Vektorrechnung mit dem TI-92/TI-92 Plus

Dr. Thomas Himmelbauer

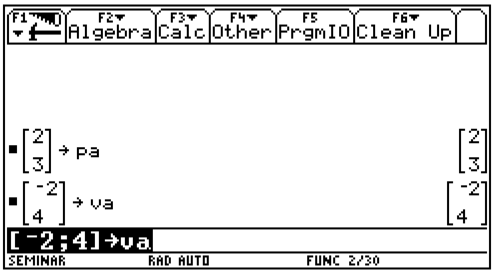
Ein Unterrichtsbehelf zum Einsatz moderner Technologien im Mathematikunterricht

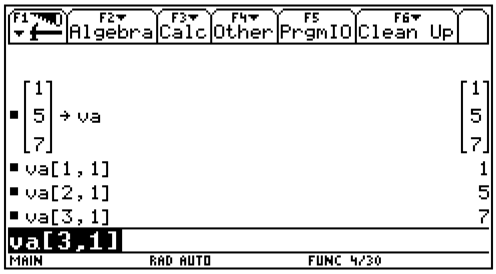
T^3 Österreich / ACDCA am PI-Niederösterreich, Hollabrunn

Inhalt

1 Eingabe von Punkten und Vektoren

Die Eingabe von Punkten und Vektoren erfolgt in Spaltenform. Eine optische Unterscheidung von Punktkoordinaten und Vektorkoordinaten ist nicht möglich. Wenn eine Unterscheidung erforderlich ist, kann dies durch die Bezeichnung geschehen zB. `pa`, `pb`, `pc,`...... für Punkte und `va`, `vb`, `vc,`........ für Vektoren. Dies ist aber in der Regel nicht notwendig. Der Zugriff auf die Koordinaten erfolgt wie der Zugriff auf die Elemente einer Matrix mit einer Spalte.





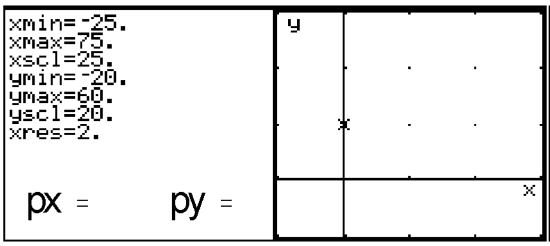
2 Darstellung von Punkten

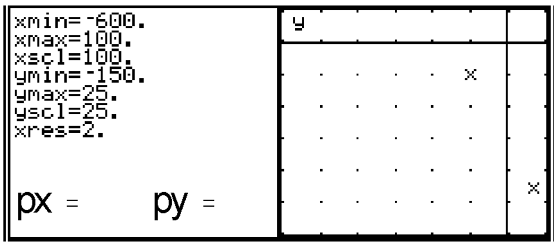
a) Arbeitsblätter

Ausschnitte aus zwei Arbeitsblättern, die dazu dienen, das Wissen über Koordinaten und [WINDOW] - Variable, bzw. –Einstellungen zu festigen.

Arbeitsblatt 1

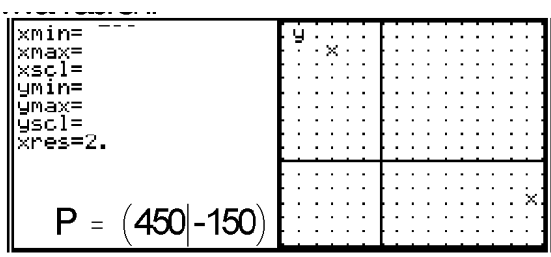
Bestimme jeweils die Koordinaten des Punktes, der durch ein Kreuz markiert ist!

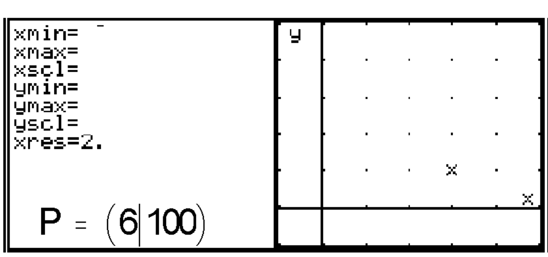




Arbeitsblatt 2

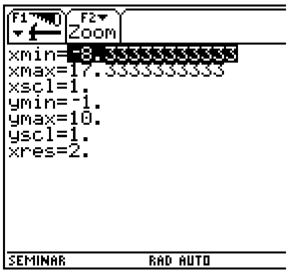
Ergänze auf Grund der Angabe der Koordinaten des angekreuzten Punkte die Windowvariablen!

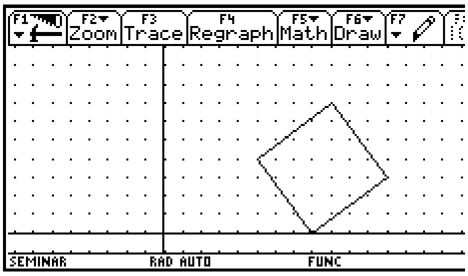


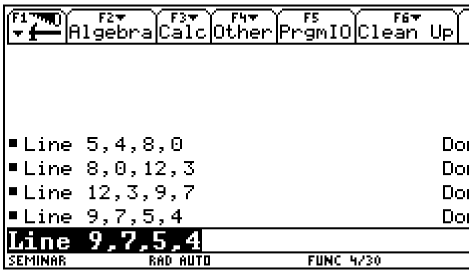


b) Zeichnung einfacher geometrischer Figuren mit dem `line`-Befehl

Die Figur und die Windowvariablen sind vorgegeben, die entsprechenden `line` Befehle sind anzugeben.



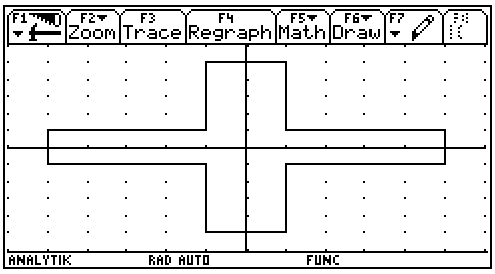


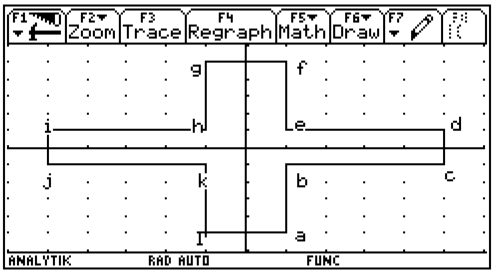


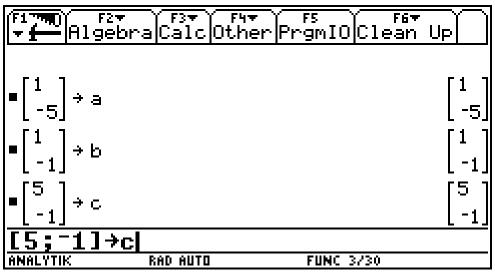
c) Darstellung von „Logos“ mit dem `Newplot`-Befehl

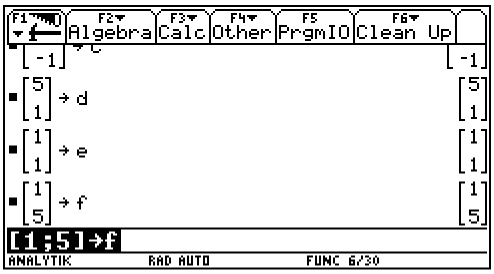
Die Idee der Erzeugung von Logos durch Schüler geht auf Josef Böhm zurück. Sie wurde von mir dem Band *„Neue Technologien/Neue Wege im Mathematikunterricht“*, entstanden im Rahmen eines COMENIUS-Projekts und herausgegeben vom PI-Niederösterreich, entnommen.

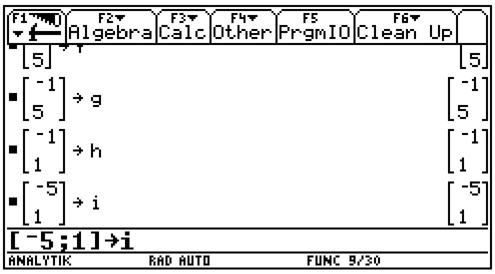
Zunächst wird im Koordinatensystem das Logo entworfen. Dann werden alle Punkte beschriftet und ihre Koordinaten bestimmt. Nun wird überlegt, wie die Figur als geschlossener Linienzug dargestellt werden kann, wobei Strecken auch öfter durchlaufen werden können.

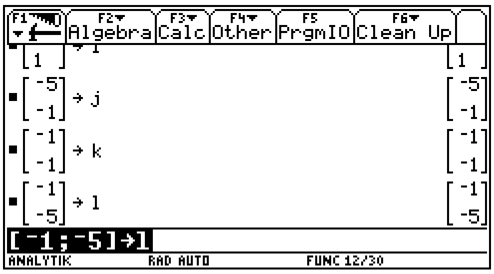




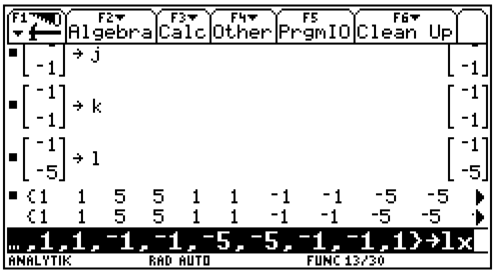


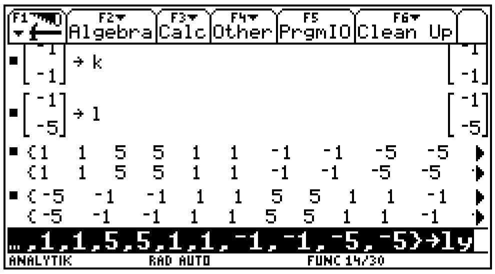




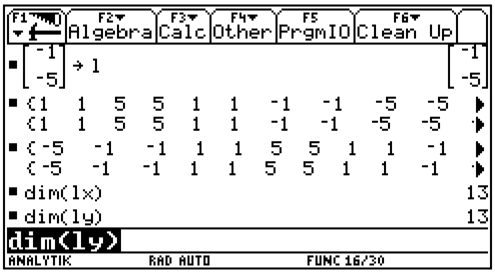


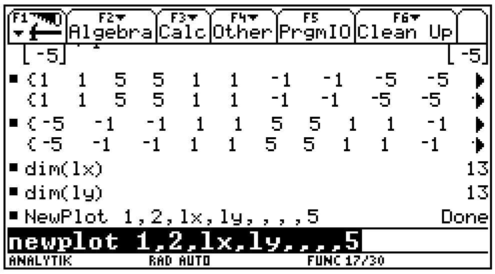
Nun werden 2 Listen angelegt. Die Liste `lx` für die *x*-Koordinaten der Punkte, die Liste `ly` für die *y*-Koordinaten der Punkte.





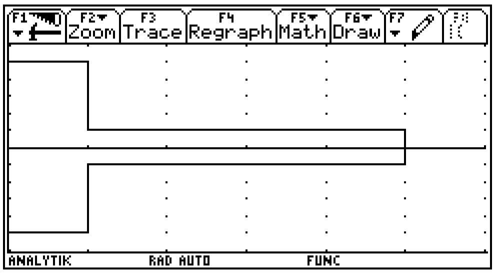
Mit dem Befehl `dim` kann noch die Länge der Listen überprüft werden. Nun folgt der Plotbefehl.

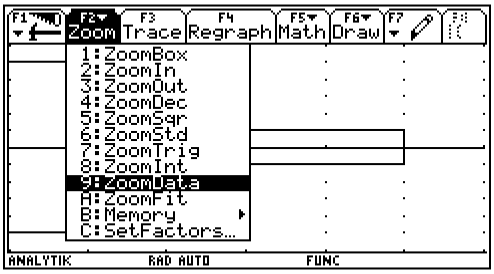




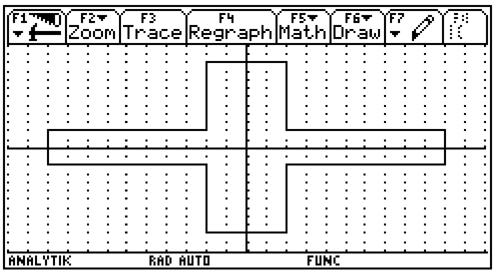
Die Ziffer 1 legt die Nummer des Plots fest, die Ziffer 2 legt fest, dass ein geschlossener Linienzug dargestellt wird. Dann folgen die Listen für die *x*-Koordinaten und die *y*-Koordinaten der darzustellenden Punkte. Die vier Beistriche trennen Einstellungen, die wir nicht benötigen. Die Ziffer 5 legt fest, dass die Punkte durch `dots` dargestellt werden.

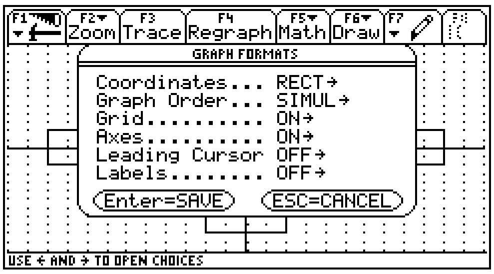
Sollte die Fenstereinstellung nicht das gesamte Logo zeigen, kann dies über den Befehl `ZoomData` aus dem `Zoom`-Menü geändert werden.

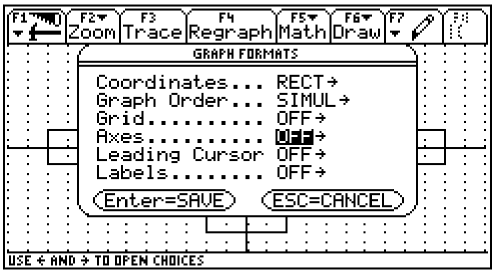


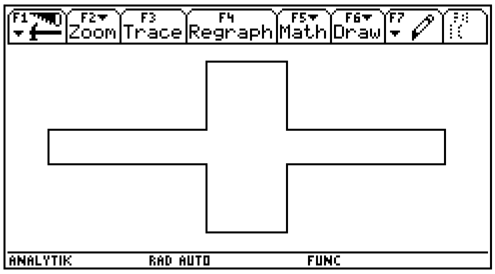


Über [♦] [F] können wir die Achsen (`Axes`) und die Gitterpunkte (`Grid`) ausblenden.

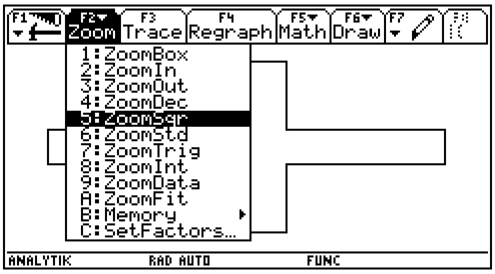


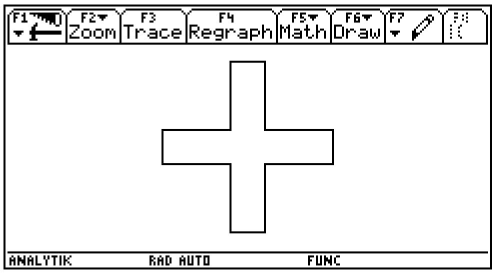




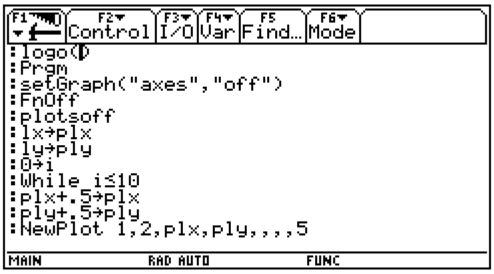


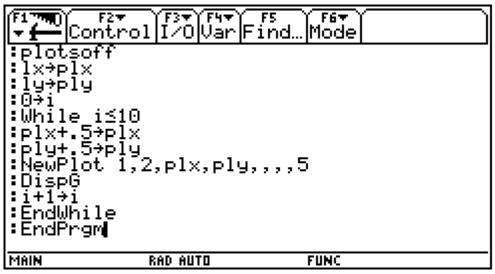
Zuletzt kann über [F2] `ZoomSqr` erreicht werden, dass die Einheiten auf der *x*-Achse bzw. der *y*-Achse gleich groß dargestellt werden.





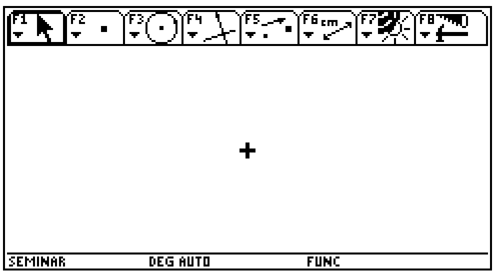
Mit Hilfe einfacher Programme können diese Logos über den Bildschirm bewegt werden. Es folgt das Beispiel eines Programmes, das ein Logo, das in den Listen `lx` und `ly` abgespeichert ist, in 11 Schritten nach rechts oben bewegt.

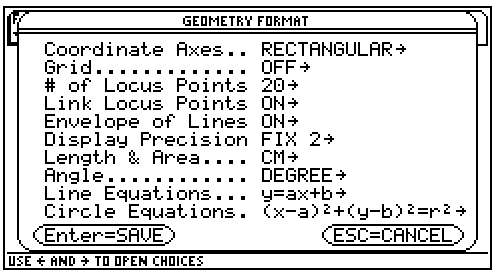




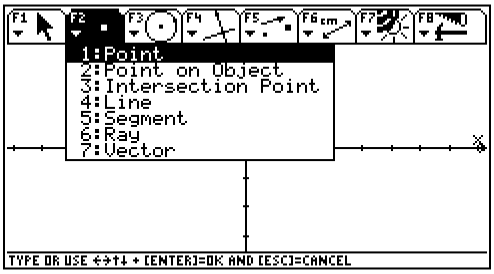
d) Bewegung eines Punktes in der Cabri-Geometrie

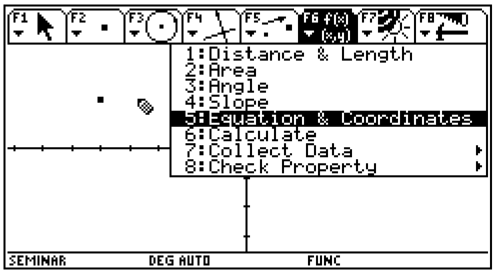
Wir öffnen Cabri und lassen uns über [♦] [F] das Geometrie Format anzeigen und stellen `Coordinate Axes` auf `RECTANGULAR`.



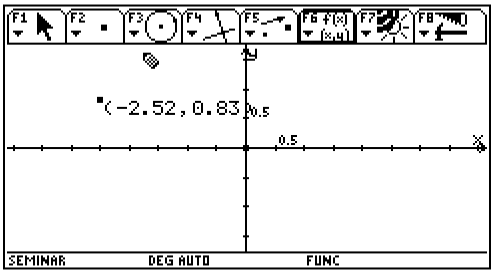


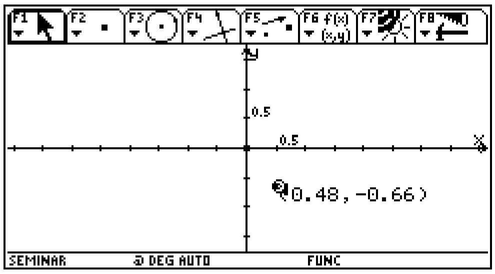
Dann setzten wir an eine beliebige Stelle einen Punkt und bestimmen dessen Koordinaten.





Mit [ESC] gelangen wir in den `Pointer` Modus und können nun mit der Handtaste den Punkt ergreifen, verschieben und dabei die sich verändernden Koordinaten beobachten.

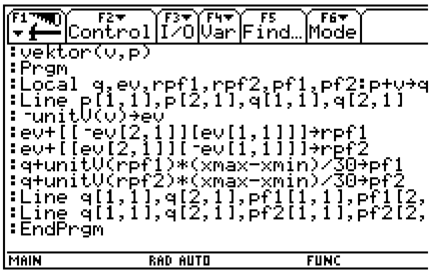


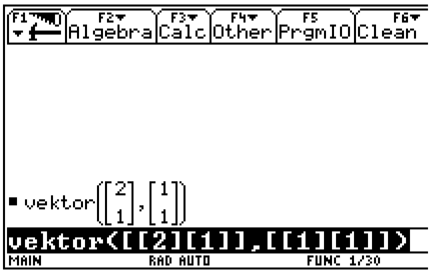


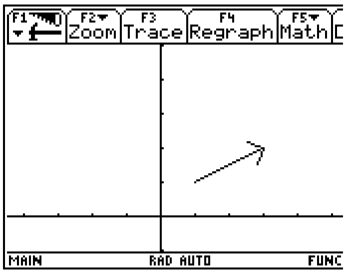
3 Darstellung von Vektoren

a) Durch Programme

Das folgende Programmbeispiel lässt einen Vektor mit Hilfe von `line`-Befehlen zeichnen.





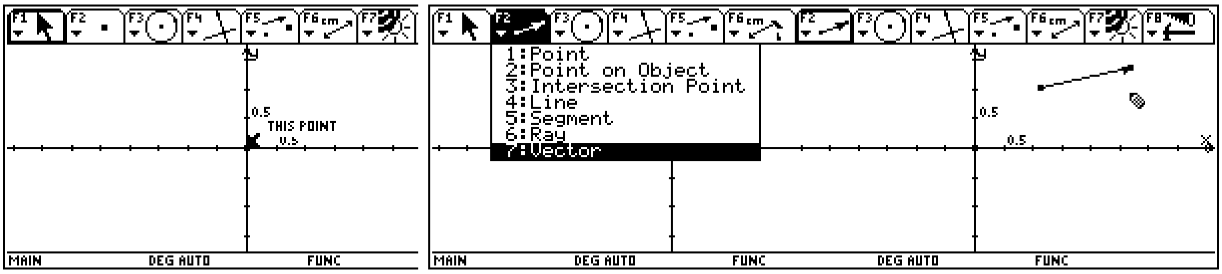


Dieses Programm läßt sich mit den Schülern gemeinsam erstellen. Die Zeichnung der Spitze erfordert doch einiges an Vektorrechnung. Man kann das Programm aber auch den Schülern „schenken". Die Eingabesyntax von Vektorkoordinaten und Punktkoordinaten (Anfangspunkt des dargestellen Vektors) macht den Unterschied zwischen Punkt und Vektor noch einmal deutlich.

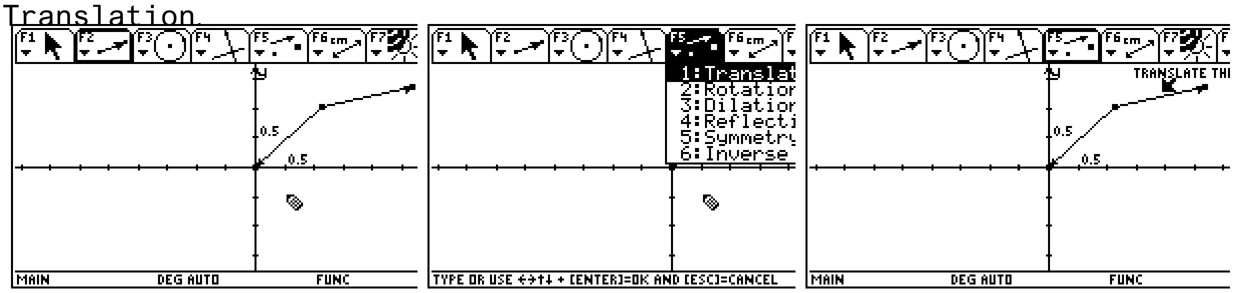
b) Mit Cabri-Geometrie:

Es gibt zwar keine Koordinatenangabe für Vektoren, aber mit einem kleinen Trick können wir uns solche erstellen.

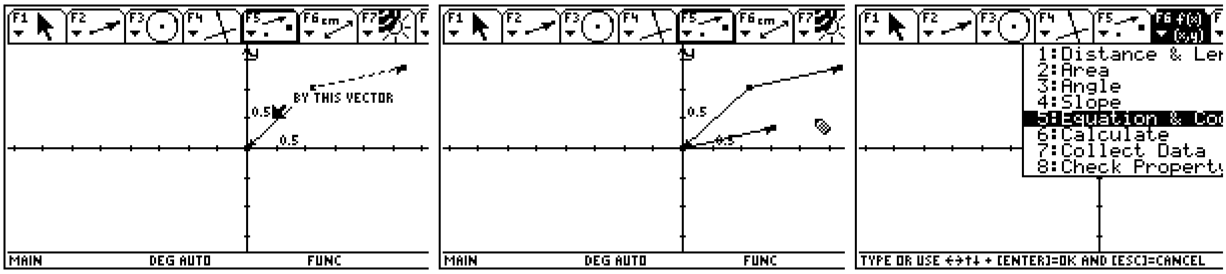
Zunächst blenden wir die Koordinatenachsen ein und zeichnen einen beliebig großen Vektor an eine beliebige Stelle.



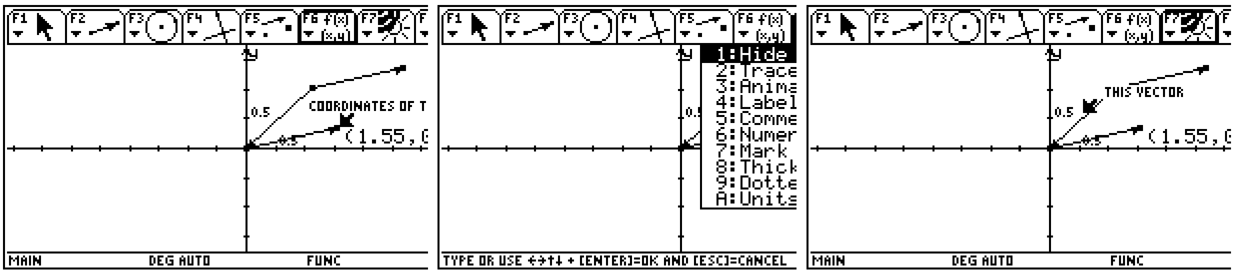
Anschließend zeichnen wir einen zweiten Vektor, der den ursprünglichen Vektor in den Koordinatenursprung verschiebt und erreichen diese Verschiebung mit dem Menüpunkt Translation.



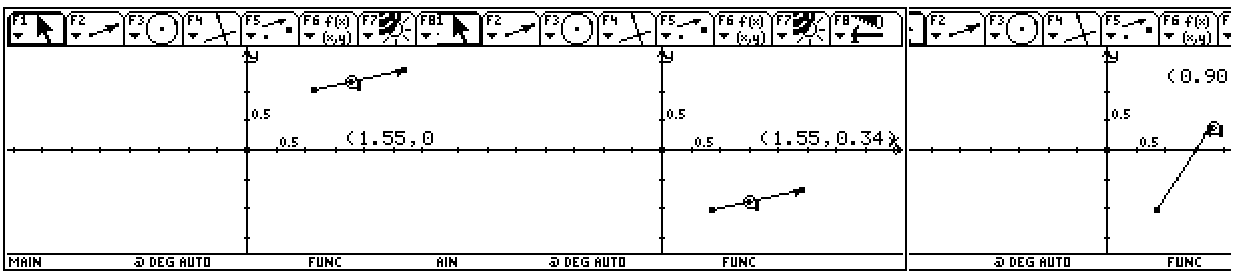
Die Punktkoordinaten der Spitze des verschobenen Vektors können nun bestimmt werden und sie sind gleich den Vektorkoordinaten.



Man kann die Hilfskonstruktion mit dem Befehl Hide/Show verstecken.

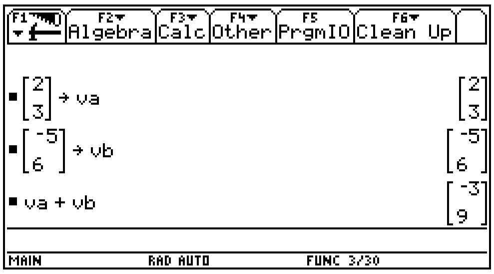


Die Veränderung der Koordinaten bei Verschiebung des ganzen Vektors oder nur seiner Spitze kann nun beobachtet werden.

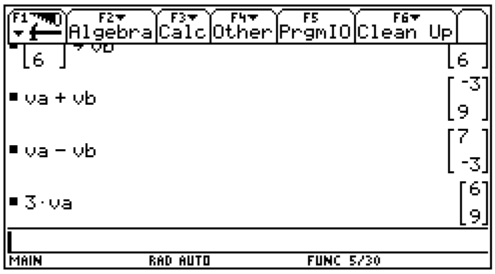


4 Eingebaute Grundfunktionen

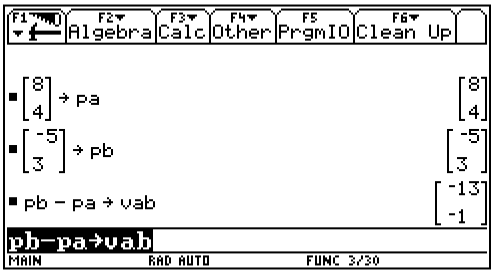
Vektoraddition



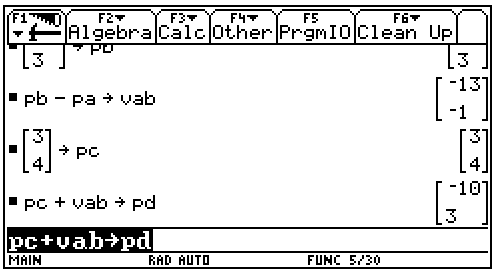
Vektorsubtraktion und Multiplikation mit einem Skalar



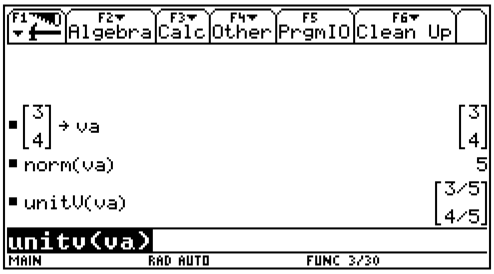
Vektor vom Punkt A nach Punkt B



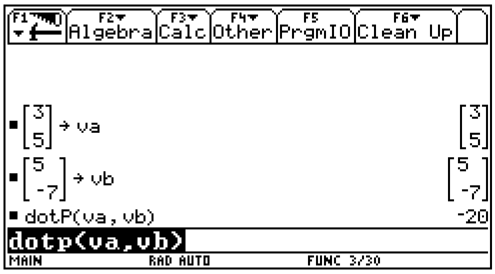
Vektoraddition im Sinne von Ortsvektoren



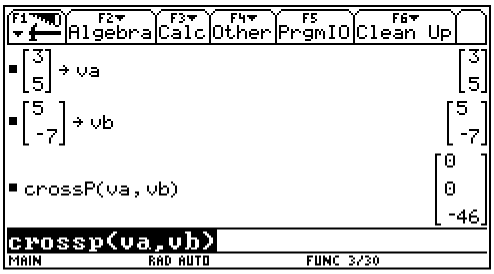
Betrag eines Vektors, Einheitsvektor



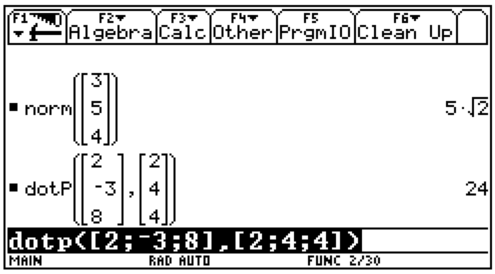
Inneres Produkt



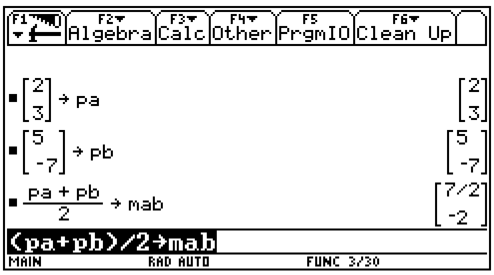
Äußeres Produkt



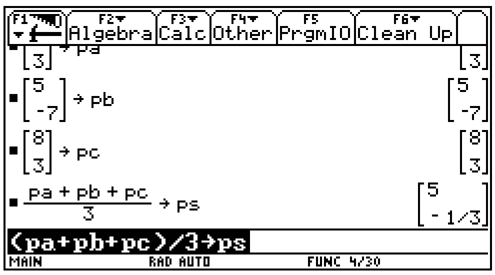
Alle Funktionen arbeiten auch für mehr Dimensionen



Halbierungspunkt

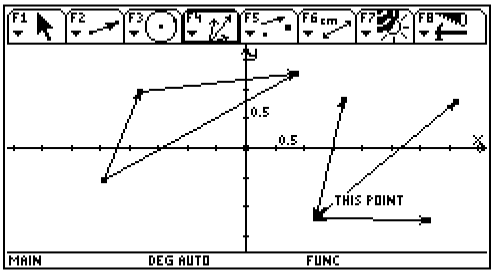


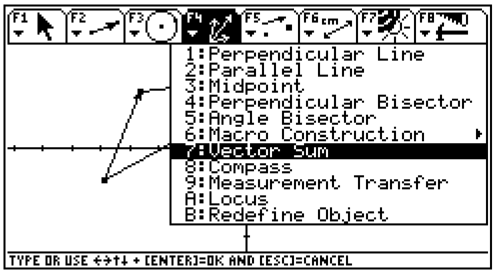
Schwerpunkt



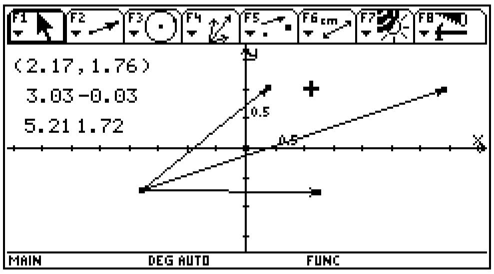
Die Vektoraddition ist in der Cabri-Geometrie als eigene Funktion `Vector Sum` integriert.

Der Sinn der Funktion besteht darin, dass man den Summenvektor erhält, ohne die beiden Vektoren tatsächlich geometrisch zu addieren.





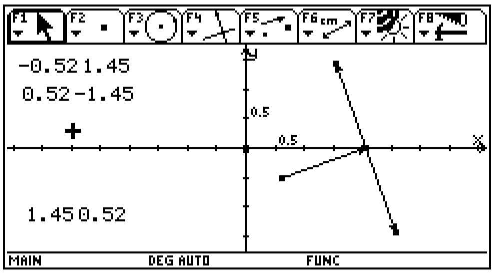
Auch in diesem Fall können wir mit dem schon gezeigten kleinen Trick die Vektorkoordinaten ermitteln und bei Verschiebung der Vektoren deren Veränderung verfolgen.

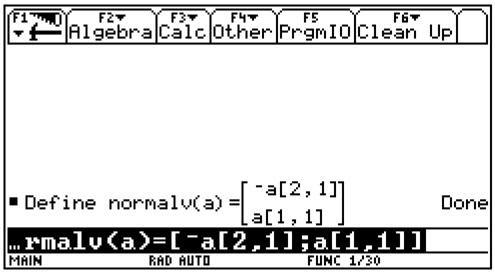


5 Normalvektor für Vektoren in der Ebene

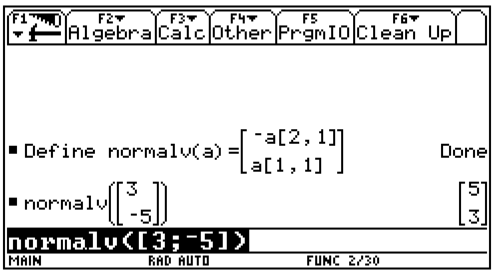
Diese Funktion fehlt leider im TI-92/TI-92Plus, kann aber ganz leicht ergänzt werden.

Zur Vorbereitung könnte man mit den Schülern wieder die Cabri-Geometrie verwenden und auch für den Normalvektor den Trick mit den Vektorkoordinaten verwenden.

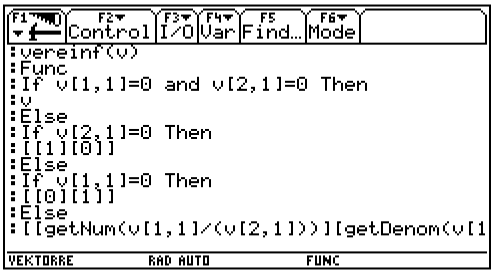


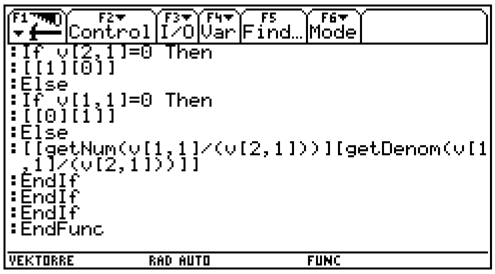


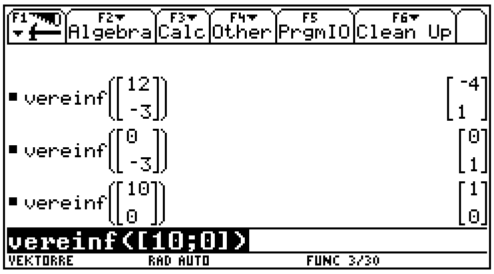
Danach läßt sich die fehlende Funktion leicht definieren.



Für Liebhaber vereinfachter Richtungsvektoren (bei Verwendung von CAS nicht notwendig) ist hier noch eine derartige Funktion für 2-dimensionale Vektoren angeführt.

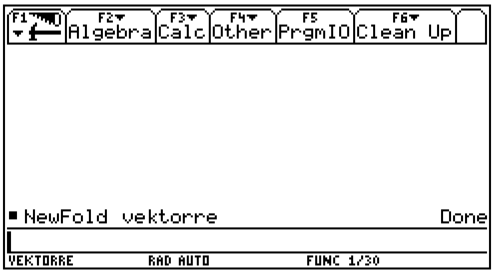


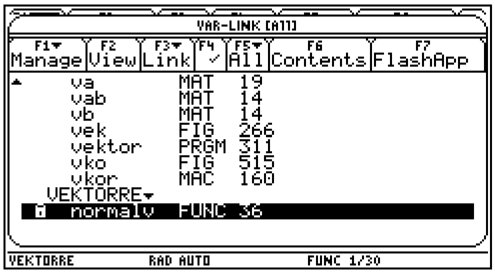




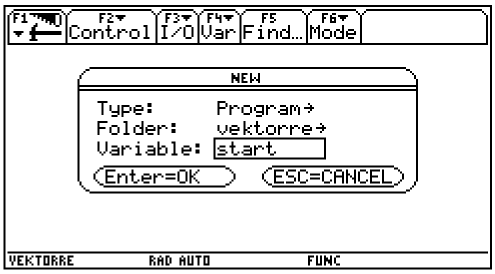
6 Folders und Menüs für die Vektorrechnung

Wenn man mit selbstdefinierten Funktionen arbeitet, ist es günstig sich einen eigenen Folder anzulegen und diese Funktionen dort geschützt (`lock`) aufzubewahren.

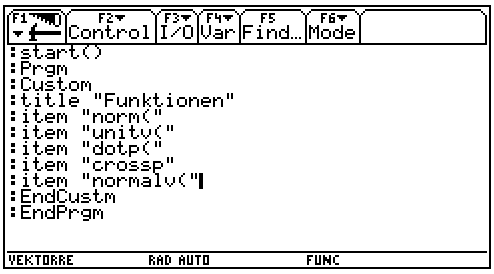


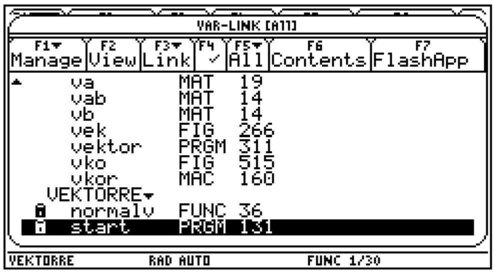


Außerdem kann man sich speziell für die Vektorrechnung ein eigenes Menü erstellen. Dazu schreiben wir ein kurzes Programm. Wir öffnen über [APPS] den `Program Editor` und wählen für das Programm die Variablenbezeichnung `start`.

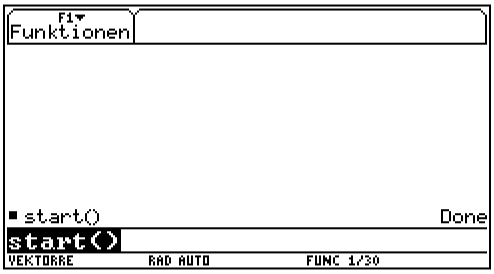


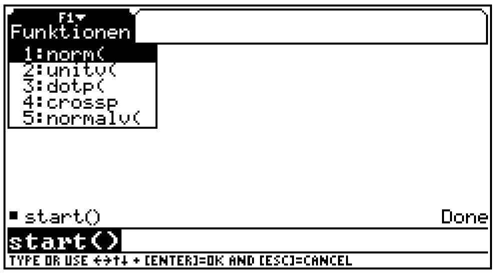
Dieses Programm erzeugt eine vom Benutzer definierte Menüleiste, die in unserem Fall nur den einzigen Menüpunkt `Funktionen` enthält und über [F1] geöffnet werden kann. Er zeigt die Einträge `norm(` bis `normalv(`. Auch dieses Programm sollte man geschützt im Folder aufbewahren.





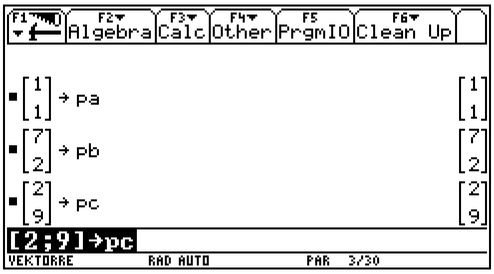
Nachdem das Programm `start()` aufgerufen wurde, kann man über die Tastenkombination 2nd [CUSTOM] die benutzerdefinierte Menüleiste aufrufen. Mit nochmaliger Tastenkombination 2nd [CUSTOM] kehrt man wieder zur Standardmenüleiste zurück.

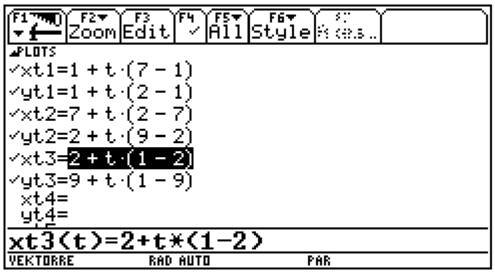




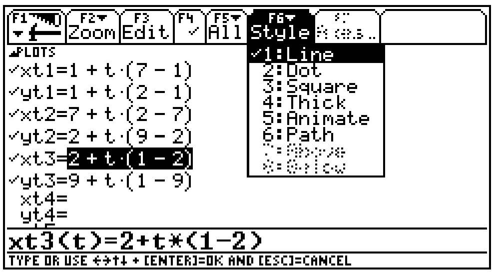
7 Parameterdarstellung von Strecken

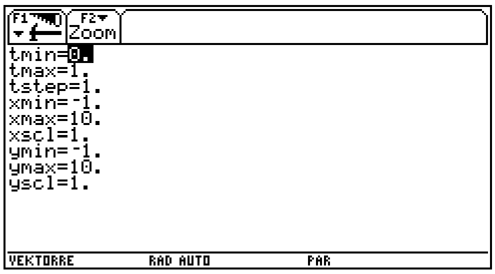
Ein Dreieck soll im MODE `Graph PARAMETRIC` dargestellt werden. Eine angenehme Eigenschaft des `Y=Editors` ist, dass die Funktionsterme nicht automatisch vereinfacht (simplifiziert) werden.

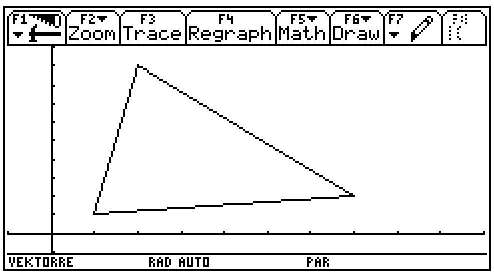




Wählt man den `Style Line`, so genügt es, in den Windowvariablen `tstep` auf 1 zu setzen.

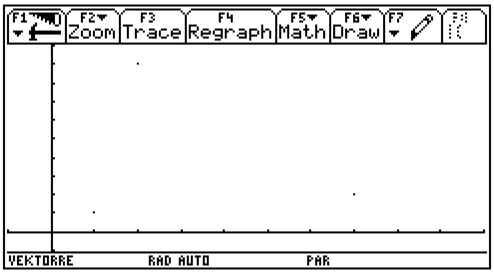


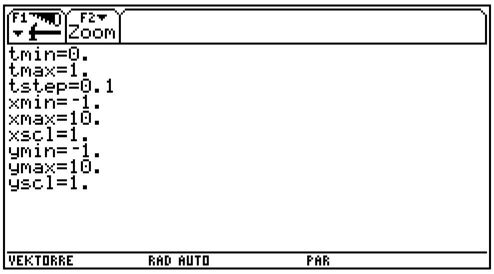




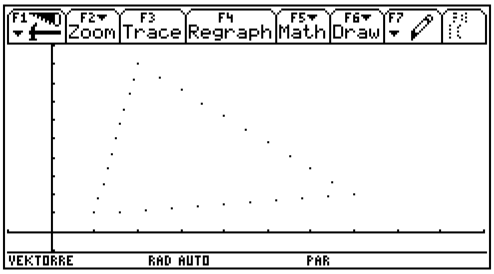
Bei Verwendung von `Style Dot` sind bei `tstep`=1 nur die Eckpunkte des Dreiecks zu sehen.

.





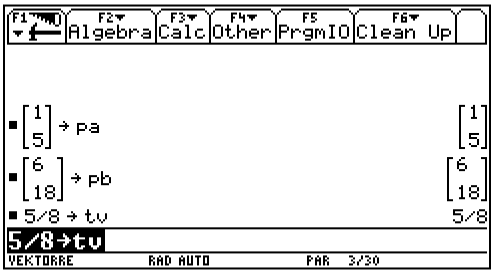
Bei `tstep`=0.1 ist die Grafik bereits zu erkennen.

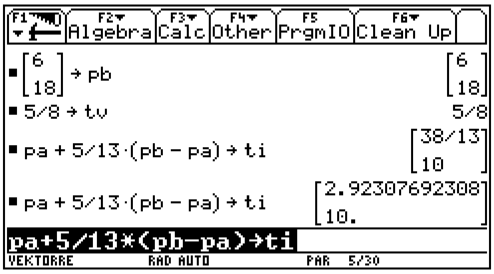


8 Teilungspunkt einer Strecke

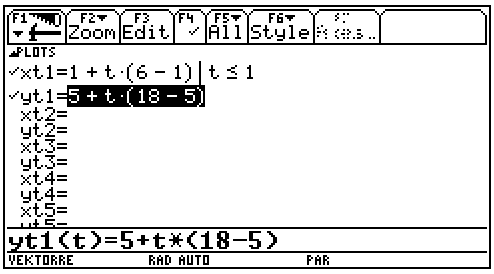
Der innere Teilungspunkt einer Strecke AB ist durch Rechnung im Homebereich und durch Darstellung im Grafikmodus `PARAMETRIC` zu bestimmen.

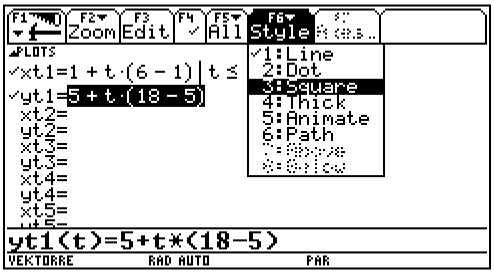
Die Rechnung erfolgt über Vektoraddition des entsprechenden Bruchteiles des Vektors von Punkt A nach Punkt B.



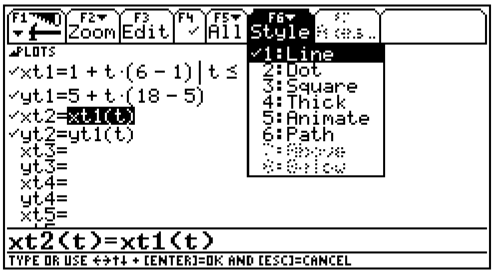


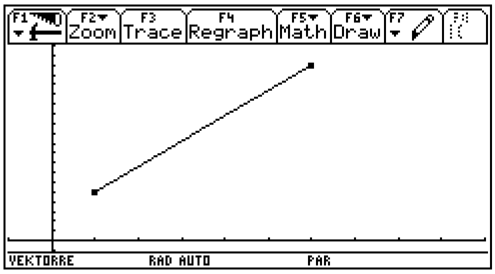
Graphisch parametrisiert man die Strecke zuerst so, dass bei Verwendung von `Style Square` nur Anfangspunkt und Endpunkt dargestellt werden.



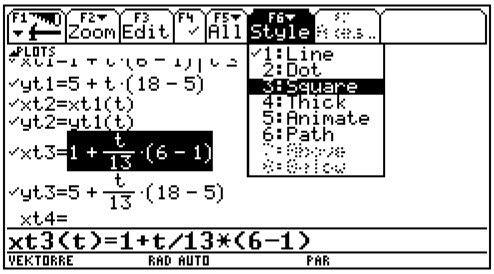


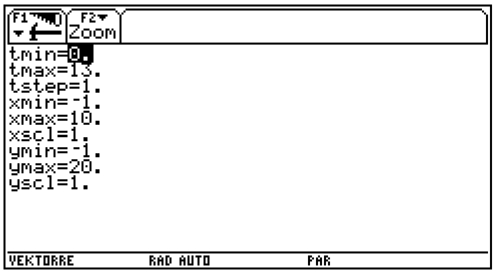
Dann verwenden wir den `Style Line` und erhalten die gesamte Strecke.

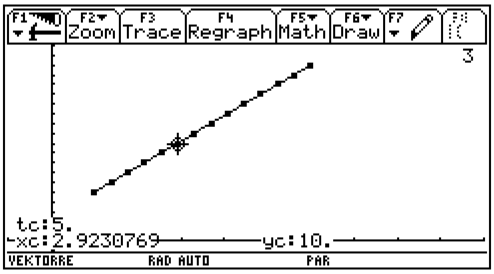




Zuletzt erreichen wir noch die Darstellung der Strecke in entsprechenden Teilstücken.







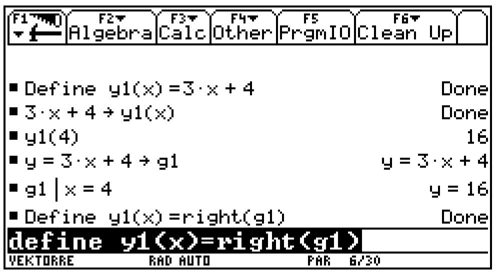
Mit `Trace` können die einzelnen Teilungspunkte angefahren und ihre Koordinaten abgelesen werden.

9 Geradengleichung

a) Eingabe von Geradengleichungen im Homebereich

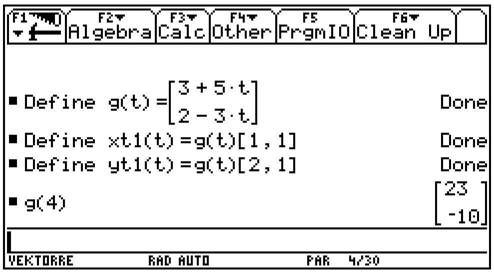
Explizite Form, Anstieg-Abschnittsform, lineare Funktion

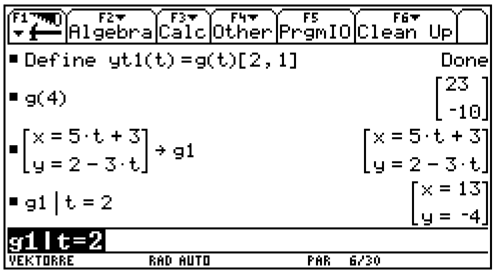
Man kann die Gerade über `Define` oder STO▸ als lineare Funktion festlegen. Wählt man als Namen `y1, y2`.... , dann steht die Funktion auch im `Y=Editor` zur Verfügung. Oder man gibt sie als Gleichung ein. Mit dem `With`-Operator können trotzdem *y*-Werte zu vorgegebenen *x*-Werten bestimmt werde. Über den Befehl `right` kann die rechte Seite der Gleichung zur Funktionsdefinition herangezogen werden.



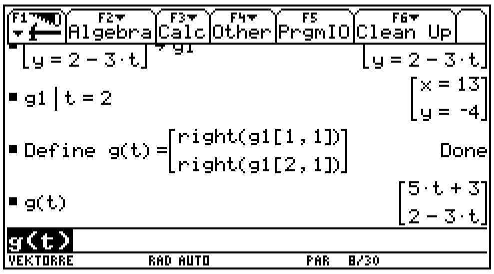
Parameterform, Vektorform

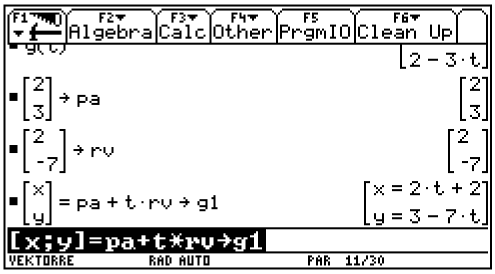
Auch hier kann man zwischen der Parameterdarstellung oder der Darstellung als Gleichung wählen. Wenn man die Funktion mit den Variablen `xt1` und `yt1` oder `xt2` und `yt2` definiert, hat man die Funktion gleich im `Y=Editor` zur Verfügung. Auch in dieser Form lassen sich mit dem `With`-Operator die zu gegebenen Parameterwerten gehörigen Punkte bestimmen.



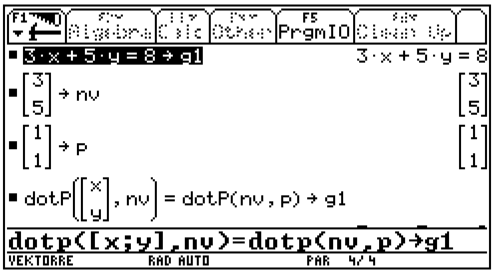


Mit dem Befehl `right` kann die Gleichung auch in die Funktion verwandelt werden. Bei gegebenem Punkt und Richtungsvektor, kann zur Erstellung der Geradengleichung auch direkt auf diese zugegriffen werden.





Implizite Form, Normalvektorform



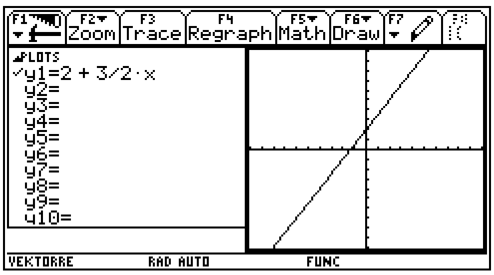
Die Gleichung kann direkt eingegeben werden oder bei bekanntem Punkt und Normalvektor mit Hilfe des inneren Produktes erzeugt werden.

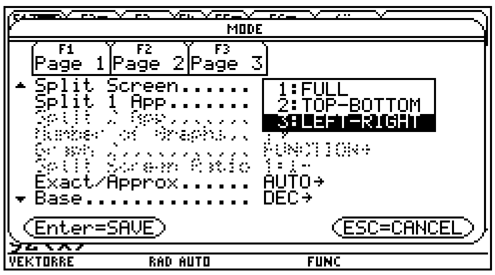
b) Darstellungsformen für die Geradengleichung

Explizite Form

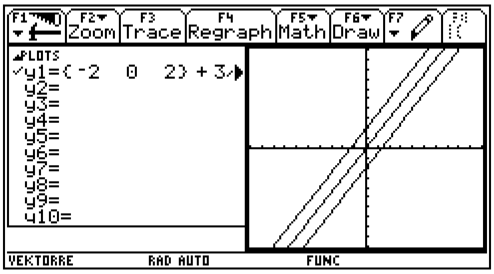
Im MODE `Graph FUNCTION`.

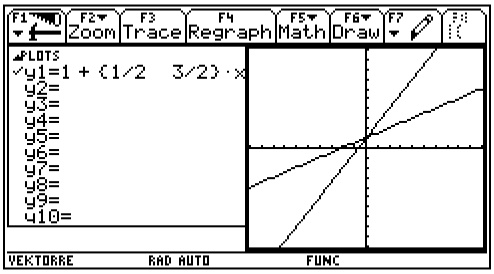
Durch Bildschirmteilung über die `MODE` Einstellungen `Split Screen 3: LEFT-RIGHT` können die Gleichung und der Graph gleichzeitig beobachtet werden.





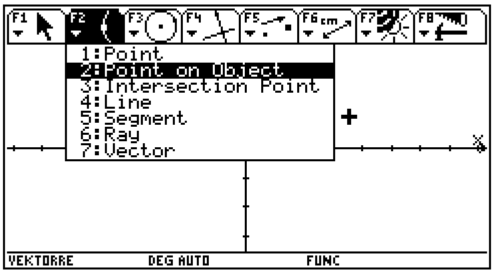
Für Anstieg k und Abschnitt d können auch Listen eingegeben werden, um den Einfluss dieser Parameter auf Lage und Gestalt der Geraden zu untersuchen.

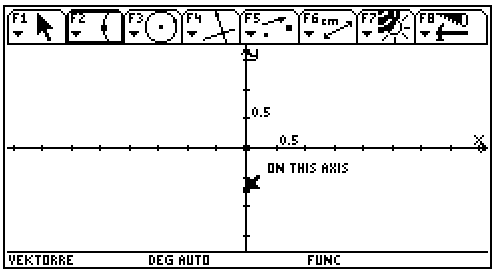


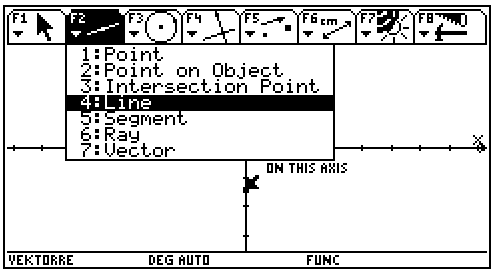


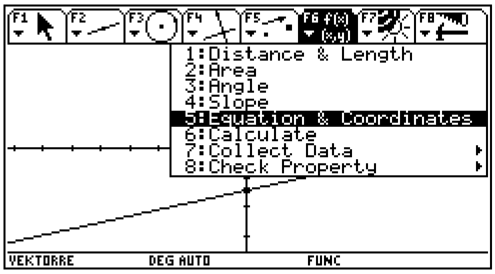
In der Cabri Geometrie

Man muß die Koordinatenachsen einschalten und einen Punkt auf die y-Achse setzen. Durch diesen Punkt wird dann eine Gerade (`Line`) gelegt. Über den Befehl `Equation & Coordinates` erhalten wir die Gleichung der Geraden.

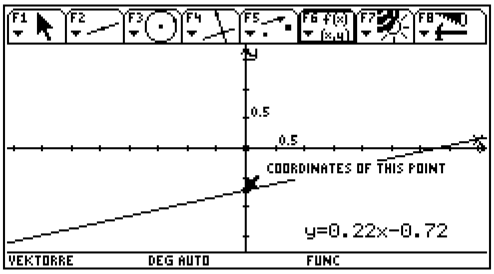


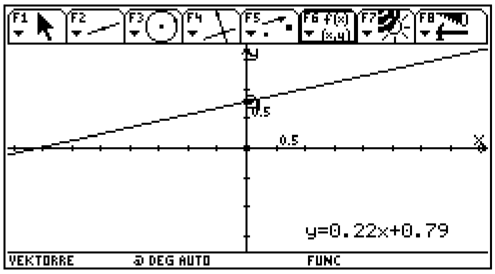


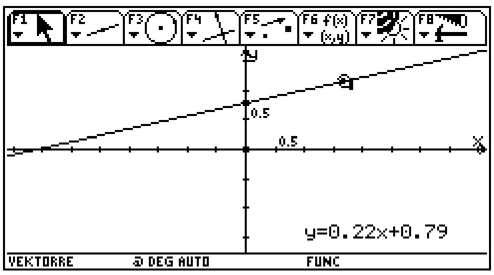


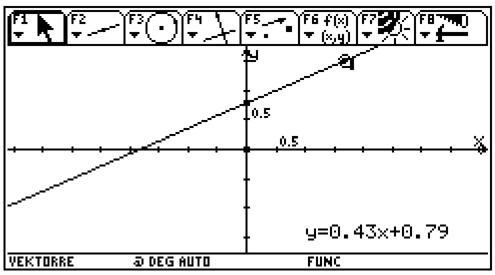


Je nachdem, ob wir den Punkt auf der *y*-Achse oder die Gerade über die Handtaste ergreifen und verschieben, können wir den Abschnitt *d* oder den Anstieg *k* verändern.



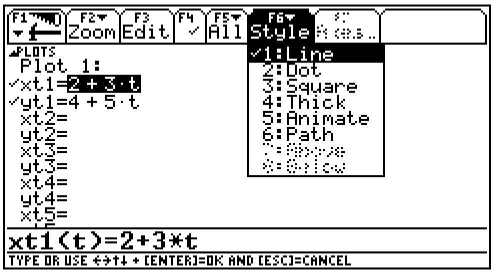


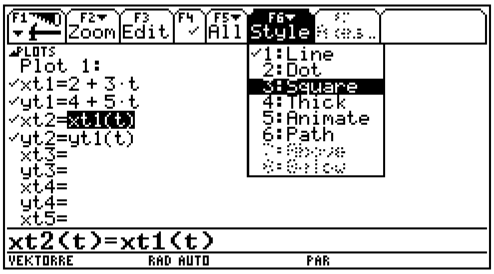




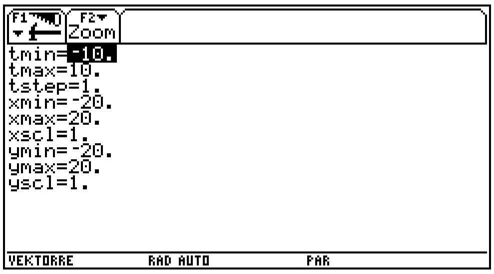
Parameterform

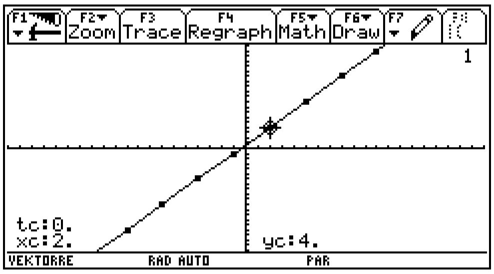
Um den Einfluss des Parameters und die Bedeutung des Richtungsvektors besser zu erkennen, gibt man die Funktion in zwei verschiedenen `Style`-Arten ein, nämlich `Dot` und `Sqare`.





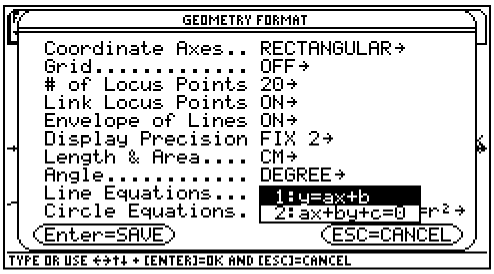
Mit geeigneten Windowvariablen ergibt sich folgendes Bild: mit der Funktion `TRACE` können wir die Gerade entlangfahren und dabei die Vielfachen des Richtungsvektors erkennen.

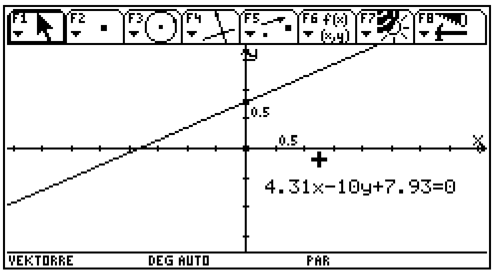




Implizite Form

Wir zeichnen wieder eine Gerade, wie schon für die explizite Form gezeigt, Stellen aber im Geometrie Format (♦ F) bei `Line Equation` auf die implizite Form um. Über den Menüpunkt F6 `5: Equation & Coordinates` erhalten wir die zur Geraden gehörige Gleichung. Wieder kann die Gleichung bei Veränderung der Geraden verfolgt werden.

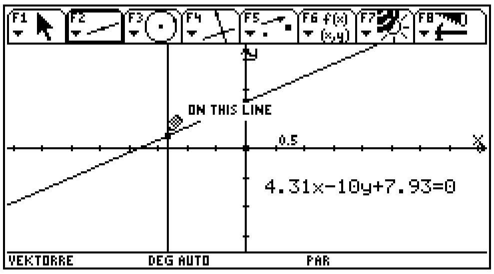


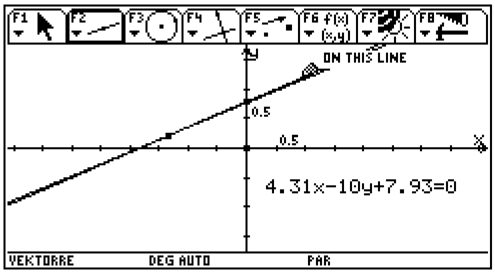


c) Vergleich der Gleichungsformen

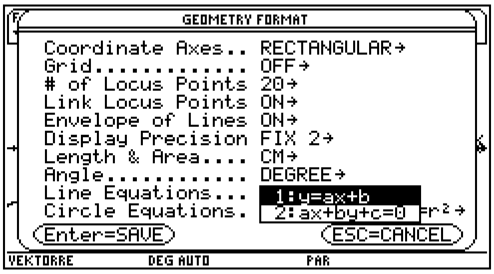
In der Cabri-Geometrie

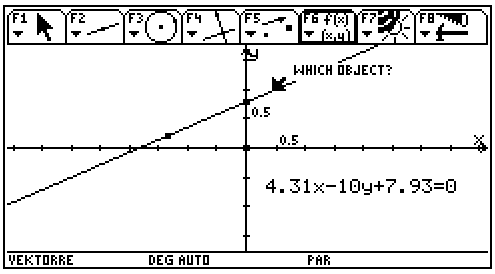
Wir greifen auf unsere letzte Zeichnung zurück und legen genau auf die bereits vorhandene Gerade eine zweite Gerade. Damit aber doch zwei verschiedene Objekte entstehen, muss ein anderer Punkt als für die ursprüngliche gezeichnete Gerade gewählt werden.



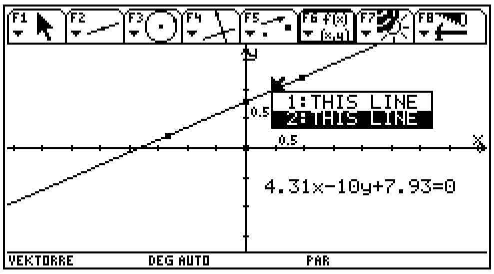


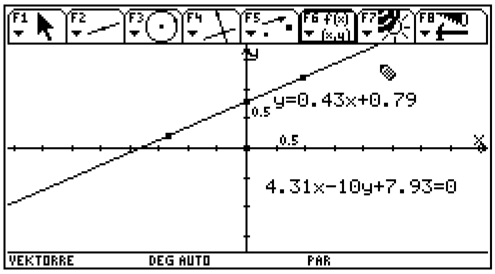
Dann verändern wir im Geometrie Format (◆ F) die Darstellung der `Line Equation` auf die explizite Form.



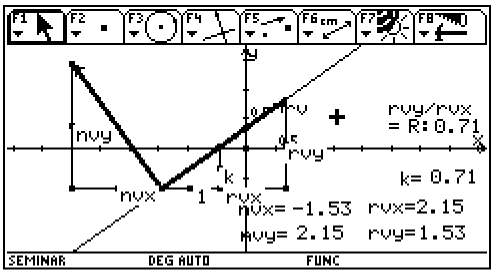


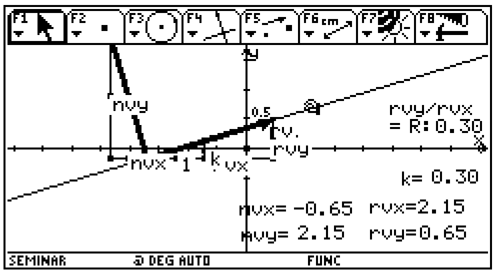
Über F6 `5: Equation & Coordinates` wählen wir die zweite Gerade an und erhalten nun für sie die explizite Darstellung. Jetzt können beide Gleichungsformen bei Veränderung der Geraden beobachtet werden.





Eine geeignete Cabri-Konstruktion hilft auch, die Zusammenhänge zwischen Richtungsvektor, Normalvektor und Anstieg einer Geraden zu veranschaulichen. Auch hier läßt sich die Gerade bewegen, wobei gleichzeitig die Ausgaben aktualisiert werden. Durch den kleinen Bildschirm gerät man aber rasch an die Grenzen der Übersichtlichkeit.

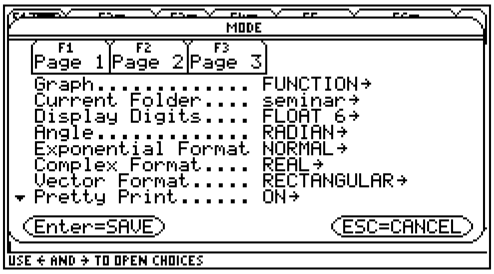


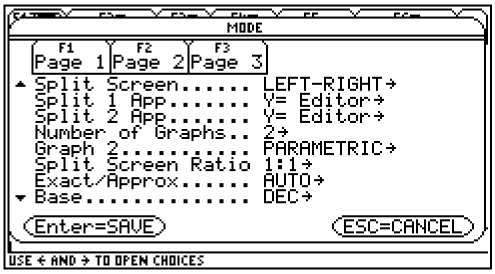


Durch Teilung des Bildschirms

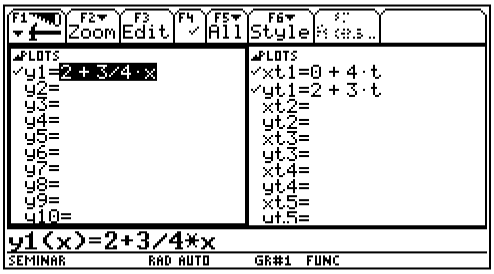
Ideal zum Vergleichen der expliziten Form und der Parameterform ist eine Teilung des Bildschirmes, wobei z.B auf der linken Seite die explizite Gleichung und auf der rechten Seite die Parameterform dargestellt wird.

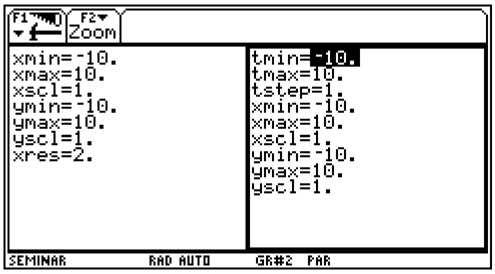
Über [MODE][F1] stellen wir `Graph` auf `FUNCTION` und über [MODE] [F2] `Split Screen` auf `LEFT-RIGHT`, `Number of Graphs` auf 2, `Graph 2` auf `PARAMETRIC` und `Split 1 App` und `Split 2 App` auf `Y= Editor`.

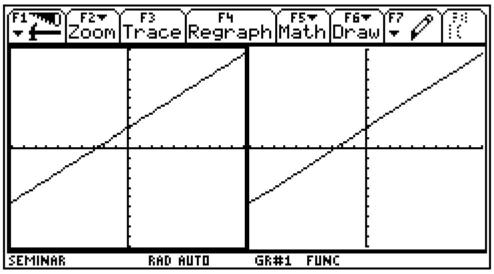




Jeweils eine Geradengleichung werden in expliziter Form und in Parameterform eingegeben. Zwischen den Fenstern wird mit [2nd][⊞] gewechselt.







Die Zusammenhänge zwischen den beiden Formen werden nun deutlich.

Hier ergibt sich eine schöne Gelegenheit, Schüler üben zu lassen, indem man eine Darstellungsform vorgibt und die andere aufzufinden ist.

d) Schnittpunkt von Geraden

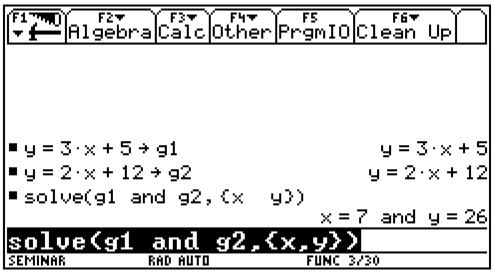
Auch ohne Technologie gibt es eine beeindruckende Vielfalt an Möglichkeiten zwei lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten zu lösen. Mit dem TI-92 lassen sich diese sehr einfach realisieren:

Mit `solve` (nur am TI-92 Plus), `simult()`, `rref`(), über die inverse Matrix und über die Kramersche Regel mit Determinanten.
Graphisch wird bei expliziter Darstellung mit `Intersection` der Schnittpunkt aufgesucht, während der Gebrauch von Tabelle numerische Lösungswege ermöglicht.
Im Homebereich werden rasch die üblichen Methoden, wie Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Methode der gleichen Koeffizienten durchgeführt.

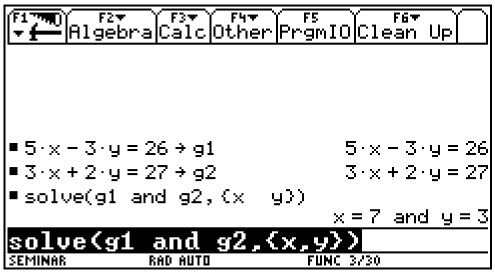
Ich möchte hier nur auf jene Methoden eingehen, die möglichst rasch zum Ziel führen.

Mit dem `solve()`-Befehl am TI-92 PLUS

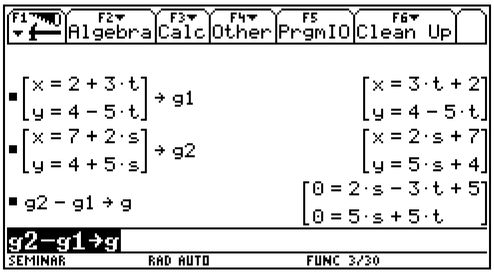
explizite Form

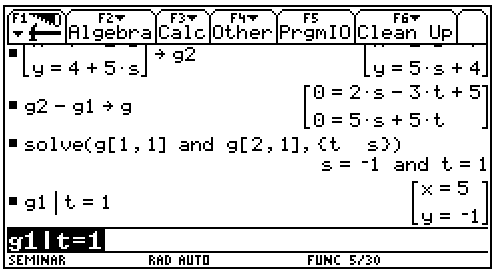


implizite Form



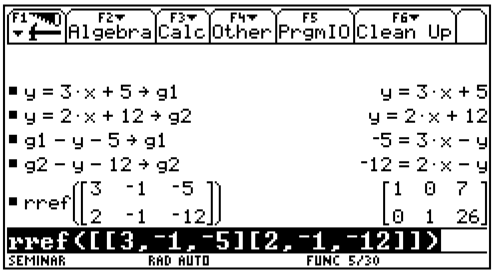
Parameterform, wobei auf die Eingabe verschiedener Parameter geachtet werden muss.



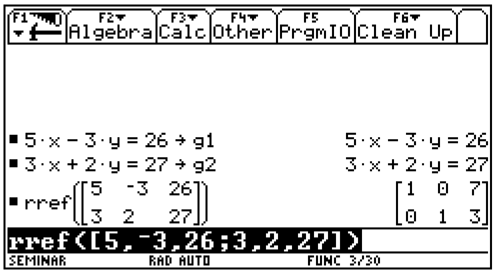


Mit dem `rref()`-Befehl auf dem TI-92

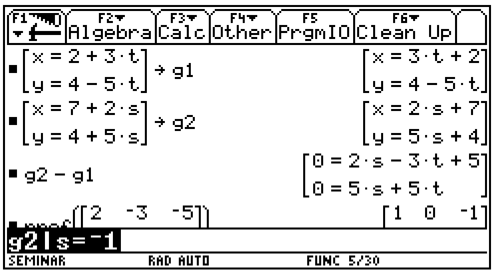
Explizite Form

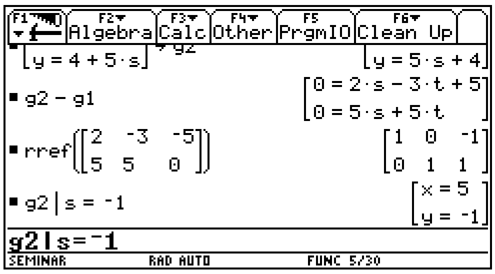


Implizite Form



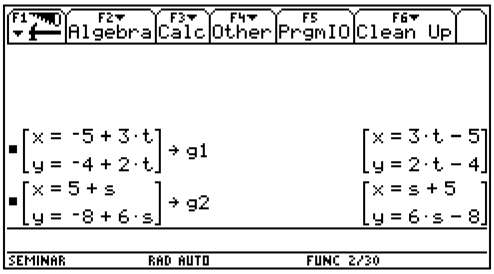
Parameterform

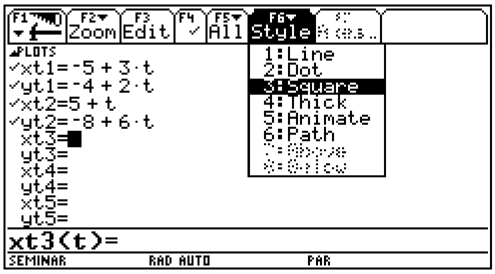


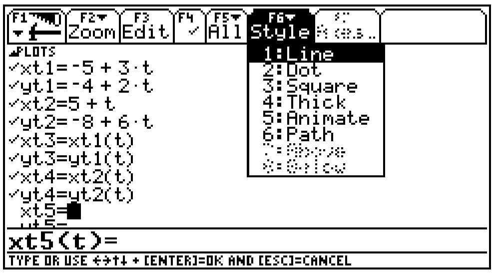


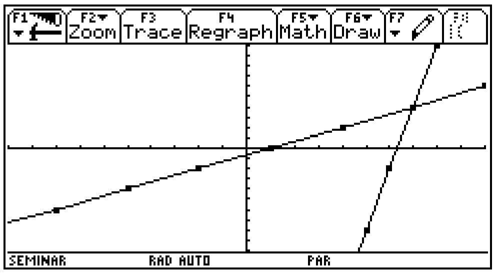
Abschließend will ich noch eine Möglichkeit zeigen, wie man Schülern verdeutlichen kann, dass in der Parameterform verschiedene Parameter für die Berechnung des Schnittpunkts verwendet werden müssen.

Wir betrachten die beiden folgenden Geradengleichungen in Parameterform und geben sie in den `y=Editor` ein, einmal mit `Style Dot` und einmal mit `Style Square`.

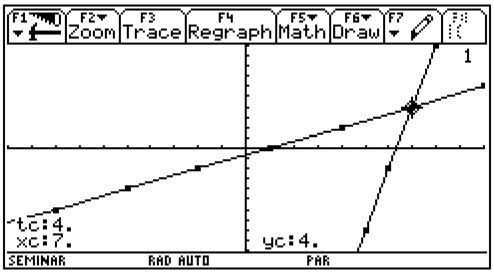


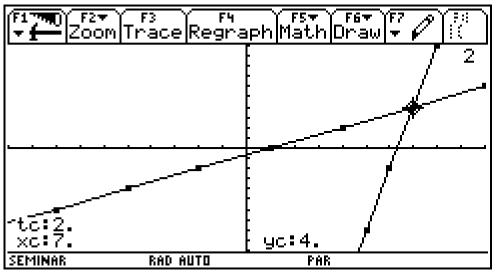






Mit `TRACE` kann man nun abwechselnd die beiden Geraden entlang fahren und erkennt dabei, dass die Parameter am Schnittpunkt verschiedene Werte aufweisen.





10 Musterbeispiele zur Parameterform der Geraden

Beispiel 1

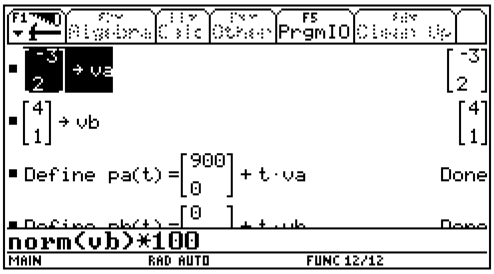
Entnommen aus: Entdecken, Verstehen, Anwenden –Analysisunterricht am TI-92

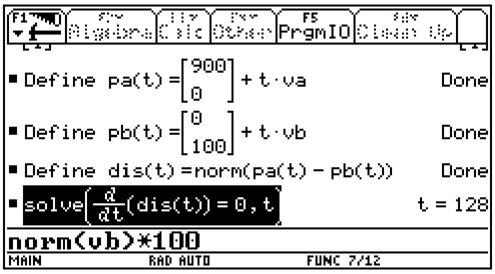
Die beiden Motorschiffe Albert und Bertha halten Kurs auf dem Atlantik. Ihre Bewegung wird auf einem Großbild des Radarschirms der Beobachtungsstation festgehalten. Albert erscheint auf dem Bildschirm auf der unteren Kante 900 mm von der linken unteren Ecke entfernt. Bertha zum gleichen Zeitpunkt 100mm über der linken unteren Ecke auf der linken Kante. Eine Minute später haben sich die Positionen wie folgt geändert: Albert hat sich um 3mm nach Westen und 2 mm nach Norden bewegt. Bertha um 4mm nach Osten und 1mm nach Norden. Beide Schiffe halten an ihrem geradlinigen Kurs fest. (1mm auf dem Bildschirm entsprechen 100m auf dem Atlantik)

Werden die Schiffe kollidieren? Wenn nein, wo ist der geringste Abstand zwischen den Schiffen? In welchem Punkt scheiden sich die Fahrtrouten? Wie schnell sind die Schiffe!

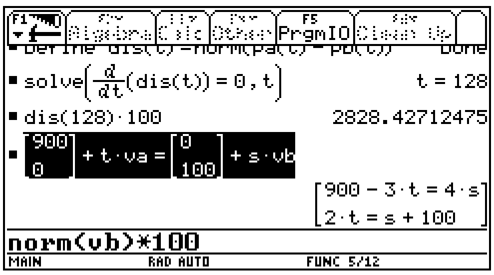
Zunächst geben wir die beiden Geschwindigkeitsvektoren ein (in mm pro Minute am Bildschirm).

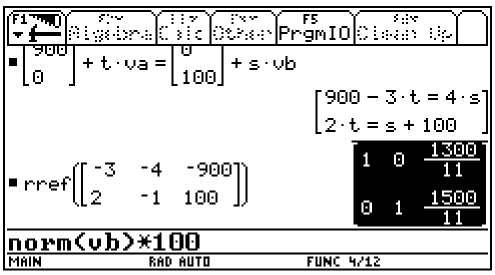
Dann werden die Positions-Zeit-Gesetze der beiden Schiffe definiert und damit über die Norm die Distanzfunktion festgelegt. Anschließend wird diese differenziert, Null gesetzt und damit der Zeitpunkt t = 128min für die geringste Distanz ermittelt. Falls die Differentialrechnung noch nicht zur Verfügung steht, wird das Minimum graphisch ermittelt. Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichungen erhält man die Position der Schiffe zu diesem Zeitpunkt.



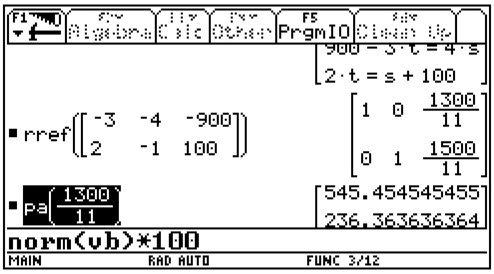


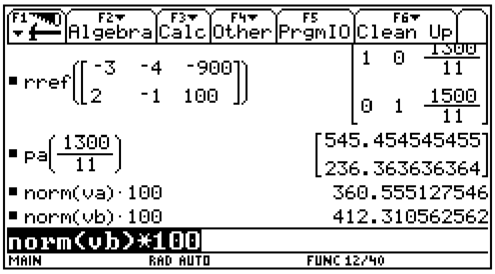
Durch Einsetzen in die Distanzfunktion ergibt sich der Minimalabstand mit 2828,4m. Daher wird kein Zusammenstoß zu befürchten sein. Die beiden Positions-Zeit-Gesetze für verschiedene Zeiten werden gleich gesetzt, um den geometrischen Schnittpunkt der Routen zu ermitteln. Daraus resultieren 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Dieses System wird schließlich über `rref` aufgelöst.



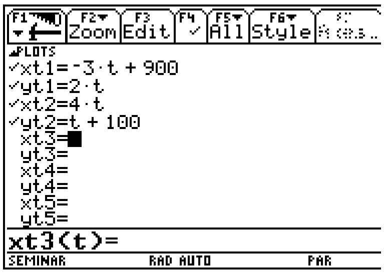


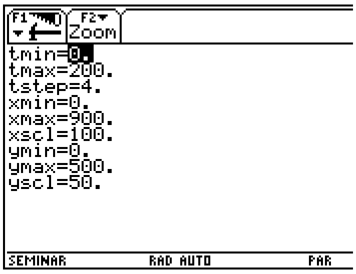
Durch Einsetzen der Zeiten in die Positions-Zeit-Gesetze erhalten wir den Schnittpunkt in mm am Radar und die Größe der Geschwindigkeiten durch Längenberechnung der Vektoren. Mit 100 multipliziert ergibt sich die Geschwindigkeit in m pro Minute.

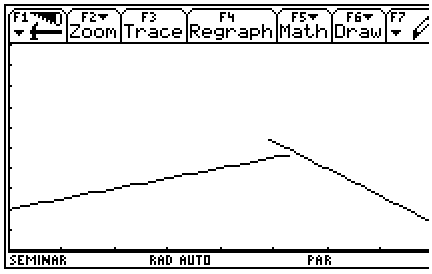




Auch die Darstellung der Bewegungen im Graphmode `PARAMETRIC` ist wichtig.







Beispiel 2

Entnommen aus: Mathematik erleben mit dem TI-92 von Günter Schmidt

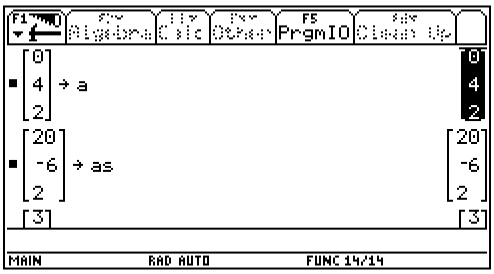
Ein Sportflugzeug und ein Transportflugzeug befinden sich jeweils auf geradlinigem Kurs. Im Koordinatensystem (Koordinatenangaben in km) des Flughafens werden die Positionen zu einem bestimmten Zeitpunkt 0 und dann 6 Minuten später festgehalten.

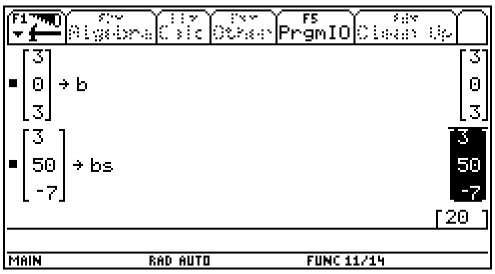
	Ort zum Zeitpunkt 0	Ort zum Zeitpunkt 6 Minuten
Sportflugzeug	$A = (0;4;2)$	$A^* = (20;-6;2)$
Transportflugzeug	$B = (3;0;3)$	$B^* = (3;50;-7)$

Bestimmen Sie jeweils die Richtung und den Betrag der Geschwindigkeit der Flugzeuge!

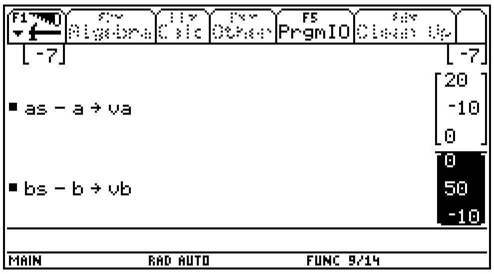
Bestimmen Sie die kleinste Entfernung der Flugzeuge! Zu welchem Zeitpunkt t ist diese erreicht und in welchen Positionen befinden sich dann die Flugzeuge?

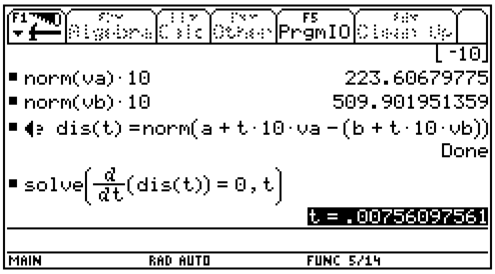
Zunächst werden die Daten für die Punkte A, B, A^* und B^* eingeben.



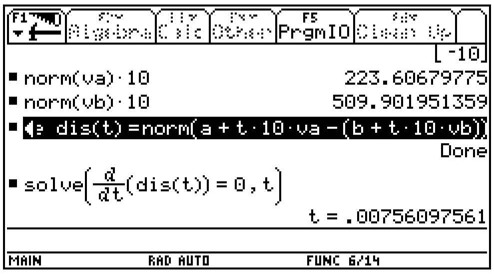


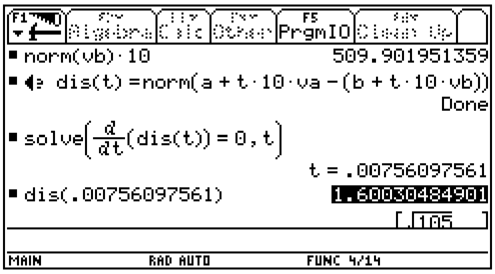
Die Geschwindigkeitsvektoren werden berechnet, die durch die in 6 Minuten zurückgelegte Strecke beschrieben werden. Die 10-fache Streckenlänge ergibt die Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$ (die Einheiten stehen ja für Stunden). Dann können wird über die `norm` die Distanzfunktion der beiden Flugzeuge aufstellen, differenzieren und Null setzen (oder graphisch den minimalen Abstand bestimmen) und erhalten die gesuchten Zeitpunkt zu dem der geringste Abstand erreicht wird. Die Einheit für die Zeit ist wieder Stunden.



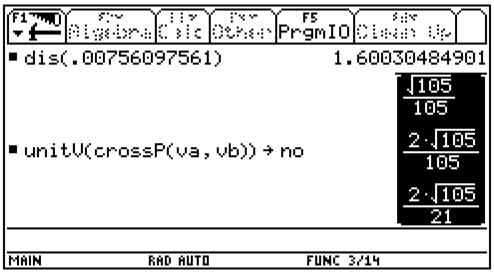


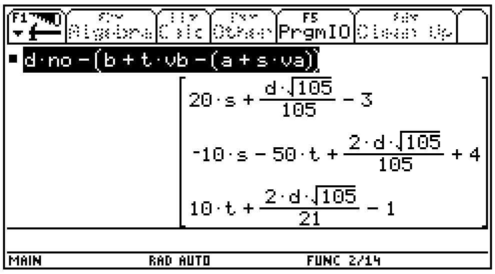
Durch Einsetzen in die Distanzfunktion erhalten wir den minimalen Abstand in km.



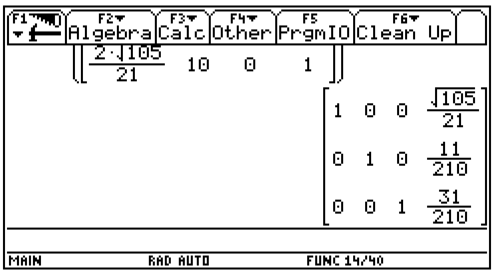


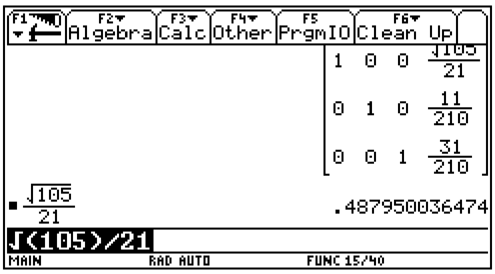
Nun wollen wir die kürzeste geometrische Distanz zwischen den beiden Flugrouten berechnen. Diese steht normal auf beide Kurse. Daher berechnen wir den Einheitsvektor *no* des Kreuzproduktes der beiden Geschwindigkeitsvektoren. Sei *d* nun der kürzeste Abstand, dann können wir untersuchen, für welche Zeiten *t* und *s* die Flugzeuge den geometrisch kürzesten Abstand erreichen. Dazu setzen wir den Differenzenvektor der beiden Position-Zeit-Gesetze: *b + t * vb - (a + s * va)* gleich *d * no* und wir erhalten 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.





Dieses System lösen wir mit `rref` und erhalten damit die Distanz *d* und die Zeiten *s* und *t*. Die Zeiten sind verschieden. Daher ist der kürzeste Abstand der Flugzeuge nicht der geometrisch kürzeste. Die geometrisch kürzeste Distanz beträgt 0,4879km.

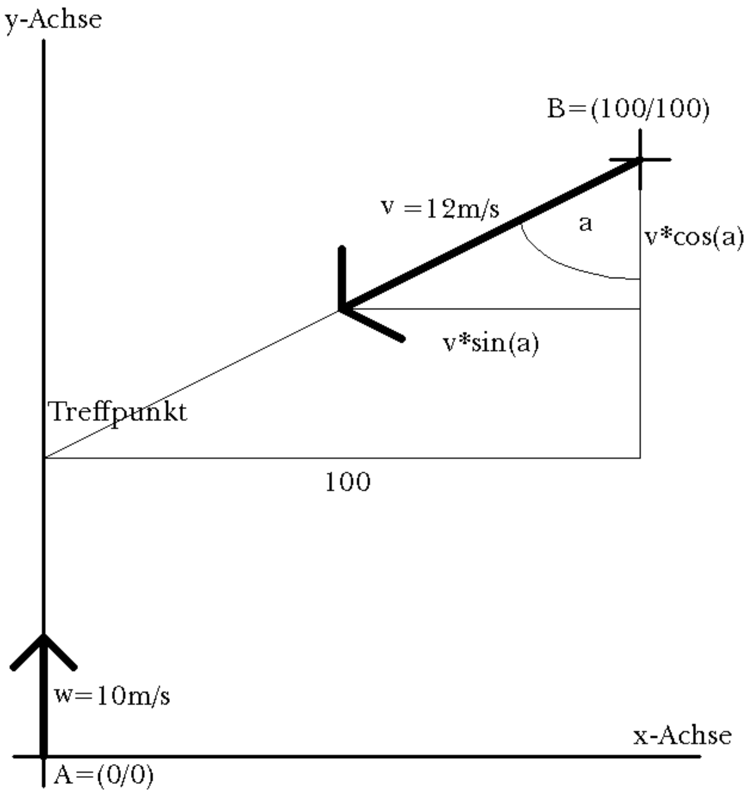




Beispiel 3

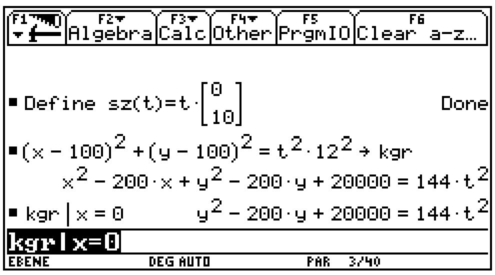
Zum Zeitpunkt t = 0 befindet sich ein Güterzug im Punkt A = (0|0) und ein Reiter im Punkt B = (100|100) Die Geschwindigkeit des Zuges sei w = 10m sec^{-1} und die Geschwindigkeit des Reiters sei v = 12m sec^{-1} . Die Größe der Einheit beträgt 1m. Die Bahntrasse folgt der y-Achse.

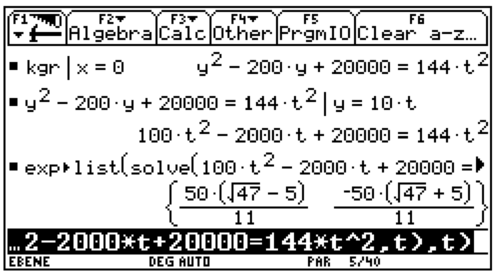
Unter welchem Winkel a muß der Reiter geradlinig auf die Bahntrasse zureiten, um dort gleichzeitig mit dem Zug anzukommen?

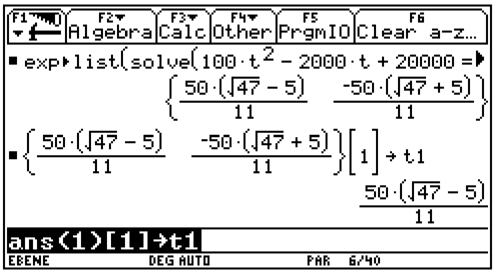


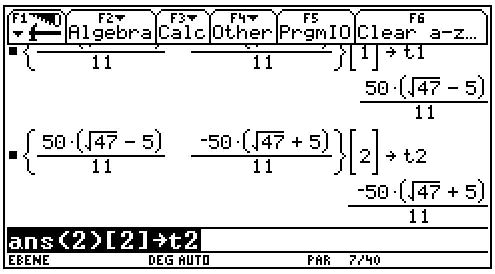
Berechnung mit dem TI-92

Zunächst wird die Bewegungsgleichnung $sz(t)$ des Güterzuges eingegeben. Danach wird die Gleichung eines Kreises *kgr* der den Punkt B zum Mittelpunkt und den variablen Radius $r = 12 \cdot t$ hat, festgelegt. Der Kreis ist die Ortslinie aller Punkte, die der Reiter nach Verstreichen der Zeit t erreicht haben könnte. Nun setzen wir in die Gleichung die Koordinaten ($x = 0, y = 10 \cdot t$) jenes Punktes ein, den der Güterzug nach Verstreichen der Zeit t erreicht hat. Die jetzt entstandene Gleichung ist quadratisch in t. Wir lösen sie nach t auf und erhalten zwei mögliche Zeiten $t1$ und $t2$, zu denen der Reiter mit dem Zug am Bahndamm zusammentreffen könnte.

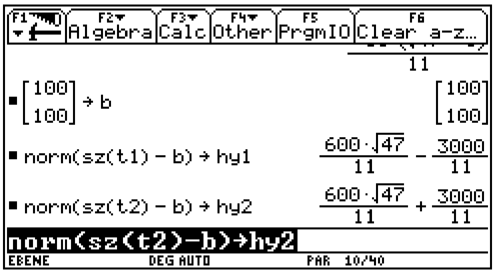


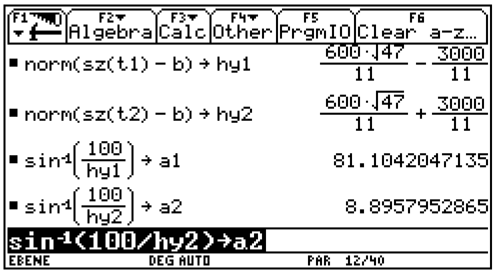




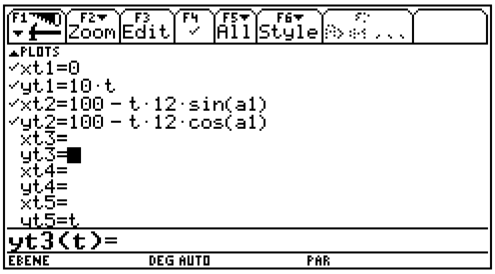


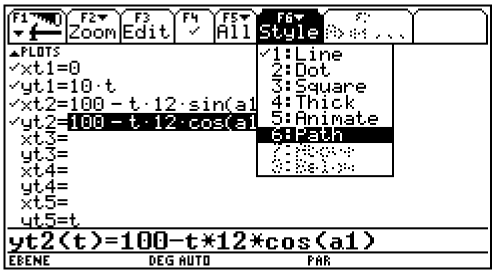
Dann wird der Punkt B eingegeben und der Abstand zwischen dem Treffpunkt $sz(t1)$, bzw. $sz(t2)$ und dem Punkt B bestimmt. Dieser Abstand ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks mit Winkel α. Die Gegenkathete zu α hat die Länge 100. Damit läßt sich aus der Definition des Sinus der gesuchte Winkel α bestimmen. Die Lösung $\alpha 2$ stammt von der negativen Zeit $t2$ und ist daher für unsere Lösung nicht brauchbar. (Tatsächlich gelangen durch das Vorkommen von t^2 in der Kreisgleichung auch negative Lösungen für t in die Rechnung hinein. Sie können folgendermaßen interpretiert werden: Der Winkel $\alpha 2$ bestimmt jene Richtung, in der ein Reiter zum Zeitpunkt $t2$ vom Zug aus wegreiten müßte, um zum Zeitpunkt $t = 0$ bei Punkt B einzutreffen). Der gesuchte Winkel beträgt also rund 81°. Der Winkel 180° - 81°, der den gleichen Sinuswert liefert, kommt nicht in Frage, weil der Reiter aus Symmetriegründen bei diesem Winkel die gleiche Zeit benötigt, um den Bahndamm zu erreichen, der Zug aber offensichtlich dazu länger braucht.



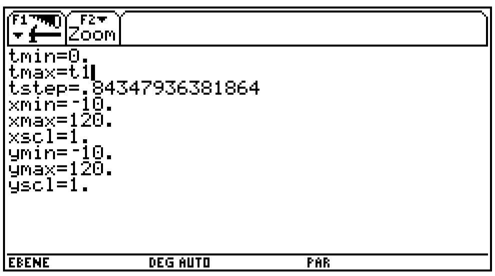


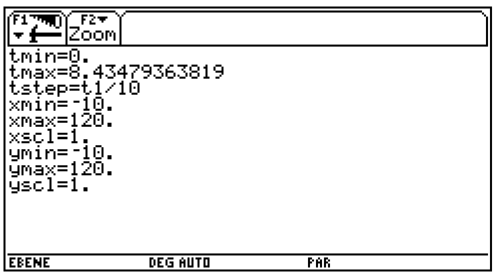
Nun wollen wir unsere beiden Bewegungen veranschaulichen. Dazu geben wir die entsprechenden Bewegungsgleichungen in den `Y=Editor` des Graphikmode `PARAMETRIC` ein.
Im Menü `Style` wählen wir die Option `Path`.

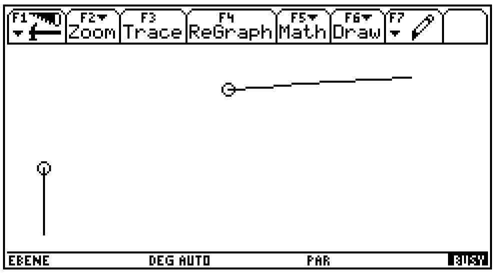


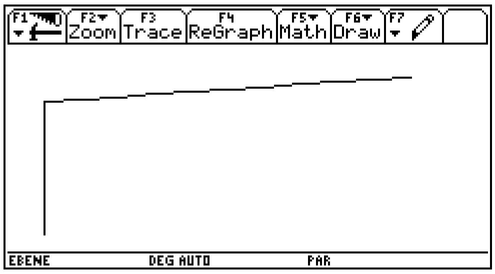


Wenn wir als `tmax` die berechnet Zeit $t1$ eingeben und für `tstep` einen Bruchteil dieser Zeit wählen, können wir in der Grafik das gemeinsame Eintreffen am Bahndamm genau beobachten.









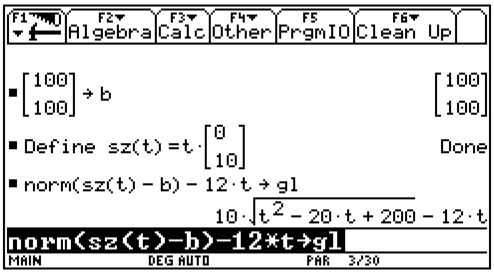
Berechnung mit dem TI-92 Plus:

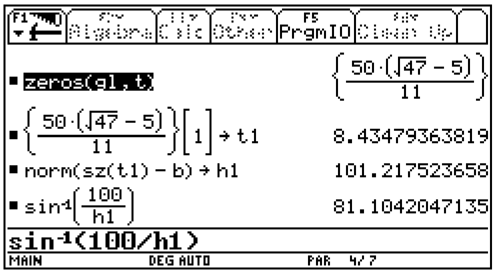
Mit dem TI-92 Plus stehen noch zwei weitere Varianten zur Verfügung.

Variante 1

Zu Beginn erfolgt die Eingabe des Punktes B und der Bewegungsgleichung des Zugs $sz(t)$.

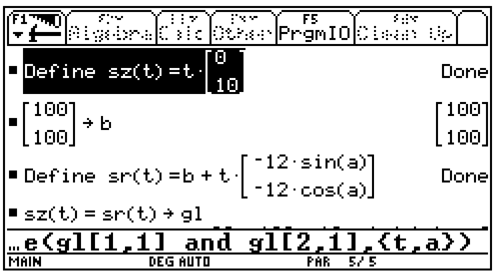
Danach betrachten wir den Unterschied zwischen dem Abstand des Zugs vom Punkt B und der vom Reiter zurückgelegten Strecke. Die entstehende Wurzelgleichung wird nach der Zeit *t* aufgelöst. Hier erhalten wir im Gegensatz zur Durchführung mit dem TI-92 nur eine Lösung. Aber diese Wurzelgleichung wird vom TI-92 nicht gelöst. Danach wird wieder über den Sinus der gesuchte Winkel α bestimmt.

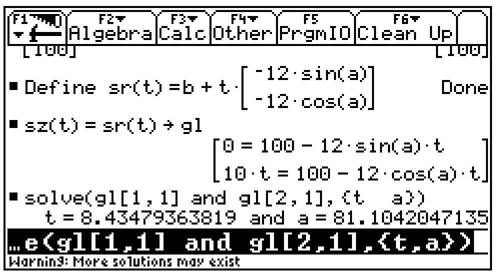




Variante 2

Die beiden Bewegungsgleichungen werden gleich gesetzt und die Gleichung für *x*- und *y*-Koordinate nach Zeit und Winkel aufgelöst. Man gelangt zwar sehr elegant sofort zur richtigen Lösung, wird aber gewarnt, dass es eventuell noch mehrere Lösungen geben könnte.



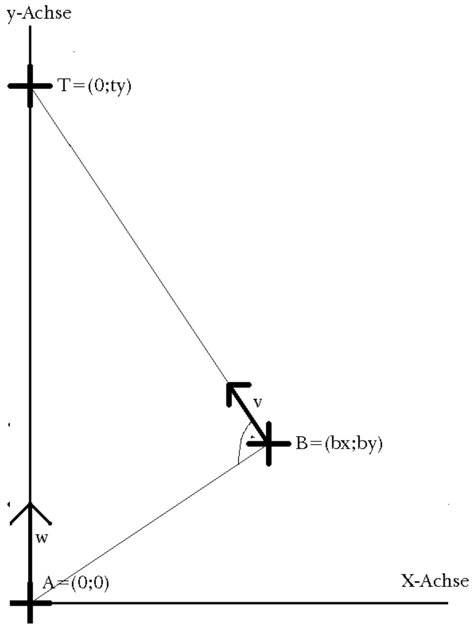


Beispiel 4

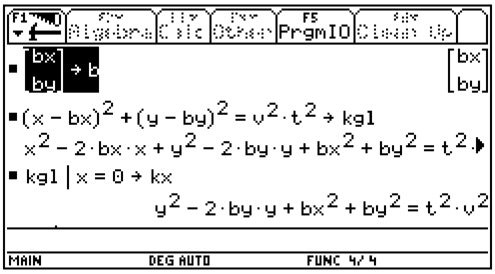
Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich ein Güterzug im Punkt $A = (0|0)$ und ein Reiter im Punkt $B = (bx \mid by)$. Der Güterzug bewegt sich mit Geschwindigkeit w in Richtung der positiven y-Achse.

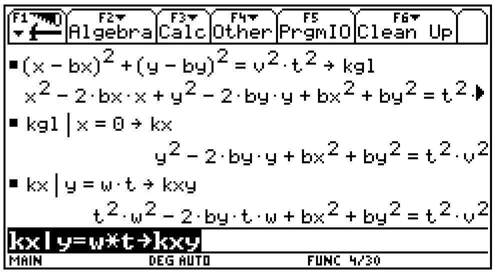
Bestimme die kleinste Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von *w, bx* und *by,* mit der der Reiter zugleich mit dem Zug einen Punkt T an der Bahntrasse erreichen kann.

Bestimme die Zeit *tr*, die der Reiter bis zum Treffpunkt T benötigt und die y-Koordinate *ty* des Treffpunktes - auch in Abhängigkeit von *w, bx* und *by*. Zeige ferner, dass die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BT}$ miteinander einen rechten Winkel einschließen.



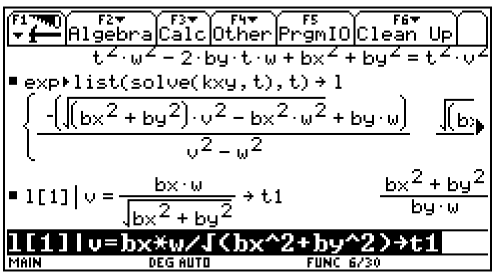
Zunächst wird der Punkt *B,* an dem sich der Reiter zum Zeitpunkt *t=0* befindet, eingegeben,. Danach wird eine Kreisgleichung *kgl* mit Mittelpunkt *b* und variablenm Radius $r = v \cdot t$ festgelegt. Die Punkte auf dieser Kreislinie sind jene Punkte, die der Reiter nach der Zeit *t* erreicht haben könnte. Nun setzen wir in die Gleichung die Koordinaten ($x = 0, y = w \cdot t$) jenes Punkte ein, den der Güterzug nach der Zeit *t* erreicht hat.

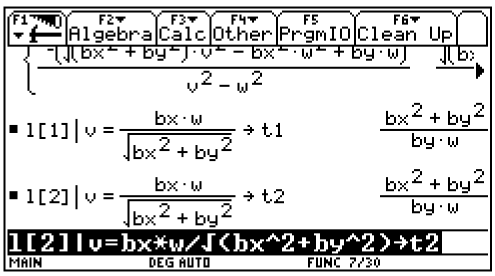




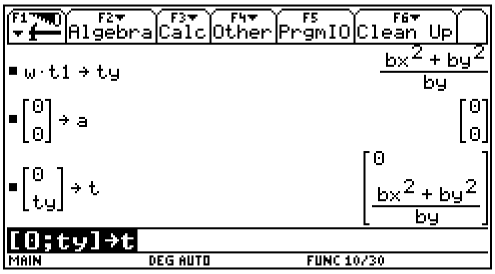
Die entstehende Gleichung ist quadratisch in *t.* Wir lösen sie nach *t* auf und erhalten zwei mögliche Zeiten, zu denen der Reiter mit dem Zug am Bahndamm zusammentreffen könnte.
Diese Zeiten müssen aber reell sein, daher darf die Diskriminante der Wurzel höchstens Null sein. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit v des Reiters den Wert $\dfrac{bx \cdot w}{\sqrt{bx^2 + by^2}}$ nicht unterschreiten darf.

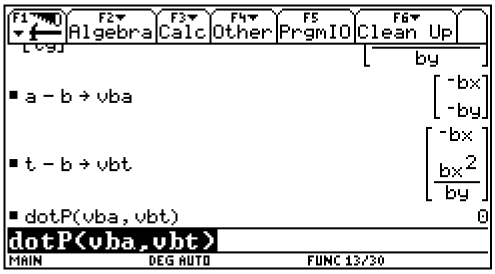
Dieser Wert ist daher die gesuchte kleinste Geschwindigkeit. Durch Einsetzen dieses Wertes für v in die beiden Lösungen für *t* erhalten wir zwei Zeiten $t1 = t2$, also liegt hier eine Doppellösung vor.





Nun kann die y-Position ty des Treffpunkts mit Hilfe der Zeit $t1$ und der Geschwindigkeit w des Zuges leicht bestimmt werden. Dann werden die Punkte A und T eingegeben und die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BT}$ ermittelt. Mit Hilfe des Inneren Produktes zeigen wir, dass die beiden Vektoren einen rechten Winkel bilden.

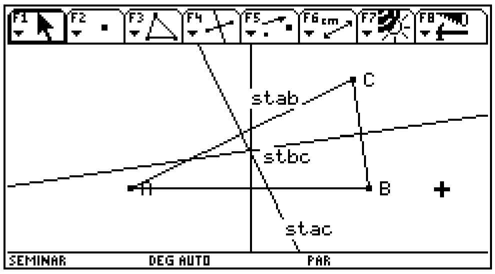




11 Die merkwürdigen Punkte im Dreieck

a) Zum Umkreismittelpunkt

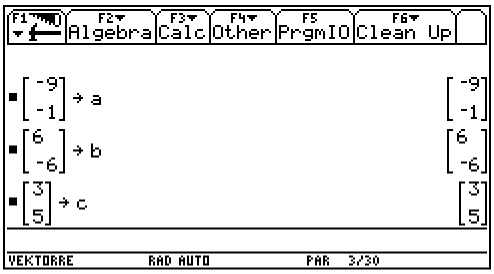
Die Wiederholung der Konstruktionen der „merkwürdigen Punkte“ des Dreiecks ist die ideale Gelegenheit, die Schüler mit der Cabri-Geometrie vertraut zu machen.

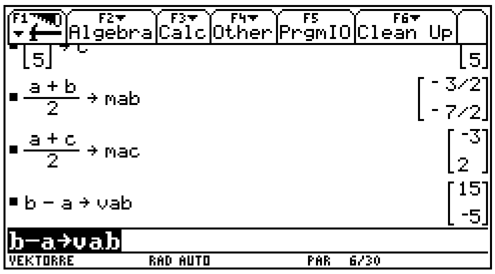


Wir wollen nun ein Script zur Berechnung des Umkreismittelpunktes für ein Dreieck ABC aufstellen. Dazu führen wir die Berechnung im Homebereich durch. Außer der Eingabe der drei Eckpunktskoordinaten dürfen keine weiteren „händischen“ Eingaben erfolgen. Alle Umformungen und Eingaben müssen über Rechnerbefehle durchgeführt werden, weil das Script an diesen Stellen sonst hängenbleiben würde.

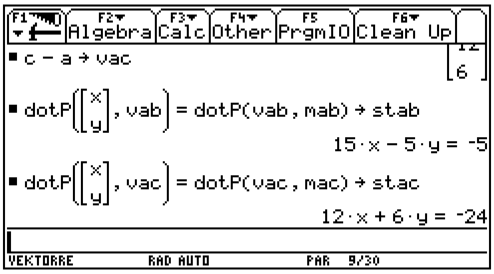
ΔABC: $A = (-9 \mid -1)$, $B = (6 \mid -6)$, $C = (3 \mid 5)$

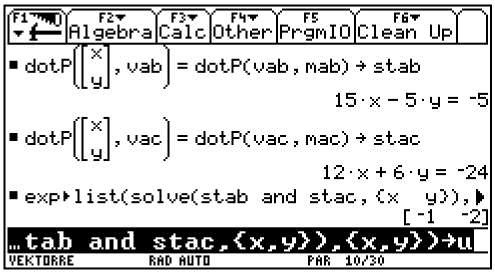
Wir berechnen die Halbierungspunkte und Seitenvektoren.

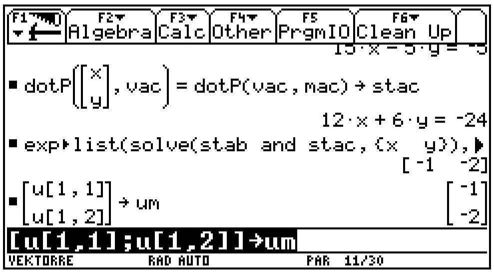


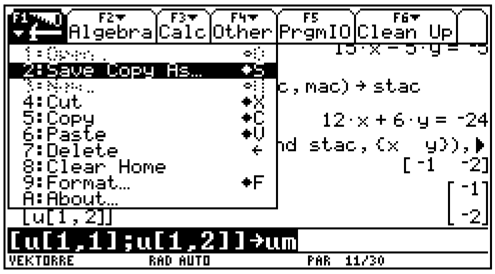


Wir erstellen die Gleichungen der Streckensymmetralen, schneiden diese und speichern das Ergebnis.

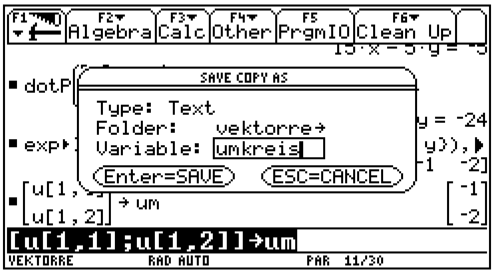


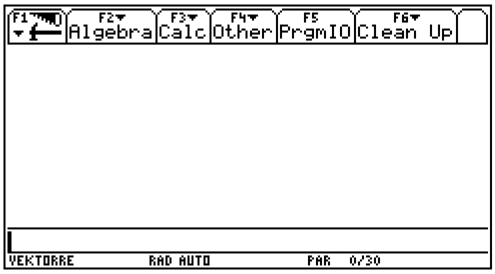




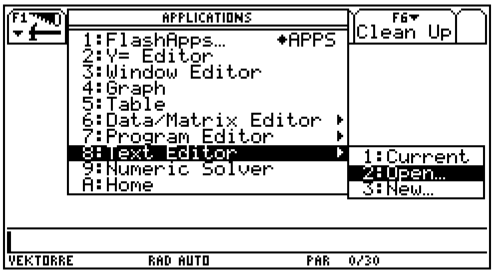


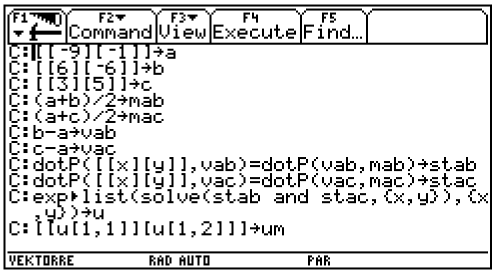
Über Save Copy As speichern wir den Verlauf unserer kompletten Berechnung unter dem Namen umkreis ab. Anschließend kann die Ausführung im Homebereich mit F1 8: Clear Home gelöscht werden.



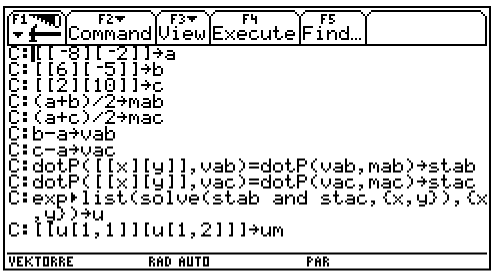


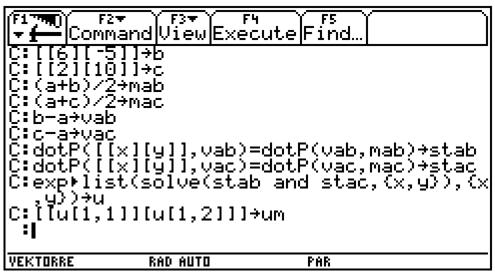
Wenn wir nun über den Texteditor die Datei umkreis wieder öffnen finden wir unsere Berechnung in „Command“-zeilen wieder. („Command“-zeilen sind von einem **C:** eingeleitet und zeigen an, dass sie über F4 Execute im Homebereich ausgeführt (exekutiert) werden können.)



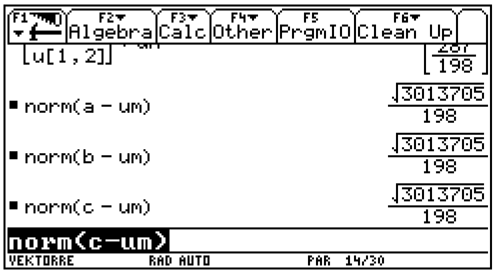


Wir können nun die Koordinaten der Eckpunkte verändern und danach alle ausführbaren Zeilen mit Execute im Homebereich ausführen lassen.





Dann erhalten wir sofort den neuen Umkreismittelpunkt und die gesamte Berechnung.



Damit stellen sich dem Lehrer natürlich einige Fragen:

> Wie weit sind solche Aufgaben mit nicht durch `RESET` gelöschten Rechnern noch sinnvoll?
>
> Ist es sinnvoll vor jeder Schularbeit ein `RESET` zu durchführen zu lassen?

Tatsächlich sind Scripts eine gute Vorübung zum Programmieren. Ein lauffähiges Script lässt sich sehr leicht zu einem Programm umbauen.

b) Zum Höhenschnittpunkt

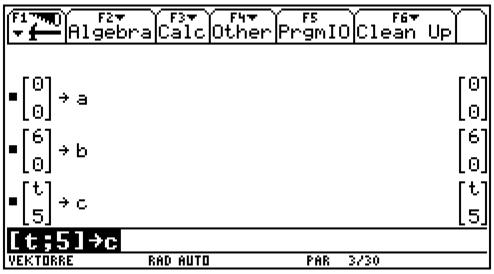
Von einem Dreieck *ABC* sind die Eckpunkte gegeben: $A = (0 \mid 0)$, $B = (6 \mid 0)$, $C = (t \mid 5)$ mit $t \in \Re$.

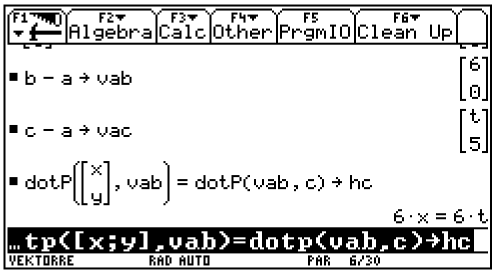
Berechne die Koordinaten des Höhenschnittpunkts in Abhängigkeit von *t*.

Auf welcher Ortskurve liegen die Höhenschnittpunkte aller dieser Dreiecke.

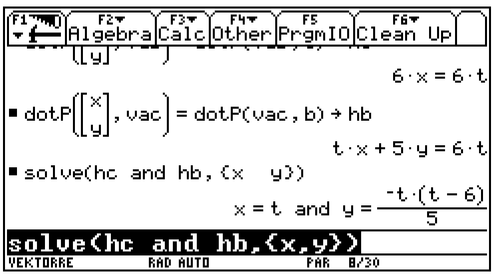
Eine mögliche Strategie wäre: Erzeuge diese Ortskurve mit Hilfe der Cabri-Geometrie und übertrage die Koordinaten von beliebig vielen Punkten dieser Ortskurve in den `Data/Matrix-Editor`. Stelle diese Daten und die durch Berechnung erhaltene Ortskurve grafisch dar. Ermittle durch Regression aus den Daten eine Funktionsgleichung für die Ortskurve und vergleiche mit der durch Rechnung erhaltenen Ortslinie.

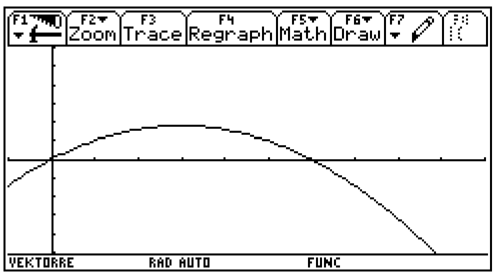
Zunächst geben wir die Eckpunkte ein und stellen die Gleichungen für die Höhenlinien auf.



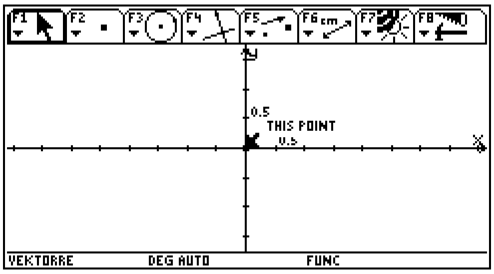


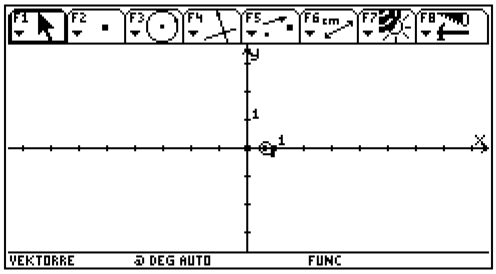
Durch Schnitt der Höhenlinien erhalten wir den Höhenschnittpunkt. Die Ortskurve des Höhenschnittpunktes ergibt sich als eine Parabel.

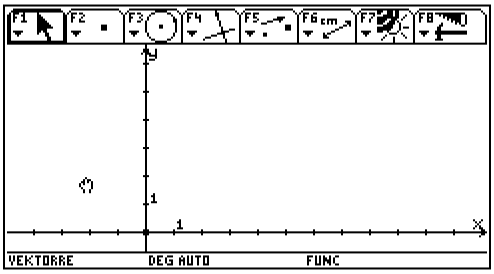


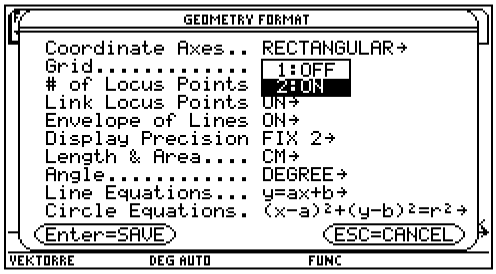


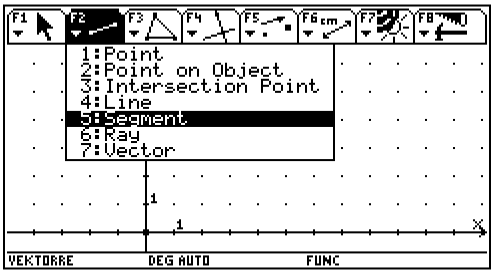
Nun wechseln wir zur Cabri-Geometrie. Wir blenden das Koordinatenkreuz ein und verschieben die Einheit auf der *x*-Achse bis die Beschriftung 1 erscheint und die Skalierung so klein ist, dass unser Dreieck am Bildschirm dargestellt werden kann. Dann verschieben wir mit [2nd]⊕ den Bildschirmausschnitt so, dass das Dreieck ganz sichtbar sein wird. Über [◆] [F] stellen wir die ganzzahligen Gitterpunke ein. Dann wählen wir [F2]`5:Segment` und legen die Strecke an, auf der sich später der Eckpunkt *C* des Dreiecks bewegen wird.

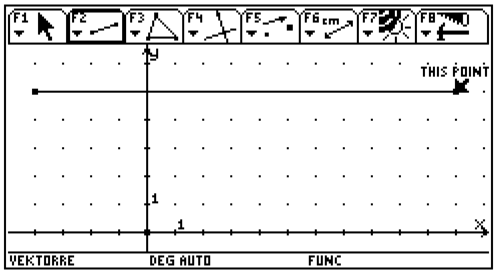




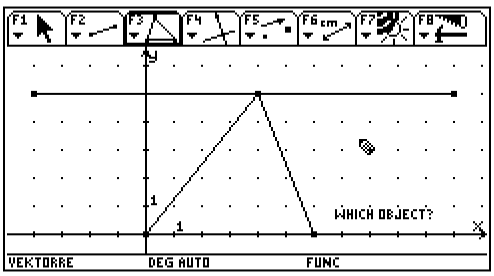


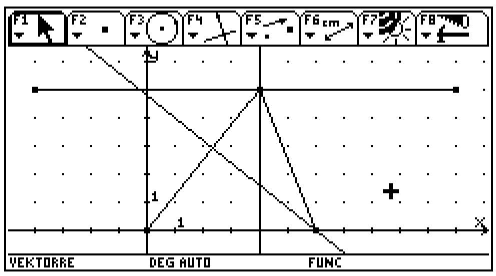




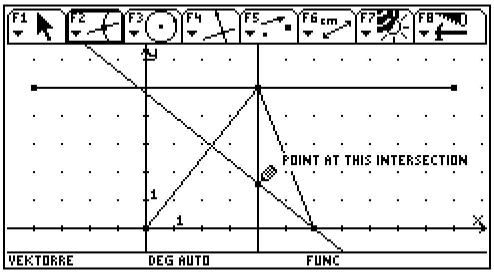


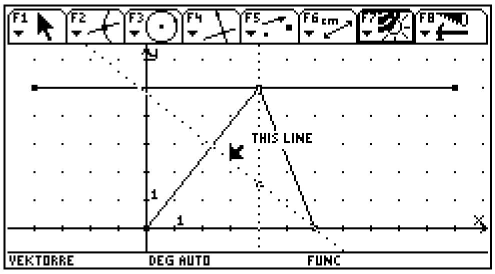
Dann wählen wir [F3]`3:Triangle` und zeichnen das Dreieck, wobei wir zur exakten Bestimmung der Eckpunkte *A* und *B* die Gitterpunkte verwenden. Beim Eckpunkt *C* ist darauf zu achten, dass er nicht auf einen Gitterpunkt, sondern auf die Strecke gesetzt wird.



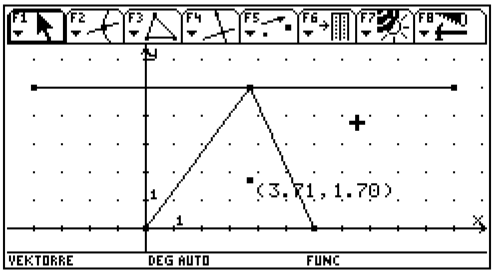


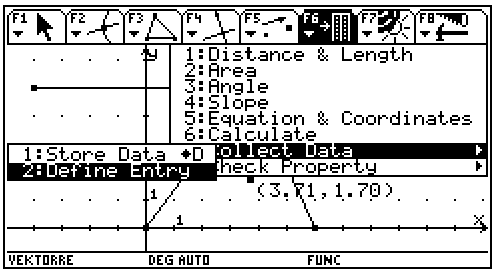
Über [F4] `1:Perpendicular Line` konstruieren wir zwei Höhen und mit [F2] `3:Intersection Point` den Höhenschnittpunkt. Danach verstecken wir mit [F7] `1:Hide/Show` der Übersichtlichkeit halber die Höhen.



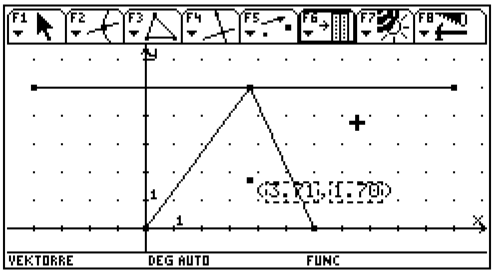


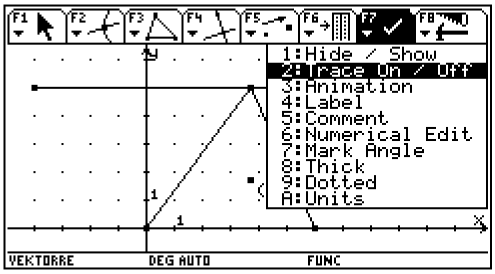
Mit [F6] `5: Equation & Coordinates` bestimmen wir die Koordinaten des Höhenschnittpunktes. Diese wollen wir nun für verschiedene Lagen des Eckpunktes *C* in den `Data/Matrix-Editor` übertragen. Dazu müssen wir zuerst die zu übertragenden Daten festlegen. Das geschieht über [F6] `7:Collect Data▸2:Define Entry`. Dabei müssen *x*-Koordinate und *y*-Koordinate des Höhenschnittpunkts einzeln angewählt werden. (Ausgewählte Daten erscheinen in einem strichlierten Rechteck).



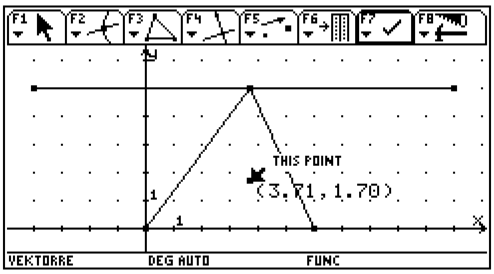


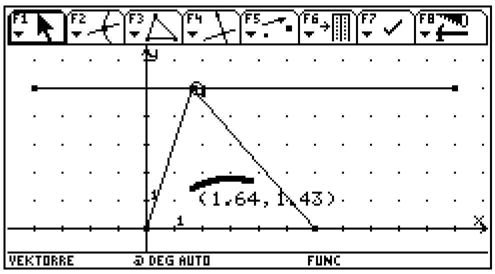
Weil wir ja die Ortslinie des Höhenschnittpunktes sehen wollen, wählen wir über [F7] `2:Trace On/Off` den Spurmodus für den Höhenschnittpunkt aus.



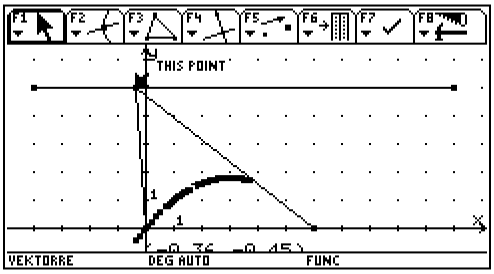


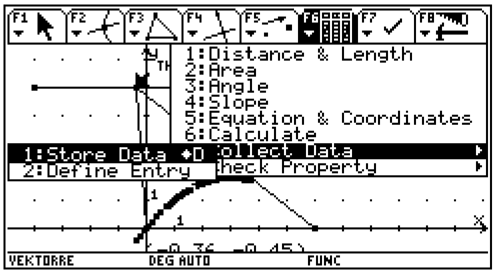
Bewegen wir dann bei aktiviertem `Pointer` (über [F1] `1: Pointer` oder [ESC] erreichbar) den Eckpunkt *C*, so entsteht wieder die Parabel.



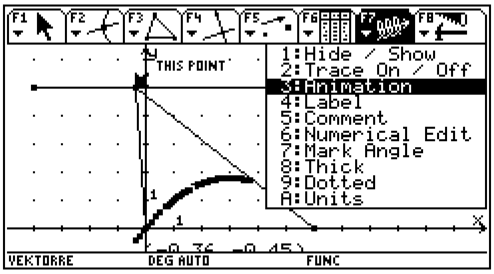


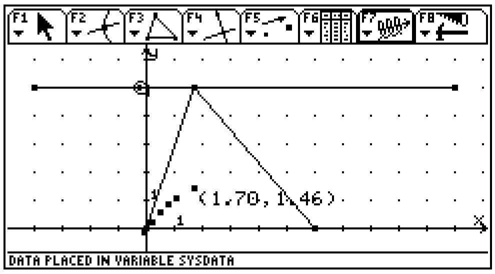
Wir verschieben nun den Eckpunkt etwas über das rechtwinkelige Dreieck nach links hinaus. Nun werden wir in dieser Stellung (kleinster *x*-Wert) beginnend, durch Bewegung nach rechts die Daten übertragen. Dazu wählen wir hintereinander [F6] `7:Collect Data▸1:Store Data` und danach [F7] `3:Animation`.



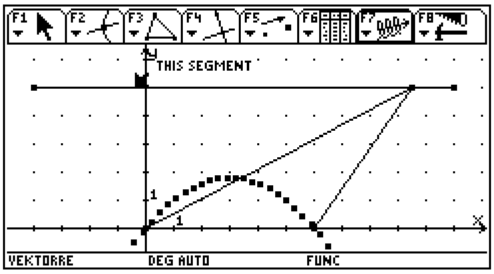


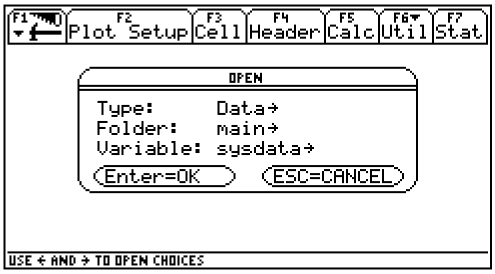
Jetzt sprechen wir den Eckpunkt *C* an und drücken zweimal die Handtaste [✋]. Der Eckpunkt *C* läuft von links nach rechts auf der vorgegebenen Strecke, während gleichzeitig die Daten übertragen werden. Mit [ON] stoppen wir die Animation, bevor sie wieder zurück laufen kann.



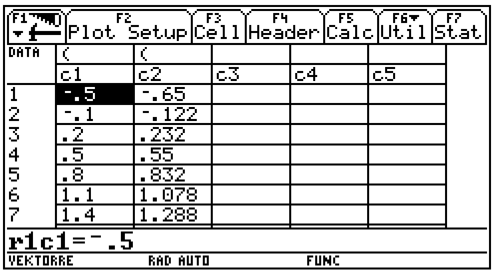


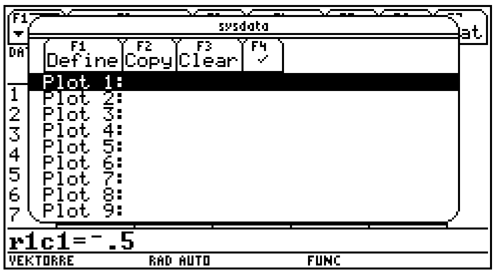
Jetzt öffnen wir im `Data/Matrix Editor` die Datei `main/sysdata` und finden in einer Tabelle die Koordinaten der Punkte der Ortskurve.



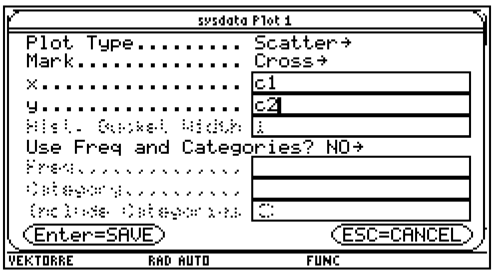


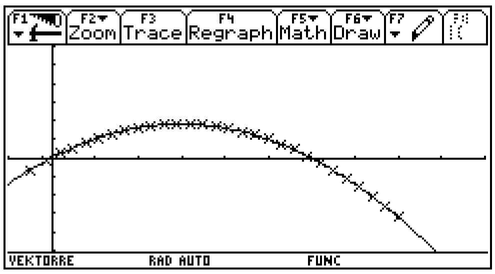
Wir legen über [F2] `Plot Setup` und [F1] `Define` einen neuen Plot an, den wir anschließend über [♦] [GRAPH] gleich betrachten können.



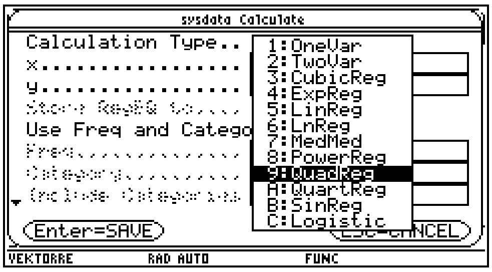


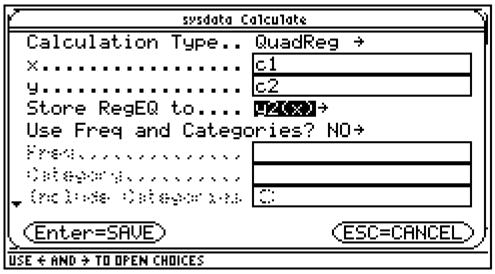
Die Punkte liegen erwartungsgemäß sehr schön auf dem Graphen der vorhin berechneten Funktion.

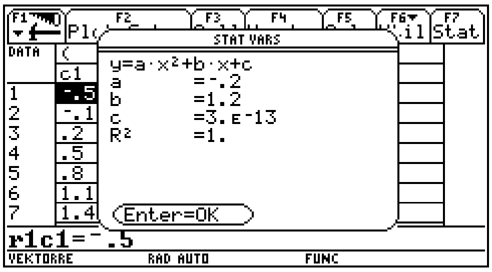




Wir wechseln zurück in den `Data/Matrix Editor` (APPS `6:Data/Matrix Editor` ▶`1:Current`) und wählen unter F5 `Calc` den `Calculation Type QuadReg`, um eine quadratische Regression durchzuführen.







Auch dieses Ergebnis verwundert nicht.

12 Einige Aufgaben zur Kreisgleichung

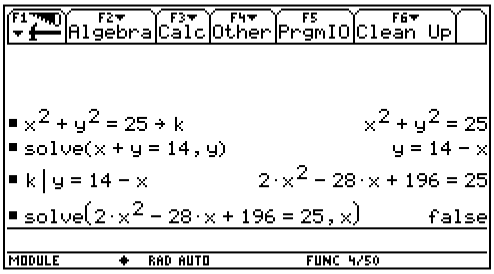
Beispiel 1

Gegeben ist ein Kreis: $x^2 + y^2 = 25$ und eine Gerade *g*. Bestimme die Lage von *g* bezüglich des Kreises durch Rechnung!

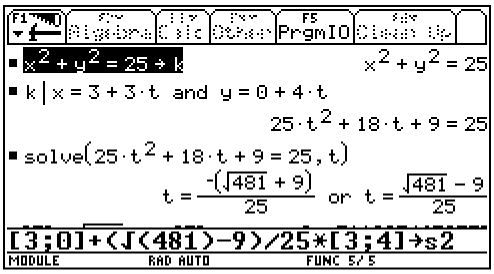
a) $x + y = 14$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $3x + 4y = -5$ d) $x - y = 4$ e) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

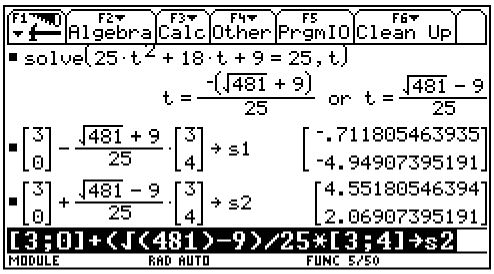
f) $4x + 3y = -5$

a) Passante

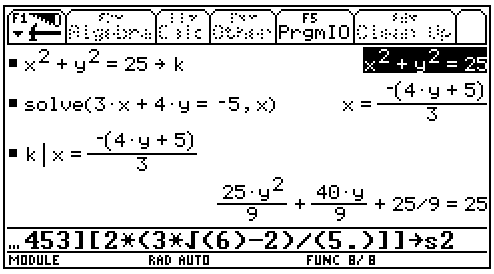


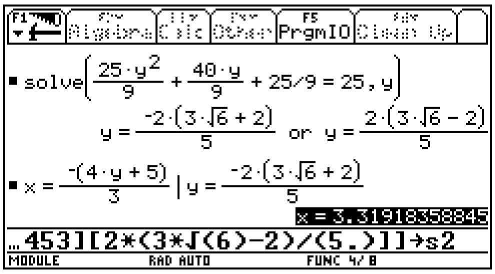
b) Sekante

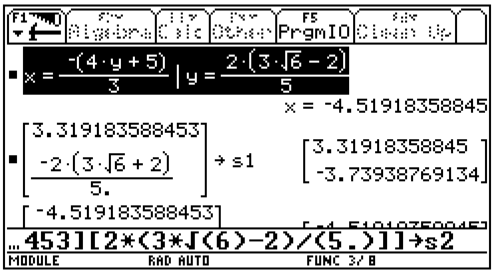


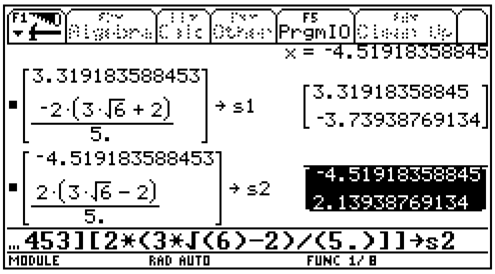


c) Sekante

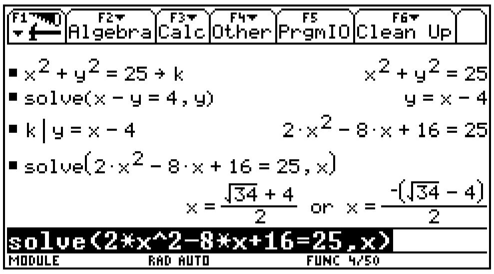


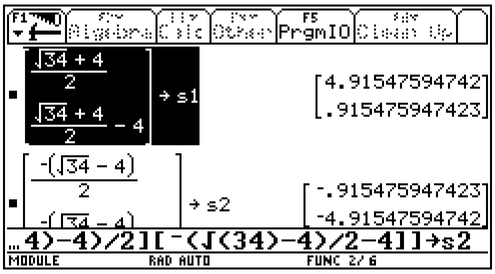


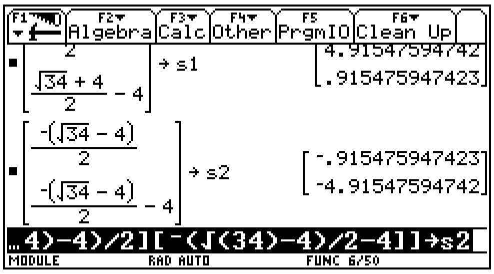




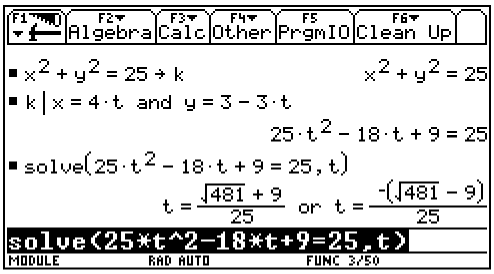
d) Sekante

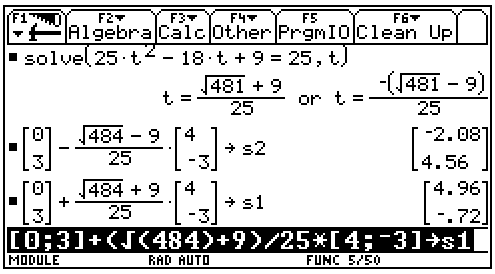




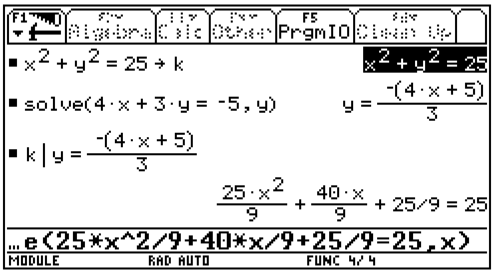


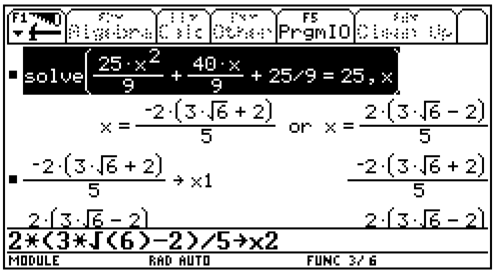
e) Sekante

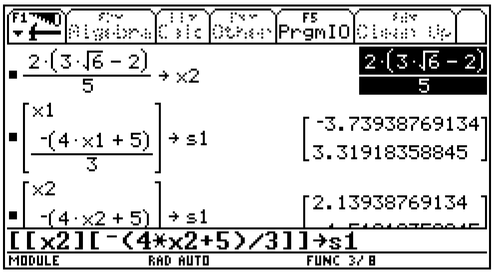


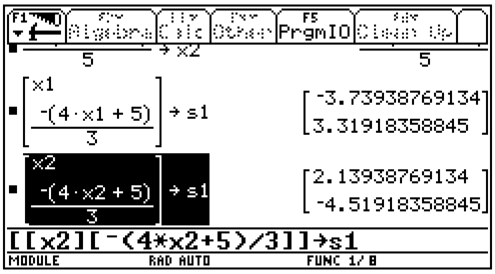


f) Sekante







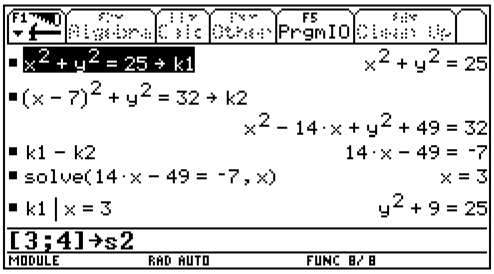


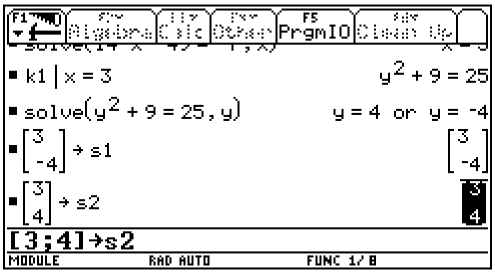
Beispiel 2

Berechne die Schnittpunkte der beiden Kreise $k1$ und $k2$:

$k1: x^2 + y^2 = 25$

$k2: (x-5)^2 + y^2 = 9$

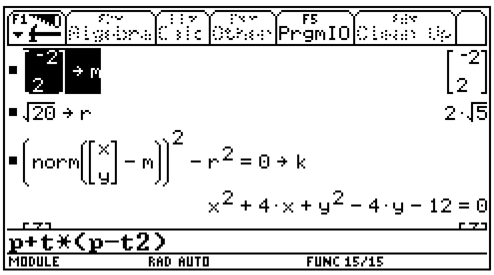


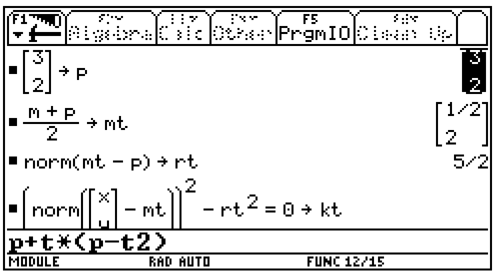


Beispiel 3

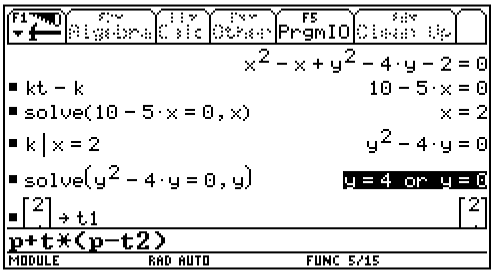
Berechne die Gleichungen der Tangenten, die vom Punkt $P = (3|2)$ an den Kreis k: $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 12 = 0$ gelegt werden können. Finde auch die Berührpunkte.

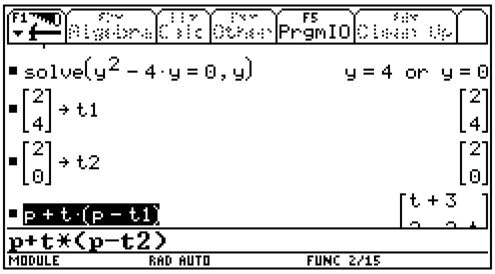
Zunächst werden Mittelpunkt *m* und Radius *r* des Kreises bestimmt und zur Kontrolle die Kreisgleichung eingeben. Dann wird der Mittelpunkt *mt* des Thaleskreises (Halbierungspunkt zwischen *m* und *P*) und dessen Radius *rt* (Abstand zwischen *P* und *mt*) berechnet.

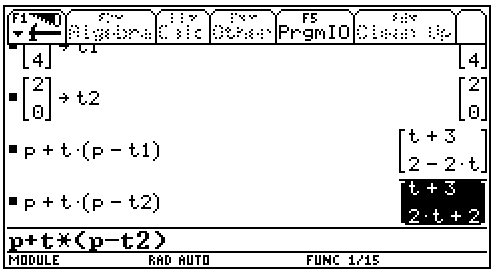




kt ist die Gleichung des Thaleskreises. Durch Subtraktion von *k* von *kt* stellen wir die Potenzgerade auf und setzen sie in *k* ein. Diese Gleichung nach *y* gelöst, liefert die *y*-Werte der Berührpunkte *t1* und *t2*. Mit Hilfe von *t1* und *t2* erhält man leicht die Gleichungen der beiden Tangenten.





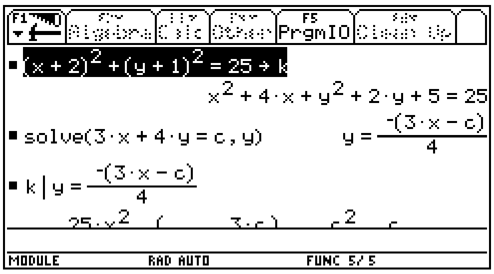


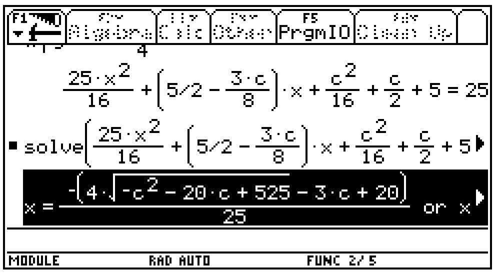
Beispiel 4

Bestimme das absolute Glied *c* in der Geradengleichung so, dass die Gerade *g* zur Tangente an *k* wird.

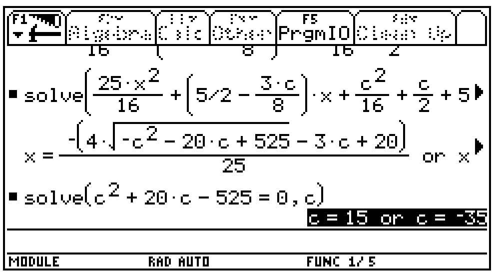
$k:(x+2)^2+(y+1)^2=25 \quad g:3x+4y=c$

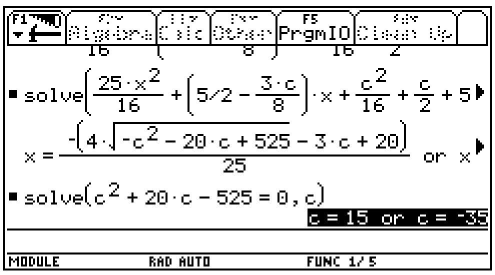
Die Gerade wird mit dem Kreis geschnitten, dabei entsteht eine quadratische Gleichung. Damit für die Schnittpunkte eine Doppellösung entsteht - die die beiden Schnittpunkte zum Berührpunkt zusammenrücken lässt -, muss die Diskriminante der quadratischen Gleichung verschwinden.

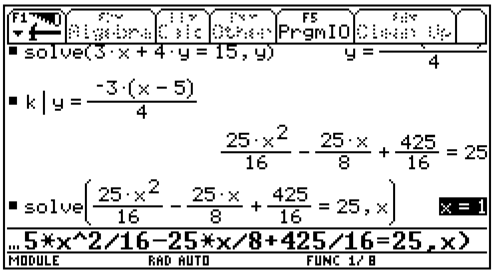




Daraus ergibt sich eine Bedingung zur Berechnung von *c*. Mit *c* = 15 wurde auch noch die Probe durchgeführt.







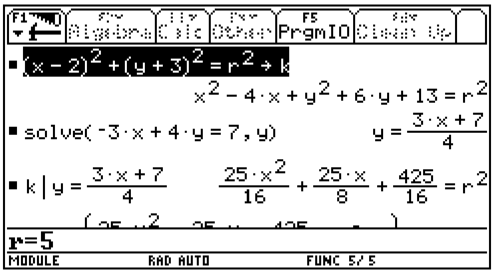
Beispiel 5

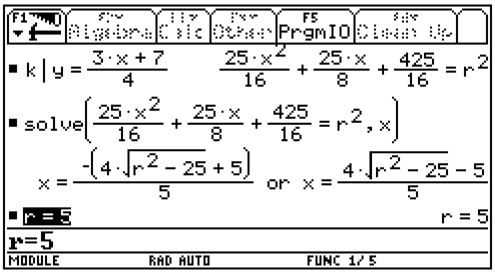
Bestimme den Radius *r* des Kreises *k* so, dass die Gerade *t* zur Tangente wird.

$$k : (x-2)^2 + (y+3)^2 = r^2$$

$$t : -3x + 4y = 7$$

Wie beim vorigen Beispiel wird auch hier die Diskriminante gleich Null gesetzt und daraus der Wert für den Radius *r* errechnet.



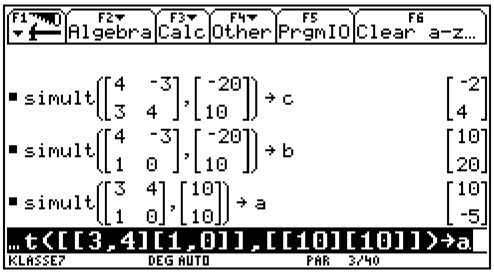


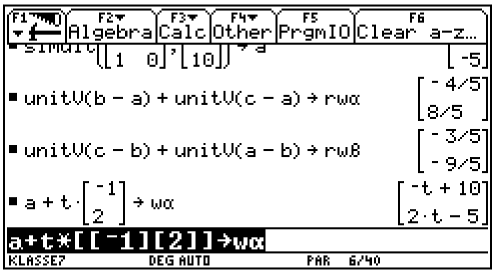
Beispiel 6

Von einem Dreieck kennt man die Gleichungen der Trägergeraden der Dreiecksseiten . Bestimme die Gleichung des Inkreises.

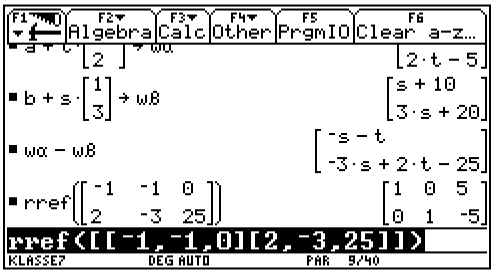
$$a : 4x - 4y = -20 \quad b : 3x + 4y = 20 \quad c : x = 10$$

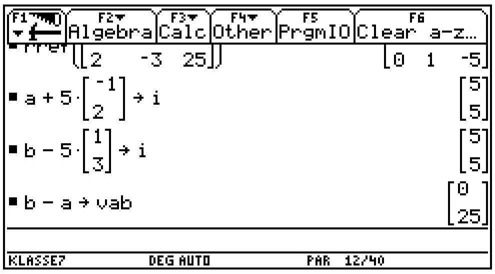
Zunächst werden die Schnittpunkte der Trägergeraden bestimmt. Anschließend werden mit Hilfe der Einheitsvektoren der Seiten die Richtungen der Winkelsymmetralen ermittelt.





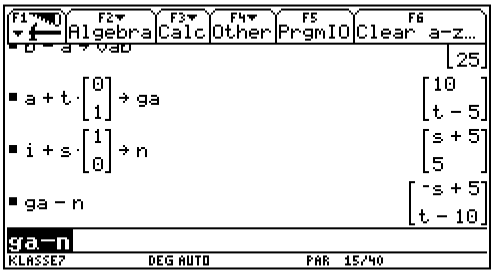
Jetzt können die Gleichungen der Winkelsymmetralen aufgestellt und deren Schnittpunkt gefunden werden. Damit ist der Inkreismittelpunkt festgelegt.

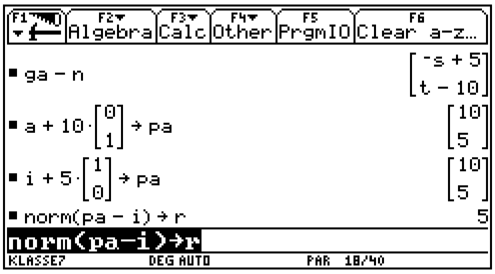


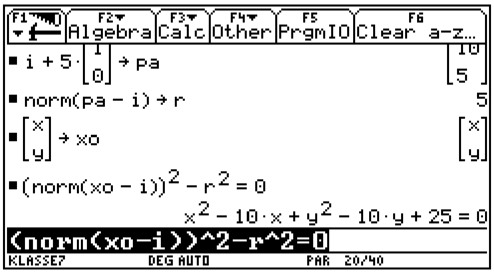


Nun wird die Trägergerade *ga* der Seite *a* mit einer zu ihr Normalen *n* durch den Inkreismittelpunkt geschnitten, was zum Berührpunkt *pa* des Inkreises mit der Seite *a* führt.

Der Abstand von *pa* zum Inkreismittelpunkt ist der Radius des Inkreises.







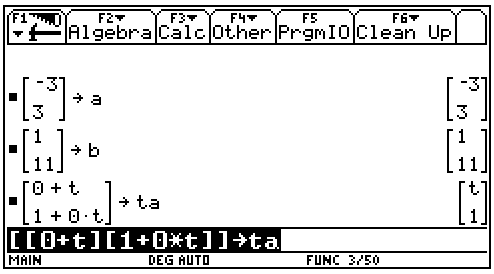
Zum Schluss muss nur noch die Gleichung des Inkreises aufgestellt werden.

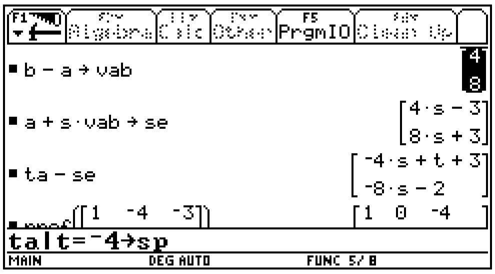
Beispiel 7

Gegeben sind die beiden Punkte *A* = (-5 | 1) und *B* = (-1 | 9) und die Gerade $t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

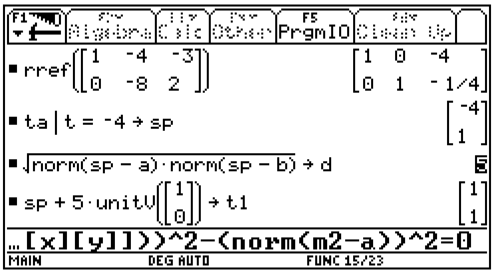
Berechne die Gleichung des Kreises, der durch *A* und *B* verläuft und die Gerade *t* berührt!

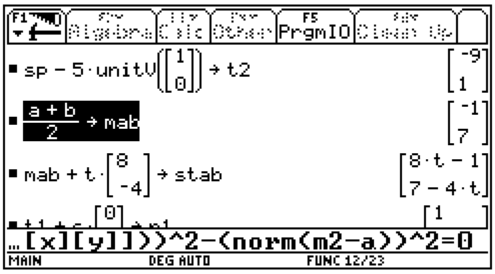
Zunächst werden die Angaben eingeben und dann die Gleichung der Sekanten durch *A* und *B* aufgestellt.



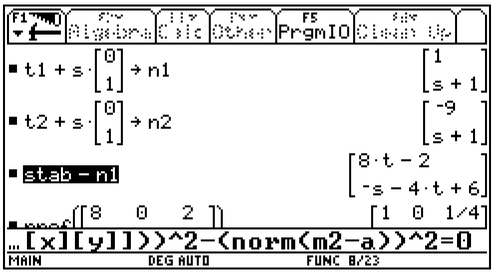


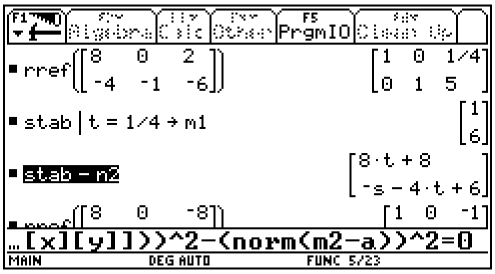
Die Tangente und Sekante werden geschnitten und mit Hilfe des Schnittpunktes das für den Sekantensatz entscheidende Produkt errechnet. Dann werden durch Abtragen der entsprechenden Länge auf der Tangente die beiden möglichen Berührpunkte bestimmt. Es folgt das Aufstellen der Streckensymmetralen auf die Strecke *AB*.



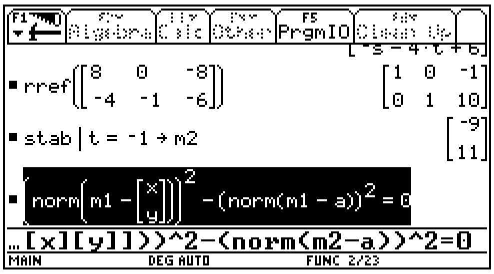


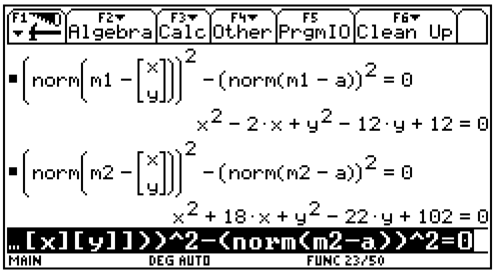
Man stellt die Gleichungen der Normalen auf die Tangente durch die beiden Berührpunkte auf und berechnet deren Schnittpunkte mit der Streckensymmetralen auf AB , womit man zu den Mittelpunkten der gesuchten Kreise gelangt.





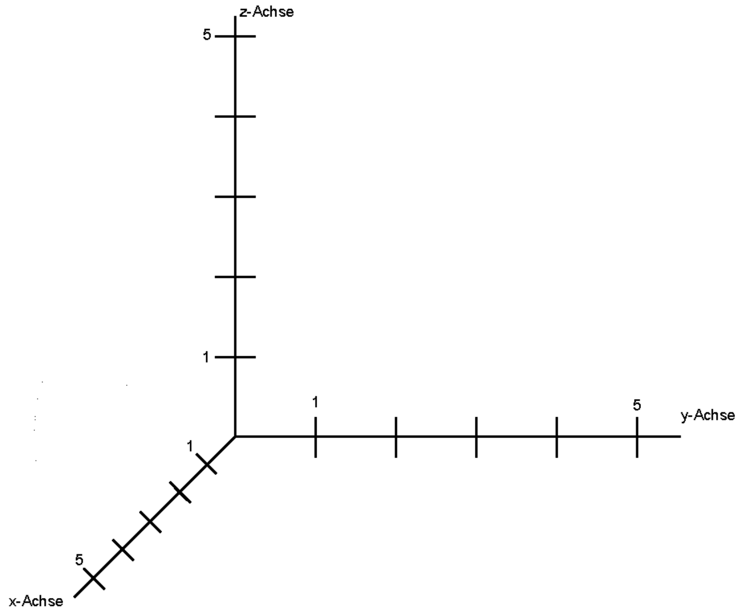
Zuletzt werden noch die beiden Kreisgleichungen aufgestellt.





13 Räumliche Aufgaben und ihre Darstellung am TI-92

Bei der räumlichen Darstellung möchte ich mich auf einen einfachen Schrägriss beschränken und wähle eine Verkürzung von 0,5 auf der x-Achse und einen Winkel von 135° zwischen x-Achse und y-Achse.

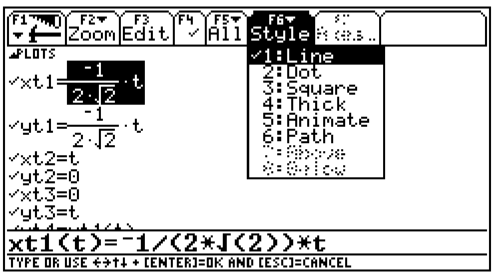


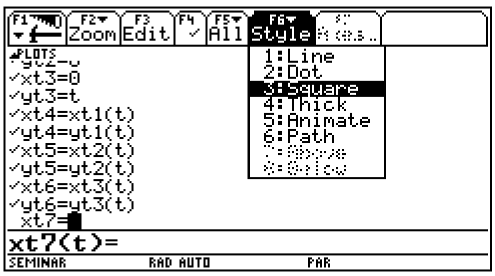
Beispiel 1

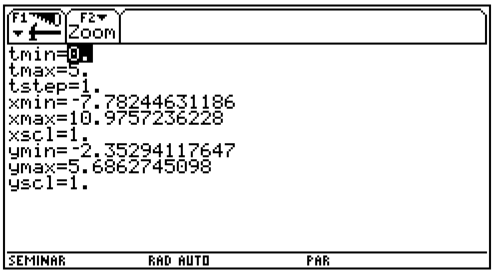
Stelle das obige Koordinatensystem samt Skalierung durch geeignete Funktionen im Grafik mode `PARAMETRIC` dar.

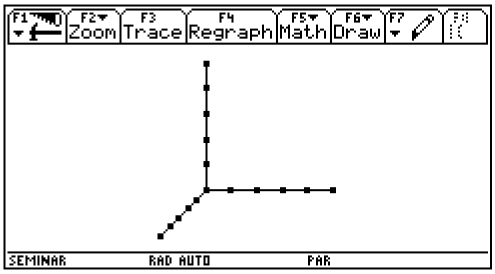
Die drei Achsen erhält man als Gerade durch den Ursprung mit den unten angegebenen Richtungsvektoren. Dabei ist die Länge der Vektoren auf die Länge der jeweiligen Einheit abgestimmt. Einmal werden die Geraden mit dem `Style Line` und einmal mit dem `Style Square` gezeichnet. Dadurch entstehen bei richtiger Wahl der Windowvariablen die Achsen und die Skalierungen.

$$\overrightarrow{rx} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{ry} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{rz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$





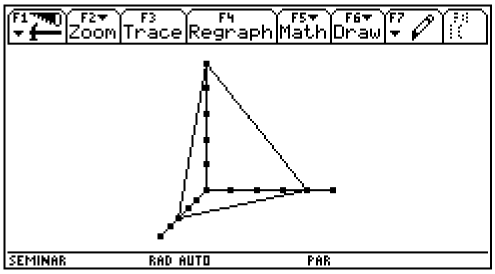




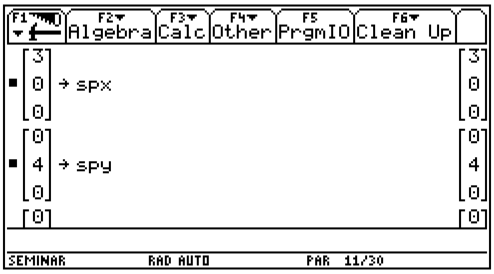
Beispiel 2

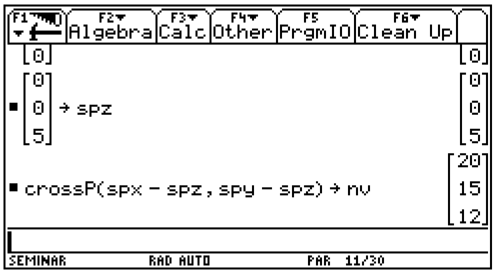
Bestimme die Spurpunkte der durch ihr Spurdreieck dargestellten Ebene und berechne aus ihnen die Ebenengleichung.

Beschreibe ferner, wie die rechts abgebildete Darstellung am TI-92 erzeugt werden kann.



Zunächst werden die Koordinaten der Spurpunkte aus der Zeichnung entnommen und eingegeben. Daraus wird der Normalvektor der Ebene und die Ebenengleichung bestimmt.



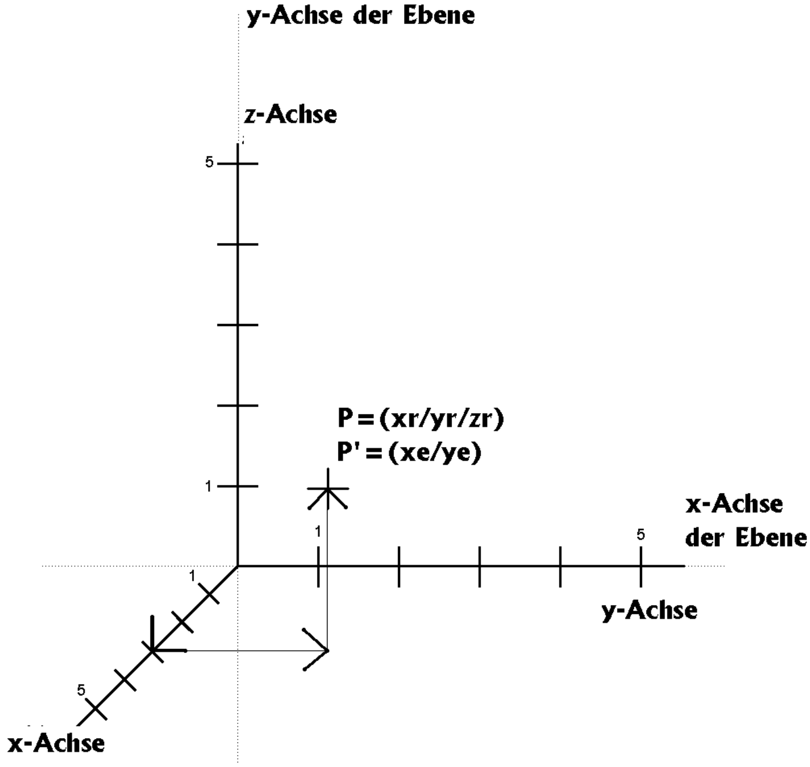


Nun geht es darum, das Spurdreieck darzustellen. Dazu müssen wir uns überlegen, wie aus den dreidimensionalen Punkten ihre zweidimensionalen Projektionen berechnet werden können.

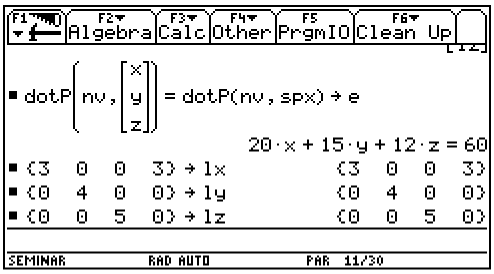
Betrachten wir dazu nochmals unser Schrägrisskoordinatensystem und legen wir ein übliches zweidimensionales Koordinatensystem darüber.

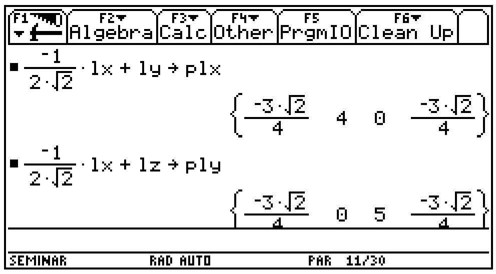
Um die Projektion des Punktes $P = \begin{pmatrix} xr \\ yr \\ zr \end{pmatrix}$ zu erhalten gehen wir analog zum Zeichnen des Punktes ins Koordinatensystem vor. Wir addieren zum *xr*-fachen des Einheitsvektors der *x*-Achse das *yr*-fache des Einheitsvektors der *y*-Achse und das *zr*-fache der *z*-Achse und erhalte so die Formel für die den Ortsvektor des Projektion *P*‘ des räumlichen Punktes *P* (siehe Darstellung auf der nächsten Seite).

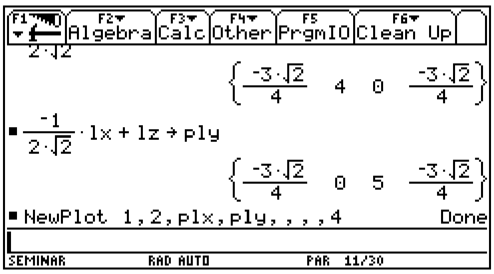
$$xr \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \end{pmatrix} + yr \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + zr \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \cdot xr + yr \\ -\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \cdot xr + zr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe \\ ye \end{pmatrix}$$

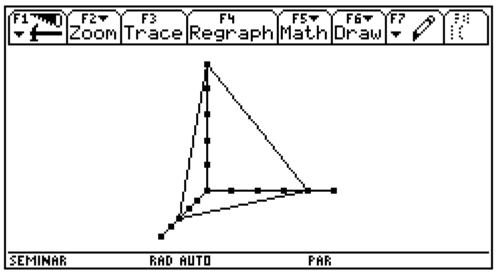


Diese Formel wenden wir nun auf unsere Spurpunkte an. Dazu verwenden wir Listen, damit die Verwandlung in die Koordinaten der Projektion auf einmal erfolgt. Die Reihenfolge der Eingabe in die Listen bestimmt die Reihenfolge, in der die Punkte in der Darstellung miteinander verbunden werden. Dass das Spurdreieck vollständig gezeichnet wird, muss der erste Spurpunkt zum Schluss noch einmal eingegeben werden. Mit dem `Newplot`-Befehl erfolgt schließlich das Zeichnen des Spurdreiecks.









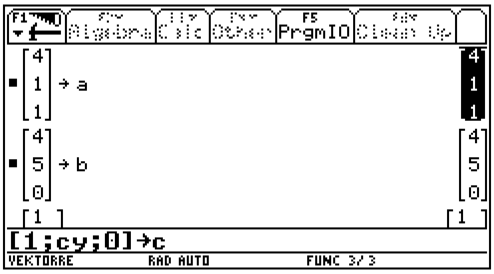
Beispiel 3

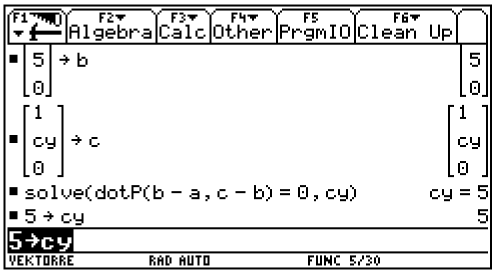
Von einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche sind die Eckpunkte A, B, und C bekannt: $A=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\cy\\0\end{pmatrix}$. Die Höhe h der Pyramide beträgt $\frac{3}{2}\cdot\sqrt{17}$ E.

Weiters ist die Ebene ε: $x+y+z=10$ gegeben.

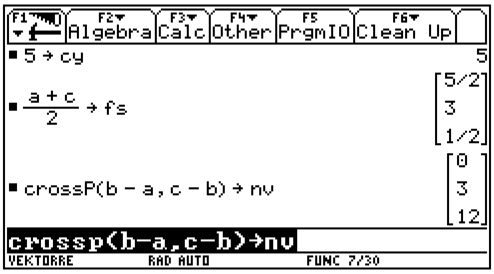
Berechne die fehlende Koordinate von C, die Koordinaten des vierten Basispunktes D und der Pyramidenspitze S.
Berechne die Schnittpunkte der Seitenkanten der Pyramide mit der Ebene ε.
Beschreibe, wie diese Pyramide und ihre Schnittfläche mit der Ebene ε auf dem TI-92 als Schrägriss dargestellt werden können.

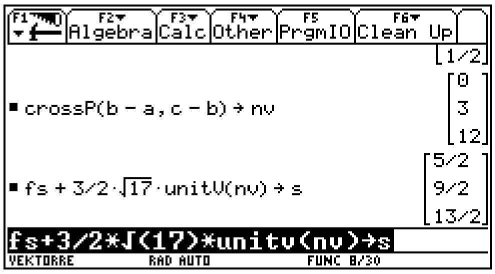
Zunächst geben wir die drei Eckpunkte A, B und C ein und berechnen mit Hilfe des inneren Produktes die fehlende Koordinate von C.



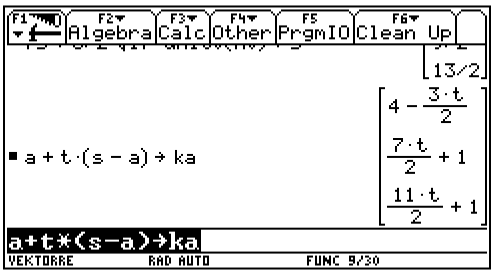


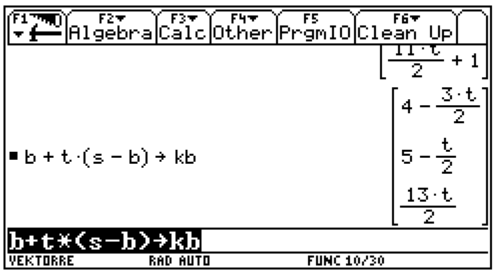
Dann berechnen wir den Lotfußpunkt FS der Spitze S und den Normalvektor auf die Ebene der Grundfläche.
Durch Abtragen der bekannten Höhe erhalten wir die Spitze.

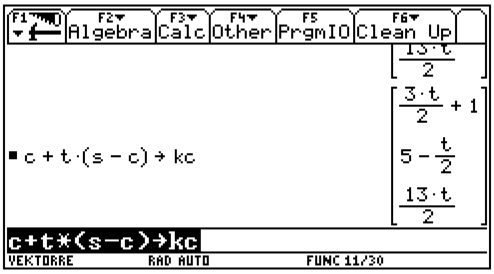


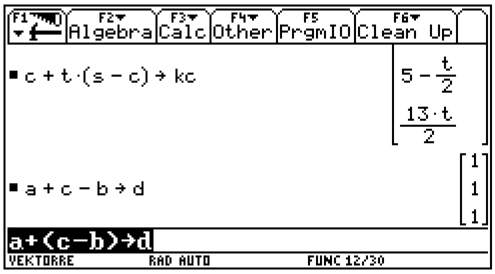


Nun editieren wir die Trägergeraden der Seitenkanten ka, kb, kc und kd.

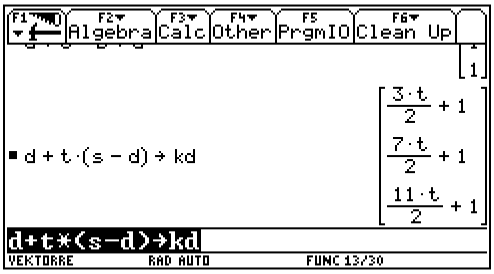


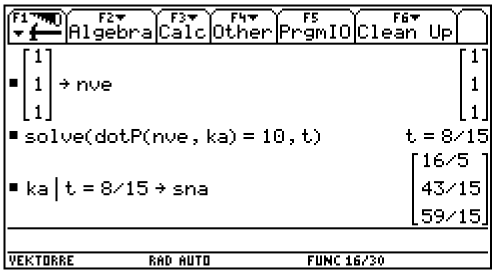


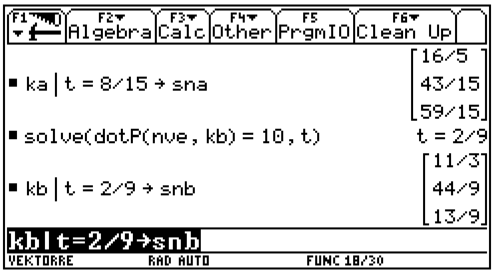


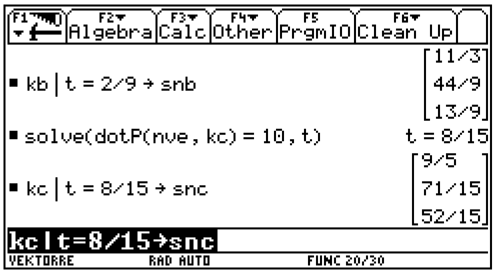


Um rasch den Schnittpunkt mit der Ebene ε berechnen zu können, arbeiten wir mit ihrem Normalvektor. Durch Einsetzen der Gleichungen der entsprechenden Kanten in die Ebenengleichung können wir den Parameter für den Schnittpunkt und damit auch den Schnittpunkt errechnen.

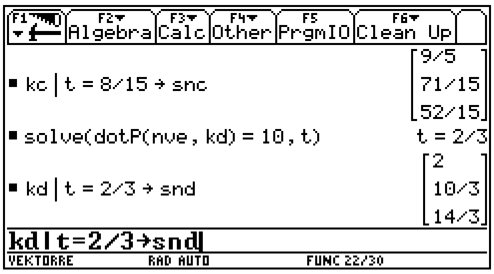


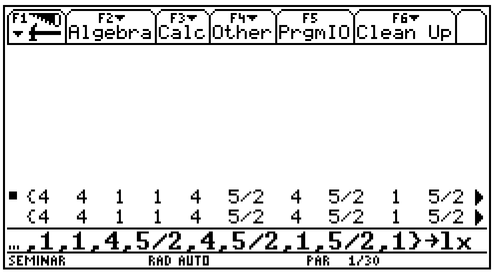


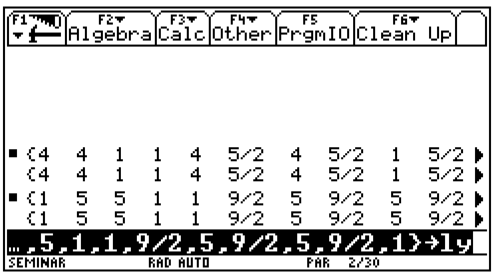


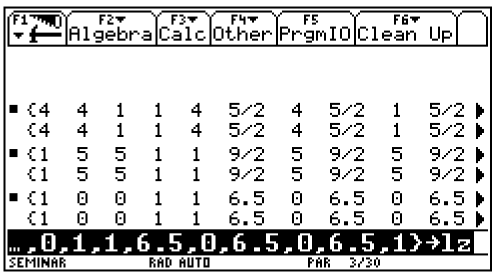


Nun stellen wir die drei Listen `lx`, `ly` und `lz` – für die *x*-, *y*- und *z*-Koordinaten - auf, deren Linienzug uns die Pyramide zeichnen wird. Hier ist folgende Reihenfolge gewählt worden: *A;B;C;D;A;S;B;S;C;S;D*

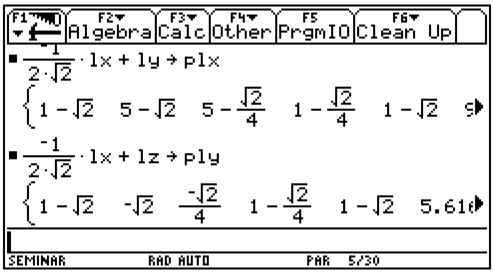


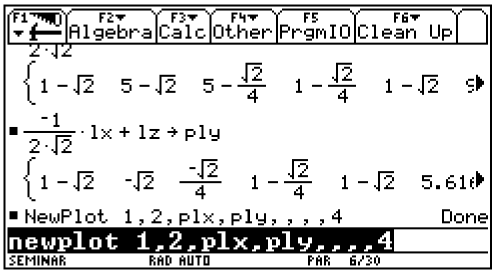




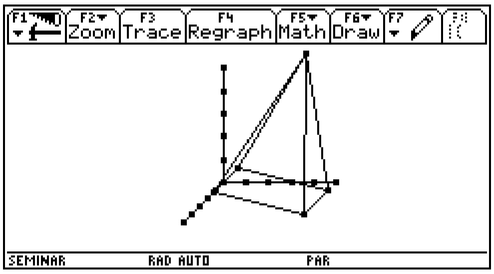


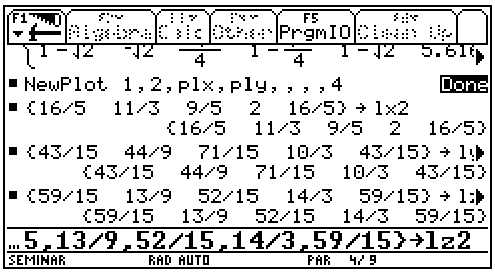
Dann werden die Listen der Koordinaten der projizierten Punkte bestimmt – `plx` und `ply` - und der `Newplot`-Befehl aktiviert.



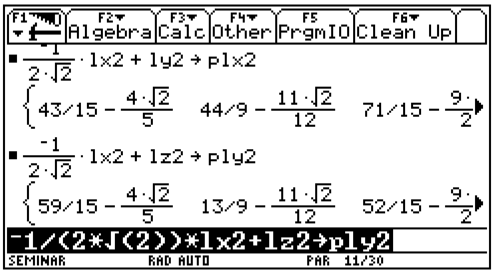


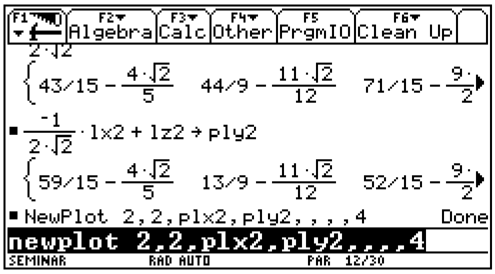
Schon kann man die Pyramide bewundern. Anschließend geben wir die Listen für die Darstellung der Schnittfigur ein. Hier wurde die Reihenfolge *SNA,SNB,SNC,SND,SNA* gewählt.

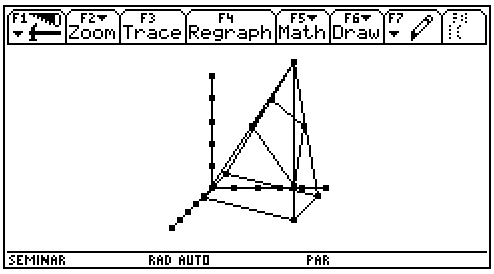


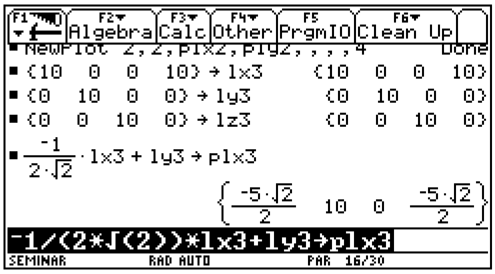


Wieder werden die Koordinaten der projizierten Punkte berechnet und die Schnittfigur dargestellt.

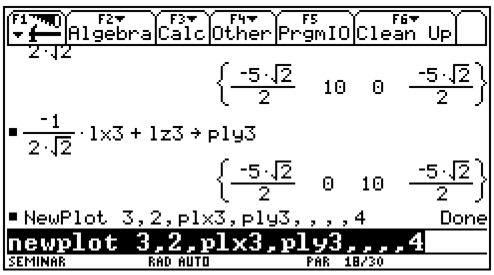


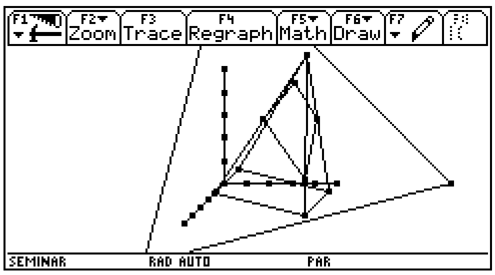






Man kann die Figur auch noch durch das Spurdreieck der Ebene ergänzen.





14 Einige Anregungen für weitere Beispiele

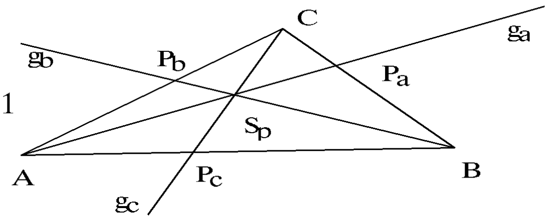
Hier handelt sich um das Nachvollziehen, bzw. Kennenlernen einiger berühmter Lehrsätze der ebenen Geometrie. Diese Sätze eignen sich auch für den Einsatz der dynamischen Geometrie (Cabri).

Beispiel 1 - Der Satz von Ceva

Dieser Lehrsatz wurde im Jahre 1678 vom italienischen Mathematiker Giovanni Ceva entdeckt.

Lehrsatz: Die drei Geraden g_a, g_b und g_c, welche durch die Eckpunkte A, B und C eines Dreiecks verlaufen und die gegenüberliegende Seiten in den Punkten P_a, P_b und P_c schneiden, besitzen genau dann einen gemeinsamen Schnittpunkt S_p, wenn gilt:

$$\frac{\overline{AP_c}}{\overline{P_cB}} \cdot \frac{\overline{BP_a}}{\overline{P_aC}} \cdot \frac{\overline{CP_b}}{\overline{P_bA}} = 1$$



Angabe:

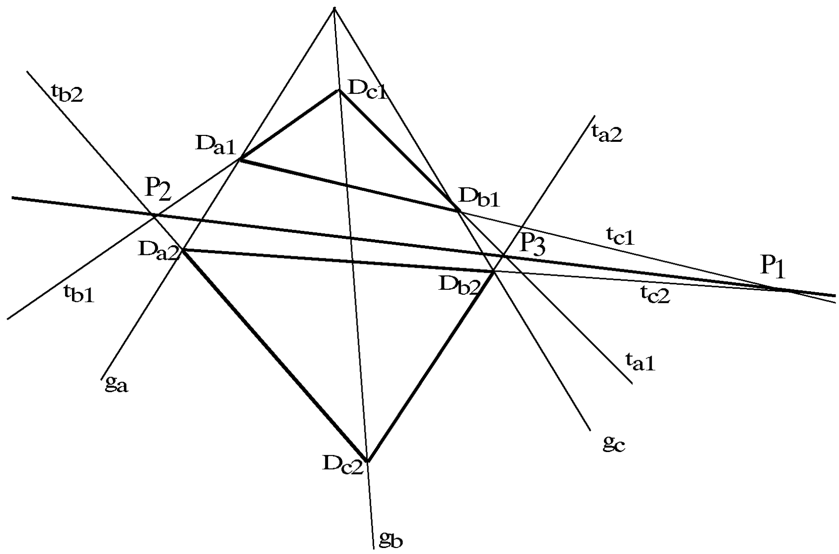
$$A = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$t_c = \frac{5}{3} \quad t_b = \frac{3}{2} \quad t_a = \frac{2}{5}$$

Beispiel 2 - Der Satz von Desargues

Dieser Lehrsatz wurde vom französischen Mathematiker Gerard Desargues (1593-1662) entdeckt.

Wenn die beiden Dreiecke $D_{a1}D_{b1}D_{c1}$ und $D_{a2}D_{b2}D_{c2}$ so liegen, daß sich die Verbindungsgeraden der entsprechenden Eckpunkte in einem Punkt schneiden, so liegen die Schnittpunkte der Trägergeraden entsprechender Seiten auf einer Geraden.



Angabe:

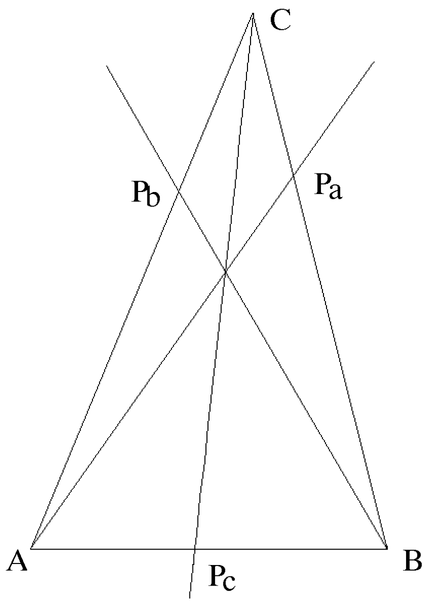
$$ga{:}\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \quad gb{:}\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad gc{:}\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$da1 = \begin{pmatrix} -13 \\ -10 \end{pmatrix} \quad db1 = \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \end{pmatrix} \quad dc1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$da2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad db2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad dc2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3 - Nagelscher Punkt

Beim Nagelschen Punkt handelt es sich um folgenden merkwürdigen Punkt des Dreiecks.



Sei ABC ein Dreieck, P_c ein Punkt der Seite AB mit $\overline{CA} + \overline{AP_c} = \overline{CB} + \overline{BP_c}$, P_a ein Punkt der Seite BC mit $\overline{AB} + \overline{BP_a} = \overline{AC} + \overline{CP_a}$ und P_b ein Punkt der Seite AC mit $\overline{BC} + \overline{CP_b} = \overline{BA} + \overline{AP_b}$, dann besitzen die drei Geraden, welche durch die Eckpunkte des Dreiecks verlaufen und die gegenüberliegenden Seiten in den Punkten P_c, P_a und P_b schneiden, einen gemeinsamen Schnittpunkt.

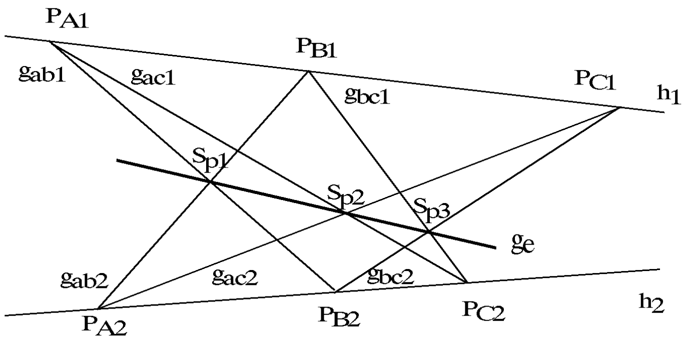
Angabe:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4 - Der Satz von Pappus

Folgender Lehrsatz geht auf den griechischen Mathematiker Pappus von Alexandria (3./4. Jhdt. n. Chr.) zurück.

Seien P_{A1}, P_{B1} und P_{C1} drei Punkte auf einer Geraden h_1 und P_{A2}, P_{B2} und P_{C2} drei Punkte auf einer Geraden h_2, ferner S_{p1} der Schnittpunkt der Geraden g_{ab1} durch P_{A1} und P_{B2} mit der Geraden g_{ab2} durch P_{A2} und P_{B1}, S_{p2} der Schnittpunkt der Geraden g_{ac1} durch P_{A1} und P_{C2} mit der Geraden g_{ac2} durch P_{A2} und P_{C1} und S_{p3} der Schnittpunkt der Geraden g_{bc1}durch P_{B1} und P_{C2} mit der Geraden g_{bc2} durch P_{B2} und P_{C1}, dann liegen die Punkte S_{p1}, S_{p2} und S_{p3} auf einer Geraden g_e.



Angabe:

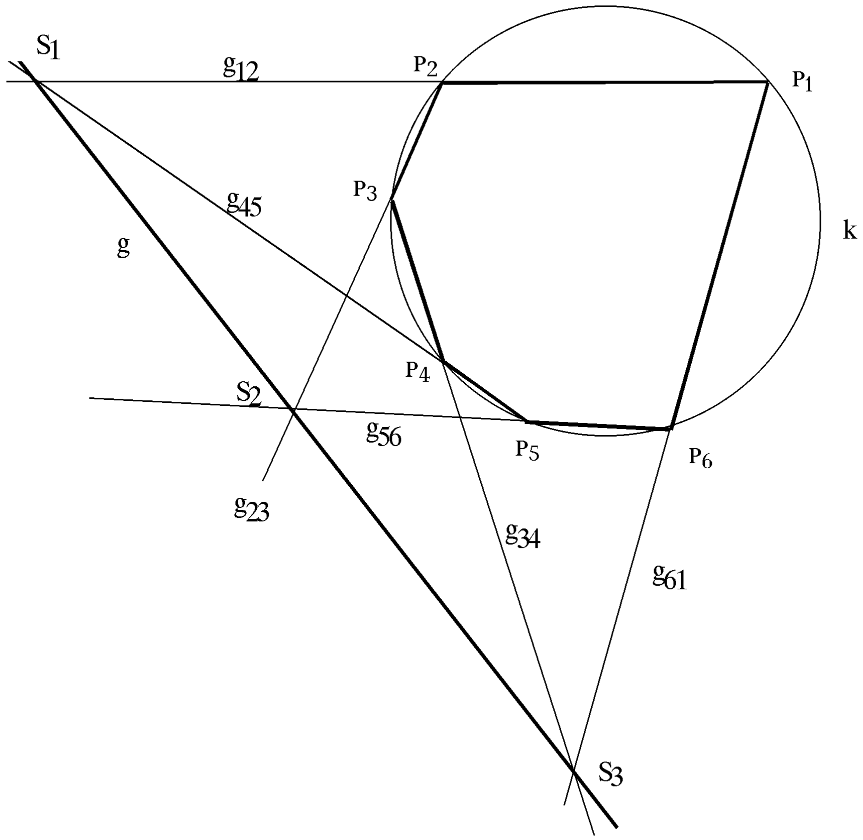
$$h1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 5 \end{pmatrix} \quad h2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$pa1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix} \quad pb1 = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 75/4 \end{pmatrix} \quad pc1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$pa2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} \quad pb2 = \begin{pmatrix} -7/2 \\ -12 \end{pmatrix} \quad pc2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5 - Der Satz von Pascal

Im Alter von 16 Jahren veröffentlichte der französiche Mathematiker Blaise Pascal (1623-1662) diesen Lehrsatz.
Wenn ein Sechseck einen Umkreis besitzt und gegenüberliegende Seiten nicht parallel sind, so liegen die Schnittpunkte der Trägergeraden gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden.



Angabe:

$$x^2 + y^2 - 100 = 0$$

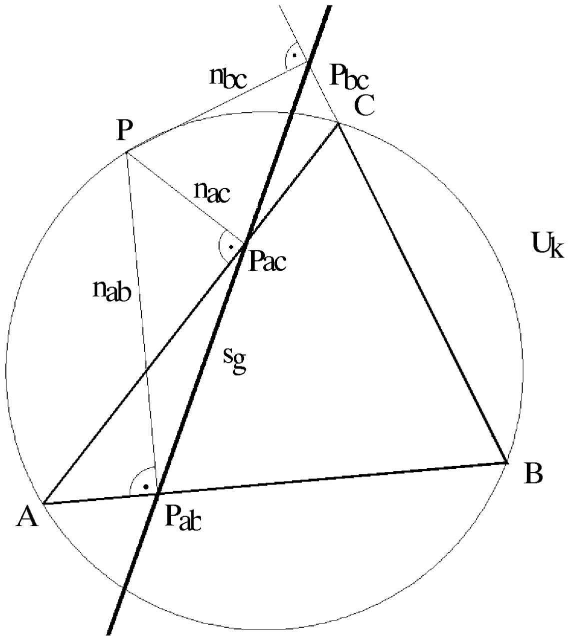
$$p1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad p2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad p3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$p4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \quad p5 = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \quad p6 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Viel später wurde der duale **Satz von Brianchon** vom gleichnamigen französischen Geo-meter entdeckt.

Beispiel 6 - Die Simsonsche Gerade

Fällt man von einem beliebigen Punkt P des Umkreises eines Dreiecks die Normalen n_{ab}, n_{ac} und n_{bc} auf die Trägergeraden der Dreiecksseiten, so die liegen die Schnittpunkte P_{ab}, P_{ac} und P_{bc} dieser Normalen mit den Trägergeraden auf einer Geraden, der Simsonschen Geraden. Diese Gerade wurde vom englischen Mathematiker Robert Simson (1687-1768) entdeckt.

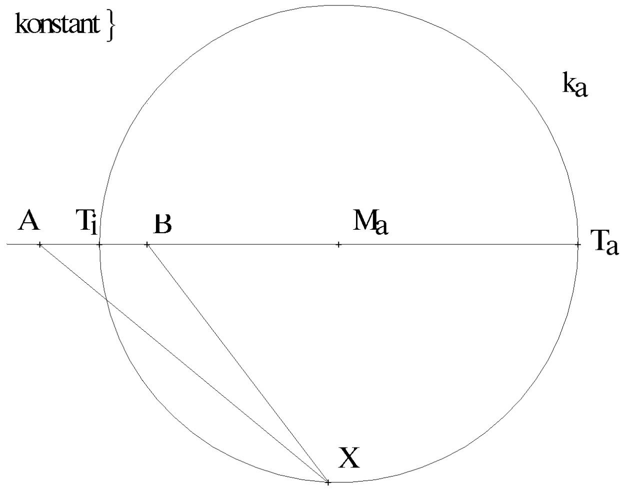


Angabe: $A = (-5 \mid -2)$, $B = (6 \mid -1)$, $C = (2 \mid 7)$

Beispiel 7 - Der Kreis des Apollonios

Der griechische Mathematiker Apollonios von Perge (2. Jhdt. n. Chr.) entdeckte folgende Eiganschaft. .
Die Menge aller Punkt X, für die gilt, daß das Verhältnis der Abstände zu zwei festen Punkten A und B konstant ist, ist der Apollonische Kreis k_a. Sein Mittelpunkt ist der Halbierungspunkt zwischen dem inneren und dem äußeren Teilungspunkt und er verläuft durch diese beiden Punkte.

$$k_a = \{ X \mid \frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \text{konstant} \}$$



Angabe: $A = (0|0) \quad B = (10|0) \quad t = \frac{3}{2}$