

III-C Beobachtungsfenster 2 - Formeln - Herleiten, Testen und Üben

III-C-a Hypothesen und Ziele des Beobachtungsfensters

1. Untersuchungsbereich

v Titel :

Formeln - Herleiten, Testen und Üben
*** Expandieren, Faktorisieren, Substituieren**
und Bearbeitung von Termstrukturen *
*** Testen, Fehleranalyse ***

v Rahmenthema:

Elementare Algebra - Rechnen mit Termen (Multiplikation von Termen und Herausheben gemeinsamer Faktoren - Veränderung von Termstrukturen)

v **Hypothesen zum Beobachtungsfenster**

Das Verständnis von Strukturveränderungen wird verbessert
Der Schüler hat mehr Möglichkeiten zur Selbstüberprüfung der eigene Rechenergebnisse durch neue Teststrategien und zeigt eine bessere Begründungskompetenz
Der Schüler hat die Möglichkeit einer Fehleranalyse und Fehlerbehebung durch den TI-92
Der Einsatz des TI-92 bringt Nachteile beim händischen Rechnen

v Untersuchungsziele:

Inwieweit unterstützt der Einsatz eines algebratauglichen Taschenrechners das Lernverhalten und den Lernfortschritt von Schülerinnen und Schülern?

v Inhalte (Kurzfassung):

Terme umformen und Überprüfungen durchführen können.
Binomische Formeln herleiten und anwenden können
Substituieren können
Mathematische Sachverhalte der Algebra beschreiben können
Termstrukturen erkennen und interpretieren können
Vergleichstechniken entwickeln und anwenden können
Fehleranalysen durchführen können

2. Voraussetzungen

v Mathematische Voraussetzungen:

- v Einführung in die elementare Algebra (systematische Festigung des Variablenbegriffes durchführen)
- v Belegungen mit Zahlen vornehmen können
- v Terme addieren und subtrahieren können (unter Berücksichtigung der Klammerregeln)
- v Grundlegende Termstrukturveränderungen durchführen können (Distributivgesetz)
- v Multiplikation mit eingliedrigem Termen beherrschen $(a+b)*c$ und interpretieren können
- v Multiplikation von Binomen beherrschen $(a+b)(c+d)$ und geometrisch interpretieren können
- v Potenzrechenregeln beherrschen und anwenden können

v TI-Handling-Voraussetzungen:

- v "Mit" - Operator (Variablen durch Zahlen belegen können)
- v Logische Operationen (*and, or*)
- v Definition von Konstanten (*STO*)
- v *FACTOR* und *EXPAND* anwenden können

- v Teilausdrücke faktorisieren und expandieren können
- v Handling-Probleme kennen (Malzeichen z.B.: $e^*(a+b)$ und nicht $e(a+b)$)
- v *SOLVE*-Befehl kennen
- v Voraussetzungen betreffend die Arbeitsweisen und Methoden:
 - v Partner- und Gruppenarbeit häufig erleben
 - v Arbeitsblätter bearbeiten können
 - v Bereitschaft zur Verbalisierung und Diskussion
 - v Anweisungen befolgen können (händisches Rechnen und testen mit dem TI-92)
 - v Dokumentationen führen können

3. Ziele

- v Ziele des Rahmenthemas:
 - v Formeln herleiten und verbal beschreiben können
 - v Strukturveränderungen bei Umformungen erkennen
 - v Systematisch Strukturen auf- und abbauen können
 - v Testen und Überprüfen lernen
 - v Gleichwertige Terme ineinander überführen können
 - v Umkehraufgaben durchführen können
- v Ziele des Beobachtungsfensters:
 - v Substituieren können
 - v Testen und Überprüfen können
 - v Unterschiedlichste Teststrategien anwenden können (Vergleichstechniken)
 - v Fehleranalysen systematisch durchführen können
 - v Selbst Beispiele erzeugen können

4. Lernsequenzen

- v Inhalte mit Regieanweisung (Drehbuch):
siehe Homepage ACDCA - Projekte - Unterlagen der 3. Klasse - Materialien zum ersten Beobachtungsfenster
- v Inhalte der Schülerhefte:
siehe Anleitung für den Lehrer
- v Arbeitsblätter:
siehe Homepage ACDCA - Projekte - Unterlagen der 3. Klasse - Materialien zum zweiten Beobachtungsfenster

5. Evaluation

- v Bei diesem Zugang wird kein Vortest eingeplant
- v Evaluationstest:

Posttest 1 - Ein Beispiel bei der Schularbeit
Posttest 2 - Test am Beginn der 4. Klasse - Rechenfertigkeit, Begründungskompetenz
- v Schüler- und Lehrerfeedback:

6. Rahmenbedingungen und Regieanweisungen

- v Position der Schularbeiten:
Es ist keine zeitliche Koordination geplant

v Neue TI-92 Inhalte während des Fensters:
comDenom

v Zeitleiste: siehe Jahresplanung - Ersichtlich bei Klassenkoordinator der 3. Klasse

v Abgabe der Evaluationsmaterialien:
September 1998

v Hinweise auf die Art der Dokumentationen:
Ist nur im Beobachtungsfenster vorgegeben - siehe Beobachtungsaufträge für Lehrer

v Literaturhinweise:
Materialien ausnahmslos aus dem alten DERIVE-Projekt

III-C-b Unterrichtsplanung

Vorgangsweise im Unterricht

Thema Unterrichtseinheiten	Thema Materialien	Hausübungen	Tätigkeiten des Schülers Tätigkeiten des Lehrers
1) Formeln herleiten Strukturveränderung erkennen + Üben 1 Unterrichtseinheit	Vorlagen für den Lehrer: Vorlage 1 Vorlage 2 Vorlage 3	Es gibt keine Einschränkung bei Hausübungen für den Lehrer.	S: Im Heft die Flächen zeichnen, die Formeln herleiten und eine Skizze für die Strukturveränderung angeben L: Vergleich aller gefundenen Formeln und Besprechung der "Standardformeln". Darstellung der Formeln durch Wortvariablen und Beschreibung mit Worten
2) Formeln einüben 2 Einheiten	Vorlage 4 Arbeitsblatt 1 Vorlage 5 (Lehrerbesprechung) Arbeitsblatt 2 Vorlage 6 Arbeitsblatt 3	Es können einige Beispiele der Arbeitsblätter auch als Hausübung gegeben werden und dann in der Schule verglichen werden	S: Bearbeitung der Arbeitsblätter L: Vorlage 4 besprechen. Darauf achten, dass die Arbeitsblätter zuerst händisch und erst danach mit dem TI-92 getestet werden. Strukturen systematisch ab- und aufbauen. Schrittweise Bearbeitung der Teile und Anwendung bei schwierigeren Beispielen. Darstellungsformen von Termen besprechen
3) Weitere Formel 1 Einheit	Vorlage 7 Arbeitsblatt 4	Beispiele aus Schulbuch entnehmen	S: Formeln herleiten, begründen und anwenden L: Besonders Darstellungsformen von Termen besprechen
4) Beobachtungsfenster Formel ergänzen und testen 2-3 Stunden	Arbeitsblatt 5 Arbeitsblatt 6	ähnliche Beispiele gibt es im Buch - Zusatz: Teste mit dem TI-92 Auftrag an die Schüler: erfinde weitere Testverfahren und beschreibe diese	S: Selbständige Anwendung der Testverfahren – Fehleranalysen durchführen. Änderungen bei Angaben durchführen, damit Quadrate eines Binoms entstehen L: Ein Beispiel gemeinsam besprechen. Testverfahren (4 angeführte) durchführen. Fehleranalyse aufzeigen
5) Anwendung bei komplexeren Beispielen keine zeitliche Vorgabe	keine Vorlagen und Arbeitsblätter		L: Gemeinsam mit der Klasse wird das erste Beispiel systematisch untersucht. Ausgaben ("eigenwillige") werden problematisiert

6) Textaufgaben – Gleichungen lösen keine zeitliche Vorgabe			keine Vorgaben
---	--	--	----------------

Bitten und Beobachtungsaufträge für die Lehrerin, den Lehrer:

- 1) Vorlagen dienen zur Darstellung mit dem Overheadprojektor, können jedoch genauso an der Tafel durchgeführt werden - das entscheidet der Lehrer
- 2) Arbeitsblätter: Die Arbeitsblätter 5 und 6 sollten kopiert und von den Schülern bearbeitet werden - die anderen Arbeitsblätter können, müssen jedoch nicht für alle kopiert werden. Ich glaube, dass es aus zeitlichen Gründen günstig ist, diese zu verwenden. Es ist jedoch auch darauf zu achten, dass Beispiele ohne Vorlagen durchgeführt werden, da die Beschreibung im Heft sich von der Bearbeitung eines Arbeitsblattes unterscheidet und beides gekonnt werden sollte.
- 3) Das Beobachtungsfenster soll 2-3 Unterrichtseinheiten betragen. Den Vergleichstechniken und der Fehleranalyse soll genügend Zeit eingeräumt werden.
- 4) Im Beobachtungsfenster sollen Hausübungen gegeben werden, bei denen die unterschiedlichen Vergleichstechniken angewendet werden (alle 4) und der Schüler soll aufgefordert werden, weitere Vergleichstechniken zu entwickeln, diese beschreiben und in der Klasse beim Vergleichen darzustellen und zu begründen. Ich würde diese Tätigkeit des Schülers als eine besondere Art der Mitarbeit bewerten. Weiters erscheint es günstig, wenn neue Vergleichstechniken bereits verbal beschrieben und durch ein Beispiel belegt sind. Diese können dem Lehrer abgegeben werden.
- 5) Bei der darauffolgenden Schularbeit sollen gemeinsam vorgeschlagene Beispiele (siehe Beilage) gegeben werden. Auffällige Wege sollen schriftlich vom Lehrer zusammengefasst und es soll eine Meinung über das Schülerverhalten im Vergleich zu bisherigen "händischen" Klassen abgegeben werden. Weiters soll erhoben werden, welche Teststrategien von den Schülern angewendet/bevorzugt werden.
- 6) Die Meinung der Schüler über die Hilfestellung beim Bearbeiten von Beispielen aus dem Beobachtungsfenster durch den TI-92 soll erhoben werden.
- 7) Jeder Projektlehrer sollte die Fehleranalysekompetenz seiner Schüler beurteilen und positive wie negative Auswirkungen des TI-92 beobachten

Das Beobachtungsfenster:

Formeln ergänzen - Testen

Bei dieser Beispielgruppe hat der TI-92 keine eigenständige Berechnungs- oder Aktivitätskomponente, sondern der Schüler kann seine Meinungen und Ergebnisse mit dem Gerät testen. Weiters bekommt er die Richtigkeit seiner Tätigkeiten zurückgemeldet und kann Fehleranalysen und neue Versuche durchführen. Der TI-92 kann nur mit eigenen Befehlen oder Funktionen die Richtigkeit nicht beeinflussen.

Die Aufgabenstellung lautet (**Arbeitsblatt Nr.5 - Formeln ergänzen**):

Vervollständige nach einer der drei folgenden (bereits gelernten) Formeln

Das erste Beispiel wird in der Klasse gemeinsam durchgeführt, zuerst händisch, dann mit dem Rechner (der "Mit" - Operator muss gut eingeübt sein).

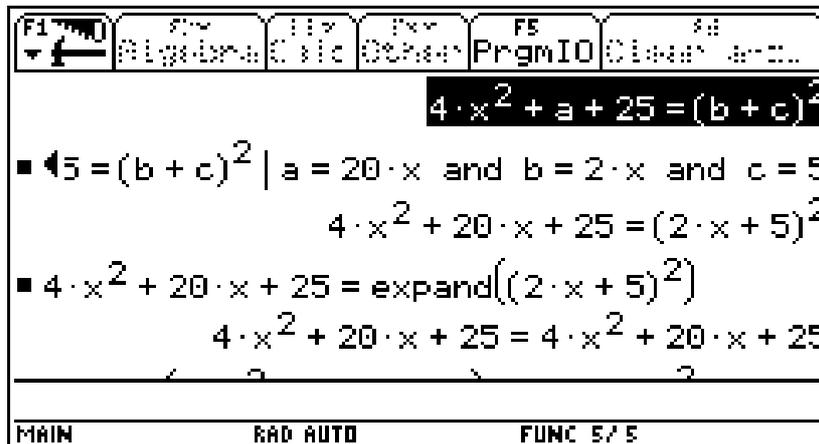


Abbildung 1 - Teste deine Überlegungen

In Abbildung 13 wird ein Test mit *EXPAND*, in Abbildung 14 wird zuerst mit *FACTOR* getestet, die Antworten des TI-92 zeigen die Richtigkeit der Substituierungen.

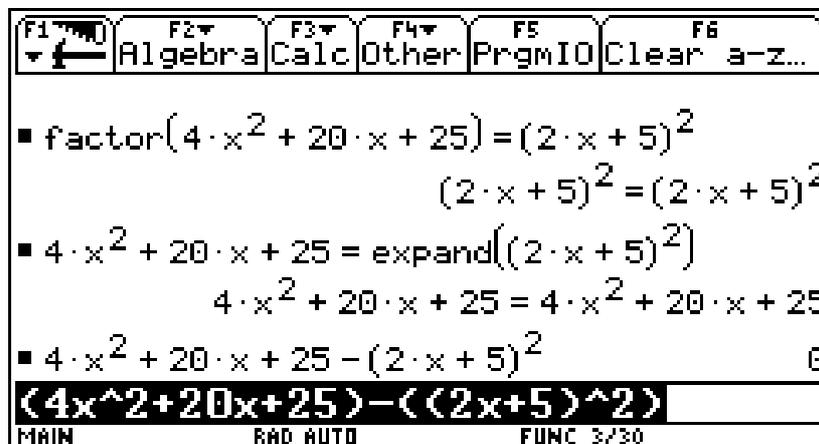


Abbildung 2 - verschiedene Testverfahren

Auch die ganze Gleichung kann mit den Befehlen bearbeitet werden, und die Seiten der Gleichung werden getrennt expandiert oder faktorisiert.

Eine weitere Möglichkeit soll dem Schüler aufgezeigt werden:

Mit dem TI-92 kann man Variablen belegen (dies sollte bereits früher mit Zahlen durchgeführt worden sein).

Dies ist bei unseren Beispielen sehr dienlich, da selbst bei Fehlern nur (ein Teil) neu definiert werden muss und der nächste Test sofort erfolgen kann (siehe Abbildung 16)

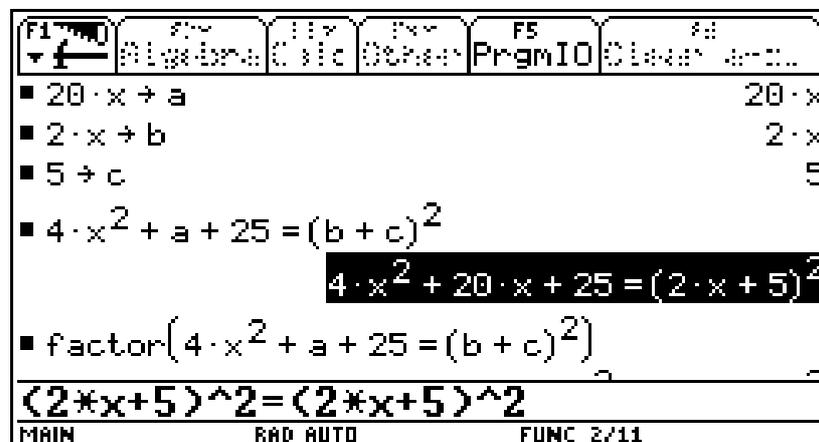


Abbildung 3 - Belegung von Variablen

Weiters könnte die Gleichung auch mit dem *SOLVE* - Befehl bearbeitet werden, das Ergebnis "true" zeigt die Richtigkeit der Belegungen. Didaktisch gesehen würde ich diesen Weg wenn, dann erst später vorzeigen!

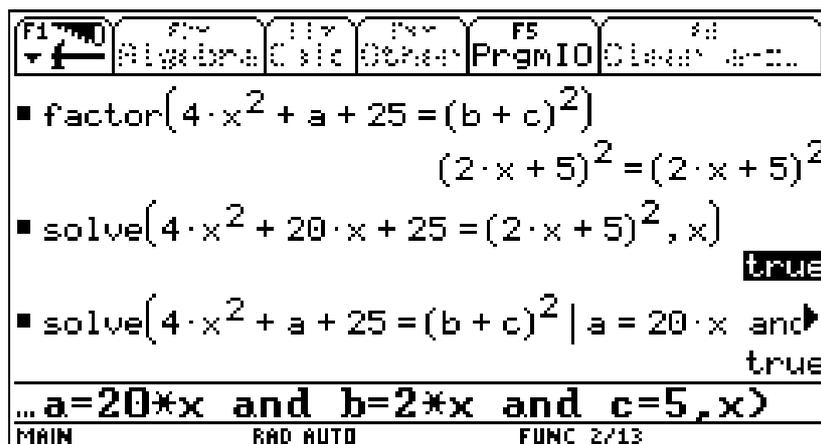


Abbildung 4 - SOLVE Befehl und seine Antwort

Dann erfolgt die selbständige Bearbeitung des Arbeitsblattes durch den Schüler.

Zusammenfassung der Testverfahren (Vergleichstechniken):

Vom Lehrer besprochen:

- 1) Substituiere richtig (Mit-Operator) und expandiere eine Seite der Gleichung
- 2) Substituiere richtig und faktoriere eine Seite der Gleichung
- 3) Definiere die gesuchten Variablen durch richtige Terme und expandiere oder faktoriere eine Seite
- 4) Subtrahiere von der linken Seite die rechte (oder umgekehrt) und es entsteht die Zahl 0

weitere Techniken, die von Schülern kommen können:

- 5) Wie bei 1), 2) und 3), jedoch wird die ganze Gleichung faktorisiert oder expandiert
- 6) Nicht die Gleichung (oder Seiten der Gleichung) wird faktorisiert oder expandiert, sondern die linke und die rechte Seite werden als eigene Terme getrennt bearbeitet.
- 7) Linke Seite dividiert durch rechte Seite der Gleichung -> Ergebnis 1
- 8) Testen durch Einsetzen von Zahlen - Problem Allgemeingültigkeit
- 9) Anwendung des SOLVE-Befehls nach einer richtigen Substituierung
- 10)

Fehleranalyse

Bei diesen Beispielen lässt sich durch die Antworten des TI-92 auch eine systematische Fehleranalyse durchführen. Der Schüler soll dazu erzo-gen werden, das Hilfsinstrument algebra-tauglicher Taschenrechner für den eigenen Lernprozess einzusetzen (**Vorlage 8 - Vorlage zu Arbeitsblatt Nr. 5 - Fehleranalyse**). Speziell die Analyse der durch *FACTOR* und *EXPAND* erzeugten Ausgaben lassen einen systematischen Vergleich der Terme zu. Man erkennt Fehler und kann die Vorgangsweise beim Substituieren verbessern. Die meisten Fehler liegen im doppelten Produkt oder beim Quadrieren eines Termes. Der TI-92 ist dabei nur ein Lernmedium, welches den Lernprozess beim Üben und Testen begleitet. Im Beispiel in Abbildung 17 (es ist das Einführungsbeispiel dieses Kapitels) wurde nur ein einfaches Produkt substituiert und die letzte Antwortzeile liefert diese Information.

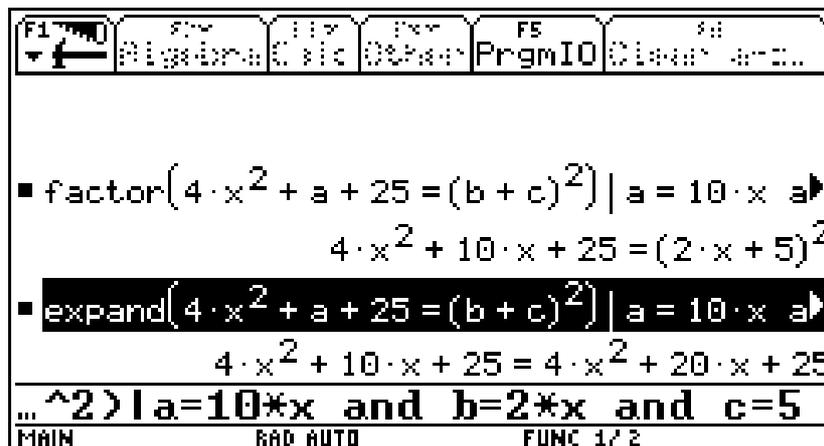


Abbildung 5 - Fehler bei dem doppelten Produkt

Speziell bei komplexeren Beispielen kann die systematische Fehlersuche eingeübt und gefestigt werden. Es erscheint auch sinnvoll, die richtige Fehleranalyse den richtigen Erstbeantwortungen bei der Bewertung gleichzustellen.

Probleme treten bei Beispielen mit hoher Schwierigkeit auf: z.B.: wenn nur das Quadrat eines Gliedes gegeben ist und das doppelte Produkt der beiden Glieder, weiters sind die Koeffizienten nicht ganzzahlig.

Ein typischer Fehler bei der Substituierung tritt durch falsche Interpretation des 2. Gliedes auf (siehe Abbildung 18)!

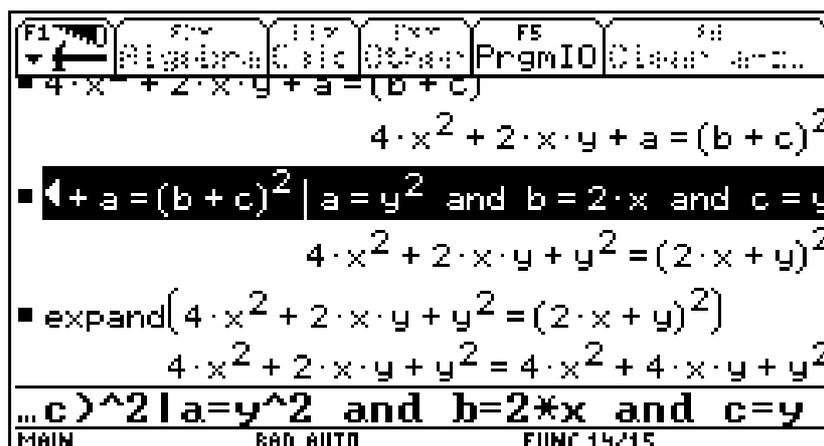


Abbildung 6 - falsche Substituierung

Ein einfacher Weg der Fehleranalyse kann dadurch erfolgen, dass das Glied $1 = b$ bekannt ist $b = 2x$. Das doppelte Produkt $2bc$ beträgt $2xy$ mit $b=2x$. Wie groß muss c sein?

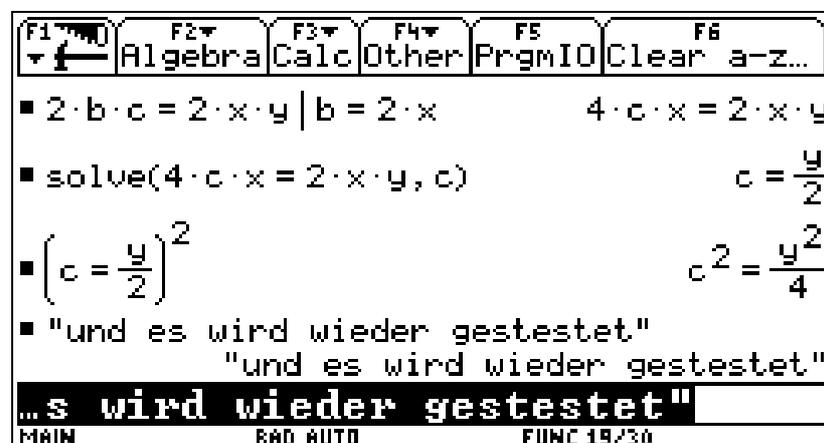


Abbildung 7 - Analyse

Eine genaue Analyse unter Verwendung des SOLVE Befehles wird nur angefügt und ist nicht für den Standardunterricht gedacht (Zu beachten ist die Einschränkung für $x > 0$ und die Möglichkeit einer zweiten Lösung !)

$$\text{expand}(4 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 = (2 \cdot x + y)^2)$$

$$4 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 = 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y + y^2$$

$$(h + s)^2 = \text{expand}((h + s)^2)$$

$$(s + h)^2 = s^2 + 2 \cdot h \cdot s + h^2$$

$$s^2 = 4 \cdot x^2 \qquad s^2 = 4 \cdot x^2$$

$$\text{solve}(s^2 = 4 \cdot x^2, s) \quad s = 2 \cdot |x| \text{ or } s = -2 \cdot |x|$$

MAIN RAD AUTO FUNC 13/15

$$\text{solve}(s^2 = 4 \cdot x^2, s) | x > 0$$

$$s = 2 \cdot x \text{ or } s = -2 \cdot x$$

$$2 \cdot h \cdot s = 2 \cdot x \cdot y | s = 2 \cdot x \qquad 4 \cdot h \cdot x = 2 \cdot x \cdot y$$

$$\text{solve}(4 \cdot h \cdot x = 2 \cdot x \cdot y, h) \qquad h = \frac{y}{2}$$

$$4 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y + a = (b + c)^2 | b = 2 \cdot x \text{ and } c = y$$

MAIN RAD AUTO FUNC 9/15

$$4 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y + a = (b + c)^2 | b = 2 \cdot x \text{ and } c = \frac{y}{2}$$

$$4 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y + \frac{y^2}{4} = \frac{(4 \cdot x + y)^2}{4}$$

$$\text{expand}\left(4 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y + \frac{y^2}{4} = \frac{(4 \cdot x + y)^2}{4}\right)$$

MAIN RAD AUTO FUNC 6/15

$$4 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y + \frac{y^2}{4} = 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y + \frac{y^2}{4}$$

$$2 \cdot h \cdot s = 2 \cdot x \cdot y | s = -2 \cdot x \qquad -4 \cdot h \cdot x = 2 \cdot x \cdot y$$

$$\text{solve}(-4 \cdot h \cdot x = 2 \cdot x \cdot y, h) \qquad h = -\frac{y}{2}$$

$$4 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y + a = (b + c)^2 | b = -2 \cdot x \text{ and } c = y$$

MAIN RAD AUTO FUNC 5/15

Der Test erfolgt wie bei $b = 2x$.

Danach wird das **Arbeitsblatt Nr.6** mit folgender Fragestellung bearbeitet:

Welcher Term ist das Quadrat eines Binoms (vollständiges Quadrat) - Ändere die Terme, die keine vollständigen Quadrate sind, so ab, dass Quadrate von Binomen entstehen! Versuche zu erklären, welche Fehler gemacht wurden! Schreibe die Terme als Quadrate eines Binoms!

III-C-c Aufgabenstellungen - Beobachtungsfenster, Posttest

III-C-c-1 Beispiele zum Beobachtungsfenster

Arbeitsblatt Nr. 5 - Formeln ergänzen

Vervollständige nach einer der drei folgenden Formeln:

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

$$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$

$$u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$$

Beispiel 1)

Versuche a, b und c zu bestimmen (Arbeite mit einem Bleistift - es könnten Fehler auftreten!)

Gegeben	Gesucht	Gesucht	Gesucht	Vollständige Formel
$4x^2 + a + 25 = (b + c)^2$	a =	b =	C =	

Gib danach die Gleichung in den TI-92 ein!

Belege wie in Abbildung 1 mit dem "Mit"-Operator (2nd+K) die Variablen a, b und c mit den vorgegebenen Werten a = 20x, b = 2x und c = 5 (siehe schwarz umrandete Ein- und Ausgabe).

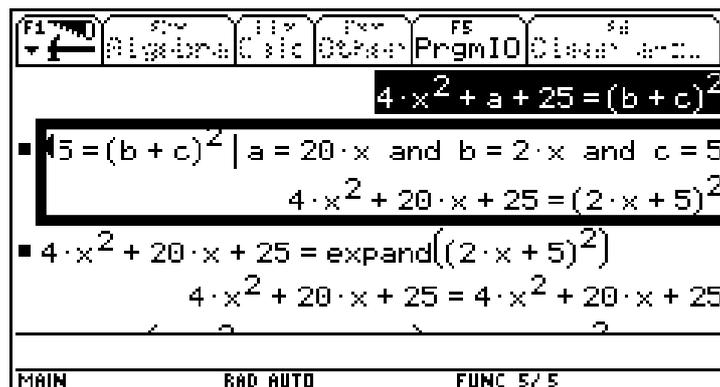


Abbildung 8 - Belege die Variablen mit deinen Werten

Führe folgende Überprüfungen durch (Testverfahren):

- 1) Expandiere eine Seite der Gleichung, nachdem du die gesuchten Variablen belegt hast!
- 2) Faktorisier eine Seite der Gleichung, nachdem du die gesuchten Variablen belegt hast!
- 3) Subtrahiere von der linken Seite der Gleichung die rechte Seite (oder umgekehrt) - es entsteht 0.
- 4) Definiere die gesuchten Variablen und bearbeite danach die Gleichung mit *expand* oder *factor*!

Die Belegungen der gesuchten Variablen stimmen. Überprüfe mit den von dir gefundenen in der Tabelle. Wenn ein Fehler aufgetreten ist, dann mache zum falsch eingetragenen Wert eine Falschzeichen und schreibe darunter mit Farbstift die richtige Lösung! Schreibe die vollständige Formel in die Tabelle!

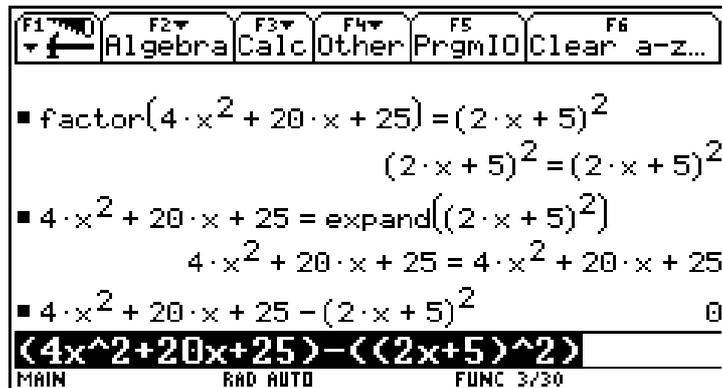


Abbildung 9 - verschiedene Testverfahren

Mit dem TI-92 kann man Variablen belegen (mit der Taste *STO*), dadurch lernst du ein weiteres Testverfahren. Führe die Belegung wie in Abbildung 3 durch und teste die Richtigkeit mit einem bereits gelernten Testverfahren.

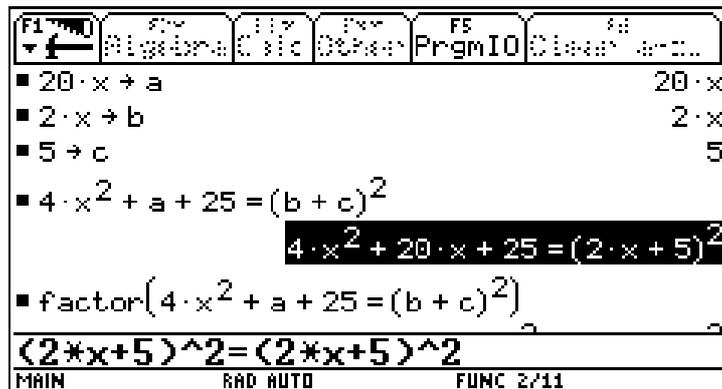


Abbildung 10 - Variablen belegen und testen

Diese Methode hat jedoch den Nachteil, dass ab jetzt die Variablen a,b,c mit den eingegebenen Werten belegt sind und diese Werte weiter Gültigkeit haben (Siehe nach bei $2^{nd}+VAR-LINK$). Du kannst jedoch die Variablen löschen und ein weiteres Beispiel bearbeiten.

Du hast damit verschiedenste Testverfahren gelernt und kannst diese selbständig anwenden.

Bearbeite die weiteren Beispiele selbständig und verwende bei der Überprüfung jeweils ein anderes Testverfahren! Einige Beispiele sind nicht leicht!

Gegeben	Gesucht	Gesucht	Gesucht	Vollständige Formel
Beispiel 2) $25x^2 + a + 4y^2 = (b + c)^2$	a =	b =	c =	
Beispiel 3) $(u + v)^2 = 49a^2 + 42af + m$	m =	u =	v =	
Beispiel 4) $36 - 36u + e = (c - r)^2$	c =	e =	r =	
Beispiel 5) $a + 12cd + m = (2c + e)^2$	a =	e =	m =	
Beispiel 6) $4x^2 + 2xy + a = (b + c)^2$	a =	b =	c =	
Beispiel 7) $j - 4d^2 = (5s - r)(5s + r)$	r =	j =	-----	
Partnerbeispiel *)				

*) Erfinde ein Beispiel selbst und bitte deinen Tischnachbarn, dieses zu bearbeiten - so habt ihr zwei Beispiele, die ihr dann gemeinsam testen könnt.

Vorlage 8 zu Arbeitsblatt Nr. 5 - Fehleranalyse

Fehleranalyse zu Beispiel 1)

Welcher Fehler wurde bei der Eingabe getätigt ?

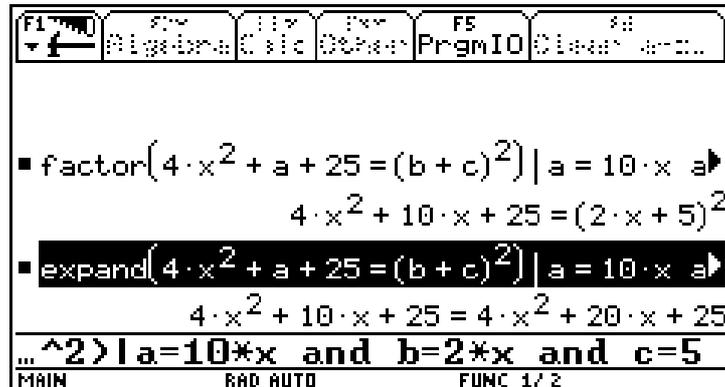


Abbildung 11 - Wo liegt der Fehler ?

Fehleranalyse zu Beispiel 6)

Ein Schüler war der Meinung, dass die Substituierung in der Eingabezeile richtig ist. Betrachte die Abbildung 2 genau und versuche den Fehler zu finden!

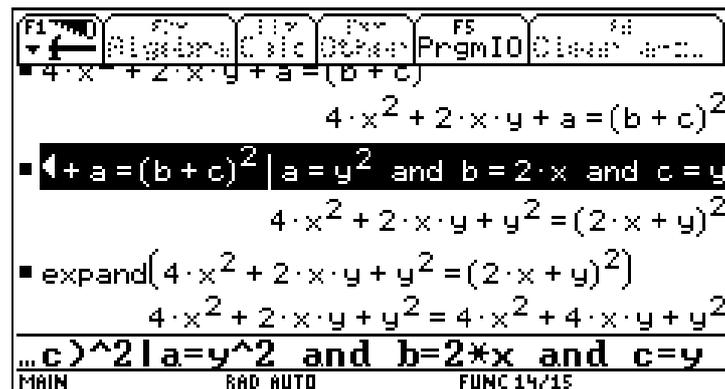


Abbildung 12 - Was wurde falsch substituiert ?

Führe die dargestellte Analyse selbst durch und teste danach!

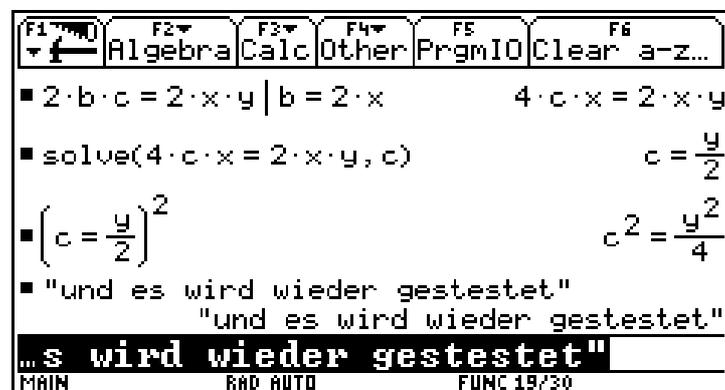


Abbildung 13 - Führe die Analyse selbst durch

Arbeitsblatt Nr. 6 - Welcher Term ist das Quadrat eines Binoms

Welcher der in der ersten Spalte gegebenen Terme ist das Quadrat eines Binoms (vollständiges Quadrat)?

Ändere die Terme, die keine vollständigen Quadrate sind, so ab, dass Quadrate von Binomen entstehen (Verwende einen Farbstift bei deiner Veränderung)!

Versuche zu erklären, welche Fehler gemacht wurden!

Schreibe die Terme (richtige oder veränderte Terme) als Quadrat eines Binoms in die letzten Spalte

Gegebener Term	Vollständiges Quadrat ? Ja/Nein	Gesucht Glied 1 Glied 2	Gesucht doppeltes Produkt	Quadrat des Binoms
Beispiel 1) $16x^2 + 8ax + a^2$	JA	4x a	8ax	$(4x + a)^2$
Beispiel 2) $a^2 - af + f^2$				
Beispiel 3) $r^2 + 4r$				
Beispiel 4) $16b^2 - 40bc + 25c^2$				
Beispiel 5) $a^2 + 64m^2$				
Beispiel 7) $81s^2 + 18s + 1$				
Beispiel 8) $x^2/4 - 2x + 4$				

Die zweite Spalte bezieht sich auf die Angabe in Spalte eins. In Spalte 3, 4 und 5 sollen bereits deine Veränderungen berücksichtigt sein!

III-C-c-2 Posttest1: Schularbeitsbeispiel zum Beobachtungsfenster

1) Ergänze, was fehlt! Denke an die Formeln!

Setze für a, b, c, g, h, i, j, k die richtigen Ausdrücke ein!

Überprüfe die Richtigkeit deiner Vermutung mit dem TI-92! Beschreibe deine Teststrategien in deinem Heft in Worten! Verwende dabei nicht dreimal dasselbe Testverfahren! Schreibe die richtigen Gleichungen in dein Heft!

(1) Ges.: a, b, c	$(4z - a)^2 = b - 24z + c$
(2) Ges.: g, h, i	$(g - h)^2 = 4p^2 + 2px^2 + i$
(3) Ges.: j, k	$(j + 5ab)(j - 5ab) = 4a^4 - k$

III-C-c-3 Posttest2: Test zur elementaren Algebra

Dieser Test ist der Untersuchung beigelegt (siehe III-D)

III-C-d Evaluation - Auswertungen und Interpretationen

Meinungen der Projektlehrerinnen und Projektlehrer zum Beobachtungsfenster

Positiv:

- Weniger Schreibarbeit als beim ersten Beobachtungsfenster
- Guter Freiraum bei Vorbereitung und Durchführung des Beobachtungsfensters
- Gut für die Kontrolle

Negativ:

- Bei diesem Beobachtungsfenster ist der TI-92-Einsatz manchmal nur Selbstzweck
- Zu viele Variablen - das ist verwirrend für Schüler - Eine Angabe der Beispiele in Form einer Lückenschreibweise ist einfacher für Schüler

Beobachtungen bei Arbeitsblatt 5:

- Zu viel Text
- Die Schüler suchen sich eher ein Vergleichsverfahren aus und verwenden nur dieses - FACTOR und EXPAND sind die häufigsten Verfahren
- Variablenbelegung mit dem TI-92 ist zu umständlich und überlagert die inhaltliche Lösungsstrategie
- Die Fehleranalyse war für die Schüler trotz Anleitung nicht leicht, diese Analysekompetenz lässt sich bei Gleichungen leichter aufzeigen.

Beobachtungen bei Arbeitsblatt 6:

Dieses Arbeitsblatt wurde als geeignet erachtet und lässt sich im Unterricht gut einsetzen

Zum Posttest1 - Schularbeitsbeispiel

Dieses Schularbeitsbeispiel wurde nicht von allen Versuchsklassen mit dieser Aufgabenstellung durchgeführt. Jedoch zeigte sich bei dieser, wie bei ähnlichen Aufgabenstellungen, dass das Ergebnis relativ schlecht ausfiel. Auf eine genauere Analyse wird bei der Auswertung des Posttest 2 eingegangen. Weitere Meinungen der Projektlehrerinnen und Projektlehrer:

- Zeitaufwand der Ausprobierens und Testens mit dem TI-Rechner ist während der Schularbeit zu groß
- In der Übungssituation hingegen wird dieses Ausprobieren und Testen von Schülern häufig und freudig angenommen
- "Seltsame Ergebnisse" müssen häufig in 'händische' Ergebnisse übergeführt werden. Bei den guten Schülern steigt das Niveau im Umgang mit elementarer Algebra. 'Schwache' Schüler übernehmen die TI-92 Ausgaben ohne diese zu hinterfragen.
- Zeitfaktor bei der Schularbeit ist hinderlich bei der Fehleranalyse

Zusammenfassung:

Die Meinungen waren nicht einheitlich, jedoch lässt sich aussagen, dass die doppelte Reflexion - für Variablen die richtigen Variablen einsetzen - für die Schüler zu schwierig war! Die Anwendung von Vergleichstechniken und Teststrategien müssen ohne Zeitdruck möglich sein!

III-C-e Tagebuch einer Projektlehrerin

Tagebuch des 2. Beobachtungsfensters von Sieglinde Fürst (Piaristengymnasium - Krems)

TAGEBUCH des 2. Beobachtungsfensters

1. Beginn des Rahmenthemas

Vorkenntnisse:

Den Schülern waren Potenzrechnungen, Multiplikation eines Binoms bzw. Trinoms mit einem Monom und Multiplikation zweier Binome bekannt.

1. Stunde: Erarbeitung der Formel für $(a + b)^2$

(Ohne Arbeitsunterlagen für die Schüler. Alles wird ins Heft geschrieben bzw. gezeichnet.)

- Zeichnen eines Quadrates mit der Seitenlänge $a + b$.
Schüler suchen selbst Formeln zur Berechnung des Inhaltes. (Partnerarbeit oder Gruppenarbeit erlaubt, die meisten Schüler arbeiten allein, sind stolz auf eigene Lösungswege, die sie nicht mit anderen teilen wollen.)
- Folgende Formeln wurden entwickelt und aufgeschrieben:
(1) $A = (a + b) \cdot (a + b)$ bzw. $(a + b)^2$ Die Schüler erkennen diese Formeln als gleichwertig, sie werden als eine Formel aufgeschrieben
(2) $A = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ Von Schülerseite kommt $a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$.
(3) $A = a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b)$
(4) $A = 2 \cdot \frac{(a + b) \cdot (a + b)}{2}$

Von Schülerseite kommt die Frage, ob diese Formeln alle "richtig" sind.

- Überprüfen der Äquivalenz der gefundenen Formeln.

Von Schülerseite kommt der Vorschlag "expand" zu verwenden.

Es wird die Äquivalenz mittels Mit - Operator, Expand, Factor, Differenz = 0, Quotient = 1 nachgewiesen. *Der Factorbefehl wird neu erarbeitet.* Wir versuchen es an einer Primfaktorenzerlegung und stellen fest, FACTOR funktioniert nur, wenn in MODE AUTO oder EXACT eingestellt ist (nicht APPROX!!)Der Lehrer hätte das nicht gewusst, das Problem wird von einem Schüler gelöst! Methode vier und fünf entsprach nicht der Denkweise der Schüler. Es kamen trotz Hilfestellung keinerlei Vorschläge in diese Richtung. Methoden mussten vom Lehrer erklärt werden und dürften nicht allen klar sein.

- Wir weisen darauf hin, dass die Formel (3) mit EXPAND und FACTOR bearbeitet werden kann. Zum Aufschreiben der Nachweismethoden fehlt die Zeit.

2. Stunde: Äquivalenz der Flächenformeln

Wir schreiben ins Heft:

Sind die Flächenformeln gleich?

(1) = (4) ist klar!

Nachweis mit dem TI-92:

1. Art: $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$ | $a = 5$ and $b = 3$ true
 $(a + b)^2 = a . (a + b) + b . (a + b)$ | $a = 5$ and $b = 3$ true

2. Art: EXPAND((a + b)²) $a^2 + 2.a.b + b^2$
EXPAND(a . (a + b) + b . (a + b)) $a^2 + 2.a.b + b^2$

3. Art: FACTOR(a² + 2.a.b + b²) $(a + b)^2$
FACTOR(a . (a + b) + b . (a + b)) $(a + b)^2$

4. Art: Sind zwei Ausdrücke gleich groß, so muss ihre Differenz 0 sein!
 $a^2 + 2.a.b + b^2 - (a + b)^2$ 0 stimmt!

5. Art: Sind zwei Ausdrücke gleich groß (Nenner ≠ 0), so muß ihr Quotient 1 sein!
 $(a^2 + 2.a.b + b^2) : (a + b)^2$ 1 stimmt!

$$(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$$
$$(\text{Glied1} + \text{Glied2})^2 = (\text{Glied1})^2 + 2. \text{Glied1} . \text{Glied2} + (\text{Glied2})^2$$

Anderer Weg zu der Formel:

Distributivgesetz: $(a + b) . c = a . c + b . c$
 $(a + b)^2 = (a + b) . (a + b) = a . (a + b) + b . (a + b)$
Nochmals Distributivgesetz anwenden! $= a^2 + a . b + a . b + b^2$
 $= a^2 + 2.a.b + b^2$

Zur Hausübung: Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge a - b. Finde möglichst viele Formeln, um die Fläche zu berechnen. (a = 8 cm, b = 2 cm). Lehrer skizziert an der Tafel, wie das gemeint ist.

3. Stunde: Erarbeitung der Formel für (a - b)²

• Ergebnisse der HÜ werden aufgeschrieben:

(1) $A = (a - b) . (a - b)$ bzw. $(a - b)^2$ Die Schüler erkennen diese Formeln als gleichwertig, sie werden als eine Formel aufgeschrieben

(2) $A = a^2 - 2.a.b + b^2$ Von Schülerseite kommt $a^2 + b^2 - 2.a.b$.

(3) $A = a^2 - (a - b) . b - a . b$

(4) $A = a^2 - 2.b . (a - b) - b^2$

(5) $A = a . (a - b) - b . (a - b)$

(6) $A = 2 . \frac{(a - b) . (a - b)}{2}$

• Schüler testen selbstständig die Äquivalenz der Formeln. Es werden von ihnen ausschließlich die Befehle EXPAND bzw. FACTOR verwendet.

• Wir schreiben die Merkformel ins Heft

$$(a - b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$$

• Anwendung der Formeln

Es wird der Inhalt der Vorlage 4 benutzt. Die Schüler haben keine Schwierigkeiten, die Flächen aus der Zeichnung abzulesen.

- Wir wollen nicht immer Quadrate zeichnen müssen.

HEFT:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad \text{a wird rot eingekreist, b grün eingekastelt}$$

$$(\mu + o)^2 = \mu^2 + 2 \cdot \mu \cdot o + o^2$$

Variable als Platzhalter: in den Kreis wird 3g in das Kasterl 2m geschrieben. Wichtiger Hinweis: $(3m)^2 = 3^2 \cdot m^2 = 9m^2$

$$(3g + 2m)^2 = (3g)^2 + 2 \cdot (3g) \cdot (2m) + (2m)^2$$

- Üben : $(x + 2)^2$, $(2a + b)^2$ Kontrolle mit TI

4. Stunde: Arbeitsblatt NR 1. und 2.

Arbeitsblatt 1 ergänzt mit :

Wir untersuchen die Art des Terms (Termstruktur)!

Vermutung: $(3g + 2m)^2$ hat die Struktur von $(a + b)^2$

Umkehrung: Entspricht das Ergebnis von $(3g + 2m)^2 = 9g^2 + 12g \cdot m + 4m^2$ dem von $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$?

Wir setzen: $a^2 \mid a = 3g$

$2 \cdot a \cdot b \mid a = 3g \text{ and } b = 2m$

$b^2 \mid b = 2m$

Den Kindern war nicht einsichtig, was das soll.

Zum Arbeitsblatt 2:

Schüler schlagen vor $(-3a + 4b)^2$ als $(4b - 3a)^2$ anzuschreiben

Kritik am Arbeitsblatt: Es wäre günstiger $(-3x + 4y)^2$ zu schreiben, weil wir als Formel $(a - b)^2$ festigen wollen. Für schwächere Schüler ein zusätzliches Problem!

Schwierigkeiten der SchülerInnen, weil die eintrainierten Formeln $(a+b)^2$ hießen und plötzlich Formeltyp $(x+y)^2$ bzw. $(x-y)^2$ stand. (Unnötige Verwirrung!)

Es ist zu hinterfragen, ob es nicht günstiger ist, nur von der Formel $(a + b)^2$ auszugehen und die Subtraktion als Addition eines negativen Ausdrucks einzuüben. Damit erübrigen sich alle Vorzeichenprobleme und der Schüler hat keine Schwierigkeiten mit Ausdrücken wie:

$(-2c - v)^2$, etc.

Wichtig ist nur das Einprägen der Reihenfolge:

1. Vorzeichen(Rechenzeichen) bestimmen
2. Zahlen multiplizieren bzw. quadrieren
3. Variable multiplizieren bzw. quadrieren

Erkrankung des Lehrers, Schularbeit, Schikurs und Ostern unterbrechen leider

5. Stunde: Arbeitsblatt 3

Vorübungen waren notwendig.

Es ist wieder zu fragen, ob es nicht leichter ist, von **einem** Formeltyp $(x+y)^2$ auszugehen, wobei x und/oder y auch negative Ausdrücke sein können, weil die Bestimmung von $2xy$ große Schwierigkeiten machte. Hat man nämlich als Formeltyp z.B. bei $25 - 20b + 4b^2$ richtig $(x-y)^2$ erkannt, lautet $2xy = +20b$ bei Formeltyp $(x+y)^2$ aber $2xy = -20b$. Auch für gute SchülerInnen (unnötig) problematisch!!

6. Stunde: Vorlage 7 und Arbeitsblatt 4

Da die Vorgangswiese schon gut eingeübt ist, haben die SchülerInnen kaum Probleme. Bei der Herleitung von $(a+b)(a-b)$ mittels Flächeninhalten finden die Kinder eine Vielzahl von Formeln, die sie auch sofort selbständig auf Gleichheit untersuchen. Die bevorzugten Befehle sind EXPAND, FACTOR und Probe durch Einsetzen.

7. Stunde: Beobachtungsfenster

Arbeitsblatt 5:

Die Schüler arbeiten allein, erstellen ein Partnerbeispiel, d.h. sie sollten ein analoges Beispiel erfinden, aber selbst die Lösung angeben. Diese Aufgabe wird folgendermaßen gelöst:

Richtig bzw. fast richtig: 15

Teilweise richtig: 7

Falsch: 4

Nicht ausgeführt: 4

Die SchülerInnen wurden angewiesen anzugeben, welches Testverfahren angewandt wurde.

Folgende Angaben wurden gemacht:

EXPAND: 11

2ndK: 3

ohne Angabe: 8

2ndK oder Expand: 1

Als Gleichung mit "false": 1

Expand und Factor: 3

Dividiert: 1

"Hab Vertrauen in mich selbst" (Taschenrechner wurde nicht benutzt; Arbeit war fehlerlos!)

10 Arbeiten sind fehlerlos.

Ergebnisse der Auswertung von Arbeitsblatt 5: (30 Schüler)

Beispielnummer	Richtig/fast richtig	Teilweise richtig	Falsch
2	26	3	1
3	26	4	0
4	28	1	1
5	29	1	0
6	20	7	3
7	26	1	3

8. Stunde: Beobachtungsfenster

Arbeitsblatt 6:

Die Schüler arbeiteten allein und wurden angewiesen anzugeben, welches Testverfahren angewandt wurde.

Folgende Angaben wurden gemacht:

EXPAND: 13

Expand oder Factor: 5

Factor: 2

ohne Angabe: 9

Ergebnisse der Auswertung von Arbeitsblatt 6: (30 Schüler)

Beispiel	Richtig	fast richtig	Teilweise richtig	Falsch
2	27	0	2	0
3	26	0	2	0
4	25	0	4	0
5	24	0	1	0
6	28	0	1	0
7	23	1	3	1

Von allen Klassenlehrern wurde am Beginn der 4. Klasse in der ersten Mathematikstunde ein gemeinsamer Test (Posttest2) durchgeführt. Dabei sollten auch die Inhalte des Beobachtungsfensters untersucht werden. Die Schülerergebnisse und die Interpretation zu den Hypothesen sind bei dieser Untersuchung angeführt.