iterationsformel $\boxed{y_{n+1} = y_n + k.(G - y_n)}$

G=Sättigungsgrenze

$$y_1 = y_0 + k.(G - y_0) = y_0 - k.y_0 + k.G = y_0.(1-k) + k.G = a.y_0 + b \;(\; a = 1-k, \quad b = kG\;)$$

$$y_2 = a.y_1 + b = a.(a.y_0 + b) + b = a^2.y_0 + ab + b$$

$$y_3 = a.y_2 + b = a.(a^2.y_0 + ab + b) + b = a^3.y_0 + a^2b + ab + b$$

....

$\boxed{y_n = a^n.y_0 + b\frac{1-a^n}{1-a} = a^n.(y_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}}$ Lösung der Differenzengleichung $y_{n+1} = ay_n + b$

Nach einer Rücksubstitution ergibt sich:

$$y_n = (1-k)^n.(y_0 - \frac{kG}{1-(1-k)}) + \frac{kG}{1-(1-k)} = (1-k)^n.(y_0 - G) + G = G + (y_0 - G).(1-k)^n =$$

$$y_n = G + (y_0 - G).e^{\ln(1-k).n} \qquad \boxed{y_n = G + (y_0 - G).(1-k)^n}$$

β) Kontinuierliches Modell

$$\frac{dy}{dt} = k.(G-y) \qquad k_{kont} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{dy}{G-y} = k.dt$$

$$\int \frac{dy}{G-y} = \int k.dt$$

$$-\ln|G-y| = k.t + c$$

$$|G-y| = e^{-kt-c} = e^{-kt}.e^{-c}$$

$$\text{wegen} \quad e^{-kt}.e^{-c} > 0 \text{ und } G - y(0) = e^{-c}.1$$

$$G - y = (G - y(0)).e^{-kx}$$

$$\boxed{y(t) = G + (y_0 - G).e^{-kt}}$$

Das bewußte Bemühen, ein und den selben Prozess aus verschiedenen Blickwinkeln heraus zu betrachten, kann auch ein Licht darauf werfen, dass uns durch die Existenz von CAS zunehmend das Operieren abgenommen wird. Das heisst aber andererseits nicht, dass die Beschäftigung oder das Erlernen von Verfahren, Methoden, Techniken bedeutungslos wird. Es bieten sich aber eine Reihe von Chancen:

Wir können nun im Unterricht der Neugewichtung der Fertigkeiten und Fähigkeiten eher gerecht werden: Der Lehrplan der Unter- als auch der Oberstufe betont das „Darstellen“ als explizites Unterrichtsziel. Ein Argument für diese Neugewichtung liegt auf der Hand, meint R.FISCHER (1996, S.43): „Das Umformen, das Abarbeiten von Symbolfolgen, ist nicht mehr so wichtig. Auch nicht die Konzentration auf eine Darstellungsform. Paralleles Betrachten verschiedener Darstellungsformen ist oft vernünftig. Und eben das Hervorheben des Darstellungsaspektes, man will etwas zeigen, mitteilen, durch mit subjektiver Betonung bestimmter Aspekte. Herr Otte hat einmal gesagt, die Mathematik vor und nach dem Computer verhält sich wie die Malerei vor und nach der Erfindung der Photographie.

Die Entwicklung geht aber über das kreative Handhaben verschiedener Darstellungsformen hinaus. Es schließt das Erfinden neuer Darstellungsformen ein. Zu beobachten sind derartige Entwicklungen insbesondere in der Informatik: Neue Programmiersprachen, neue »Benutzeroberflächen«, neue Visualisierungen werden ständig produziert. Und es geht dabei um die Frage: Für welches Problem ist welche Darstellungsform geeignet? Eine Frage, der im Mathematikunterricht derzeit kaum systematisch nachgegangen wird.

Darstellungen sind nicht nur die Basis für jedwedes Operieren in der Mathematik (v.a. natürlich formale Darstellungen), sie werfen oft auch neue Fragen auf. Dadurch werden sie zu einem entscheidenden heuristischen Hilfsmittel. Geschickt eingesetzt ermöglichen sie es auch, Zusammenhänge herzustellen, die zwar da sind, aber dennoch nicht immer gesehen werden.

Gewissermaßen als die Umkehrung des Darstellens kann das Interpretieren gesehen werden. Interpretieren heisst einerseits die in der Mathematik auftretenden Darstellungen mit Bedeutung zu unterlegen und andererseits mathematische Lösungen dem Ausgangskontext gegenüber zu stellen. Eine tpyische Aufgabenstellung zum Thema Interpretieren ist folgendes

Beispiel 1.4 Interpretation des Differenzen- und des Differentialquotienten

Für den Luftdruck *p(h)* in der Höhe *h* über dem Meeresniveau gilt:

a) $\frac{\Delta p(h)}{\Delta h} \approx -k \cdot p(h)$

b) $\frac{dp(h)}{dh} = -k \cdot p(h)$

($k \in \mathbb{R}^+$ konstant)

3.1.4 Darstellend-interpretierendes Arbeiten und der semantische Bereich

Der darstellend-interpretative Arbeitsbereich besitzt eine besondere Affinität zu den Grundvorstellungen und damit zum semantischen Bereich der Mathematik. Einerseits *erzeugt Darstellen Bedeutung*, andererseits wird beim *Interpretieren* einem mathematischen Sachverhalt, einer mathematischen Lösung *Bedeutung zugeordnet*. Dies ist wiederum nur möglich, wenn auf das Problem bezogene Vorstellungen über die mathematischen Zeichen, Symbole und Konstrukte vorhanden sind. Sehr oft wird im Unterricht leider auf diese semantische Dimension der Sprache Mathematik zu wenig Bedacht genommen. CAS und andere Software-Werkzeuge können hier einen wichtigen Beitrag zu einem verbesserten Verständnis mathematischer Begriffe leisten.

3.2 Formal-operatives Arbeiten

Denn es ist denkender Menschen unwürdig,
gleich Sklaven Stunden zu verbringen mit Berechnungen
Leibnitz

Der Bogen dieser Tätigkeitsklasse spannt sich von den Grundrechenarten bis hin zu Integrationstechniken, von der Bestimmung des GGT bis zur Faktorisierung von Polynomen. Hier sind also die mehr oder weniger algorithmisierbaren („kalkülhaften“) Anteile der Mathematik gemeint. Solche also, die schematisierbar sind und sich oft modulhaft zusammenfassen lassen.

3.2.1 Begriffsdefinition

Formal-operatives Arbeiten umfasst alle *kalkülmäßigen* und *algorithmischen* Aktivitäten, die im Mathematikunterricht vermittelt werden (sollen).

Dieser Tätigkeitsbereich umfasst alle Aktivitäten, die mit der *Anwendung von Verfahren, Rechenmethoden, Techniken u.s.f.* zu tun haben.

Zu den formal-operativen Aktivitäten sind etwa folgende zu zählen:

- Umformungen durchführen
- Umformungsschritte erläutern, Rechenregeln dazu angeben können
- die Sprache der elementaren Algebra beherrschen
- Gleichungen lösen können
- mit funktionalen Darstellungen arbeiten können
- geometrische Konstruktionen durchführen können
- algebraische Umformungen durchführen können
- Graphen und Netze bearbeiten können
- statistische Kenngrößen ermitteln
- statistische Test durchführen
- Verfahren ausführen, „abspulen“
- Lösungsstrategien angeben können
- Techniken anwenden
- Methoden einsetzen können
- Module verwenden
- Modulsammlungen für ein Teilgebiet erstellen
- Algorithmen abarbeiten
- Algorithmen erstellen (z.B. Eudkid. Alg., Divisionsalg.)
- Fallunterscheidungen in Struktogrammen sichtbar machen
- Scripts (z.B. für Kurvendiskussionen) erstellen
- Mit Rechenwerkzeugen umgehen können

- Systeme (CAS) nutzen
- Schematisch vorgehen, „Schemata“ einsetzen
- „Rezepte“ verwenden
- Kalkülhaft arbeiten
- Operationen durchführen

Für viele Leute - insbesondere Nichtmathematiker - wird dieser Tätitgkeitsbereich als der alleinige Arbeitsbereich von Mathematikern angesehen, auch R.FISCHER weist darauf hin: „Mathematik wird von vielen Menschen mit Rechnen identifiziert. Hat man ein genügend weites Verständnis von Rechnen, so kann man damit schon einen großen Teil von Mathematik erfassen. Wenn man insbesondere das Umformen von Formeln, das Lösen von Gleichungen, das Aufbauen einer deduktiven Schlußkette als Rechnen im weiteren Sinn bezeichnet, ist damit tatsächlich sehr viel an Mathematik abgedeckt Wir möchten diesen Aspekt, das verallgemeinerte Rechnen sozusagen, als *regelhaftes Operieren* bezeichen.“ (Fischer, Malle 1985, S.221)

3.2.2 Technologieeinsatz beim formal-operativen Arbeiten

Der Einsatz der MAU liegt hier primär in ihrer Rolle als **Rechenwerkzeuge**. In der Möglichkeit, formal-operatives Arbeiten zu erleichtern, besteht nach Meinung vieler Mathematiker die große Stärke von CAS. B.BUCHBERGER schreibt dazu etwa: „Zusammenfassend und etwas plakativ kann man sagen, dass die heutigen universellen mathematischen Softwaresysteme mit symbolischen Kern für alle Probleme, die in der Gymnasialmathematik und in den mathematischen Einführungsvorlesungen an den Universitäten behandelt werden, Algorithmen anbieten. Darüber hinaus gibt es aber spezielle symbolische Softwaresysteme, deren algorithmische Problemlösungen weit über die Mathematik der Einführungsvorlesungen hinausgehen.“ (RECHENBERG, POMBERGER, 1997, S.804).

Der Einsatz des Rechenwerkzeuges kann viele Aspekte aufweisen, einige wichtige sind: MAU als Hilfsmittel zum Ausführen von Kalkülen, etwa als arithmetisches Hilfsmittel, als numerisches Werkzeug oder als Hilfsmittel zum Ausführen symbolischer Operationen Der große Fortschritt eines CAS zeigt sich ja gerade dadurch, dass auch mit Symbolen algebraische Umformungen möglich werden. Dies ist Grundvoraussetzung für das allgemeine Lösen von Gleichungen, das Bestimmen von Ableitungen und unbestimmten Integralen oder das Lösen von Differentialgleichungen.

Nicht vergessen werden soll hier auch der Einsatz als Werkzeug zum Bearbeiten logischer Kalküle, als algorithmisches Werkzeug oder als Programmiersprache.

3.2.3 Beispiele für formal-operatives Arbeiten

Kalküle auszulagern, ohne sie zu beherrschen und insbesondere ohne sie verstanden zu haben, ist sinnlos. Sie bleiben dann ausgelagert (besser: abgelagert), da sie nicht verwendet werden können, da das nötige Wissen im Umgang mit ihnen einfach fehlt. Einen wesentlichen Schritt zu einer konstruktiven Nutzung der operativen Stärke von CAS liegt in der

• Chance, die Kalküle (= Algorithmen) besser zu verstehen.

• Zusammenhänge und Analogien zwischen Algorithmen zu erkennen.

• Chance, mit den Möglichkeiten des CAS vorhandene Grenzen des CAS zu überschreiten

• Chance beim Nutzen mathematischer Kalküle im Rahmen eines erweiterten (vollständigen) mathematischen Problemlöseprozesses.

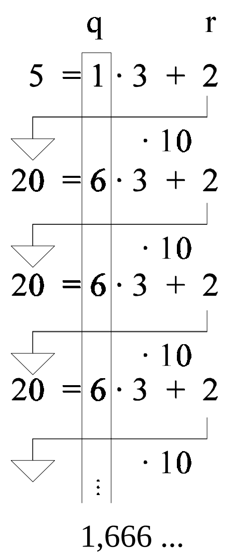
Beispiel 1.5 Divisionsalgorithmus am TI92/89

Erkläre, was bei der Division von 5 : 3 genau *gemacht wird und entwickle daraus einen Divisionsalgorithmus, der es ermöglicht am TI92/89 auf beliebig viele Stelle zu dividieren (Hinweis: nomalerweise kann der TI92/89 nur auf maximal 12 Stellen genau rechnen).*

Oft wird in der Schule beim Dividieren sehr gedankenlos vorgegangen und blind der Divisionsalgorithmus abgearbeitet. Wenn man fragt, warum dies gerade so ausgeführt werden muß, erhält man Antworten wie: „Weil wir dies so in der ersten Klasse gelernt haben“ oder „Weil das Richtige herauskommt (und dies auch mittels Probe gezeigt werden kann)“. Kaum je wird dabei bewußt die Division mit Rest angesprochen.

Was tun wir, wenn wir dividieren?

5 : 3 = 1, 6 6 6 ....
20
 20
  20
   .....



Stellen wir diesen Prozess in Form eines Iterationsdiagramms dar. Was geschieht beim Dividieren: wir multiplizieren den Rest bei ganzzahliger Division mit 10 und machen ihn zum neuen Dividenden (Abb.1.4).

Hinweis: Da sich der Divisor nicht ändert, ist er im Diagramm als Parameter, der den Auswertevorgang steuert, dargestellt und nicht als Eingabewert.

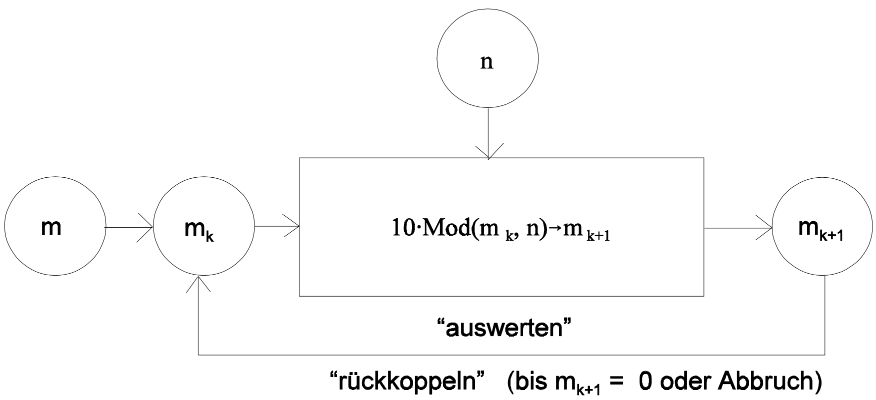


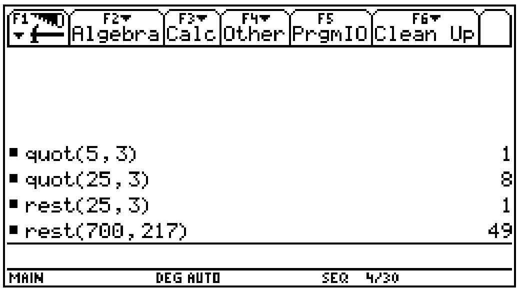
Abb.1.4: *Division mit beliebiger Stellenzahl*

Da nun der Quotient und der Rest bei der ganzzahligen Division auf Subtraktionen zurückgeführt werden kann, kommt der gesamte Algorithmus letztlich mit Subtraktionen aus. Es zeigte sich, dass die Entwicklung und Implementation dieses Algorithmus‘ für Schüler besonders motivierend ist, da sie hier ein wenig von der Kraft „mathematisch-algorithmischen Denkens“ verspüren können.

Um auf dieser ganz elementare Stufe zu beginnen, ist es notwendig, zuerst TI-Funktionen für den Quotienten und den Rest zu schreiben:

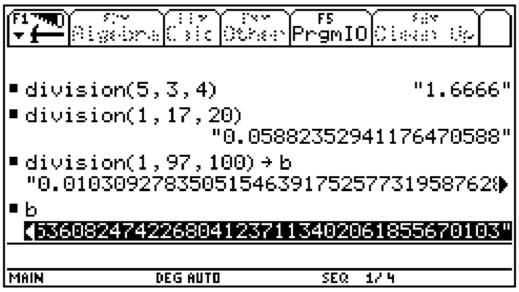
```
Quot(m,n)
Func
Local  q
Ø→q
While  m≥n
  q+1→q
  m-n→m
EndWhile
```

```
Rest(m,n)
Func
While  m≥n
  m-n→m
EndWhile
```



Damit steht der Divisionsfunktion nichts mehr im Wege:

```
Division(m,n,st)
Func
Local q,mk,qstr,i
Ø→i:st+1→st:m →mk
While m≠Ø and i<st
  i+1→i:quot(mk,n)→q:1Ø*rest(mk,n)→mk
  If i=1 Then
     string(q)&"."→qstr
  Else
     qstr&string(q)→qstr
  EndIf
EndWhile
qstr
EndFunc
```



Die Entwicklung von Algorithmen war ursprünglich eine rein mathematische Angelegenheit. In letzter Zeit wird sie zunehmend der Informatik überlassen. Dies ist nicht weiter tragisch, wenn man die Informatik als ein „Kind der Mathematik“ betrachtet. Nur sieht sich diese nicht immer so. Algorithmisches Denken sollte aber dennoch primär in der Mathematik und im MU gepflegt werden, weil dadurch viel an Verständnis für Verfahren und Methoden gewonnen werden kann.

Natürlich bieten sich hier wunderbare Gelegenheiten und Möglichkeiten für einen fächerverbindenden und fächerübergreifenden Unterricht Mathematik-Informatik. Und wenn ein Schüler überdies funktional, rekursiv und prozedural zu denken gelernt hat, hat er sehr viel erreicht - v.a. auch für die Mathematik!

CAS bietet aber über die Aufklärung von in Schule verwendeten Algorithmen hinaus auch Chancen beim Nutzen mathematischer Kalküle im Rahmen eines (erweiterten - besser gesagt: vollständigen) mathematischen Problemlöseprozesses. Als *vollständiger mathematischer Problemlöseprozess* soll ein solcher gelten, bei dem nicht allein auf das Operieren reduziert wird. Bekannte oder aufwendige Kalküle (wie im folgenden Beispiel das Lösen eines größeren Gleichungssystems) können im Rahmen einer Problemlösung modulhaft eingesetzt werden.

Beispiel 1.6 Umgekehrte Kurvendiskussion

Die Gleichung

$$v(t) = \begin{cases} \dfrac{3t^2}{80} - \dfrac{t^3}{1600} & \text{\textit{für} } 0 \le t \le 40 \\ 10 - 10 \cdot \cos\left(\dfrac{t \cdot \pi}{40}\right) & \text{\textit{für} } 40 < t \le t_{\max} \end{cases} \qquad \text{(v in m/s)}$$

beschreibt annähernd den Geschwindigkeitsverlauf bei einer Fahrt mit der Wiener U-Bahnlinie 2 zwischen den Stationen Schottenring und Universität. (Zur Zeit t_{max} ist die U-Bahngarnitur in der Station Universität wieder zum Stillstand gekommen).

a) Wann erreicht die U-Bahngarnitur ihre größte Geschwindigkeit? Wie groß ist sie?

b) Zwischen den Stationen Schottentor und Schottenring ist die erreichte Höchstgeschwindigkeit um 25% geringer (als bei a)). Gib mit Hilfe eines Polynoms 4.Grades die Geschwindigkeitsfunktion derart an, daß bei gleicher Fahrzeit wie oben wieder zur gleichen Zeit die Höchstgeschwindigkeit erreicht wird.

$$v(t) := a4 \cdot t^4 + a3 \cdot t^3 + a2 \cdot t^2 + a1 \cdot t + a0$$

$$a(t) := \frac{d}{dt} v(t)$$

$$[v(40) = 15,\ v(0) = 0,\ v(80) = 0,\ a(40) = 0,\ a(0) = 0]$$

$$\left[a0 = 0 \wedge a4 = \frac{3}{512000} \wedge a3 = -\frac{3}{3200} \wedge a2 = \frac{3}{80} \wedge a1 = 0 \right]$$

3.2.4 Formal-operatives Arbeiten und der syntaktische Bereich

Das formal-operative Arbeiten berührt in besonderer Weise den syntaktischen Bereich der Mathematik Dieser Bereich wird von vielen - insbesondere von Nichtmathematikern und in der Schule oft von Eltern - als der „Kernbereich“ der Mathematik angesehen.

Man kann nicht oft genug darauf hinweisen, dass Mathematik eine besondere Form einer Sprache ist, die sich im Besonderen zur Darstellung der quantifizierbaren Aspekte der Realität, zur Abbildung von Form- und Strukturphänomene und zur Beschreibung logischer Beziehungen eignet. Als Sprache verfügt sie über *syntaktische*, *semantische* und *pragmatische* Besonderheiten.

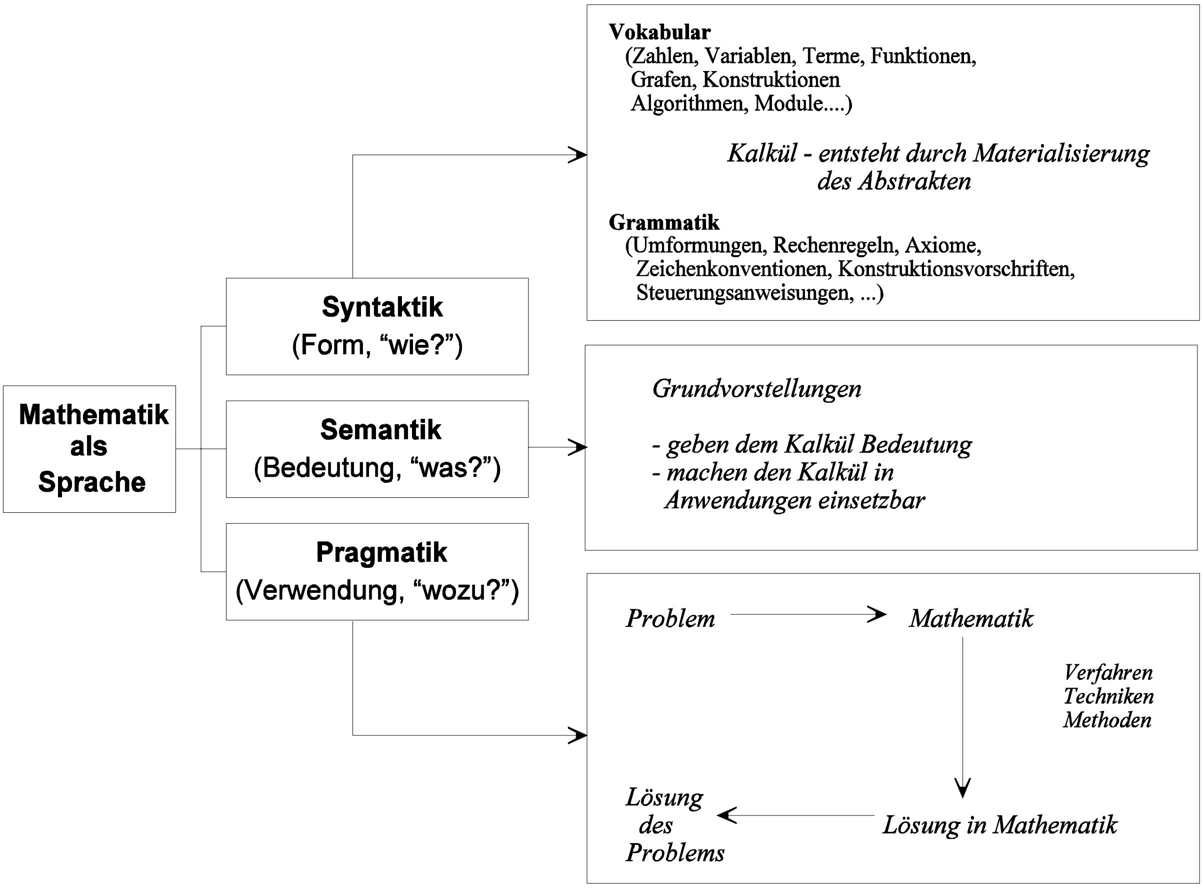


Abb.1.5: *Die drei Aspekte der Sprache Mathematik*

Die Syntax der Mathematik umfasst die mathematischen Gegenstände („Vokabeln“) sowie die auf ihnen zulässigen Manipulationen, Transformationsregeln, Rechenregeln, Rechenoperationen („Grammatik“). Zusammen bilden Syntax und Grammatik einen Kalkül, der im Unterschied zur Umgangssprache zur aktiven Umgestaltung in einem Maße fähig ist, dass diese Umgestaltung teilweise durch Maschinen ausgeführt werden kann.

Die Semantik der Mathematik beschäftigt sich mit der Bedeutung mathematischer Konstrukte. Auf Grund der - im Vergleich zur Umgangssprache- größeren Abstraktion, geringeren Redundanz und höheren Kompaktheit der verwendeten Symbolik bzw.Notation ist es in der Mathematik - insbesondere für Schülerinnen und Schüler - wesentlich schwieriger, mathematische Konstrukte mit Vorstellungen (Bedeutung) zu unterlegen.

Die Pragmatik der Mathematik umfasst schließlich alle Fragen, die mit ihrem Einsatz zur Beschreibung von Phänomenen, Strukturen und Ereignissen unserer Welt in Zusammenhang stehen. In der anwendungsorientierten Sichtweise sind dies also v.a. Fragen der Modellbildung, die ihrerseits wieder auf die beiden großen Ziele Verstehen und Problemlösen ausgerichtet ist

3.3 Heuristisch-experimentelles Arbeiten

Das Ziel ist eine aktive Haltung gegenüber Problemen,
Mut zum Nachdenken, auch wenn kein Lösungsweg in Sicht ist,
sich zu helfen wissen, bereit sein zum Formulieren und Prüfen von Vermutungen,
zum systematischen Variieren von Lösungsansätzen.
Der Schüler darf nicht Aufgaben, die ihm begegnen in gehabte und
nicht gehabte einteilen und bei der zweiten Sorte sogleich resignieren.
Kirsch 1974

Schon bei den ersten Ansätzen MAU im Unterricht zu verwenden, wurde vielerorts die Hoffnung geäußert, dass experimentelles Arbeiten im Sinne von „Was passiert, wenn ... ?“ und der Variation von Parametern in größerem Umfang im Mathematikunterricht möglich wird.

3.3.1 Begriffsdefinition

Heuristisch-experimentelles Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit *zielgerichtetem Entdecken*, mit *Variation von Parametern* und *dem Aufstellen von Vermutungen* zu tun haben.

Auch das *Ausführen* von *Simulationen*, das Untersuchen von *Grenz- und Spezialfällen* sowie das Übergehen zu *Verallgemeinerungen* zählen zum heuristisch-experimentellen Arbeiten.

Auch reines Probieren sowie die Simulation könnten als Problemlösungsformen aufgewertet werden. Genauso lag und liegt die Vermutung nahe, dass Iteration und Rekursion stärkere Berücksichtigung finden. Vor allem in der Literatur zum entdeckenden Lernen (WINTER, 1989) und zum problemorientierten Unterricht sind eine Fülle von Aktivitäten beschrieben, die unter heuristisch-experimentellem Arbeiten zu verstehen sind - von den grundlegenden Arbeiten POLYAS ganz zu schweigen -, wie etwa:

- Finden einer geeigneten Darstellungsform
- Kombinieren von Kenntnissen und vertrauten Methoden
- Finden von Problemen
- Finden von Beispielen mit vorgegebenen Eigenschaften
- Überblicken aller möglichen Fälle einer Situation
- Herausarbeiten von charakteristischen Eigenschaften
- Erkennen von gemeinsamen Eigenschaften bzw. von Strukturgleichheiten
- Probieren
- Lösungen durch systematisches Probieren ermitteln
- Heuristische Techniken angeben können
- Experimentieren
- Aus Funktionsprototypen Funktionsscharen entwickeln
- Aus Funktionsprototypen einen Vertreter mit speziellen Eigenschaften „herausschälen“
- Simulieren
- Mit Differenzengleichungen Simulationen ausführen
- Diskrete und kontinuierliche Modelle einander gegenüberstellen

- Analysieren
- Kombinieren
- Abstrahieren
- Konkretisieren
- Analogisieren
- Analogien nutzen, ihre Grenzen kennen
- Kontrastieren
- Verallgemeinern
- Rechnungen allgemein durchführen - Variablen
- Spezialisieren
- Spezialfälle untersuchen
- Übersicht verschaffen

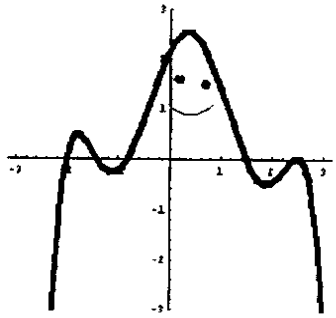
Wenn es um die Erarbeitung neuer Begriffe geht, um Zugang zu neuen Gebieten, um selbständiges Arbeiten, um Problemlösen im Unterschied zum Abspulen von Aufgabenplantagen, dann sprechen wir von heuristisch-experimentellem Arbeiten. Dabei wird besonders die induktive Seite der Mathematik betont, die sich in den angeführten heuristischen, experimentellen Tätigkeiten äußert. Konkrete Erfahrungen durch Experimente berieten Begriffsbildungen vor und unterstützen die Ausbildung von Grundvorstellungen. Für eine erfolgreiche Entfaltung eines derartigen Tätigkeitsfeldes ist es inbesondere nötig, ein entsprechendes offenes Unterrichtsklima zu schaffen.

3.3.2 Technologieeinsatz beim heuristisch-experimentellen Arbeiten

Viele der angeführten Aktivitäten lassen sich durch eine MAU gut unterstützen. Der Einsatz liegt hier vor allem in seiner Rolle als **Untersuchungswerkzeug** „Das Gerät wird als Umgebung für Untersuchungen und Forschungen eingesetzt. Neue Umstände und Veränderungen werden berücksichtigt. Auch unerwartete Ergebnisse treten auf, Vermutungen werden angestellt und möglicherweise wieder verworfen. In dieser Rolle ermöglicht die Technologie das „Spielen“ mit Problemen, da die Rechenarbeit rasch und fehlerfrei erfolgt.“(HEUGL, 1999, S.4) Derartige Einsatzformen werden auch oft unter den Titeln „CAS als Experimentierumgebung“ oder „CAS als Entdecker“ näher beschrieben.

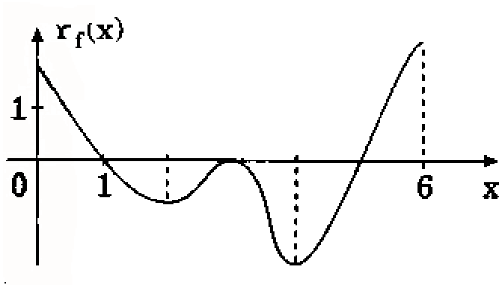
Durch die Unterstützung individueller Lernwege und die individuelle Rückmeldungsmöglichkeit, durch freie Wahl von Parametern, den einfacheren Vergleich verschiedener Lösungswege, durch unterschiedliche Visualisierungen eignen sich MAU besonders gut zur Unterstützung beim heuristisch-experimentellen Arbeiten.

3.3.3 Beispiele zum heuristisch-experimentellen Arbeiten



Beispiel 1.7 Gegeben ist ein Geist.
Finde die Funktionsgleichung, wenn die Nullstellen $-2; -\sqrt{2}; -0{,}8; 1{,}5$ und 2,5 genau bekannt sind.

Beispiel 1.8 Aufleiten (H.ALTHOF)
Von einer Funktion f kennt man den Graphen der Kurvensteigungsfunktion $r_f(x)$.



Der Graph von f beginnt im Punkt $P_1(0/0)$ und endet im Punkt $P_2(6/f(6))$.

a) Für welche Werte von x fällt der Graph von f?
b) Woran erkennt man, dass der Graph von f von P_1 ausgehend zunächst rechtsgekrümmt ist und schließlich in den Punkt P_2 in Linkskrümmung hineinläuft?
c) Gib (mit Begründung) an, bei welchen Werten von x besondere Punkte liegen (lokaler Hoch- bzw. Tiefpunkt, Wendepunkt, Sattelpunkt)!
d) Skizziere von P_1 bis P_2 einen Graphen für f, der mit dem Graphen von $r_f(x)$ qualitativ verträglich ist.

3.3.4 Heuristisch-experimentellen Arbeiten und Induktion

Mathematik wird in der Regel geradezu als Inbegriff einer strengen, deduzierenden Wissenschaft gesehen. Von einigen wenigen Grundannahmen bzw. Grundregeln (Axiomen) ausgehend lässt sich scheinbar das ganze mathematische Gebäude errichten. Diese Sichtweise findet oft auch in den Unterrichtsmethoden („Definition-Satz-Beweis“- Methode an der Universität, Methodenarmut im schulischen Mathematikunterricht) ihren Niederschlag. Dem zu Grunde liegt eine verengte Sichtweise der Entstehung mathematischen Wissens. „Mathematik in *statu nascendi* ist aber auch eine induktive Wissenschaft, der Forscher erahnt von speziellen Beispielen, Experimenten, Analogien oder auch seinem „mathematischen Fingerspitzengefühl“ ausgehend, das Ergebnis, und versucht, es durch lokale Beweisschritte zu sichern. Erst der globale Beweis wird hinterher oft so aufbereitet, dass alle Versuche, Sackgassen und Ideen der Invention unsichtbar werden und das strahlende Resultat deduktiven Schließens übrigbleibt.“ (H.W.HENN, 1998).

Es geht also - insbesondere im schulischen Mathematikunterricht - darum, ein ehrliches Bild der Mathematik zu vermitteln. „Beide Aspekte aber, „induktive“ und „deduktive“ Mathematik sind untrennbar verbunden; erst das Wechselspiel macht Mathematik aus. (HENN, 1979)

3.4 Kritisch-argumentatives Arbeiten

Vor Prüfungen werde ich oft gefragt: „Kommen auch Beweise?“
Bisweilen antworte ich dann: Es kommen nur die Beweise.
Damit meine ich, dass Begriffe sekundär sind,
d.h. i.W. für das Argumentieren irgendeiner Sache erfunden und gebildet werden.
H.-C.Reichel

Auch dieser Tätigkeitsbereich ist speziell in der österreichischen didaktischen Literatur sehr eingehend beschrieben worden. Insbesondere in den Vorarbeiten zum aktuellen Oberstufenlehrplan und in den Intentionen dieses Lehrplans finden sich viele Hinweise, welche Fähigkeitsmuster hier entwickelt werden sollen.

3.4.1 Begriffsdefinition

Kritisch-argumentatives Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit *Argumentieren*, mit *Begründen* und *Beweisen* zu tun haben.

Auch das *kritische Überprüfen* von *Eigenschaften*, von *Vermutungen* sowie das Vornehmen von *Fallunterscheidungen* zählen zum kritisch-argumentativen Arbeiten

Zu den kritisch-argumentativen Tätigkeiten im Mathematikunterricht sind demnach etwa folgende zu zählen.

- Präzisieren von Sachverhalten
- Analysieren von Problemen, Begründungen, Darstellungen, mathematischen Objekten
- Definieren von Begriffen
- Mathematische Begriffe in Bezug auf ihre Bedeutung, Entwicklung, Erweiterung, ... diskutieren können
- Begründen (Beweisen) mathematischer Sachverhalte mit vorgegebenen Argumenten oder ohne vorgegebene Argumente
- Argumentieren
- Argumentationsbasis klären
- die Vollständigkeit einer Argumentation überblicken
- Auseinandersetzung mit mathematischen Texten
- Umformungsschritte begründen können
- Formulieren mathematischer Sachverhalte
- Arbeiten unter bewußter Verwendung von Regeln
- Lösungswege gegenüberstellen können
- Bewußtes Arbeiten mit logischen Schlußweisen
- Erkennen logischer Strukturen
- Rechtfertigen und Beurteilen von Entscheidungen
- Plausibel machen
- Ergebnisse auf Plausibilität testen
- Abschätzen von Genauigkeit und Größenordnung numerischer Daten und Rechenergebnisse

- Begründen
- Erkennen unterschiedlicher Begründungsmöglichkeiten, Vergleich mathematischer und außermathematischer Begründungen
- In (eventuell unvollständig) vorgegebenen Beweisen die Lücken ergänzen, einzelne Folgerungen genauer begründen können
- Beweisen (direkt, indirekt, induktiv, ...)
- Beweismethoden kennen, erklären und vielseitig anwenden können
- Exaktheitsniveaus „hinterfragen“
- Über das Exaktheitsniveau einer Argumentation reflektieren können
- Exaktifizieren
- Überprüfen von Eigenschaften
- Überprüfen von Vermutungen
- Fallunterscheidungen vornehmen
- Erkennen der beschränkten Gültigkeit von Aussagen, Feststellen von Voraussetzungen
- Überprüfen von Ergebnissen
- Erkennen der Unzulänglichkeit mathematischer Modelle
- Testen
- Überlegen von Bedeutungen und Anwendungen mathematischer Methoden und Denkweisen

Kritisch-argumentatives Arbeiten umfasst die Tätigkeitsbereiche Argumentieren, Begründen, Beweisen. Der aktuelle Oberstufen-Lehrplan fordert etwa unter ‚Argumentieren und exaktem Arbeiten‘ präzises Beschreiben von Sachverhalten, Arbeiten unter bewußter Verwendung von Regeln, Rechtfertigen von Entscheidungen oder unter ‚kritischem Denken‘ das Überprüfen von Vermutungen, von Ergebnissen, das Erkennen von Mängeln in Darstellungen oder Begründungen u.a.m.

Argumentieren und Beweisen scheitert im Unterricht oft schon an der Wahl einer entsprechenden Argumentationsbasis. Jene Aussagen (oft auch nur Annahmen), die als richtig angesehen und für eine Begründung herangezogen werden, sowie die Art des Schließens, mit der aus diesen Aussagen Folgerungen gezogen werden, bilden die *Argumentationsbasis* (H.BÜRGER, 1987).

3.4.2 Technologieeinsatz beim kritisch-argumentativen Arbeiten

Naturgemäß sind die Unterstützungsmöglichkeiten durch MAU in diesem Tätigkeitsbereich weitaus geringer als in den beiden zuvor behandelten. Aber es gibt vielleicht so etwas wie einen indirekten Zusammenhang: gerade durch die veränderte Behandlung der anderen Aktivitäten (bessere Darstellungsmöglichkeiten, rascherer Wechsel von Darstellungsformen, bewußte Auslagerung bzw. Unterstützung operativer Tätigkeiten durch Module) kann eine Betonung des kritisch-argumentativen Arbeitens erreicht werden.

Der Einsatz von CAS zielt hier insbesondere auf die Möglichkeiten, die in der Verwendung als **Überprüfungswerkzeug** liegen. „Ergebnisse, die traditionell entstanden sind, können nun rascher auf ihre Richtigkeit überprüft werden. Dazu kommt noch, dass Ergebnisse überprüft werden müssen, die durch die Technologie ermittelt wurden und die wegen der Vielfalt der Darstellungsweise nicht immer sofort mit den erwarteten Ergebnissen übereinstimmen.“ (HEUGL, 1999, S.4) Speziell die Programme der dynamischen Geometrie eröffnen eine Reihe von Möglichkeiten, direkt in und mit einer MAU Argumentationen schrittweise zu führen.

Bei einer Reihe derartiger Tätigkeiten können CAS durchaus wertvolle Dienste leisten. Sie können bei Argumentationen unterstützende Dienste leisten.

Es gibt aber auch einen tieferliegenderen Zusammenhang zwischen Technologie-Einsatz im MU und dem kritisch-argumentativen Arbeiten. In dem Maße, in dem das Durchführen von Verfahren an die Technologie delegiert werden kann, gewinnen andere grundlegende mathematische Fähigkeiten an Bedeutung und dazu gehört neben dem Darstellen, neben dem bewußten Einsatz heuristischer Techniken eben Argumentieren. Fähigkeiten, die Maschinen nicht oder nur in eingeschränktem Maße zugesprochen werden, können so stärker ins Blickfeld des MU treten und im Unterricht intensiver entwickelt werden.

3.4.3 Beispiele für kritisch-argumentativen Arbeiten

Beispiel 1.9 Begründen in der Analysis (G.SCHMID, 1993)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründe jeweils deine Aussage!

a) $f'(x_1) = 0 \Rightarrow$ f hat an der Stelle x_1 einen relativen Extremwert.

b) f hat an der Stelle x_2 einen Wendepunkt. Dann wechselt f ´ bei x_2 das Vorzeichen.

c) Eine Polynomfunktion 3.Grades hat höchstens einen Wendepunkt.

d) $f'(x) = \text{const.}$ für alle $x \in D_f \Rightarrow$ Der Graph von f ist eine Gerade.

e) f sei eine auf [a,b] stetige und differenzierbare Funktion mit f(a) = f(b). Dann gibt es eine Stelle $c \in]a,b[$ mit $f'(c)=0$.

f) Die Polynomfunktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ habe 2 Hochpunkte. Dann liegen diese beiden Hochpunkte auf einer Geraden, die parallel ist zur x-Achse.

Beispiel 1.10 Beweisaufgabe mit Logarithmus (H.ALTHOF, 1997)

Man kann die Formel ${}^a\log x = \frac{\lg(x)}{\lg(a)}$ anders als im Lehrbuch beweisen:

Bew.: Es gilt

$$\begin{aligned} {}^a\log x = u &\Leftrightarrow x = a^u \\ \lg(x) = v &\Leftrightarrow x = 10^v \qquad (1) \\ \lg(a) = w &\Leftrightarrow a = 10^w \end{aligned}$$

Damit ergibt sich: $x = x \Rightarrow a^u = 10^v \Rightarrow (10^w)^u = 10^v \Rightarrow \ldots \quad (2)$

a) Begründe die Gültigkeit der Zeile (1)

b) Erläutere die Folgerung (2)

c) Führe den Beweis zu Ende

d) Beweise die allgemeinere Beziehung ${}^b\log(x) = {}^b\log(a) \cdot {}^a\log(x)$

e) Implementiere für dein Rechenwerkzeug eine Funktion MYLOG(x,a), die es gestattet, Logarithmen mit beliebigen Basen a zu berechnen. Welche Basen sind zulässig bzw. sinnvoll?

3.4.4 Kritisch-argumentatives Arbeiten und Deduktion

Natürlich darf „das Kind nicht mit dem Bade ausgeschüttet werden“: so gut sich heuristisch-experimentelle Methoden mit CAS unterstützen lassen, so wichtig ist es auch, dabei nicht stehen zu bleiben. Ein angemessenes Bild von Mathematik zu vermitteln, heißt auch, der deduktive Seite der Mathematik ihr Recht einzuräumen. Insbesondere im Zusammenhang mit neuen Technologien und neuen Unterrichtsformen wird ein stofforientierter, formal-deduktiver Aufbau der Mathematik häufig als Negativum gesehen. „Ohne Zweifel wird aber ein mathematischer Satz dadurch bewiesen, dass ausgehend von den Axiomen und Voraussetzungen das behauptete Resultat als Ergebnis streng logischer Deduktion folgt“ (H.W.HENN, 1998, S.53)

Es sie darauf hingewiesen, dass sich kritisch-argumentatives Arbeiten nicht allein auf seine strengste Form - das Beweisen - beschränkt. Vor allen Argumentieren und Begründen sind Tätigkeiten, die für viele Lebens- und Wissensbereiche bedeutungsvoll sind. Argumentieren fördert überlegtes Arbeiten und präzises Denken. Sollen Schüler - etwa im Zusammenhang mit der Bearbeitung von Aufgaben - ihre Schritte und Handlungen begründen, so sind sie gezwungen, Zusammenhänge und Überlegungen zu präzisieren und darzustellen, wodurch diese Überlegungen stärker ins Bewusstsein rücken und besser behalten werden.

3.5 Arbeitsqualitäten und Aufgaben

Der Berücksichtigung der vorgestellten mathematischen Grundtätigkeiten kann der Lehrerin / dem Lehrer sowohl bei der Aufgabenbewertung als auch bei der Aufgabenerstellung von Nutzen sein.

Aufgabenbewertung

- Sie ermöglicht die Erstellung eines für die Bearbeitung des Beispiels notwendigen Aktivitätsprofils. So wird neben der leichter möglichen inhaltlichen Einordnung auch der Blick dafür schärfer, welche Fertigkeiten und Fähigkeiten eine Schülerin oder ein Schüler konkret unter Beweis stellen muss. Dies ist umso wichtiger, je mehr Augenmerk durch diverse Studien auf die Ergebnisse des Unterrichts gelegt werden.
- Sie ermöglicht bei einem vorgegebenen Satz von Beispielen eine quantitative Analyse, welche Aktivitäten in welcher Häufigkeit auftreten. Je mehr verschiedenartige Aktivitäten ein Beispiel erfordert, desto anspruchsvoller wird es im allgemeinen sein. Umgekehrt werden „interessante Beispiele“ zumeist sehr viele verschiedene Aktivitäten zu ihrer Bearbeitung erfordern.
- Schließlich ermöglicht diese Einteilung auch eine natürliche Zuordnung der wesentlichsten Einsatzformen eines CAS bzw. einer MAU („Visualisierungswerkzeug“, „Rechenhilfe“, „Überprüfungswerkzeug“, „Experimentierhilfe“) zu den wesentlichen Fertigkeiten und Fähigkeiten, die der Mathematikunterricht vermitteln soll.

Aufgabenerstellung

- Sie hilft der Lehrerin / dem Lehrer bei der Erstellung von Aufgaben für den Unterricht und für die eigene Leistungsbeurteilung (Testaufgaben, Schularbeits- und Maturaaufgaben). Sie ermöglicht quasi ein „Beispieldesign“, da damit deutlicher wird, welche Qualifiktionen und Kompetenzen zur Bearbeitung erforderlich sind.
- Es sollte damit leichter möglich sein, beim Erstellen von Leistungsbeurteilungsaufgaben die Überprüfung gewünschter Aktivitäten im Auge zu behalten.

- Erleichterung beim Finden der „ausgewogenen Mischung“.
- Sie stellt einen wesentlichen Beitrag zum Aufbau eines erweiterten und vertieften Verständnisses im Mathematikunterricht dar.

3.5.1 Bewertung von Aufgaben hinsichtlich mathematischer Grundtätigkeiten

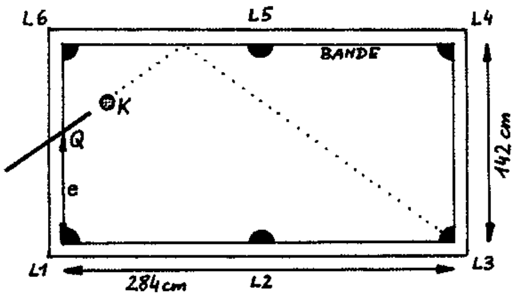
An Hand der folgenden Aufgaben soll dargestellt werden, wie nun eine typische Bewertung aussehen könnte:

(DI ...Darstellend-Interpretatives Arbeiten, FO...Formal-operatives Arbeiten, KA...Kritisch-argumentatives Arbeiten, HE...Heuristisch-experimentelles Arbeiten)

Aufgabe 1: Eine Aufgabe aus dem Bereich Sport und Mathematik (A.Spiegl, 2000)

Die Füße eines Weitspringers beschreiben während der Flugphase eine Kurve der Form $f(x) = \frac{1}{5}x\sqrt{b-x}$ (x ... waagrechte Entfernung vom Absprung, f(x) ... Flughöhe).	
a) Gib den Term der Kurve für einen Athleten an, dessen Sprungweite 6 m beträgt.	DI
b) Gib einen mathematischen sowie einen sinnvollen Definitionsbereich an und begründe diesen.	KA
c) Wo erreicht der Athlet den höchsten Punkt und wie hoch ist dieser? Zeige weiters, daß die Sprungkurve vorher steigt und nachher abfällt.	DA KA (FO)
d) Berechne den Absprungwinkel.	FO
e) Von Untersuchungen solcher Sprungkurven weiß man, daß für eine maximale Sprungweite nicht die größte Höhe der Sprungkurve entscheidend ist sondern ein Punkt vorher, der sich aus dem Produkt der Höhe dieses Punktes vom Boden und der waagrechten Entfernung dieses Punktes vom Aufsprung (= 6m) ergibt. Dieses Produkt soll maximal werden. Wie weit vom Absprung entfernt und wie hoch muß man eine Schnur spannen, um diesen Punkt zu kennzeichnen? Begründe, warum der gesuchte Punkt nicht weiter vom Absprung entfernt sein kann als der Hochpunkt der Kurve.	HE KA

Aufgabe 2: Mathematik für Billardspieler (C.LANGMÜLLER)

<table>
<tr><td colspan="2">Eine Übungsaufgabe für einen Billardspieler

Eine Billardkugel K wird 100 cm von der Ecke L 1 und 50 cm von der Ecke L6 aufgelegt.
Ein Spieler setzt seinen Queu im Punkt Q (Entfernung von der Ecke Ll = e = 81,26..cm im Speicher des Rechners) und versetzt der Kugel K einen zentralen Stoß um sie mit einer Bandenberührung ins Loch (= Ecke) L3 zu bewegen.</td></tr>
<tr><td>a) Zeige durch Nachrechnen, dass er in die richtige Richtung gestossen hat.</td><td>HE, FO, KA</td></tr>
<tr><td>b) Zeige durch Nachrechnen, dass die Kugelbahn die kürzeste Möglichkeit ist, von K über einen Punkt der Bande L4 L6 zum Loch L3 zu gelangen.</td><td>FE, FO, KA</td></tr>
<tr><td>c) Die Kugel hat durch den Stoß eine Anfangsgeschwindigkeit von v(0) = v0 = 3 m/s und ihre Geschwindigkeit v(t) nimmt aufgrund der Reibung (Koeffizient μ = 0,12) linear ab. Bei der Bandenberührung zum Zeitpunkt tb verliert die Kugel 15% ihrer Momentangeschwindigkeit und setzt danach ihre Bewegung mit der Geschwindigkeit vl fort.
$$v(t)=\begin{cases} v0-\mu\cdot 9{,}81\cdot t & 0\le t\le tb \\ v1-\mu\cdot 9{,}81\cdot t & tb\le t\le te\end{cases}$$
Vervollständige die Geschwindigkeitsfunktion (tb, v1, Te) und skizziere den zugehörenden Graphen (Achsenbeschriftung und Eskalierung, wesentliche Eigenschaften).

Fällt die Kugel ins Loch?
* Falls ja, berechne ihre Endgeschwindigkeit.
* Falls nicht, berechne die Entfernung vom Loch L3.</td><td>DI, FO</td></tr>
<tr><td>d) Berechne die Ausgangsgeschwindigkeit v0 so, dass die Kugel gerade noch ins Loch L3 fällt.</td><td>HE, FO</td></tr>
</table>

3.5.2 Konstruktion von Aufgaben nach mathematischen Grundtätigkeiten

Die oben vorgestellte Gliederung in einzelne Grundtätigkeiten kann - wie bereits erwähnt - auch dazu dienen, Beispiele so zu gestalten, dass sie ein vielseitiges mathematisches Anforderungsprofil aufweisen. Am Beispiel des radioaktiven Zerfalls sei dies gezeigt.

Beispiel 1.11 Radioaktiver Zerfall

Von einer radioaktiven Substanz sind nach 15 Minuten noch 81,8% vorhanden.

DI (1) Gib eine diskrete und eine kontinuierliche Darstellung des exponentiellen Wachstums an!

(2) Schreibe das Zerfallsgesetz für eine Ausgangsmenge von 3mg an und stelle es für $0 \leq t \leq 3$ h graphisch dar!

FO (3) Löse die Iterationsgleichung $y(t + \Delta t) = y(t) + k_d \cdot y(t)$ bzw. die Differenzengleichung $y(t + \Delta t) - y(t) = k_d \cdot y(t)$

(4) Löse die Differentialgleichung $y'(t) = k \cdot y(t)$

KA (5) Gib eine Begründung für den Zusammenhang $\tau = \ln 2 / \lambda$.

(6) Begründe, warum beim diskreten Modell der Proportionlitätsfaktor k_d von der Schrittweite Δt abhängt. Wie hängen die beiden Proportionalitätsfaktoren zusammen?

HE (7) Suche im konkreten Modell mittels Tabelle oder mittels Graph, nach welcher Zeit τ 50% der Ausgangssubstanz zerfallen sind.

(8) Stelle für eine Ausgangsmenge von 10mg diskretes und kontinuierliches Modell gegenüber.

Literatur:

ALTHOFF, H.: Prüfungsaufgaben unter dem Motto: Weg vom Kalkül, hin zum Interpretieren und Argumentieren, BzM, 1997, S.49-52.

BLUM, W., WIEGAND, B.:Wie kommen die deutschen TIMSS-Ergebnisse zustande? Ein Interpretationsansatz auf der Basis stoffdidaktischer Analysen. In: TIMSS und der Mathematikunterricht, Schroedel, 1998, S.28-35.

BÜRGER, H.: Realisierung allgemeiner Lernziele des Mathematikunterrichts, Journal für Mathematik-Didaktik, 1981

BÜRGER, H.: Argumentieren im Mathematikunterricht. ÖMG, Heft 15, S.1-15, Wien, 1987

BÜRGER, H.: Entwicklung von Verständnis für den Begriff des Integrals. ÖMG, Heft 20, S.1-11. Wien, 1992

FISCHER, R, MALLE, G.: Mensch und Mathematik, BI Mannheim, 1885

FISCHER, R, KRONFELLNER, M.: Fachdidaktischer Kommentar zu den TIMSS-Items - Mathematik: Vorschläge zum Kernstoff, Endbericht zum IMST-Projekt, IFF Wien-Klagenfurt, 1999.

FISCHBEIN, E.: Tacit Models and Mathematic Reasoning, In: For the Learning of Mathematics 9, S.9-14.

HAYEN, J.: Zur Entwicklung des Begriffsverständnisses vom Grenzwert. Mathematica didactica, Heft 3/4, 1988.

HENN, H.-W.: TIMSS- Katalysator für eine neue Unterrichtskultur. In: TIMSS und der Mathematikunterricht, Schroedel, 1998, S.46-56

HENN, H.-W.: „Induktive" und „deduktive" Mathematik. - In: W.Dörfler, R.Fischer: Beweisen im Mathematikunterricht, HPT, Wien, S.209-216.

HEUGL, H.: Klassifikation von Aufgaben im Mathematikunterricht. ACDCA, Hollabrunn 1999. Internet: www.acdca.ac.at

HOFE, R.v.: Grundvorstellungen mathematischer Inhalte, Spektrum, Heidelberg, 1995

LANGMÜLLER, C.: Maturaaufgaben, Haupttermin 1998/99, BG Amstetten, ACDCA, Hollabrunn 1999. Internet: www.acdca.ac.at

LECHNER, J.: Maturabeispielsammlung der Arbeitsgemeinschaft Mathematik an AHS in Niederösterreich, Hollabrunn 1999

MALLE, G.: Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Verlag Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1993

PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H., SAUPE,D.: Bausteine des Chaos - Fraktale, Klett und Springer, 1992

RECHENBERG, P., POMBERGER, G.: Informatik-Handbuch, Hanser, 1997

SCHMIDT, G.: Kommt das auch in der Arbeit vor? In: Der Mathematikunterricht, H..1,1993

SPIEGL, A.: Beispiele aus dem Bereich Sport, Hollabrunn 2000. Internet: www.acdca.ac.at

VOLLRATH,H.-J.: Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht. Klett, 1984.

WEIGAND, H.-G.: Zum Verständnis von Iterationen im Unterricht, Verlag Franzbecker, Hildesheim, 1989

WEIGAND, H.-G.: Zur Didaktik des Folgenbegriffs, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim. 1993

WINTER, H.: Entdeckendes Lernen, Vieweg 1989

ZEITLER H., NEIDHARDT, W.: Fraktale und Chaos, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1993