Fächerübergreifende Anwendungen von Winkelfunktionen für den TI-92

Tania Koller

Ein Unterrichtsbehelf zum Einsatz moderner Technologien

im Mathematikunterricht

T³ Österreich / ACDCA am PI-Niederösterreich, Hollabrunn

Fächerübergreifende Anwendungen von Winkelfunktionen

Für die Behandlung der Aufgaben ist die Kenntnis der Winkelfunktionen notwendig. Die Begriffe Amplitude, Periodenlänge, Kreisfrequenz und Phasenverschiebung sollen bereits bekannt sein. Ihre Bedeutung in den speziellen Anwendungsaufgaben soll interpretiert werden.

1. Die Atmung

In dieser Aufgabe soll das Wissen über die Winkelfunktionen in einem neuen Zusammenhang geübt werden. Der Technologieeinsatz ermöglicht die Kombination von algebraischen und graphischen Darstellungsformen. Dadurch werden die Schüler flexibler in der Wahl der Methoden. Sie lernen dabei, einen Graphen im Zusammenhang mit einer Anwendung zu interpretieren.

2. Welches Wetter herrscht in Lillehammer?

In diesem Beispiel erleichtert der Technologieeinsatz den Umgang mit dem umfangreichen Datenmaterial, so dass sich die Schüler mehr auf den Problemlöseprozess konzentrieren können. Die mühsame Manipulation mit den Daten reduziert sich auf ein Minimum, was sich auf die Schüler sehr motivierend auswirkt. Auch die Geographielehrerin war mit Feuereifer an den Ergebnissen und Interpretationen interessiert.
Der Einsatz der Technologie ermöglicht schon frühzeitig numerische Differenziation, auch wenn Vorkenntnisse über das Differenzieren noch nicht vorhanden sind.

3. Dieser Winter ist bald vorbei, aber der nächste kommt bestimmt!

Hier werden die vorher entwickelten Methoden mit einer realistischen Anwendung verbunden. Der Vergleich mit den Daten aus dem Internet überzeugt die Schüler von der Sinnhaftigkeit ihrer Berechnungen und zeigt, wie die Mathematik im Alltag präsent ist.
Nachdem erst einmal die Vorarbeit geleistet wurde, ist es einfach, ohne großen Aufwand Veränderungen an den Randbedingungen vorzunehmen und neue Umstände zu berücksichtigen. Der Technologieeinsatz ermöglicht Variationen des Problems und damit verbundene neue Einsichten, da die zugehörige Rechenarbeit rasch und fehlerfrei erfolgt.
Die Technologie bietet hier außerdem die Möglichkeit zur selbstverständlichen Einführung der numerischen Integration.

4. Der Biorhythmus bestimmt unser Tun????

Die Technologie dient der raschen Visualisierung und der Überprüfung der Ergebnisse. Dies ermöglicht die Selbstkontrolle und fördert die Selbstständigkeit der Schüler.

5. Interferenzen – ein paar merkwürdige Graphen

Schüleraufgaben und Lösungsvorschläge:

1. Die Atmung

Die Geschwindigkeit v (in Liter/Sekunde), mit der Luft in die Lunge einer Person in Ruhezustand fließt ist etwa gegeben durch $v(t) = 0{,}9 \cdot \sin(1{,}35t)$ Dabei ist t die Zeit in Sekunden.

a) Wie lange dauert ein voller Atemzyklus?

Modell: $y = a \cdot \sin(\omega x)$;

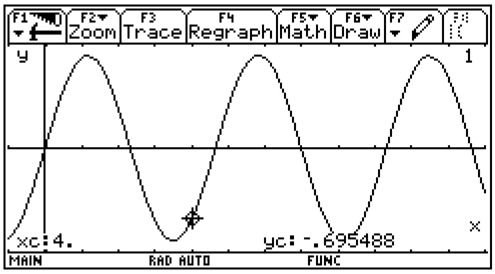
dabei ist a die Amplitude (hier a = 0,9)

und ω die Kreisfrequenz (ω = 1,35), die mit der Periodenlänge über die Beziehung $\omega \cdot \lambda = 2\pi$ zusammenhängt.

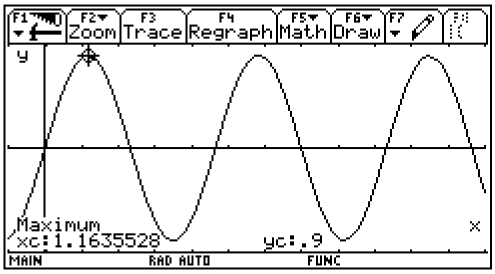
Daher: $\lambda = 2\pi/1.35 \approx 4{,}7$ Sekunden

b) Wie viele Atmungszyklen hat der Mensch pro Minute?

60/4.7 = …



c) Wie groß ist der Funktionswert für *t* = 4 und für *t* = 10? Was bedeuten diese Werte? Interpretieren Sie auch die unterschiedlichen Vorzeichen. Dabei ist aus der Grafik möglichst viel herauszulesen.



d) Wann treten jeweils die höchsten und tiefsten Punkte auf? Was könnten diese bedeuten?
Die höchsten Punkte treten nach 1,2 s und dann in Abständen von 4,7 s auf., die tiefsten Punkte nach 3,5 s und in Abständen von 4,7 s. (Zu diesen Zeitpunkten wird mit der größten Heftigkeit ein- bzw. ausgeatmet.)

e) Welche Bedeutung haben die Schnittpunkte mit der x-Achse?
(Wechsel zwischen Aus- und Einatmung)

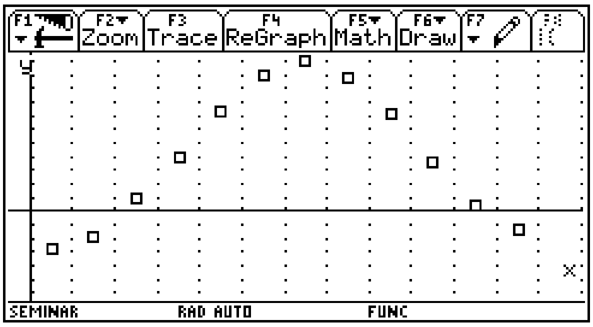
f) Wie wird sich der Funktionsgraph ändern, wenn der Mensch eine anstrengende Tätigkeit ausübt?

2. Welches Wetter herrscht in Lillehammer?

Die Lufttemperatur schwankt täglich und hängt von zahlreichen Einflüssen ab. Untersucht man jedoch den Verlauf der langjährigen Monatsmittelwerte, so lassen sich erstaunliche Gesetzmäßigkeiten erkennen. Daraus kann man wichtige Schlüsse im Hinblick auf Heizungs- und Kühlungsbedarf, Landwirtschaft, Tourismus und Verkehr ziehen.

Lillehammer	Durchschnittliche Temperaturen in °C		Sonnenstunden pro Tag	Regentage
	Tag	Nacht		
Januar	-5.7	-12.1	1.1	9
Februar	-3.7	-11.4	2.0	7
März	1.7	-7.6	4.4	5
April	8.0	-1.8	6.3	7
Mai	14.7	3.1	7.1	6
Juni	19.8	7.8	8.0	11
Juli	21.8	10.5	7.6	13
August	19.6	9.2	6.6	11
September	14.2	5.0	4.5	10
Oktober	7.0	0.5	2.6	9
November	0.6	-4.1	1.3	9
Dezember	-2.9	-8.2	0.5	1

a) Entnehmen Sie der Tabelle aus einem Reiseführer die langjährigen Mittelwerte der Lufttemperatur bei Tag, bei Nacht, und stellen Sie diese auf dem TI-92 als Scatter Plot dar.



b) Die Lufttemperatur in Abhängigkeit von der Zeit hat angenähert einen sinus- bzw. cosinusförmigen Verlauf. Beschreiben Sie die Lufttemperaturen durch die Funktion

$$y = a \cdot \sin(\omega x + b) + c$$

oder

$$y = a \cdot \sin(\omega \cdot (x + \varphi)) + c$$

und stellen Sie diese grafisch dar.
Welche Aufgaben haben die Parameter a, b, c und ω, bzw. φ?

Wie groß ist die Amplitude?

$$a = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{21{,}8 - (-5{,}7)}{2} = 13{,}75$$

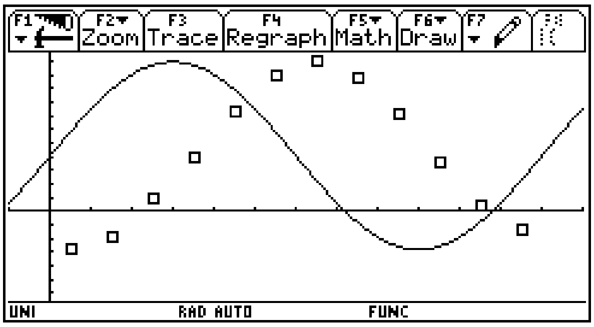
Wie groß ist die Verschiebung nach oben?

$$c = y_{min} + \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{y_{min} + y_{max}}{2} = \frac{21{,}8 + (-5{,}7)}{2} = 8{,}05$$

(Der Durchschnitt aller Werte ist 7,925)

Wie groß ist die Kreisfrequenz? (Periode 12 Monate --> 2π/12)

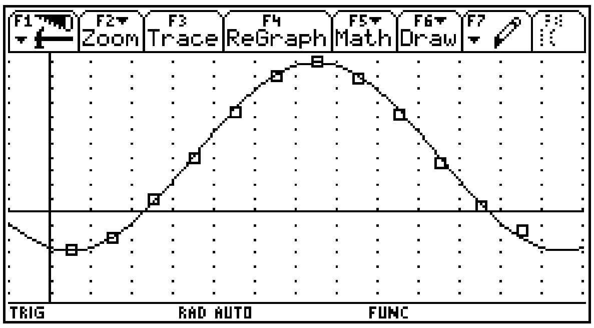
Das sehen wir uns einmal an (noch ohne endgültiger Modellkurve):



Die horizontale Verschiebung "messen" wir ab: ca. 3,5 Monatenach rechts verschieben!

$$y = 13.75 \sin\left(\frac{\pi}{6}(x - 3.5)\right) + 8.05$$

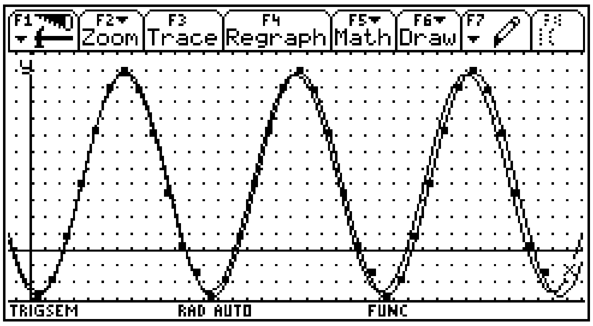
Die Grafik der Tagestemperatur sieht daher so aus:



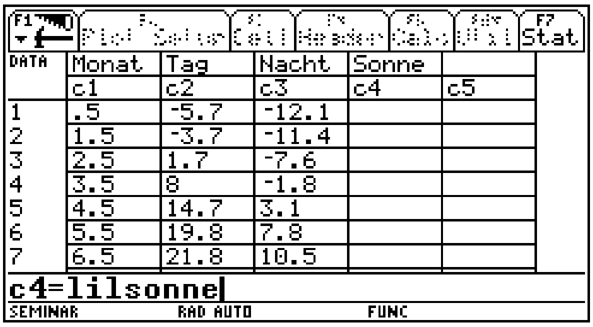
Der TI-92 Plus ermöglicht auch eine **Regression mit Sinusfunktionen**.

Der Vergleich der beiden Funktionen zeigt eine große Ähnlichkeit.

Allerdings weiß der TI-92 Plus nicht, dass die Periodenlänge zwölf Monate betragen muss. Dies würde nach einigen Jahren bereits zu deutlichen Abweichungen führen

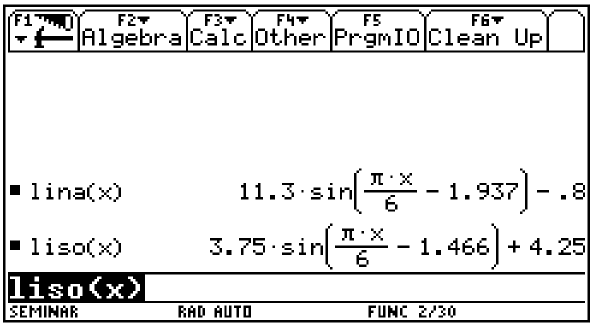


c) Vergleichen Sie die Temperaturverläufe der Tag- und Nachttemperatur mit der Anzahl der Sonnenstunden pro Tag.

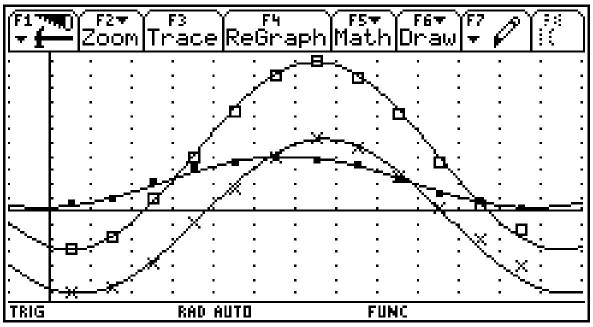


DATA	Monat	Tag	Nacht	Sonne	
	c1	c2	c3	c4	c5
1	.5	-5.7	-12.1		
2	1.5	-3.7	-11.4		
3	2.5	1.7	-7.6		
4	3.5	8	-1.8		
5	4.5	14.7	3.1		
6	5.5	19.8	7.8		
7	6.5	21.8	10.5		

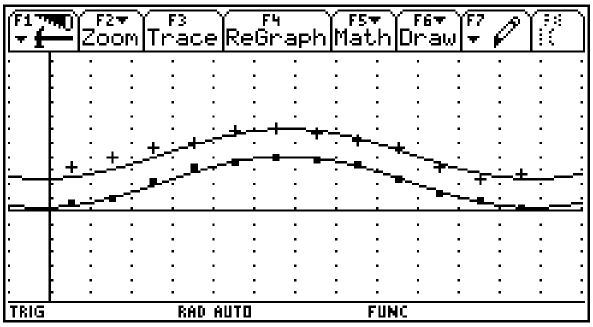
c4=lilsonne



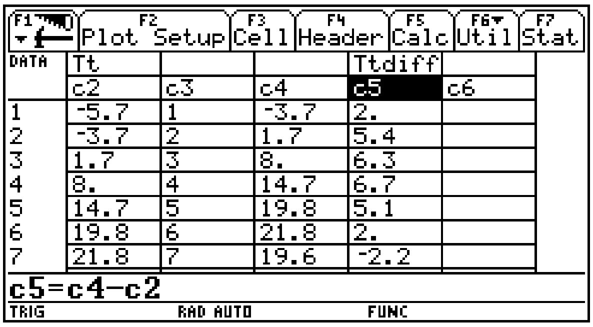
Die **mittlere Tagestemperatur** (▫) erreicht ihr Maximum später als die **mittlere Sonnenscheindauer (▪). Die mittlere Nachttemperatur (x)** erreicht ihr Maximum am spätesten.
Der Versuch einer Begründung dieser Tatsache führte zu eifrigen Diskussionen der Schüler.



Von den Schülern stammt auch die Frage nach der **Differenz der mittleren Tagestemperatur und der mittleren Nachttemperatur (+).** Sie verläuft phasengleich mit der **mittleren Sonnenscheindauer(▪)**.

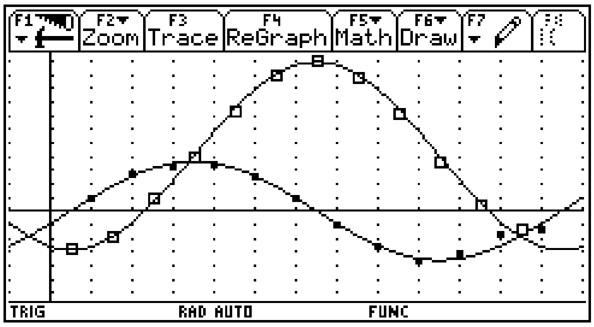


d) Wie ändern sich die Temperaturen von Monat zu Monat? Stellen Sie diesen Temperaturänderungsverlauf grafisch dar.



DATA	Tt			Ttdiff	
	c2	c3	c4	c5	c6
1	-5.7	1	-3.7	2.	
2	-3.7	2	1.7	5.4	
3	1.7	3	8.	6.3	
4	8.	4	14.7	6.7	
5	14.7	5	19.8	5.1	
6	19.8	6	21.8	2.	
7	21.8	7	19.6	-2.2	

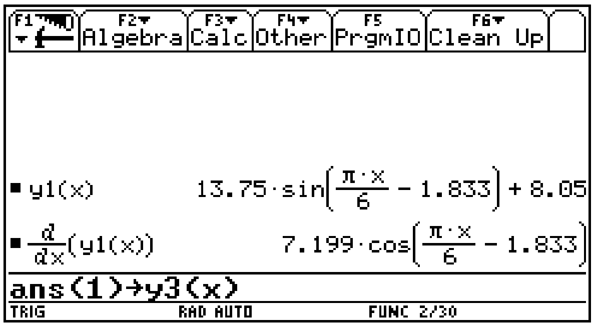
c5=c4−c2



Es wird wieder eine Sinusschwingung, die um 1/4 Periodenlänge verschoben ist. (Kosinus!!!)

Die zugehörige Funktion erhält man je nach Schulstufe entweder wie in Bsp. c, oder durch die erste Ableitung der Tagestemperaturfunktion.

Hier ermöglicht der Einsatz der Technologie schon frühzeitig numerische Differenziation, auch wenn Vorkenntnisse über das Differenzieren noch nicht vorhanden sind.

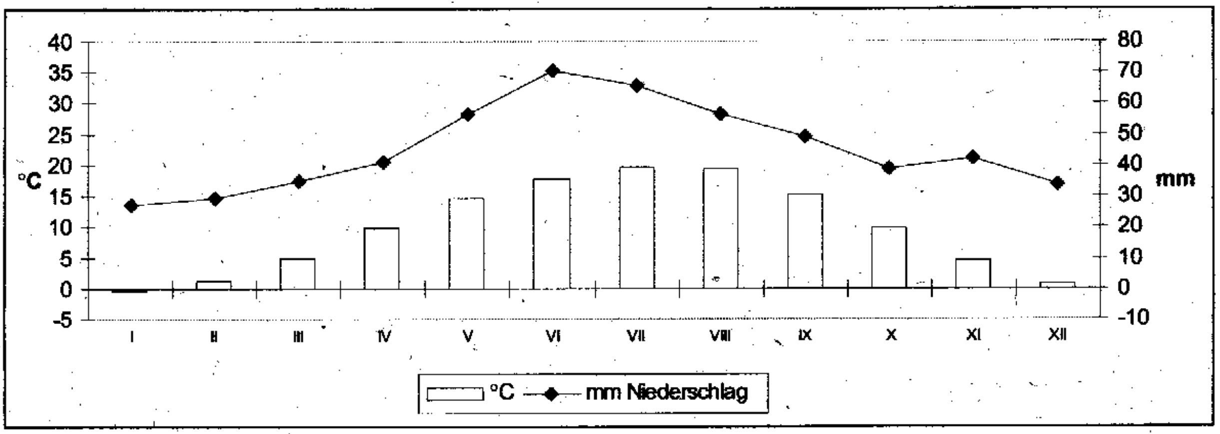


3. Dieser Winter ist bald vorbei, aber der nächste kommt bestimmt!

Blick ins Land 1/2000

Tab. 1: Durchschnittliche monatliche Temperatur und Niederschlagswerte der Versuchsstation Groß-Enzersdorf, 1960–1998.

Monat	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	I–XII
°C	0	1	5	10	15	18	20	19	15	10	5	1	Ø = 9,83
mm Niederschlag	27	29	35	41	57	70	66	56	49	39	42	34	Σ = 546



Klimaverhältnisse in Groß-Enzersdorf im Mittel von 1960–1998.

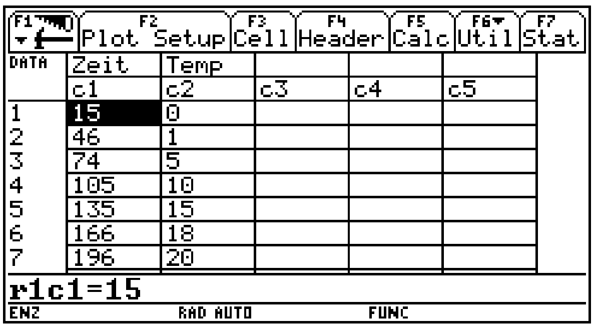
Die Raumtemperatur T_{Raum} soll während der Heizperiode auf einem konstanten Wert gehalten werden. Geheizt wird, wenn die Lufttemperatur unter eine bestimmte Grenztemperatur sinkt. Die zum Heizen erforderliche Leistung ist angenähert proportional zur Differenz aus Raum- und Aussentemperatur.

a) Beschreiben Sie den Temperaturverlauf durch eine geeignete Funktion.

Wir wollen die Daten in eine Tabelle übernehmen und den Temperaturverlauf graphisch darstellen. Anschließend simulieren wir den Temperaturverlauf durch eine geeignete Funktion.

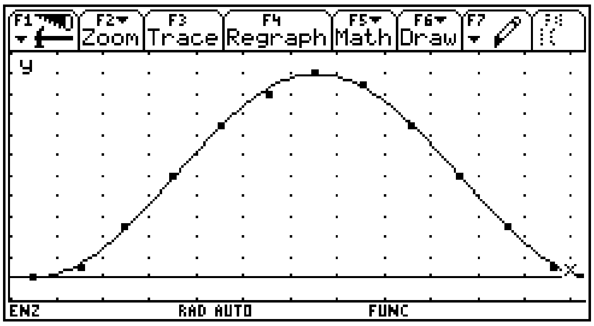
Wir beschreiben die Monatsmitten durch den jeweiligen Jahrestag (d.h., z.B. ist der 1. Februar dann der Tag $x = 32$, der 1. März $x = 60$, usw.

(2a = 20, Verschiebung nach oben um 10 Einheiten, Periodenlänge = 365d)



	Zeit c1	Temp c2	c3	c4	c5
1	15	0			
2	46	1			
3	74	5			
4	105	10			
5	135	15			
6	166	18			
7	196	20			

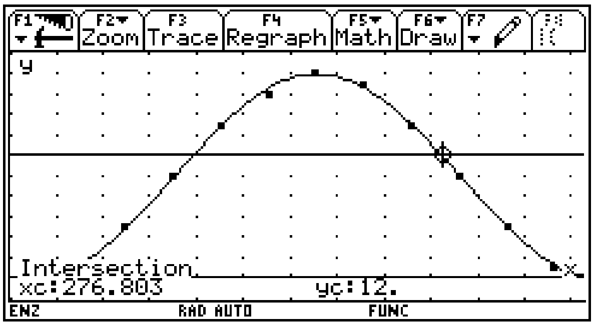
$$T = 10\sin\left(\frac{2\pi}{365}\cdot(x\text{-}106)\right)+10$$



b) In welchem Zeitraum ist bei einer angenommenen Grenztemperatur von 12° zu heizen?

Ab nun wird mit dem Modell gearbeitet (wozu haben wir es denn??)

(vom Tag Nr. 1 - 118 und von Tag 277 - 365



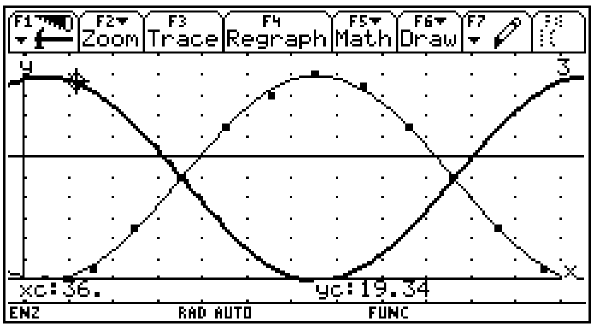
Welche Tage sind das? (4. Oktober - 28. April)

c) Eine konstante Raumtemperatur von 20° wird angestrebt.

Es kann angenommen werden, dass die Heizenergie und damit die Kosten pro Tag etwa proportional sind dem Temperaturunterschied zwischen der Außentemperatur und der „Wohlfühltemperatur" 20°.

Die Temperaturdifferenzen, die durch die Heizung ausgeglichen werden sollen (20° - Außentemperatur – Funktion), sind fett gedruckt dargestellt.

Am 5. Februar (Tag #36) sind beispielsweise 19,34° Temperaturunterschied auszugleichen.



Die für eine Heizperiode nötige Heizenergie ist proportional zur Summe der Produkte aus der Anzahl der Heiztage und der jeweiligen täglichen Temperaturdifferenzen (mit der Dimension [°] × [d]. Daher bezeichnet man das Ergebnis als „Heizgradtage“ HGd.

DATA	Zeit	Temp	20-Te…	Hd	Hgd
	c1	c2	c3	c4	c5
1	15	0	20	31	620
2	46	1	19	28	532
3	74	5	15	31	465
4	105	10	10	28	280
5	135	15	5	0	0
6	166	18	2	0	0
7	196	20	0	0	0

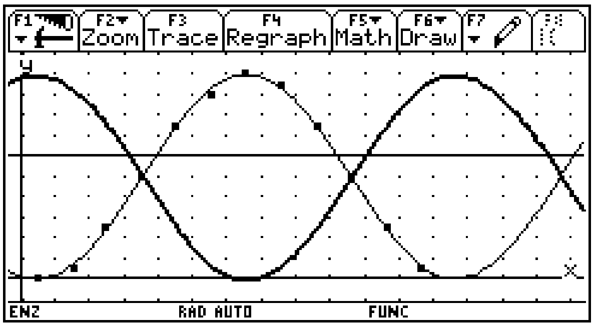
c5=c3*c4

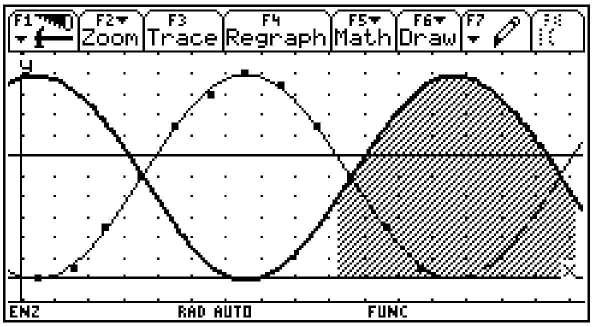
d) Wie groß ist die Summe der Heizgradtage für die gesamte Heizperiode?

DATA	Temp	20-Te…	Hd	Hgd	
	c2	c3	c4	c5	c6
1	0	20	31	620	3206
2	1	19	28	532	
3	5	15	31	465	
4	10	10	28	280	
5	15	5	0	0	
6	18	2	0	0	
7	20	0	0	0	

r1c6=sum(c5)

e) Für die graphische Darstellung wählen wir den Darstellungsbereich so, dass eine ganze Heizungsperiode zusammenhängend dargestellt werden kann.



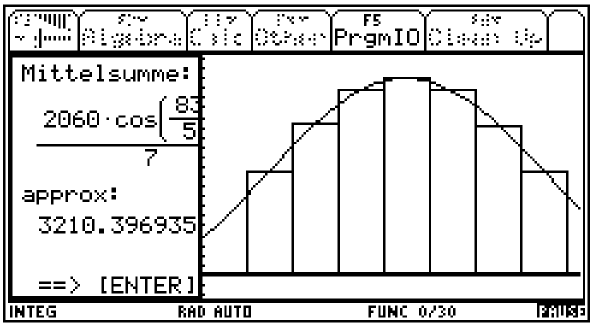


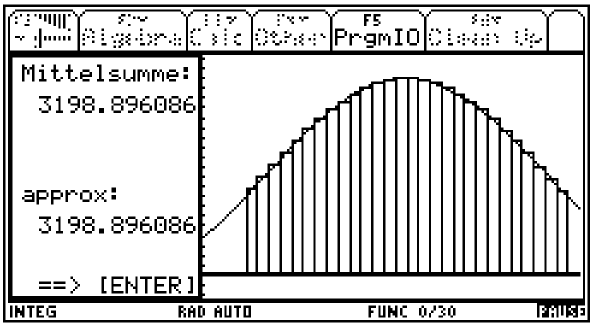
Wir machen eine grobe Schätzung, indem wir den Heizzeitraum in 7 gleiche Intervalle (Monate) teilen und die Temperatur für einen repräsentativen Tag - in der Mitte des jeweiligen Zeitraums - gelten lassen.

Die HGd können wir ablesen oder als Funktionswert bestimmen (auch mit dem gewöhnlichen Taschenrechner!)

15. Oktober	Tag #288	9,9°C	9,9 · 27= 267,3
15. November	Tag #319	15,0°C	15,0 · 30 = 450,0
15. Dezember	Tag #349	18,6C	18,6 · 31 = 576,6
15. Jänner	Tag #380	20,0°C	20,0 · 31 = 620,0
15. Februar	Tag #410	18,7°C	18,7 · 28 = 523,6
15. März	Tag #439	15,2°C	15,2 · 31 = 471,2
15. April	Tag #470	10,2°C	10,2 · 28 = 285,6
	Summe der HGd		3194,0

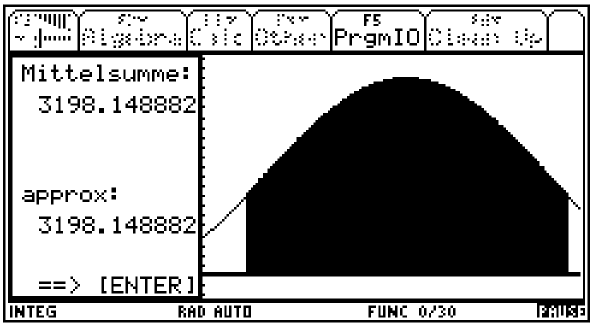
Diese Zahl läßt sich als Summe der Rechtecksflächen interpretieren.



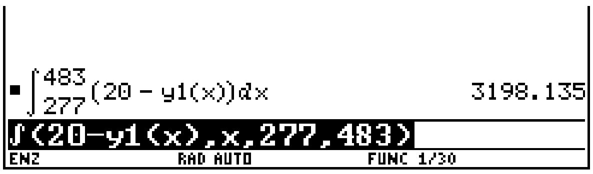


Die erhaltene Schätzung ist sicher gut genug, sie wäre zu verfeinern, indem man die täglichen Werte einer Tabelle entnimmt und die Summe bildet. In der Graphik wäre das dann für jeden Tag ein senkrecht aufstehendes Rechteck.

In diesem Fall vergrößert sich allerdings die Rechenzeit.



Durch Integration erhält man einen ähnlichen Wert.



f) Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit den entsprechenden Daten aus dem Internet, insbesondere für das Jahr 2000 für Niederösterreich, aus dem Internet (www.statistik.at), und interpretieren Sie den Zusammenhang.

7.6 Klimatische Bedingungen: Heizgradsummen [1)]

Climatic conditions: sum of degree-days

Berichts-periode		Burgenland	Kärnten	Niederösterreich	Oberösterreich	Salzburg	Steiermark	Tirol	Vorarlberg	Wien	Österreich
1998		3.065	4.138	3.583	3.625	4.936	3.837	4.674	3.716	2.719	3.657
1999		3.019	4.026	3.488	3.520	4.917	3.749	4.611	3.767	2.742	3.599
2000		2.718	3.774	3.166	3.277	4.560	3.490	4.208	3.525	2.441	3.304
1999	XII.	604	717	620	613	733	675	705	608	539	631
2000	I.	683	757	689	699	795	750	757	662	609	700
	II.	453	549	483	495	603	523	587	503	383	492
	III.	409	495	474	475	581	491	540	487	393	472
	IV.	115	271	187	213	362	230	362	298	102	214
	V.	22	108	46	62	191	80	178	117	0	71
	VI.	0	36	21	22	109	34	67	49	0	30
	VII.	0	60	16	31	157	45	109	82	0	42
	VIII.	0	21	1	7	78	8	13	24	0	11
	IX.	9	93	78	58	167	68	155	76	9	70
	X.	133	293	177	208	345	226	340	272	99	209
	XI.	343	481	411	435	530	431	498	438	331	420
	XII.	550	609	581	572	642	604	601	518	516	574

Q: Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Statistik Austria.-1) Summe der Heizgradtage; Berechnungsgrundlage "12-20", d.h. Tage mit einer Durchschnittstemperatur (über 24 Stunden) von mehr als 12,0° C gehen nicht in die Berechnung ein, hingegen sind Tage bis maximal (inkl.) 12,0° C mit ihrer Differenz zu 20,0° C mitzuzählen.

Man erkennt daraus, dass das Ergebnis mit dem Wert für das Jahr 2000 außerordentlich gut übereinstimmt. Aus den Ergebnissen für die anderen Jahre erkennt man aber, dass eine solche Übereinstimmung mit dem über 38 Jahre ermittelten Durchschnittswert einer einige km entfernten Region eher zufällig ist.

g) Aus den Heizgradtagen kann man den jährlichen Heizenergiebedarf eines Hauses zumindest schätzungsweise ermitteln, wenn man Aussagen über dessen Außenfläche und Wärmedämmung (k-Wert [Watt/(m2 × °]) kennt. Die Leistung [Watt] ist proportional der Anzahl der Heizgradtage und der Außenfläche A mit dem k-Wert als Proportionalitätsfaktor.

Wie lautet die Gleichung für die Heizenergie HE?

Beachte die richtige Dimension des Ergebnisses.

HE = k · Watt · m^{-2} / Grad · A m^2 HGd · Grad · d = k · A · HGd · Watt · d

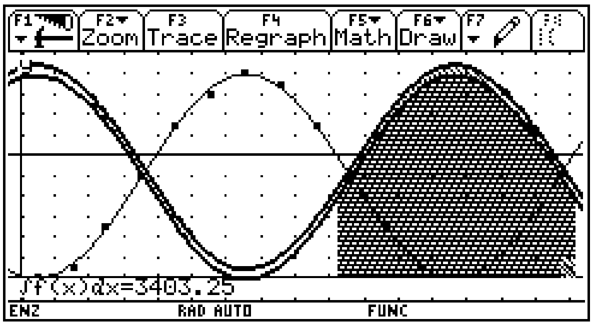
h) Welche Heizenergie in kWh braucht man, um ein Gebäude mit einer Außenfläche von 500m^2 beim k-Wert = 0,9 zu beheizen? (Grenztemperatur 12°C, Raumtemperatur 20°C)

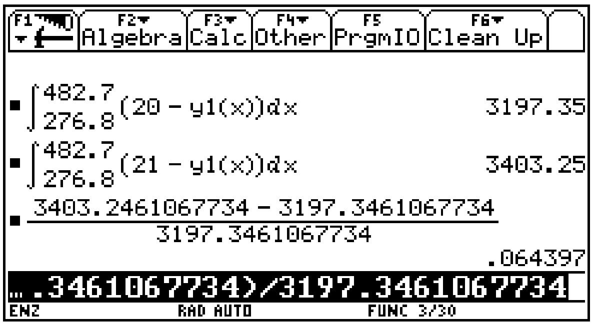
HE= 0,9 · 500 · 3200 · Watt · d = Watt · d = 1440 · kW · d=

= 1440 kW · 24 h = 34560 kWh

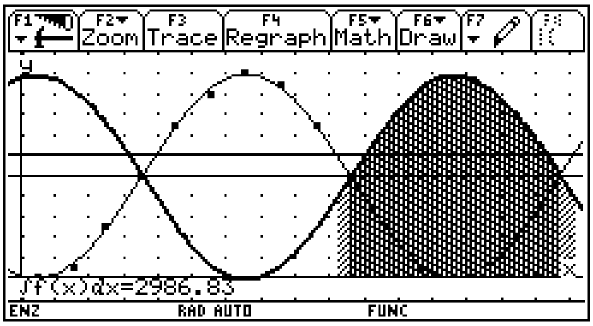
Zusätzliche Fragestellungen:

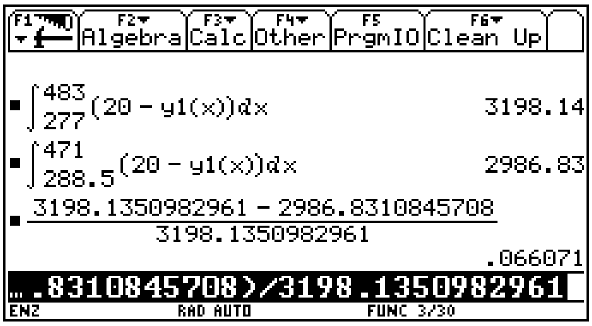
i) Um wieviel Prozent steigt die benötigte Heizenergie, wenn die Raumtemperatur auf 21°C erhöht wird (bei Grenztemperatur 12°)?





h) Um wieviel Prozent sinkt die benötigte Heizenergie, wenn die Grenztemperatur auf 10°C erniedrigt wird (bei Raumtemperatur 20°)?



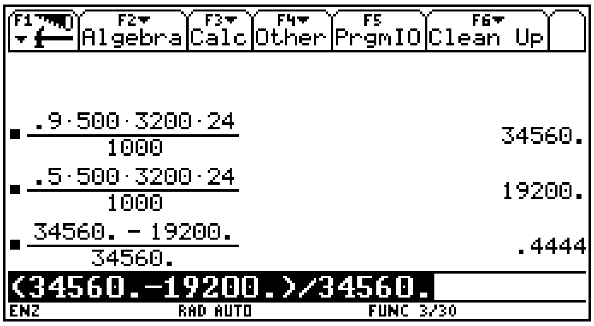


j) Welche Möglichkeiten zur Einsparung von Heizenergie ergeben sich aus der Gleichung

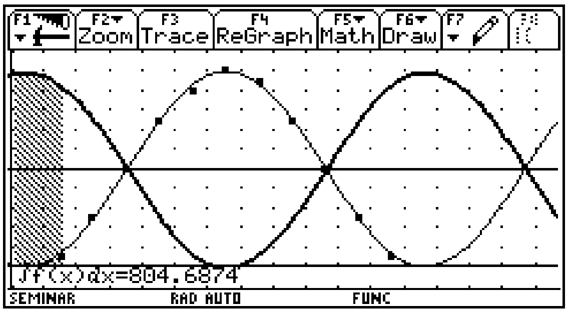
$$W = k \times A \times HGd?$$

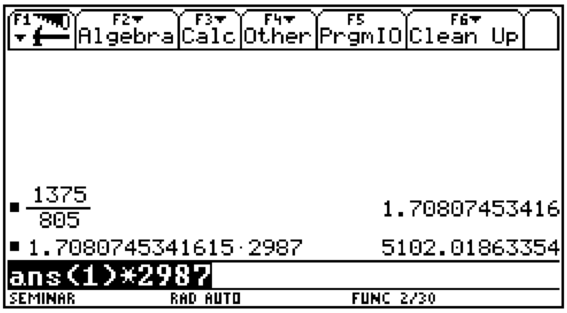
- Verkleinerung des k-Wertes
- Verkleinerung der Hausaußenfläche
- Senkung der Raumtemperatur (zumindest nachts)
- Senkung der Grenztemperatur (Verkürzung der Heizperiode)
- Verbesserung der Heizanlage
- Ökonomisches Lüften
- Nutzung der Kochwärme

k) Um wieviel Prozent ändert sich die benötigte Heizenergie, wenn durch zusätzliche Wärmedämmung der k-Wert auf 0,5 herabgesetzt werden kann?



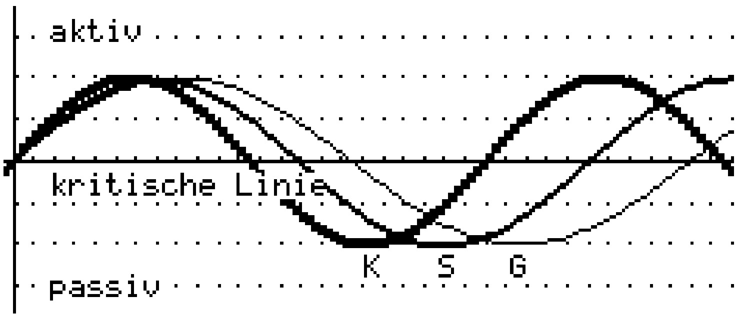
l) Familie Kaltundwarm verbraucht vom 5. Jänner bis zum 15. Februar Heizöl im Wert von ATS 1375.-. Schätze die Heizkosten für das ganze Jahr unter der Annahme, dass die Ölpreise unverändert bleiben. (Grenztemperatur 10°C, Raumtemperatur 20°C)





4. Der Biorhythmus bestimmt unser Tun????

Der **Biorhythmus** bietet eine Erklärung für die Schwankungen der körperlichen, seelischen und geistigen Verfassung eines Menschen. Eine innere Uhr steuert drei Zyklen.



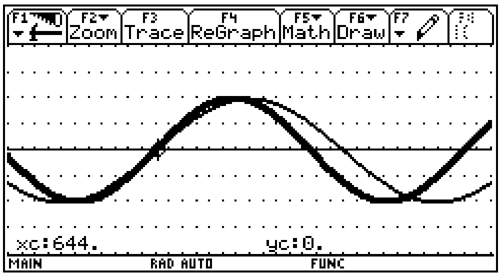
Für die **körperliche** Verfassung dauert der Rhythmus K **23 Tage**, der **seelische** Rhythmus S erstreckt sich über **28 Tage**, der **geistige** Rhythmus G über **33 Tage**. Jeder Rhythmus kann als Sinuskurve dargestellt werden, die sich über und unter einer horizontalen Linie (y=0), der kritischen Linie bewegt.

a) Stellen Sie die drei Zyklen als Sinusfunktionen K(t), S(t) und G(t) dar, wobei t die Anzahl der Tage seit der Geburt ist.

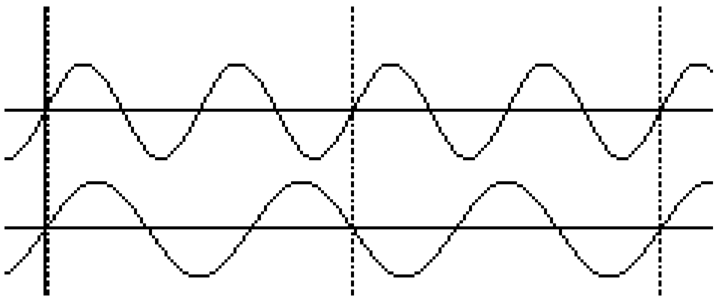
$$K(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{23}t\right), \quad S(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{28}t\right), \quad G(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{33}t\right)$$

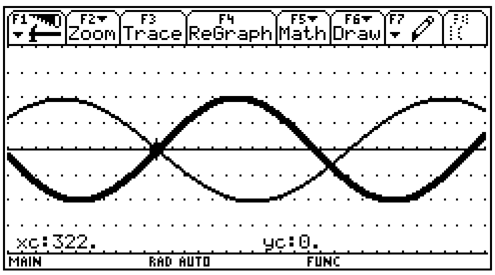
b) Wie viele Tage nach der Geburt sind der körperliche und der seelische Rhythmus zum ersten Mal seit der Geburt gleichzeitig wieder auf der kritischen Linie angelangt?

kgV(28,23)=644Tage

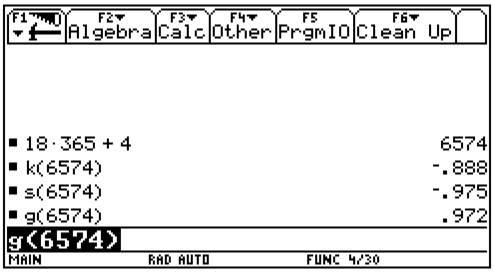


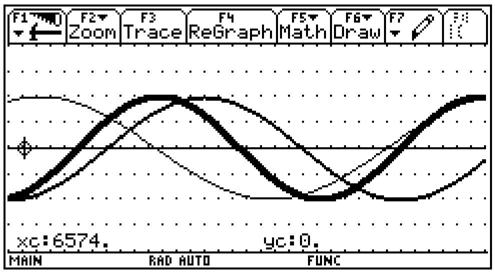
Dabei ist zu beachten, dass die beiden Kurven schon zur „Halbzeit“ gleichzeitig eine Nullstelle haben





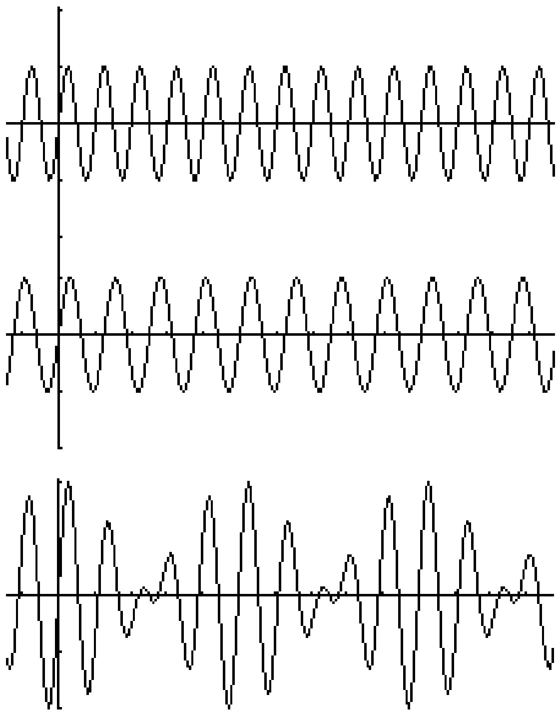
c) Geben Sie die drei Energieniveaus des Neujahrsbabys von 1982 an seinem 18. Geburtstag am 1.1.2000 an, und interpretieren Sie diese. Skizzieren Sie den Biorhythmus für den Jänner 2000. (Beachten Sie dabei die Schaltjahre 1984, 1988, 1992 und 1996.)





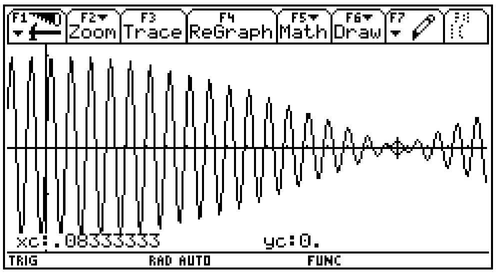
5. Interferenzen

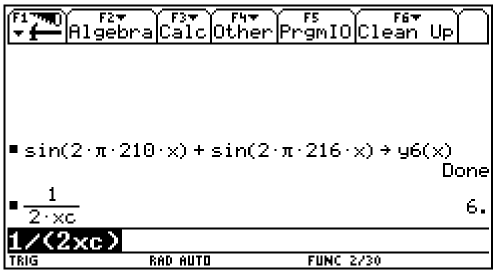
Eine wichtige Erscheinung, die bei mehreren Tönen durch gegenseitige Beeinflussung ihrer Schallwellen auftritt, ist die **Interferenz** (Überlagerung). Es handelt sich um die Eigenschaft zweier oder mehrerer Wellenzüge, sich unter gewissen Bedingungen zu verstärken oder gar auszulöschen. Es gibt Fälle, in denen man die Interferenzen ganz bewusst anwendet, und zwar zur Erzeugung von Schwebungen. Der schwebende Klang wird bei manchen Orgelregistern absichtlich erzeugt, z.B. Vox coelestis. Solche Register erhalten für jede Taste zwei Pfeifen, die nicht ganz gleich hoch gestimmt sind.



a) In der Abbildung ist die Interferenz zweier Wellen mit den Frequenzen 210 Hz und 168 Hz abgebildet. Versuchen Sie, die Abbildungen auch auf Ihrem TI in einem geeigneten Maßstab zu erzeugen, und messen Sie die Anzahl der Schwebungen pro Sekunde. Wie hängt diese Anzahl der Schwebungen pro Sekunde mit den beiden Frequenzen zusammen? Welche Formel vermuten Sie?

b) Wie viele Schwebungen pro Sekunde erzeugen zwei Töne mit einer Frequenz von 216 Hz und 210 Hz?



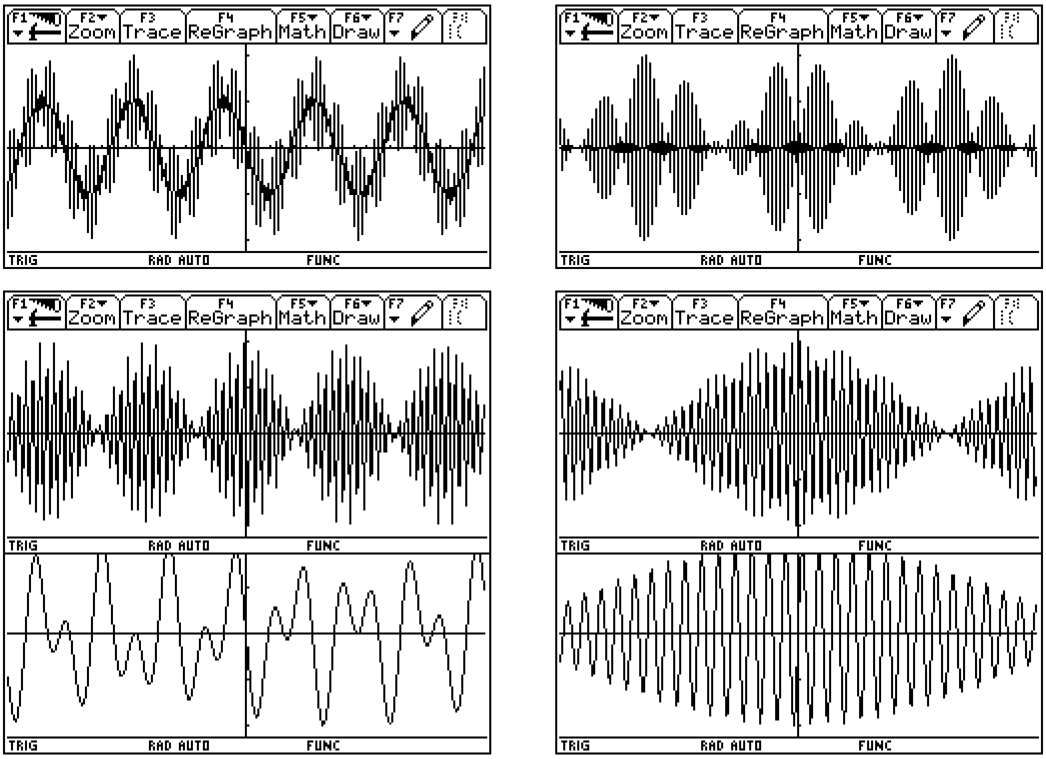


Die halbe Periodenlänge beträgt 0,083. Die beiden Töne erzeugen also eine Schwebung mit der Frequenz 216Hz-210Hz=6Hz.

Was macht die graphische Darstellung in diesem Fall so schwierig?

Zum Abschluss noch ein paar merkwürdige Graphen:

$$y = \sin(216 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x) + \sin(210 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x)$$



HInweis: Dieses Skriptum gibt es auch für die Durchführung mit dem TI-83+

Quellen:

[1] W. Schmidt, mathematikaufgaben- anwendungen aus der modernen technik und arbeitswelt, klett, ISBN 3-12-711100-2

[2] J. Böhm, W. Pröpper, Einführung des Integralbegriffs mit dem TI-92, bk teachware SR-13, ISBN 3-901769-21-8

[3] J. Böhm, T. Koller, Winkelfunktionen – aber nicht nur in Vermessungsaufgaben, Vortragsmanuskript eines Vortrags an der Technischen Universität Wien, März 2000

[4] T. Koller, Fächerübergreifende Anwendungen der Winkelfunktionen, Vortragsmanuskript einer T^3 - Veranstaltung, März 2000

[5] C. Leinbach, Examining Home Heating Costs, Gettysburg College