Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Unterricht und Kunst
(Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur)

Elektronische Lernmedien im Mathematikunterricht

(Einfluss auf das Lehren und Lernen, den Lehrplan
und die Leistungsbeurteilung)

Teil 6

Projektgruppe 2

Mag. Gerhard Hainscho

Hollabrunn, Februar 2001

Bericht der Projektgruppe 2

Mag. Gerhard Hainscho (12. 10. 2000)

Aktivitäten der Projektgruppe 2: Qualität im Mathematikunterricht

Ziele, Mitarbeiter, Ergebnisse

Angeregt von den 1998 bekannt gewordenen Ergebnissen der 1995 durchgeführten internationalen "Third International Mathematics and Science Study" (TIMSS) beschäftigte sich die Projektgruppe 2 im Rahmen des gesamtösterreichischen Forschungsprojektes

Neue Medien und Methodik im Mathematikunterricht
(Einfluß auf das Lehren und Lernen, den Lehrplan und die Leistungsbeurteilung)

intensiv mit der Frage nach Qualität im Mathematikunterricht.

Nach unserer Auffassung bedeutet die Frage nach Qualität im Mathematikunterricht eine Auseinandersetzung mit dem Thema auf zumindest 3 verschiedenen Ebenen:

1. Formulierung und Reflexion einer „***Bildungsphilosophie***“;
2. Formulierung und Evaluation von ***Zielen*** des Mathematikunterrichts;
3. Konkretisierung der Ebenen (1) und (2) durch Erstellung bzw. Auswahl adäquater ***Aufgaben*** für den Mathematikunterricht.

Auf keiner der genannten Ebenen kann es Antworten geben, die für jeden Lehrer oder gar für alle Zeiten gelten, somit betrachten wir „Qualität“ vor allem als Prozeß, d.h. als die ständige Bereitschaft, seinen Unterricht auf allen Ebenen immer wieder neu zu überdenken. Voraussetzung dafür und wesentliches Ziel unserer Forschungsgruppe ist daher die Initiierung und Aufrechterhaltung einer möglichst breiten Diskussion über Grundfragen, Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichts. Diese Diskussion darf sich keinesfalls auf den Kreis der CAS-Lehrer beschränken, wir sind daher stets bemüht, eine Gruppe ohne feste Grenzen zu bilden. Tatsächlich stammen wertvolle Beiträge von Kolleginnen und Kollegen „außerhalb“ des CAS-Projektes, die einen traditionellen Unterricht bevorzugen; besonders wertvoll war auch der Gedankenaustausch mit Univ.-Prof. Dr. Roland Fischer und ao Univ.-Prof. Dr. Konrad Krainer vom IFF mit Sitz an der Universität Klagenfurt im Rahmen des Projektes "Innovations in Mathematics and Science Teaching" (IMST).

„Innerhalb“ des CAS-Projektes wurde der Kern der Projektgruppe 2 vor allem von 3 Personen gebildet, die stellvertretend für viele Diskussionsteilnehmer genannt sein sollen: Mag. Gerhard Hainscho (BORG Wolfsberg, Leiter der Projektgruppe), Mag. Wolfgang Raab (BG/BRG Bad Ischl) und Mag. Johannes Zessner-Spitzenberg (BG/BRG Klosterneuburg).

Als konkretes Produkt unserer Arbeit möchten wir auf jeder der 3 oben genannten Ebenen zum Thema „Qualität“ Stellung beziehen:

1. auf der Ebene der Bildungsphilosophie in Form eines ***Thesenpapiers***;
2. zur Frage der Evaluation von Zielen durch Veröffentlichung der Ergebnisse einer Untersuchung zum ***Lernerfolgsvergleich*** von Klassen mit und ohne CAS-unterstütztem Mathematikunterricht;
3. auf der Ebene der Aufgaben in Form einer exemplarischen ***"Top-10"-Aufgabensammlung*** zum Thema „unbestimmtes Integral“.

Thesenpapier, Testhefte und -ergebnisse (incl. Auswertungsrichtlinien und Rohdatensätzen als Excel- und TI-92- bzw. TI-89-Dateien) sowie Aufgabensammlung befinden sich im Anhang bzw. sind über die Internet-Homepage von ACDCA verfügbar:

- http://www.acdca.ac.at/

Planung, Information und Aussendungen

Abgesehen von Diskussionen mit Lehrern und Schülern - aber auch mit Experten aus dem universitären Bereich - erfolgte die Planung der Aktivitäten der Projektgruppe 2 im Rahmen von gesamtösterreichischen Seminaren für alle Projektlehrer sowie im Rahmen von Planungstreffen mit ausgewählten Mitarbeitern:

- Wien 30. 10. 1998
- Hollabrunn 22. 02. 1999 - 25. 02. 1999
- St. Pölten 02. 06. 1999 - 03. 06. 1999
- Ossiach 01. 09. 1999 - 04. 09. 1999
- Graz 04. 11. 1999
- St. Pölten 10. 12. 1999 - 11. 12. 1999
- Hollabrunn 01. 03. 2000 - 04. 03. 2000
- St. Pölten 26. 05. 2000 - 27. 05. 2000
- Ossiach 30. 08. 2000 - 02. 09. 2000

Über die Ziele, den jeweils aktuellen Stand und die Wünsche der Projektgruppe 2 wurden stets *alle* österreichischen Projektlehrer informiert, und zwar sowohl im Rahmen von gesamtösterreichischen Seminaren für alle Projektlehrer:

- Ossiach 01. 09. 1999 - 04. 09. 1999
- Hollabrunn 01. 03. 2000 - 04. 03. 2000
- St. Pölten 26. 05. 2000 - 27. 05. 2000
- Ossiach 30. 08. 2000 - 02. 09. 2000

als auch über die Internet-Homepage von ACDCA:

- http://www.acdca.ac.at/ (seit Oktober 1999).

Die Aussendung der Kopiervorlagen für die Testhefte der Untersuchung zum Lernerfolgsvergleich von Klassen mit und ohne CAS-unterstütztem Mathematikunterricht erfolgte in der ersten Juniwoche 2000 über das PI Hollabrunn. Aus Zeitgründen konnte die Untersuchung in den 8. Klassen nicht mehr durchgeführt werden. Die Erstauswertung der Testhefte wurde vom jeweiligen Klassenlehrer vorgenommen. Die Sammlung der Rückmeldungen sowie die Codierung und Auswertung der Ergebnisse erfolgte hauptsächlich während der Sommerferien 2000 durch Mag. Gerhard Hainscho.

Als Zusammenfassung vieler Diskussionen mit Lehrern und Schülern - aber auch mit Experten aus dem universitären Bereich - sowie als Darstellung der Grundposition unserer Projektgruppe möchten wir folgende Thesen formulieren:

Thesen 1:
Was ist guter Mathematikunterricht?

1. Guter Mathematikunterricht ist ***vielseitig****:*
   - Er behandelt innermathematische *und* anwendungsorientierte Themen, ist also teils Selbstzweck, intellektuelles Spiel, Denkart, teils Werkzeug bzw. Hilfswissenschaft für andere Gegenstände. Er betont die Eigenart mathematischen Denkens *und* ist offen für fächerübergreifende Fragestellungen.
   - Er ist historisch *und* aktuell, lehrt also die Entwicklung von Begriffen und historische Algorithmen ebenso wie aktuelle Fragestellungen und zeitgemäße Techniken. Gerade der Vergleich von Geschichte und Gegenwart erhöht die Einsicht in beide Bereiche. Mathematik passiert im Kopf, verzichtet aber nicht auf einen sinnvollen Einsatz aktueller Werkzeuge (CAS, Computer, ...).
   - Er beinhaltet Problemlöse- *und* Festigungsphasen, ist also teils experimentell, forschend, kreativ, teils Präsentation bzw. Nachvollzug bereits bekannter Ergebnisse und besteht aus Schüler- *und* Lehreraktivität.

2. Guter Mathematikunterricht ist ***reflexiv****:*
   - Er behandelt mathematische Inhalte *und* die Bedeutsamkeit dieser Inhalte. SchülerInnen sollen nicht nur Mathematik lernen, sie sollen außerdem noch wissen, was sie wissen und dies auch benennen und darüber sprechen können. Sie sollen auch wissen, wie das verwendete Werkzeug (CAS, Computer, ...) das Produkt „Mathematik“ beeinflußt.
   - Er lehrt verschiedene Lösungsmethoden *und* bewertet sie nach Effizienz und Eleganz.
   - Er vermittelt Inhalte *und* Selbstbewußtsein, d.h. die nötige Sicherheit, die erarbeiteten Inhalte auch außerhalb des Mathematikunterrichts anwenden zu können.
   - Er setzt klare Zielvorgaben *und* betreibt Evaluation außerhalb von Prüfungssituationen, d.h. er gibt Schülern, Eltern und Lehrern Rückmeldungen, wie weit diese Ziele erreicht wurden.

3. Guter Mathematikunterricht ist ***individuell****:*
   - Er geht auf die Interessen von Schülern und Lehrern ein und setzt je nach Interesse, Anlaß und Bedarf in jedem Schuljahr bzw. in jeder Klasse geeignete Schwerpunkte.

4. Guter Mathematikunterricht in der oben geschilderten Idealform ist in der Praxis ***nicht vorhanden****.*
   - Allerdings kann und muß nicht immer *alles* geboten werden, es soll aber klar werden, daß es zu jedem Aspekt auch eine „Kehrseite“ gibt, die genauso ihre Berechtigung hat.
   - Es gibt kein Rezept für einen besten Unterricht; Unterricht ist „gut“, wenn er mehr als nur Pflichtübung ist.

Thesen 2:

Wer ist ein guter Mathematiklehrer?

1. Ein guter Mathematiklehrer hat ***Freude an der Mathematik und an ihrer Vermittlung***.
   - Er besitzt die nötige Fach- und Unterrichtskompetenz und kann seine Schüler motivieren, d.h. sein eigenes Interesse und seine eigene Freude an der Mathematik auch bei den Schülern wecken, ohne dabei seine Interessen mit denen der Schüler zu verwechseln. Er weiß, daß sein Unterricht für viele Schüler alles ist, was sie an Mathematik kennenlernen. Er erzählt *von* und *über* Mathematik und gestaltet seinen Unterricht so vielseitig, reflexiv und individuell wie möglich (siehe Thesen 1).

2. Ein guter Mathematiklehrer ***hört nie auf, Neues zu lernen***.
   - Er nutzt möglichst vielfältige Angebote zur Weiterbildung, ist Neuem gegenüber kritisch aufgeschlossen und kennt seine Stärken und Schwächen. Er ist ein aufmerksamer Zuhörer, interessiert sich für die Überlegungen seiner Schüler und lernt auch von seinen Schülern.

3. Ein guter Mathematiklehrer ist ***berechenbar***.
   - Seine Schüler wissen, was sie leisten können und was sie leisten sollen. Seine Beurteilungskriterien sind klar und nachvollziehbar. Er nimmt Rücksicht auf das Niveau seiner Schüler. Er fordert seine Schüler, ohne sie zu langweilen oder zu überfordern.

4. Ein guter Mathematiklehrer ***hat Schüler, die einmal besser sind als er selbst***.
   - Er bringt seinen Schülern nicht nur Mathematik bei, sondern vor allem die Bereitschaft und die Befähigung, selbst zu lernen. Seine Schüler wissen, daß sie in hohem Maße für den Erfolg des Unterrichts selbst verantwortlich sind.

5. Ein guter Mathematiklehrer ist bemüht, der oben geschilderten ***Idealform möglichst nahe zu kommen***.

Uns ist bewußt, daß in dieser Darstellung einer möglichen „Bildungsphilosophie“ viele wichtige Fragen, wie z.B.

- Welche Rolle spielen Handwerkszeug und Faktenwissen im (CAS-unterstützten) Unterricht?
- Welche Veränderungen ergeben sich im und durch CAS-unterstützten Mathematikunterricht?

nicht ausreichend behandelt werden.

Ad 2: Formulierung und Evaluation von ***Zielen*** des Mathematikunterrichts

Um aus der Vielfalt der möglichen Inhalte (aber auch Lernformen und Werkzeuge) des Mathematikunterrichts eine Auswahl treffen zu können, muß sich jeder Lehrer über seine Ziele möglichst im klaren sein. Im Idealfall *setzt* er sich nicht nur Ziele, sondern kann diese auch den Schülern *vermitteln* (indem er etwa bei der Formulierung von Aufgaben Ziele mit angibt) *und* überprüft, wie weit diese Ziele erreicht wurden. Diese Überprüfung ist als eine Form von Lernkultur zu sehen, sie ist *nicht* in erster Linie zur Sammlung von Benotungen bzw. von Leistungsbeurteilungen gedacht, sondern vielmehr als Mittel der Evaluation, d.h. als Rückmeldung für Schüler, Lehrer und Eltern: Was kann ich schon? Was muß ich noch erarbeiten? Welche Ziele habe ich wie gut erreicht?

Jede solche Lernerfolgsevaluation steht immer im Spannungsfeld von Standardisierung und Individualität. Gerade die mittlerweile breite Verfügbarkeit moderner Medien und Technologien - insbesondere von PC's, Grafik- CAS-Rechnern - hat die Diskussion um Qualitätsstandards neu entflammt. Fragen wie

- Was ist Kernstoff, was gehört in den Erweiterungsbereich?
- Was sind unverzichtbare Grundkompetenzen, die jeder Schüler unbedingt beherrschen muß?
- Wie unterschiedlich dürfen Schülerleistungen sein, die in verschiedenen Schulstandorten bzw. bei verschiedenen Lehrern zur selben Benotung führen?
- Wie wichtig (wie gefährlich) sind standardisierte (internationale) Tests für unsere Lernkultur?

werden heftig und durchaus kontrovers diskutiert. Einerseits verteidigt die Mehrheit der Lehrer vehement ihre Eigenverantwortlichkeit, andererseits scheint es gerade unter Mathematikern eine gewisse Übereinkunft zu geben, was Standard ist und „jeder“ Schüler beherrschen sollte.

In diesem Spannungsfeld erstellte die Projektgruppe 2 eine Sammlung möglicher Testaufgaben für Lernerfolgsevaluationen, die jeder Lehrer verwenden und nach seinen Vorstellungen abändern bzw. ergänzen kann und soll. Die Aufgaben wurden darüberhinaus (eher untypisch) für eine österreichweite Untersuchung zum Lernerfolgsvergleich von Klassen mit und ohne CAS-unterstützem Mathematikunterricht eingesetzt.

In die Erstellung der Aufgaben waren sowohl CAS-Lehrer als auch Lehrer eingebunden, die einen traditionellen Unterricht bevorzugen. Die hohe Beteiligung beider Gruppen an der Untersuchung zeugt von der breiten Akzeptanz der ausgewählten Aufgaben.

Für die Auswahl der Aufgaben galten folgende Richtlinien:

- ***Kurze, mit und ohne CAS lösbare Aufgaben****.* Um niemanden zu bevorzugen oder zu benachteiligen, sollten alle Aufgaben zwar durchaus anspruchsvoll, aber doch „im Kopf“ lösbar sein. Mit dieser Einschränkung kommen von vornherein nur Aufgaben zu Grundkompetenzen in Frage, umfangreichere Aufgaben und „echte“ Problemlöseaufgaben fallen weg. Für die Lösung selbst sollte den Schülern - aus psychologischen Gründen - das vertraute Werkzeug (ihr üblicher Rechner) zur Verfügung stehen, auch wenn der Einsatz eines Rechners nicht unbedingt erforderlich erscheint.
- Nur Aufgaben, die Schülerinnen und Schüler ***längerfristig beherrschen*** sollen.
- ***Allgemeine und klassenspezifische Aufgaben*** (der aktuellen und aus bereits absolvierten Klassen). Für jede Schulstufe der Oberstufe (5. bis 8. Klasse) wurden jeweils 13 Aufgaben zu einem Test zusammengestellt; 5 Aufgaben aus dem Bereich „mathematisches Fachwissen“ aus dem Angebot der aktuellen Klasse, mindestens 3 Aufgaben aus dem Bereich „mathematisches Allgemeinwissen“ (A.1, A.2 usw.), der Rest aus dem Bereich „mathematisches Fachwissen“ früherer Klassen (z.B. 5.1, 5.2, 6.1, 7.2 usw.).

  Konkret enthielten die einzelnen Testhefte folgende Aufgaben:

  - 5. Klasse: A.1, A.2, A.3, A.4, A.5, A.6, A.7, A.8; 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5.
  - 6. Klasse: A.1, A.2, A.5, A.7; 5.1, 5.2, 5.4, 5.5; 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5.
  - 7. Klasse: A.1, A.2, A.7; 5.1, 5.4; 6.1, 6.3, 6.5; 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5.
  - 8. Klasse: A.1, A.2, A.7; 5.1, 5.4; 6.3, 6.5; 7.2; 8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5.

Allgemeinwissen

A.1 ***Ziel:*** *Eine Formel deuten und auswerten können.*

Eine Telefongesellschaft berechnet einen ihrer Tarife nach folgender Regel:

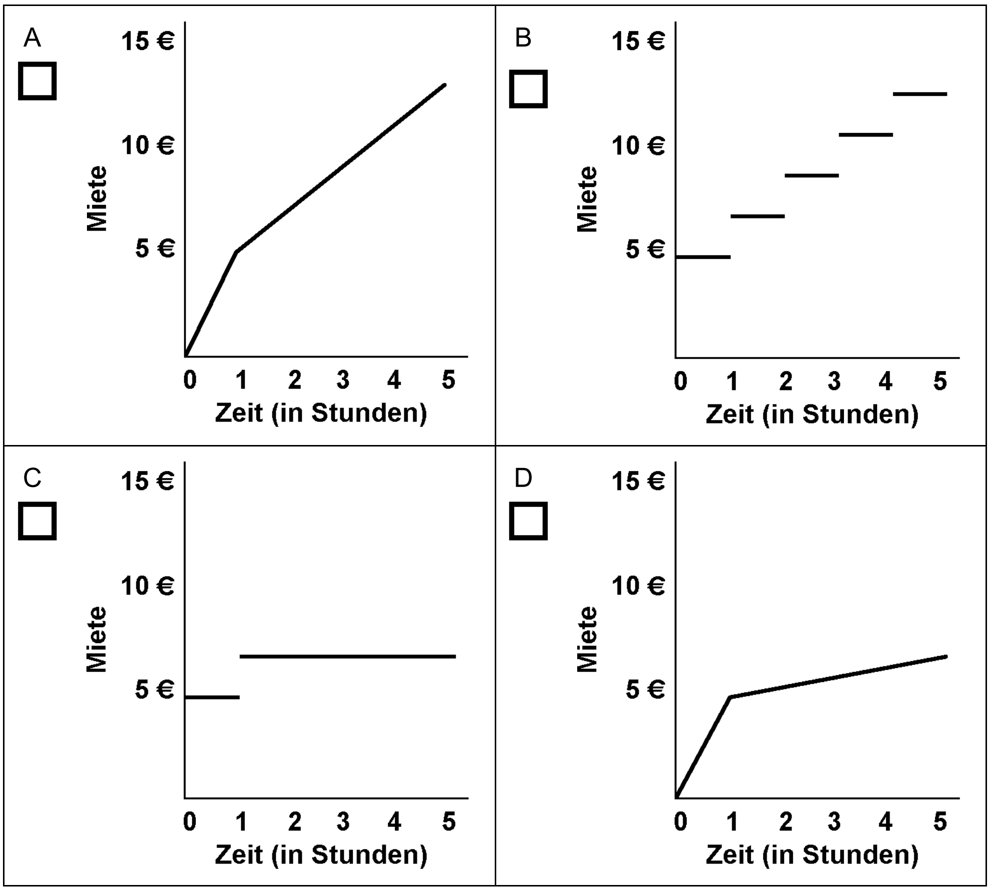
$$K = 0{,}03m + 18$$

K bezeichnet die monatlichen Kosten in Euro, m ist die Anzahl der Minuten, die in einem Monat telefoniert werden. Diese Regel bedeutet, daß für jede zusätzliche Minute die monatlichen Kosten um wie viele Euro anwachsen?

☐ 18 €	☐ 0,03 €	☐ 18,03 €	☐ ……… €

A.2 ***Ziel:*** *Graphen interpretieren können (Quelle: TIMSS).*

a) In einem Park werden Fahrräder vermietet. Die erste Stunde (oder ein Teil davon) kostet 5 €, jede weitere angefangene Stunde kostet 2 €. Welches Diagramm zeigt dies?

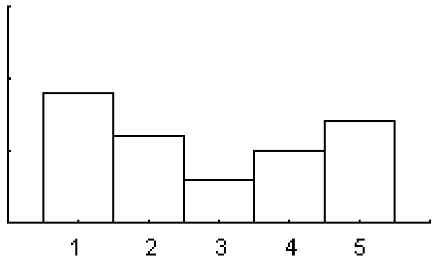


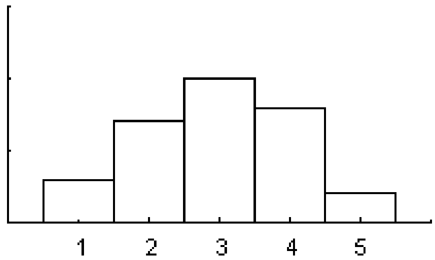
b) Wähle eines der übrigen Diagramme und beschreibe die hier dargestellte Preisgestaltung mit Worten. Vergiß nicht anzugeben, welches Diagramm (A, B, C, D) du gewählt hast.

Die in Diagramm ……… dargestellte Preisgestaltung bedeutet:

A.3 ***Ziel:*** *Graphen interpretieren können.*

Die Ergebnisse zweier Schularbeiten einer Klasse mit 30 Schülern werden jeweils durch ein Histogramm grafisch dargestellt. Beschreibe mit Worten, wie die beiden Arbeiten insgesamt ausgefallen sind.

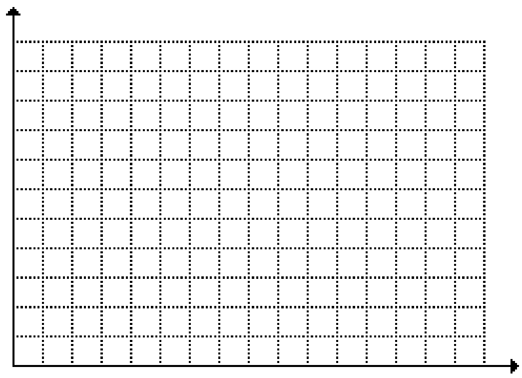




Beschreibung:	Beschreibung:

A.4 ***Ziel:*** *Einen Sachverhalt grafisch - mit Skalierung - darstellen können (Quelle: TIMSS).*

Zeichne in das vorgegebene Koordinatensystem einen Graphen ein, der die Beziehung zwischen der Körpergröße einer Person und ihrem Alter vom Zeitpunkt der Geburt bis 30 Jahren darstellt. Vergiß nicht, die Grafik zu beschriften und auf jeder Achse einen realistischen Maßstab einzutragen.



A.5 ***Ziel:*** *Mit Prozenten hantieren können.*

Laut Statistik leiden ca. 8% aller Männer Europas an Rotgrünblindheit. Wie viele Burschen einer Klasse mit 25 männlichen Schülern sollten demnach von dieser Fehlsichtigkeit betroffen sein?

A.6 ***Ziel:*** *Mit Prozenten hantieren können (Quelle: TIMSS).*

Fachleute sagen, daß bei einem Viertel aller schweren Fahrradunfälle Kopfverletzungen auftreten und daß 80% aller Kopfverletzungen tödlich sind.

Wieviel Prozent aller schweren Fahrradunfälle sind mit tödlichen Kopfverletzungen verbunden?

……… %

A.7 ***Ziel:*** *Mit Prozenten hantieren können.*

Wo kauft man günstiger?

Geschäft A: Preis der Ware in Schilling → 10% Rabatt → Umrechnung in Euro.
Geschäft B: Preis der Ware in Schilling → Umrechnung in Euro → 10% Rabatt.

☐ A ist günstiger.	☐ B ist günstiger.	☐ Beide sind gleich.

A.8 ***Ziel:*** *Die mittlere Geschwindigkeit bestimmen können.*

Von A nach B sind es 60 km. Ein Auto fährt mit 60 km/h von A nach B und mit 120 km/h von B nach A zurück. Mit welcher mittleren Geschwindigkeit war das Auto unterwegs?

☐ 80 km/h	☐ 90 km/h	☐ ……… km/h

5. Klasse

5.1 ***Ziel:*** *Einen gegebenen Text in eine Gleichung übersetzen können.*

Beschreibe den folgenden Sachverhalt durch eine Gleichung mit *einer* Unbekannten:

Die Fläche eines rechteckigen Grundstücks, dessen Breite $\frac{3}{4}$ seiner Länge ausmacht, beträgt 675 m^2.

Die Gleichung lautet:

5.2 ***Ziel:*** *Ein einfaches Gleichungssystem lösen können.*

Berechne die Unbekannten in folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 20 \\ x - y &= 8 \end{aligned}$$

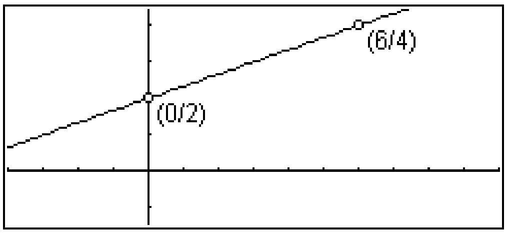
x =	y =

5.3 ***Ziel:*** *Eine Geradengleichung aufstellen können.*

Eine Gerade geht durch die Punkte P(0/2) und Q(6/4).

a) Wie lautet ihre Gleichung?

b) Wie groß ist ihre Steigung?



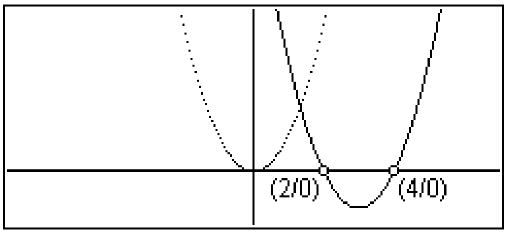
Die Geradengleichung lautet:	Die Steigung der Geraden beträgt:

5.4 ***Ziel:*** *Die Faktorisierung einer quadratischen Gleichung wissen und anwenden können.*

Die quadratische Parabel $y = x^2$ (gepunktet) ist im Koordinatensystem nach rechts unten verschoben. N_1 (2/0) und N_2 (4/0) sind die Nullstellen der neuen Kurve.

a) Wie lautet die Gleichung der neuen Kurve?

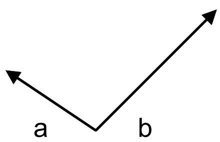
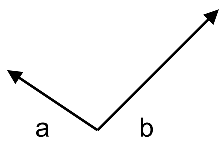
b) Welche Koordinaten hat ihr Scheitel?



Die neue Parabelgleichung lautet:	Ihr Scheitel hat die Koordinaten:

5.5 ***Ziel:*** *Elementare Rechenoperationen mit Vektoren geometrisch deuten und ausführen können.*

Gegeben sind 2 Vektoren a und b. Konstruiere

a + b:	a - b:
	

6. Klasse

6.1 ***Ziel:*** *Potenzen richtig deuten können.*

a) Schreibe folgende Ausdrücke als Zehnerpotenz:

ein Hundertstel = $10^{\cdots\cdots}$	zehntausend = $10^{\cdots\cdots}$	eine Million = $10^{\cdots\cdots}$

b) Ergänze folgende Tabelle:

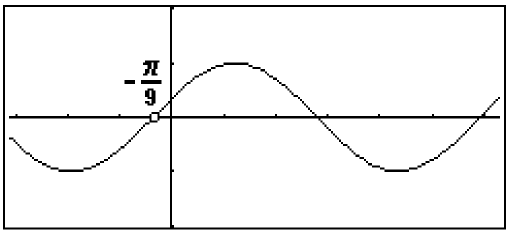
Potenz	Bruch / Wurzel	Numerischer Wert
	$\frac{1}{8}$	
		0,001
$8^{-\frac{2}{3}}$		
	$\sqrt[3]{8}$	

6.2 ***Ziel:*** *Eigenschaften der Winkelfunktionen kennen.*

Stelle die gegebene Kurve

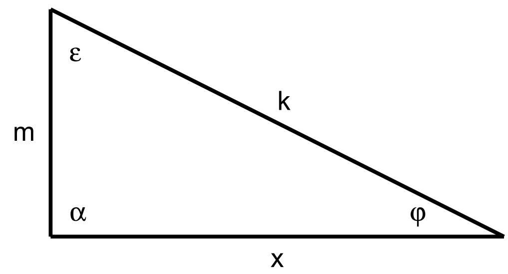
a) als Sinus-

b) als Cosinusfunktion dar:



y = sin (……………)	y = cos (……………)

6.3 ***Ziel:*** *Eigenschaften der Winkelfunktionen kennen.*



tan ε =	sin φ =	cos α =

6.4 ***Ziel:*** *Eigenschaften der Winkelfunktionen kennen.*

Ergänze die Winkel:

cos (27°) = cos (………) = sin (………) = sin (………) = sin (………)

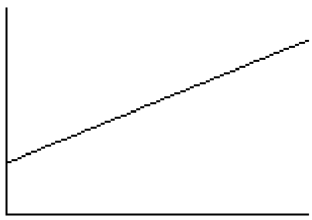
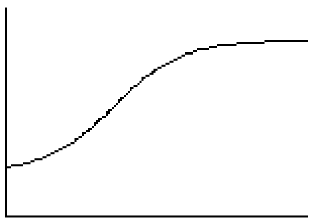
Begründe jede deiner Antworten durch eine Skizze.

6.5 ***Ziel:*** *Lineares und exponentielles Wachstum unterscheiden können.*

a) 30 000 € liegen auf einem Sparbuch mit 3% Zinsen. Das Guthaben nach 2 Jahren beträgt

☐ 31 827 €	☐ 31 800 €	☐ 39 000 €	☐ ……… €

b) Welcher Graph beschreibt am ehesten das Wachstum des Kapitals?

☐ 	☐ 	☐ 

7. Klasse

7.1 ***Ziel:*** *Grundlegende Begriffe in Zusammenhang mit Funktionen kennen.*

Gegeben ist eine reelle Funktion f: $\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$. Zeichne in ihrem Graphen (soweit vorhanden) folgende Merkmale jeweils an mindestens einer Stelle ein:

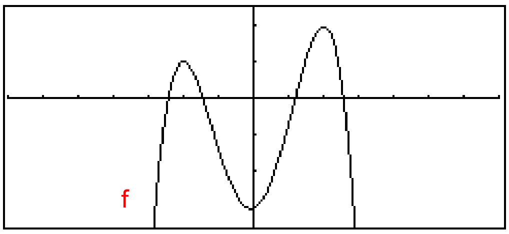
a) globales bzw. absolutes Maximum (Max)

b) lokales bzw. relatives Minimum (min)

c) Wendepunkt (W)

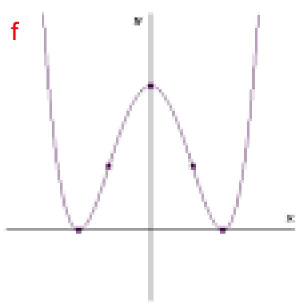
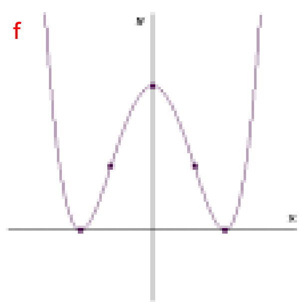
d) Nullstelle (N)

e) Fixpunkt (F)



7.2 ***Ziel:*** *Die geometrische Bedeutung der Ableitung kennen.*

Kennzeichne mit Farbe jene Bereiche der gegebenen Funktion f, wo

die erste Ableitung > 0 ist:	die zweite Ableitung > 0 ist:
	

7.3 ***Ziel:*** *Die Bedeutung der Ableitung kennen und richtig schließen können.*

a) Wenn bei $x = x_0$ ein Wendepunkt vorliegt, dann ist $y''(x_0) = 0$.

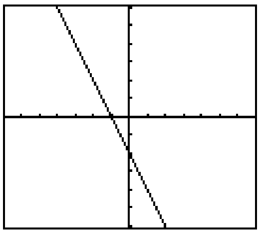
☐ immer	☐ manchmal	☐ nie

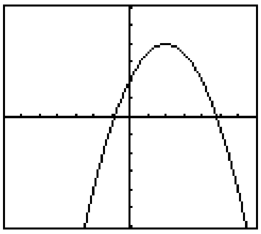
b) Wenn $y''(x_0) = 0$, dann ist bei $x = x_0$ ein Wendepunkt.

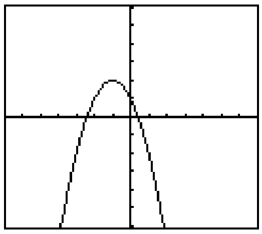
☐ immer	☐ manchmal	☐ nie

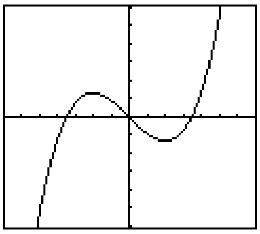
7.4 ***Ziel:*** *Die geometrische Bedeutung der Ableitung kennen (Quelle: Mathe Online).*

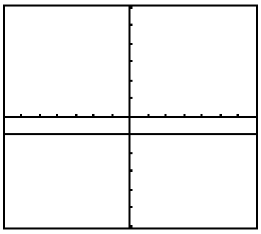
Welches Bild gehört wohin?

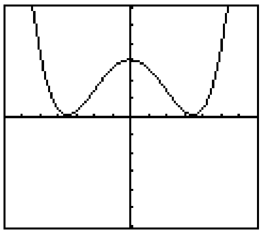
A: 

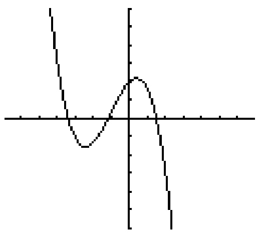
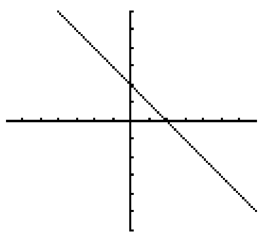
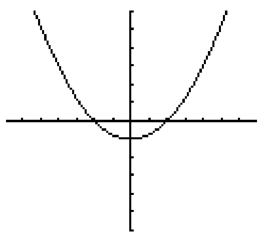
B: 

C: 

D: 

E: 

F: 

f_1	f_2	f_3
	f_2 ………	f_3 ………
f_1' ………		f_3' ………
f_1'' ………	f_2'' ………	

7.5 ***Ziel:*** *Den relativen Anteil von relativer Häufigkeit unterscheiden können.*

Beim Werfen einer Münze gibt es nur zwei mögliche Versuchsergebnisse (Zahl nach oben oder Zahl nach unten), somit ist die Aussage

Die Wahrscheinlichkeit von „Zahl nach oben" = $\frac{1}{2}$

sinnvoll.

a) Wirft man anstatt einer Münze einen Reißnagel, gibt es ebenfalls nur zwei mögliche Versuchsergebnisse (Spitze nach oben oder Spitze schräg nach unten). Warum ist hier die Aussage

Die Wahrscheinlichkeit von „Spitze nach oben" = $\frac{1}{2}$

nicht sinnvoll?

Die Aussage ist nicht sinnvoll, weil:

b) Wie könnte man auch für den Wurf eines Reißnagels zu einer sinnvollen Aussage über die Wahrscheinlichkeit von „Spitze nach oben" kommen?

8. Klasse

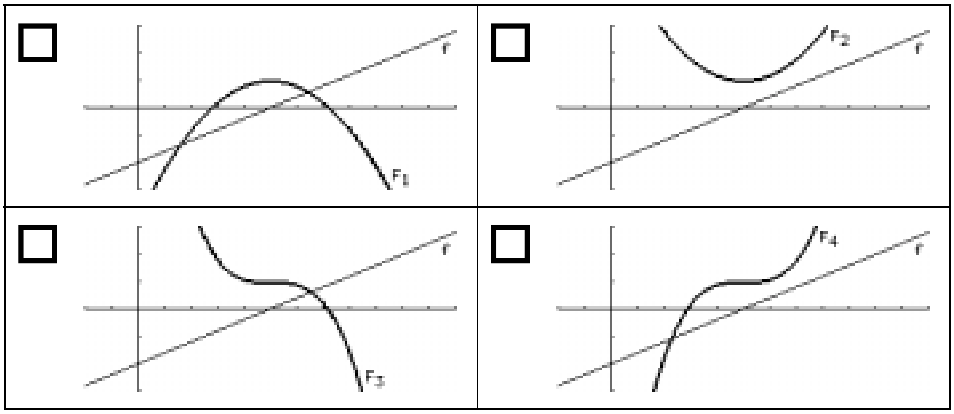
8.1 ***Ziel:*** *Eigenschaften von Stammfunktionen kennen.*

Welche der angegebenen Funktionen sind Stammfunktion von f: $y = \frac{1}{x}$?

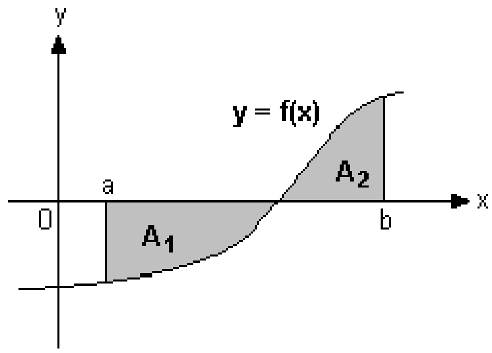
☐ $y = \ln x$	☐ $y = \ln x + 2$	☐ $y = \ln (x + 2)$	☐ $y = \ln 2x$

8.2 ***Ziel:*** *Zusammenhänge zwischen Funktion und Stammfunktion analysieren können.*

Welche der Funktionen F_i kommt (kommen) als Stammfunktion von f in Frage?



8.3 ***Ziel:*** *Zwischen Flächeninhalt und Wert des Integrals unterscheiden können (Quelle: TIMSS).*



Die Figur zeigt den Graphen von y = f(x). A_1 ist die Fläche, die von der x-Achse, x = a und y = f(x) begrenzt wird. A_2 ist die Fläche, welche von der x-Achse, x = b und y = f(x) begrenzt wird. Dabei ist a < b und 0 < A_2 < A_1. Der Wert von $\int_a^b f(x)\,dx$ ist

☐ $A_1 + A_2$	☐ $A_1 - A_2$	☐ $A_2 - A_1$	☐ $\lvert A_1 - A_2 \rvert$

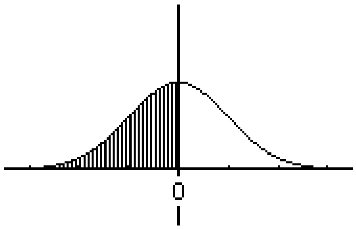
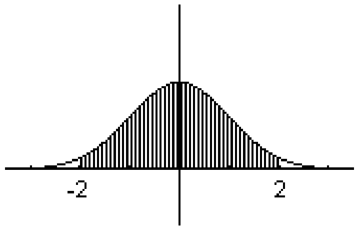
8.4 ***Ziel:*** *Die Bedeutung von Mittelwert und Standardabweichung verstehen (Quelle: TIMSS).*

Der Mittelwert einer Stichprobe beträgt $\mu = 5$ und seine Standardabweichung beträgt $\sigma = 1$. Falls zu jedem Element dieser Stichprobe 10 addiert wird, was passiert mit Mittelwert und Standardabweichung?

Der Mittelwert	**Die Standardabweichung**
☐ bleibt gleich	☐ bleibt gleich
☐ wird größer um ………	☐ wird größer um ………
☐ wird kleiner um ………	☐ wird kleiner um ………

8.5 ***Ziel:*** *Die Normalverteilung und ihre Standardabweichung verstehen.*

Die folgenden Diagramme zeigen jeweils die Kurve der standardisierten Normalverteilung (Mittelwert $\mu = 0$, Standardabweichung $\sigma = 1$). Wie groß ist jeweils die schraffierte Fläche?

	
A =	A =

Hinweis: fertig zusammengestellte Testhefte, Lösungen und Auswertungsrichtlinien sind über die Internet-Homepage von ACDCA verfügbar:

- http://www.acdca.ac.at/

Teilnehmer

Österreichweit haben sich an der Untersuchung **1277 SchülerInnen** aus **74 Klassen** aus **26 Schulen** aus allen **9 Bundesländern** beteiligt.

39 Klassen arbeiten mit CAS-Rechnern (TI-92 oder TI-89), 35 Klassen mit traditionellen Rechnern (TI-30 oder ähnliche). Lediglich in 2 dieser Klassen gibt es Mischformen, in denen jeweils ein Teil der SchülerInnen mit CAS-Rechnern und ein anderer Teil mit traditionellen Rechnern arbeitet (sie wurden daher nicht als CAS-Klassen gezählt und die Anzahl der CAS-Schüler weicht geringfügig von der Anzahl der Schüler in CAS-Klassen ab); ebenfalls 2 Nicht-CAS-Klassen gaben an, gelegentlich mit PC's zu arbeiten.

Eine detaillierte Übersicht über teilnehmende Klassen und Schüler zeigen die Tabellen auf den folgenden Seiten.

QiM: Teilnehmende Klassen

		5. Klasse												6. Klasse												7. Klasse											
		G		RG		mORG		nORG		SF		HAK		G		RG		mORG		nORG		SF		HAK		G		RG		mORG		nORG		SF		HAK	
		CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x
1040	pG Theresianum Wien		1											1	2																						
1080	BG/BRG Albertg. Wien	1																								1	1										
1120	BG/BRG Rosasg. Wien																										1		1								
1130	BG/BRG Fichtnerg. Wien																										1	1									
1190	pG Alfred-Wegener-G. Wien	1												1																							
2000	BG/BRG Stockerau			1										1	1	1												1									
2230	BG/BRG Gänserndorf		1																																		
2500	BG/BRG Baden			1																																	
2560	BG/BRG Berndorf	2		1											1	1											1										
2700	BG Wiener Neustadt																																	1			
3100	BRG/BORG St. Pölten						1	1																													
3100	pG der engl. Frl. St. Pölten													1	1																						
3300	BG Amstetten																																	1			
3430	BG/BRG Tulln	1												1																							
3430	BHAK Tulln																							1	1											1	
3500	BG/BRG Piaristeng. Krems		1	1											1														1								
3500	BRG Ringstr. Krems			2																									1								
4780	BG/BRG Schärding														1	1												1									
4820	BG/BRG Bad Ischl		1	1												1	1											1	1								
5020	BORG Salzburg								1		1										1												1				
6850	BG Dornbirn																									1											
7000	BG/BRG/BORG Eisenstadt		1	1												1			1																		
7350	BG/BRG Oberpullendorf																										1	1									
8020	BRG Keplerstr. Graz			1	1																							2	1								
9400	BORG Wolfsberg																	1	2		1																
9900	BORG Lienz																														1						

Schulformen:

Gymnasium (G), Realgymnasium (RG), musisches Oberstufenrealgymnasium (mORG), naturwissenschaftliches Oberstufenrealgymnasium (nORG), Sonder- bzw. Schwerpunktform (SF), Handelsakademie (HAK).

Einsatz von Computeralgebra-Systemen:

Klassen mit CAS-Rechnern (CAS), Klassen ohne CAS-Rechner (x).

QiM: Teilnehmende SchülerInnen

		5. Klasse											
		G		RG		mORG		nORG		SF		HAK	
		CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x
1040	pG Theresianum Wien		28										
1080	BG/BRG Albertg. Wien	18											
1120	BG/BRG Rosasg. Wien												
1130	BG/BRG Fichtnerg. Wien												
1190	pG Alfred-Wegener-G. Wien	15											
2000	BG/BRG Stockerau			8									
2230	BG/BRG Gänserndorf		11										
2500	BG/BRG Baden			23									
2560	BG/BRG Berndorf	38		18									
2700	BG Wiener Neustadt												
3100	BRG/BORG St. Pölten						35	29					
3100	pG der engl. Frl. St. Pölten												
3300	BG Amstetten												
3430	BG/BRG Tulln	16											
3430	BHAK Tulln												
3500	BG/BRG Piaristeng. Krems		8	23									
3500	BRG Ringstr. Krems			34									
4780	BG/BRG Schärding												
4820	BG/BRG Bad Ischl		21	14									
5020	BORG Salzburg								20		29		
6850	BG Dornbirn												
7000	BG/BRG/BORG Eisenstadt		16	25									
7350	BG/BRG Oberpullendorf												
8020	BRG Keplerstr. Graz			20	15								
9400	BORG Wolfsberg												
9900	BORG Lienz												

		6. Klasse											
		G		RG		mORG		nORG		SF		HAK	
		CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x
1040	pG Theresianum Wien	21	38										
1080	BG/BRG Albertg. Wien												
1120	BG/BRG Rosasg. Wien												
1130	BG/BRG Fichtnerg. Wien												
1190	pG Alfred-Wegener-G. Wien	16											
2000	BG/BRG Stockerau	16	10	11									
2230	BG/BRG Gänserndorf												
2500	BG/BRG Baden												
2560	BG/BRG Berndorf		11	20									
2700	BG Wiener Neustadt												
3100	BRG/BORG St. Pölten												
3100	pG der engl. Frl. St. Pölten	23	21										
3300	BG Amstetten												
3430	BG/BRG Tulln	25											
3430	BHAK Tulln											16	19
3500	BG/BRG Piaristeng. Krems		9										
3500	BRG Ringstr. Krems												
4780	BG/BRG Schärding		18	13									
4820	BG/BRG Bad Ischl			23	22								
5020	BORG Salzburg								14				
6850	BG Dornbirn												
7000	BG/BRG/BORG Eisenstadt			20			20						
7350	BG/BRG Oberpullendorf												
8020	BRG Keplerstr. Graz												
9400	BORG Wolfsberg					23	29		20				
9900	BORG Lienz												

		7. Klasse											
		G		RG		mORG		nORG		SF		HAK	
		CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x	CAS	x
1040	pG Theresianum Wien												
1080	BG/BRG Albertg. Wien	18	8										
1120	BG/BRG Rosasg. Wien		11		20								
1130	BG/BRG Fichtnerg. Wien		13	7									
1190	pG Alfred-Wegener-G. Wien												
2000	BG/BRG Stockerau			9									
2230	BG/BRG Gänserndorf												
2500	BG/BRG Baden												
2560	BG/BRG Berndorf		21										
2700	BG Wiener Neustadt									13			
3100	BRG/BORG St. Pölten												
3100	pG der engl. Frl. St. Pölten												
3300	BG Amstetten									14			
3430	BG/BRG Tulln												
3430	BHAK Tulln											20	
3500	BG/BRG Piaristeng. Krems				15								
3500	BRG Ringstr. Krems				20								
4780	BG/BRG Schärding			11									
4820	BG/BRG Bad Ischl			11	13								
5020	BORG Salzburg								17				
6850	BG Dornbirn	17											
7000	BG/BRG/BORG Eisenstadt												
7350	BG/BRG Oberpullendorf		12	22									
8020	BRG Keplerstr. Graz			36	14								
9400	BORG Wolfsberg												
9900	BORG Lienz						13						

Schulformen:

Gymnasium (G), Realgymnasium (RG), musisches Oberstufenrealgymnasium (mORG), naturwissenschaftliches Oberstufenrealgymnasium (nORG), Sonder- bzw. Schwerpunktform (SF), Handelsakademie (HAK).

Einsatz von Computeralgebra-Systemen:

Klassen mit CAS-Rechnern (CAS), Klassen ohne CAS-Rechner (x).

Auswertung

Zunächst muß bemerkt werden, daß die durchgeführte Untersuchung *nicht* strengen wissenschaftlichen Kriterien genügt, sondern vielmehr die bunte Vielfalt des Schulalltags widerspiegelt.

- Die Durchführung der Tests erfolgte zwar generell gegen Ende des Schuljahres 1999/2000, jedoch zu verschiedenen Terminen in wesentlich verschiedenen Situationen: vor bzw. nach Exkursionen oder ähnlichen Veranstaltungen, vor bzw. nach Schularbeiten, vor bzw. nach der Jahreskonferenz, in Ausnahmefällen sogar in der allerletzten Mathematikstunde des Schuljahres.
- Jeder Schüler einer Klasse erhielt das gleiche Testheft, verschiedene Gruppen (wie bei Schularbeiten) waren nicht vorgesehen. Unterschiedliche Situationen ergaben sich daher auch zwangsläufig hinsichtlich der Schülerzahl in einer Klasse, der Klassenraumgröße usw.
- Die Erstauswertung der Testhefte wurde vom jeweiligen Klassenlehrer, d.h. von vielen verschiedenen Personen vorgenommen. Sicherlich interpretierten nicht alle LehrerInnen die vorgegebenen Auswertungsrichtlinien in gleicher Weise. Diese Vorgangsweise ist wohl nicht ideal, die große Zahl der TeilnehmerInnen erlaubte aber keine Alternative.

Andererseits läßt gerade die große Zahl der TeilnehmerInnen und die relative Ausgewogenheit zwischen CAS- und Nicht-CAS-Klassen hoffen, daß die vielen Unterschiede hier wie dort auftreten und sich in Summe wieder ausgleichen.

Die Auswertung der Daten zeigt, daß CAS-Schüler ("CAS") bei **51 von 54 Aufgaben** und in Summe in **allen 3** getesteten Schulstufen *besser* abschneiden als Nicht-CAS-Schüler ("x"). Die Unterschiede sind teilweise gering, in den meisten Fällen und insbesondere beim Vergleich der einzelnen Schulstufen aber statistisch signifikant, d.h. Excel berechnet die Wahrscheinlichkeit, daß die beobachteten Unterschiede der Mittelwerte auf Zufällen beruhen bzw. die Stichproben doch aus Grundgesamtheiten mit gleichem Mittelwert stammen, als annähernd gleich 0.

Hinweis: der anonyme Rohdatensatz mit allen 1277 Schülerdaten steht als Excel-Datei sowie "zerstückelt" auch in Form von mehreren TI-92- bzw. TI-89-Dateien auf der Internet-Homepage von ACDCA für eigene Auswertungen zur Verfügung:

- http://www.acdca.ac.at/

Aus Zeitgründen konnte die Untersuchung in den 8. Klassen nicht mehr durchgeführt werden.

Eine detaillierte Übersicht über die Auswertung zeigen die Tabellen auf den folgenden Seiten.

Maximal erreichbare Punkte

A.1	A.2a	A.2b	A.3	A.4	A.5	A.6	A.7	A.8
1	1	1	2	1	1	1	1	1

5.1	5.2	5.3a	5.3b	5.4a	5.4b	5.5a	5.5b
1	1	1	1	1	1	1	1

6.1a	6.1b	6.2a	6.2b	6.3	6.4	6.5a	6.5b
1	4	1	1	2	5	1	1

7.1	7.2	7.3a	7.3b	7.4	7.5a	7.5b
5	2	1	1	3	1	1

8.1	8.2	8.3	8.4	8.5
2	1	1	2	2

Summe 5. Klasse	Summe 6. Klasse	Summe 7. Klasse	Summe 8. Klasse
18	27	30	21

Testitems Allgemeinwissen

			A.1	A.2a	A.2b	A.3	A.4	A.5	A.6	A.7	A.8
5. Klasse	**alle**	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,72	0,66	0,64	0,62	0,57	0,87	0,75	0,71	0,11
		Standardabweichung σ	0,45	0,48	0,48	0,56	0,50	0,34	0,43	0,45	0,31
	CAS	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,71	0,70	0,70	0,63	0,61	0,88	0,77	0,73	0,13
		Standardabweichung σ	0,45	0,46	0,46	0,83	0,49	0,33	0,42	0,45	0,34
	x	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,72	0,58	0,55	0,60	0,49	0,86	0,73	0,69	0,08
		Standardabweichung σ	0,45	0,49	0,50	0,84	0,50	0,35	0,45	0,46	0,27
6. Klasse	**alle**	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,65	0,69	0,65			0,93		0,78	
		Standardabweichung σ	0,48	0,46	0,48			0,25		0,41	
	CAS	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,75	0,80	0,70			0,94		0,77	
		Standardabweichung σ	0,43	0,40	0,46			0,23		0,42	
	x	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,54	0,59	0,60			0,92		0,79	
		Standardabweichung σ	0,50	0,49	0,49			0,27		0,41	
7. Klasse	**alle**	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,79	0,76	0,69					0,86	
		Standardabweichung σ	0,41	0,43	0,46					0,34	
	CAS	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,90	0,82	0,76					0,90	
		Standardabweichung σ	0,30	0,38	0,43					0,29	
	x	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,68	0,71	0,62					0,82	
		Standardabweichung σ	0,47	0,46	0,49					0,38	
gesamt	**alle**	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,71	0,70	0,66	0,62	0,57	0,90	0,75	0,78	0,11
	CAS	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,77	0,76	0,72	0,63	0,61	0,91	0,77	0,79	0,13
	x	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,64	0,62	0,59	0,60	0,49	0,89	0,73	0,77	0,08
TIMSS	**AHS**	Anteil richtige Antworten	0,50	0,66			0,38		0,80		

Hinweis: die Aufgaben A.2a, A.4 und A.6 wurden der TIMS-Studie entnommen, die Aufgabe A.1 ist an eine der TIMSS-Aufgaben angelehnt; für diese Aufgaben wurde daher als Vergleichswert der Anteil der von AHS-SchülerInnen bei TIMSS richtig gegebenen Antworten angeführt.

Testitems 5. Klasse

			5.1	5.2	5.3a	5.3b	5.4a	5.4b	5.5a	5.5b
5. Klasse	**alle**	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	0,71	0,84	0,58	0,47	0,26	0,52	0,40	0,37
		Standardabweichung σ	0,45	0,37	0,49	0,50	0,44	0,50	0,49	0,48
	CAS	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	0,76	0,87	0,62	0,51	0,34	0,57	0,44	0,40
		Standardabweichung σ	0,43	0,33	0,48	0,50	0,48	0,49	0,50	0,49
	x	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	0,64	0,79	0,51	0,40	0,12	0,44	0,34	0,32
		Standardabweichung σ	0,48	0,41	0,50	0,49	0,33	0,50	0,47	0,47
6. Klasse	**alle**	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	0,71	0,84			0,13	0,36	0,38	0,31
		Standardabweichung σ	0,45	0,36			0,33	0,48	0,48	0,46
	CAS	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	0,73	0,84			0,23	0,34	0,40	0,36
		Standardabweichung σ	0,44	0,36			0,42	0,47	0,49	0,48
	x	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	0,70	0,85			0,02	0,38	0,35	0,25
		Standardabweichung σ	0,46	0,36			0,15	0,49	0,48	0,43
7. Klasse	**alle**	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	0,88				0,23	0,47		
		Standardabweichung σ	0,33				0,42	0,50		
	CAS	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	0,94				0,36	0,47		
		Standardabweichung σ	0,24				0,48	0,50		
	x	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	0,81				0,10	0,46		
		Standardabweichung σ	0,39				0,29	0,50		
gesamt	**alle**	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	0,76	0,84	0,58	0,47	0,20	0,45	0,39	0,34
	CAS	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	0,80	0,86	0,62	0,51	0,31	0,47	0,42	0,39
	x	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	0,71	0,82	0,51	0,40	0,07	0,42	0,35	0,28

Testitems 6. Klasse

			6.1a	6.1b	6.2a	6.2b	6.3	6.4	6.5a	6.5b
6. Klasse	**alle**	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,65	2,86	0,15	0,05	0,83	0,55	0,74	0,75
		Standardabweichung σ	0,48	1,31	0,35	0,21	0,76	1,11	0,44	0,43
	CAS	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,69	2,92	0,27	0,07	0,87	0,60	0,81	0,75
		Standardabweichung σ	0,46	1,24	0,44	0,26	0,75	1,23	0,39	0,43
	x	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,61	2,80	0,03	0,02	0,78	0,51	0,67	0,75
		Standardabweichung σ	0,49	1,36	0,16	0,15	0,77	0,98	0,47	0,43
7. Klasse	**alle**	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,63	3,09			0,98		0,75	0,75
		Standardabweichung σ	0,48	1,19			0,81		0,43	0,43
	CAS	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,67	3,29			1,08		0,83	0,83
		Standardabweichung σ	0,47	1,05			0,79		0,38	0,38
	x	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,59	2,89			0,88		0,68	0,67
		Standardabweichung σ	0,49	1,29			0,82		0,47	0,47
gesamt	**alle**	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,64	2,96	0,15	0,05	0,89	0,55	0,75	0,75
	CAS	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,68	3,08	0,27	0,07	0,97	0,60	0,82	0,79
	x	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	0,60	2,84	0,03	0,02	0,82	0,51	0,68	0,72

Testitems 7. Klasse

			7.1	7.2	7.3a	7.3b	7.4	7.5a	7.5b
7. Klasse	**alle**	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	3,57	0,66	0,77	0,43	1,36	0,67	0,29
		Standardabweichung σ	1,10	0,83	0,42	0,50	1,40	0,47	0,45
	CAS	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	3,90	0,82	0,79	0,44	1,81	0,76	0,36
		Standardabweichung σ	0,91	0,88	0,41	0,50	1,36	0,42	0,48
	x	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	3,23	0,50	0,75	0,42	0,90	0,58	0,22
		Standardabweichung σ	1,17	0,75	0,43	0,49	1,28	0,49	0,41
gesamt	**alle**	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	3,57	0,66	0,77	0,43	1,36	0,67	0,29
	CAS	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	3,90	0,82	0,79	0,44	1,81	0,76	0,36
	x	arithmetisches Mittel $\bar{x}$	3,23	0,50	0,75	0,42	0,90	0,58	0,22

Gesamtpunktezahl

			Summe
5. Klasse	**alle**	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	10,41
		Standardabweichung σ	3,18
	CAS	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	11,03
		Standardabweichung σ	3,05
	x	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	9,45
		Standardabweichung σ	3,14
6. Klasse	**alle**	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	13,01
		Standardabweichung σ	4,32
	CAS	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	13,87
		Standardabweichung σ	4,25
	x	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	12,16
		Standardabweichung σ	4,23
7. Klasse	**alle**	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	18,63
		Standardabweichung σ	5,80
	CAS	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	20,73
		Standardabweichung σ	5,20
	x	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	16,51
		Standardabweichung σ	5,60
gesamt	**alle**	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	13,63
	CAS	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	14,48
	x	arithmetisches Mittel $\overline{x}$	12,63

Signifikanz

Vergleich (TTest)	A.1	A.2a	A.2b	A.3	A.4	A.5	A.6	A.7	A.8
5 CAS / x	0,44	**0,00**	**0,00**	0,11	**0,01**	0,25	0,14	0,18	**0,03**
6 CAS / x	**0,00**	**0,00**	**0,01**			0,18		0,35	
7 CAS / x	**0,00**	**0,01**	**0,00**					**0,01**	
gesamt CAS / x	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,11	**0,01**	0,23	0,14	0,17	**0,03**

Vergleich (TTest)	5.1	5.2	5.3a	5.3b	5.4a	5.4b	5.5a	5.5b
5 CAS / x	**0,00**	**0,01**	**0,01**	**0,01**	**0,00**	**0,00**	**0,02**	**0,03**
6 CAS / x	0,19	0,43			**0,00**	0,18	0,15	**0,00**
7 CAS / x	**0,00**				**0,00**	0,44		
gesamt CAS / x	**0,00**	0,06	**0,01**	**0,01**	**0,00**	0,05	**0,01**	**0,00**

Vergleich (TTest)	6.1a	6.1b	6.2a	6.2b	6.3	6.4	6.5a	6.5b
5 CAS / x								
6 CAS / x	**0,03**	0,16	**0,00**	**0,01**	0,09	0,21	**0,00**	0,48
7 CAS / x	0,07	**0,00**			**0,01**		**0,00**	**0,00**
gesamt CAS / x	**0,01**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	**0,00**	0,21	**0,00**	**0,01**

Vergleich (TTest)	7.1	7.2	7.3a	7.3b	7.4	7.5a	7.5b	Summe
5 CAS / x								**0,00**
6 CAS / x								**0,00**
7 CAS / x	**0,00**	**0,00**	0,22	0,39	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**
gesamt CAS / x	**0,00**	**0,00**	0,22	0,39	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**

Ad 3: ***"Top 10"-Aufgabensammlung*** zum Thema „unbestimmtes Integral“

1. ***Ziel:*** *Die Begriffe „unbestimmtes Integral“ bzw. „Stammfunktion“ erklären können.*
   a) Erkläre die Begriffe „unbestimmtes Integral“ bzw. „Stammfunktion“.
   b) Wie viele Stammfunktionen einer gegebenen Funktion f gibt es und wodurch unterscheiden sich ihre Funktionsterme bzw. ihre Graphen?

2. ***Ziel:*** *Stammfunktionen einer gegebenen Funktion ermitteln und analysieren können.*
   i) Ermittle alle Stammfunktionen der gegebenen Funktion f.
   ii) Welche davon geht durch den Punkt P(1/3)?
   iii) Gibt es einen Punkt $Q(x_Q/y_Q)$, durch den keine der ∞ vielen Stammfunktionen verläuft?

a) f: $y = x^3 - x + 4$	h) f: $y = e^{2x}$
b) f: $y = \sqrt{3x+1}$	i) f: $y = 3^x$
c) f: $y = \sqrt[3]{8x-7}$	j) f: $y = x^3 \cdot e^x$
d) f: $y = \frac{1}{x}$	k) f: $y = \ln x$
e) f: $y = \frac{7}{3x-2}$	l) f: $y = \sin 2x - \cos\frac{x}{2}$
f) f: $y = \frac{3x^2+16x+1}{6x}$	m) f: $y = \tan x$
g) f: $y = \frac{x}{3x^2+1}$	n) f: $y = \sqrt{4-x^2}$

[**Lösungen: a)** $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{3}{4}$ **b)** $\frac{2}{9}\cdot(3x+1)\cdot\sqrt{3x+1} + \frac{11}{9}$, $x_Q \geq -\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{3}{32}\cdot(8x-7)\cdot\sqrt[3]{8x-7} + \frac{93}{32}$, $x_Q \geq \frac{7}{8}$

d) $\ln|x| + 3$, $x_Q \neq 0$ **e)** $\frac{7}{3}\cdot\ln|3x-2| + 3$, $x_Q \neq \frac{2}{3}$ **f)** $\frac{1}{12}\cdot x\cdot(3x+32) + \frac{1}{6}\cdot\ln|x| + \frac{1}{12}$, $x_Q \neq 0$

g) $\frac{1}{6}\cdot\ln(3x^2+1) + 2{,}769$ **h)** $\frac{1}{2}\cdot e^{2x} - 0{,}695$ **i)** $\frac{3^x}{\ln 3} - 0{,}269$ **j)** $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\cdot e^x + 8{,}437$

k) $x\cdot(\ln x - 1) + 4$, $x_Q > 0$ **l)** $-\frac{1}{2}\cdot\cos 2x - 2\cdot\sin\frac{x}{2} + 3{,}751$ **m)** $-\ln|\cos x| + 2{,}384$, $x_Q \neq k\cdot\frac{\pi}{2}$

n) $\frac{x\cdot\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\cdot\sin^{-1}\frac{x}{2} + 1{,}087$, $-2 < x_Q < 2$]

3. ***Ziel:*** *Stammfunktionen einer gegebenen Funktion ermitteln und analysieren können.*
   i) Ermittle alle Stammfunktionen von f: $y = \frac{x^3 - x + 1}{(x-2)^2}$.
   ii) Woher kommt der Logarithmus-Summand im Term von F?

[**Lösungen:** $\int \frac{x^3 - x + 1}{(x-2)^2}\,dx = \int x + 3 + \underline{\underline{\frac{8}{x-2}}} + \frac{5}{(x-2)^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \underline{\underline{8\cdot\ln|x-2|}} - \frac{5}{x-2} + c$]

4. ***Ziel:*** *Stammfunktionen einer gegebenen Funktion ermitteln und analysieren können.*
Ermittle alle Stammfunktionen der gegebenen Funktion f:

a) $f(x) = a + ab + b$	b) $f(a) = a + ab + b$	c) $f(b) = a + ab + b$	d) $\int \sqrt{a} + \sqrt{b}\ db$

[**Lösungen:** **a)** $(a + ab + b) \cdot x + c$ **b)** $\frac{(1+b) \cdot a^2}{2} + b \cdot a + c$ **c)** $\frac{(1+a) \cdot b^2}{2} + a \cdot b + c$ **d)** $\sqrt{a} \cdot b + \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{b} + c$]

5. ***Ziel:*** *Grenzen der Mathematik kennen.*
Gibt es Funktionen, für die man keine Stammfunktion angeben kann?

[**Lösungen:** e^{x^2} , x^x , $\sqrt{1 - 4 \cdot \sin^2 x}$, ...]

6. ***Ziel:*** *Zusammenhänge zwischen Funktion und Stammfunktion analysieren können.*
   i) Welche der angegebenen Funktionen F_i sind Stammfunktion von f?
   ii) Wodurch unterscheiden sie sich?

a) f: $y = \frac{1}{x}$

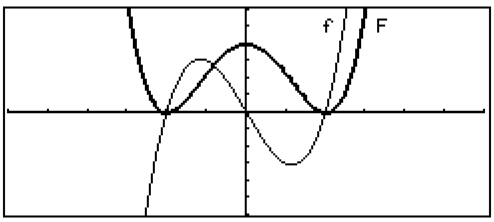
F_1: $y = \ln x$	F_2: $y = \ln x + 2$	F_3: $y = \ln(x + 2)$	F_4: $y = \ln 2x$

b) f: $y = \sin x \cdot \cos x$

F_1: $y = \frac{1}{2} \cdot \sin^2 x + c$	F_2: $y = -\frac{1}{2} \cdot \cos^2 x + c$

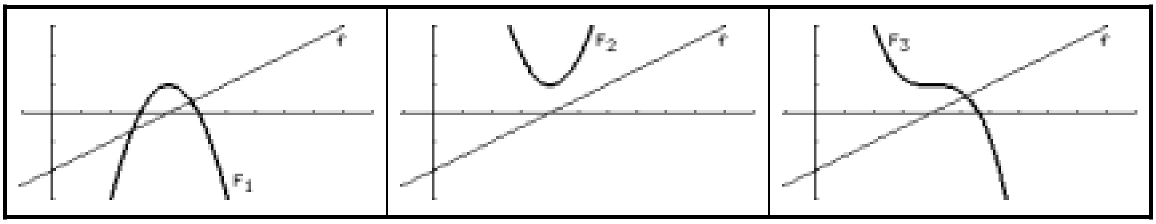
[**Lösungen:** **a)** F_1, F_2, F_4; $\ln 2x = \underbrace{\ln 2}_{c} + \ln x$ **b)** F_1, F_2; $-\frac{1}{2} \cdot \cos^2 x = -\frac{1}{2} \cdot (1 - \sin^2 x) = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{c} + \frac{1}{2} \cdot \sin^2 x$]

7. ***Ziel:*** *Zusammenhänge zwischen Funktion und Stammfunktion analysieren können.*
   i) Stelle f: $y = x \cdot (x^2 - 4)$ und eine ihrer Stammfunktionen in *einem* Bild grafisch dar.
   ii) Welche Zusammenhänge zwischen den kritischen Punkten beider Funktionen gibt es?



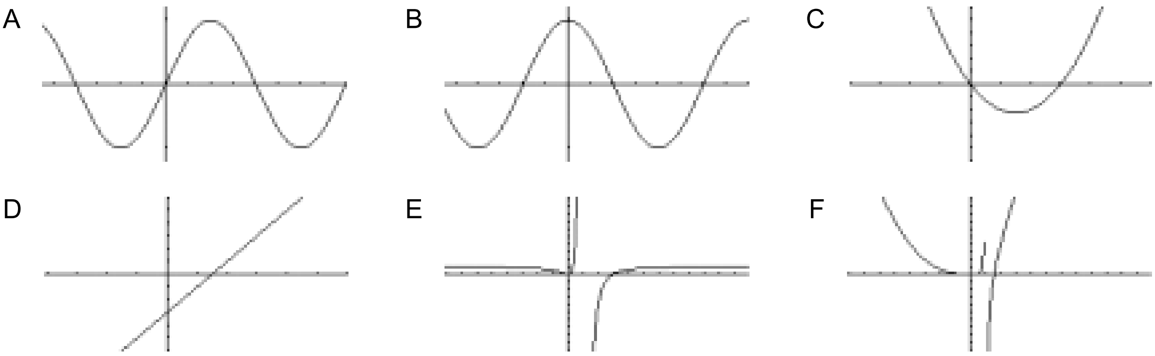
[**Lösungen:** $E_F \leftrightarrow N_f$, weil die Steigung F' = f in E_F = 0 ist; $W_F \leftrightarrow E_f$, weil die Änderung der Steigung F'' = f' in W_F = 0 ist]

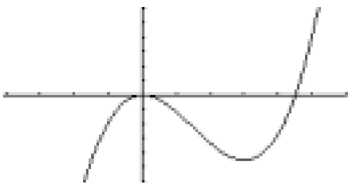
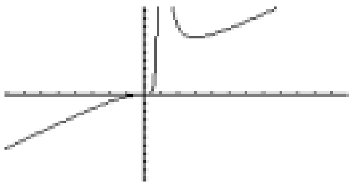
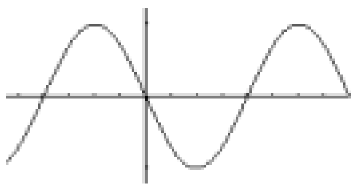
8. ***Ziel:*** *Zusammenhänge zwischen Funktion und Stammfunktion analysieren können.*
   i) Welche der angegebenen Funktionen F_i kommen als Stammfunktion von f in Frage?
   ii) Begründe deine Entscheidungen!



[**Lösungen:** F_2; nur hier ist die Steigung links von E bzw. W negativ, rechts positiv]

9. ***Ziel:*** *Zusammenhänge zwischen Funktion und Stammfunktion analysieren können.*
   i) Welches Bild gehört wohin?
   ii) Begründe deine Entscheidungen!



$\mathbf{f_1}$	$\mathbf{f_2}$	$\mathbf{f_3}$
	F_2 ………	F_3 ………
f_1 ………		f_3 ………
f_1' ………	f_2' ………	

[**Lösungen:** $\begin{matrix} \mathbf{F_1} & F & A \\ C & \mathbf{f_2} & B \\ D & E & \mathbf{f_3'} \end{matrix}$ [f_1: $y = x \cdot (x-3)$ f_2: $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ f_3: $y = \cos x$]]

10. ***Ziel:*** *Die Integralrechnung in umfangreicheren, anwendungsorientierten Fragestellungen (z.B. Weg - Geschwindigkeit - Beschleunigung) anwenden können.*

Bei optimalen Verhältnissen (d.h. trockenem, sauberem Asphalt, guten Bremsen bzw. ABS sowie guten Sommerreifen mit ausreichender Profiltiefe) verliert ein PKW bei einer Vollbremsung ca. 8 m/s^2 an Geschwindigkeit, wobei diese Verzögerung als annähernd konstant angenommen werden kann.

a) Drücke die Restgeschwindigkeit des Autos als Funktion der Zeit aus.

b) Drücke die Bremsstrecke als Funktion der Zeit aus.

c) Wie lang ist die Bremsstrecke für

c1) v_0 = 50 km/h?

c2) v_0 = 100 km/h?

d) In Fahrschulen lernt man oft folgende Näherungsformel für die Bremsstrecke:

$$\text{Bremsstrecke} = \frac{\text{Geschwindigkeit}}{10} \cdot \frac{\text{Geschwindigkeit}}{10}$$

d1) Vergleiche die berechneten Werte mit den Ergebnissen dieser Formel.

d2) Kann die Formel stimmen?

e) Drücke die Bremsstrecke als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit aus und stelle den gefundenen Zusammenhang grafisch dar. Interpretiere den Graphen!

f) Drücke die Restgeschwindigkeit als Funktion des zurückgelegten Weges aus und stelle den gefundenen Zusammenhang für die in (c) gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten grafisch dar. Interpretiere den Graphen!

g) Wie lang ist die Anhaltestrecke (= Reaktionsweg + Bremsstrecke) für die in (c) gegebenen Geschwindigkeiten, wenn man dem Fahrer eine „Schrecksekunde" zugesteht?

h) Vergleiche die berechneten Werte mit den Ergebnissen der folgenden Fahrschulformel:

$$\text{Anhaltestrecke} = \frac{\text{Geschwindigkeit}}{10} \cdot 3 + \frac{\text{Geschwindigkeit}}{10} \cdot \frac{\text{Geschwindigkeit}}{10}$$

i) Drücke die Anhaltestrecke als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit aus und stelle den gefundenen Zusammenhang grafisch dar. Interpretiere den Graphen!

j) Stelle die Restgeschwindigkeit unter Berücksichtigung der „Schrecksekunde" als Funktion des zurückgelegten Weges für die in (c) gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten grafisch dar. Interpretiere den Graphen!

k) Ein PKW fährt mit 50 km/h, ein zweiter PKW „nur" um 10 km/h schneller. Vor beiden taucht in exakt derselben Entfernung plötzlich ein Hindernis auf. Beide Fahrer versuchen nach einer „Schrecksekunde" eine Vollbremsung.

k1) Mit welcher Restgeschwindigkeit trifft das zweite Auto auf das Hindernis, vor dem das erste gerade noch zum Stillstand kommt?

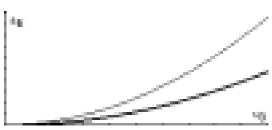
k2) Dieser Aufprall entspricht einem freien Fall aus wieviel m Höhe?

l) Bei nasser Fahrbahn beträgt die erzielbare Verzögerung nur ca. 4 m/s^2. Um wieviel verlängert sich dadurch die Bremsstrecke bzw. die Anhaltestrecke?

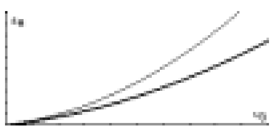
m) Der Verkehrsfunk meldet Nebel mit Sichtweiten unter 50 m. Wie schnell darf man höchstens fahren („Fahren auf Sicht")?

[**Lösungen:** **a)** $v(t) = v_0 - a \cdot t$ **b)** $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2$ **c1)** 12,1 m **c2)** 48,2 m **d2)** laut Lehrbuch: Näherungsformel für Verzögerung = 4 m/s^2 **e)** $s_B(v_0) = \frac{1}{2a} \cdot v_0^2$ **f)** $v(s) = \sqrt{v_0^2 - 2a \cdot s}$ **g1)** 25,9 m **g2)** 76,0 m **i)** $s_A(v_0) = v_0 + \frac{1}{2a} \cdot v_0^2$ **j)** $v_1(s) = v_0$ für $s \le v_0$; $v_2(s) = \sqrt{v_0^2 - 2a \cdot (s - v_0)}$ für $s \ge v_0$ **k1)** ≈ 41 km/h **k2)** 6,6 m **m)** < 60 km/h]

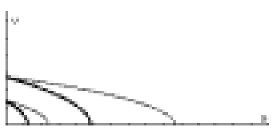
e) l)



i) l)



f) l)



j) l)