

Bundesseminar „Computeralgebrasysteme“  
Hollabrunn  
7.-10.3.2001

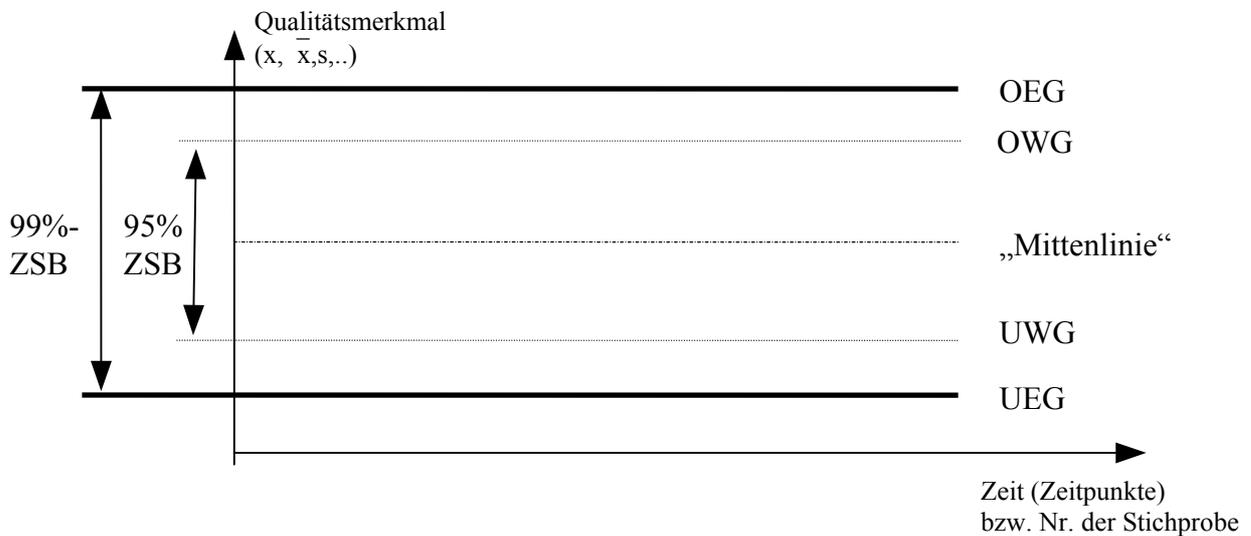
**Ausgewählte Anwendungen der  
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik  
aus dem Gebiet der  
„Statistischen Methoden des Qualitätsmanagements“**

<b>Shewart – Qualitätsregelkarten</b>	<b>Seite 2 - 6</b>
<b>Prozeßfähigkeit / Prüfmittelfähigkeit</b>	<b>Seite 7 - 9</b>
<b>Stichprobensysteme</b>	<b>Seite 10 - 17</b>
<b>Der <math>\chi^2</math>-Anpassungstest</b>	<b>Seite 18</b>
<b>Übersicht über die TI-92-Programmbefehle</b>	<b>Seite 19</b>

Wilfried Rohm  
HTL Saalfelden  
5760 Saalfelden  
mailto: [wrohm@aon.at](mailto:wrohm@aon.at)

**SHEWART-Qualitätsregelkarten**

**1.1. Allgemeines :** Sie dienen zur Überwachung, ob ein Prozeß beherrscht ist



**BEACHTEN:**

- \* Stets Stichproben gleichen Umfangs ziehen (bei  $\bar{x}$ -Karten häufig:  $n=5$ )
- \* regelmäßig prüfen
- \* jeden Eingriff vermerken !

**AUSSAGEN** je nach Lage der Kennwerte :

• innerhalb der Warngrenzen	⇒ ALLES OK - Weitermachen ( <i>nur zufällige Abweichungen</i> )
• außerhalb der Warn-, aber innerhalb der Eingriffsgrenzen	⇒ „Probe gut“ - es besteht allerdings der Verdacht, daß der Prozeß NICHT in Ordnung ist → evtl. sofort 2. Stichprobe ziehen / häufiger prüfen / ...
• außerhalb der Eingriffsgrenzen	⇒ „Probe schlecht“ - Abweichung ist signifikant (Einfluß des Zufalls unwahrscheinlich) → Eingriff in den Prozeß: 1) Prozeß stoppen (wenn möglich) 2) Ursache(n) suchen, finden, abstellen. 3) Prozeß neu einstellen / Überprüfung der Neueinst. 4) Eingriff vermerken/dokumentieren !! 5) 100%-Kontrolle der seit der letzten Prüfung gefertigten Teile (falls möglich)

**BEACHTEN :** bei **Karten für Zählergebnisse (Fehlerzahlen/Fehler/...)** und **Streuungskarten** ist das Unterschreiten von UWG bzw. UEG natürlich anders zu bewerten (*Qualitätsverbesserung?*)

- Weiterfertigen → Prüfung überprüfen (*sorgfältig ?*) → Anmerkung !!
- qualitätsverbessernde Ursache suchen und beibehalten → **NEUE REGELKARTE** anlegen
- eventuell stelle man sich die Frage: „Ist Produktion wirtschaftlich ?“

**OC = Operationscharakteristik :**

gibt an, wie EMPFINDLICH die Karte reagiert.

y-Achse : **1-P<sub>a</sub> = Eingriffswskt.**

## 1.2. Shewart-Karte für Fehlerstückzahlen x (Anzahl fE) - BI

Üblicherweise wird die Karte für x (=Fehlerstückzahlen) angelegt, unter Umständen aber auch für die Fehleranteile  $p = x/n$ .

**Mittenlinie**: mittlere Fehlerstückzahl von n Stück:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i \quad (\text{bzw. } \mu = n \cdot p)$$

Ist ein längerer Vorlauf auszuwerten, so ergibt sich :  $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_N x_i$

dabei bedeutet: n ... Anzahl der Einheiten innerhalb einer Stichprobe  
 m ... Anzahl der Stichproben, die gezogen wurden (zu je n Stück)  
 N = n·m (alle fehlerhaften Einheiten zusammenzählen)  
 zB: *an m Tagen wurden jeweils n Teile geprüft.*

**Berechnung der Warn- (95%) und Eingriffsgrenzen (99%) für die Anzahl x fehlerh. Einheiten durch die zweiseitigen Zufallsstrebereiche der BI-Verteilung**

**BEACHTE:** die Grenzen sollen zwischen 2 ganzzahligen Werten liegen , daher:  
**OEG / OWG = (Wert des ZSB) + 0,5**  
**UEG / UWG = (Wert des ZSB) - 0,5**

- *Hinweis:* Sollte die Karte für  $\hat{p} = \frac{x}{n}$  aufgestellt werden, so gilt :  $\hat{p}_{un} = \frac{x_{un}}{n}$  und  $\hat{p}_{ob} = \frac{x_{ob}}{n}$

### Eingriffswahrscheinlichkeiten -OC:

Berechnung der Wahrscheinlichk., daß die Anzahl fE außerhalb der Eingriffsgrenzen liegt

$$1 - P_a = P(x > OEG) \quad [ + P(x < UEG) ]$$

Eingriffswahrscheinlichkeit (*Berechnung praktisch nur einseitig nötig*)

$$P(x > OEG) = 1 - G(OEG - 0,5)$$

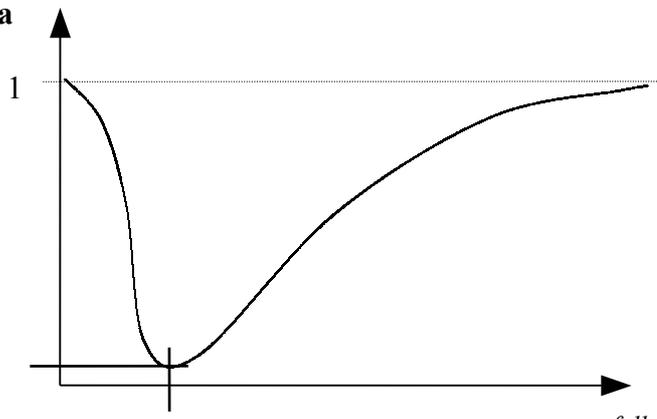
Wahrscheinlichkeit für Verschlechterung

$$P(x < UEG) = G(UEG - 0,5)$$

Wahrscheinlichkeit für Verbesserung

Eingriffswahrscheinlichkeit

1-P<sub>a</sub>



Erhöhung der Empfindlichkeit durch Erhöhung des Stichprobenumfanges n  
 ⇒ steilere OC !

*falls sich  $\mu = F/Spule$  verdoppelt*

### 1.3. SHEWART-Karten für Meßwerte (Normalverteilung)

**Allgemeines:**

ÜBERWACHUNG DES „NIVEAUS“ bzw. der „LAGE“ : Mit  $\bar{x}$  - Karten.

Alternativ zur Mittelwertkarte werden in der Praxis manchmal auch Mediankarten ( $x$ ) und Urwertkarten verwendet – jedoch ist die  $x$  – Karte am empfindlichsten und daher generell zu empfehlen!

Überwachung der „GLEICHMÄSSIGKEIT“: s- Karten

Alternativ zur s-Karten werden R-Karten (wegen ihrer Einfachheit) verwendet, jedoch ist die s-Karte empfindlicher.

In der Regel wird eine KOMBINIERTE Karte zur Überwachung der Lage und der Gleichmäßigkeit.

**x - s - Karten** : empfindliche Karte ; reagiert prompt! [ Generell zu empfehlen]

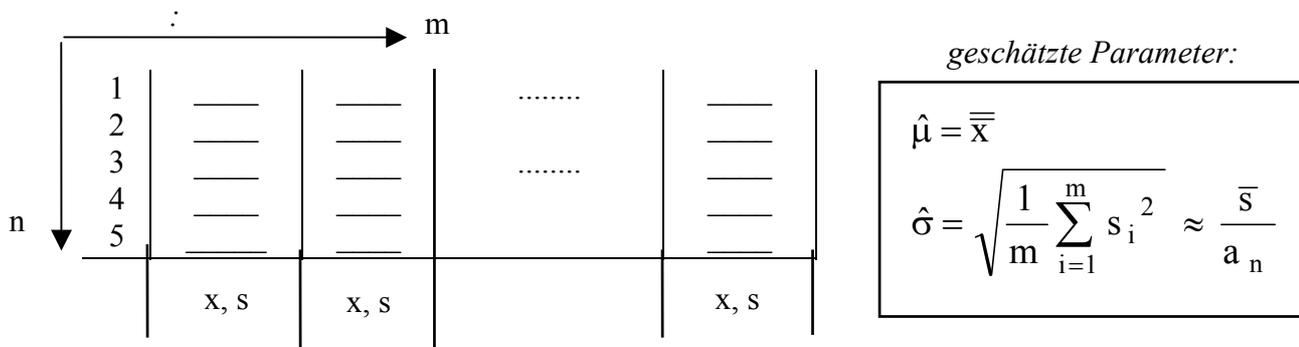
**x - R - Karten**: einfache Karten

**AUSWERTUNG VON VORLÄUFEN:**

Wenn die Anweisung besteht, daß die durch einen VORLAUF ermittelte Mitteneinstellung des Fertigungsprozesses und seine bisherige Streuung beibehalten werden sollen.

Eine Meßreihe wird meist in m Unterstichproben der Größe n (häufig: n=5) unterteilt.

( n·m sollte  $\geq 50$  [besser: 100] sein !)



Hinweise: s ... arithmetischer Mittelwert der Stichprobenvarianzen

$\sigma$  ... Schätzung für die „wahre“ Standardabweichung  $\sigma$  der Grundgesamtheit.

a) exakter Rechengang: 
$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^2}$$

b) aus s mit Faktor  $a_n$  
$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{a_n} \quad (\rightarrow \text{Tab. 54})$$

### 1.3.1. MITTELWERTKARTE - $\bar{x}$ - Karte

**Mittelinie:**  $\mu$  bzw.  $\hat{\mu} = \bar{\bar{x}}$

**Warn-/Eingriffsgrenzen:**

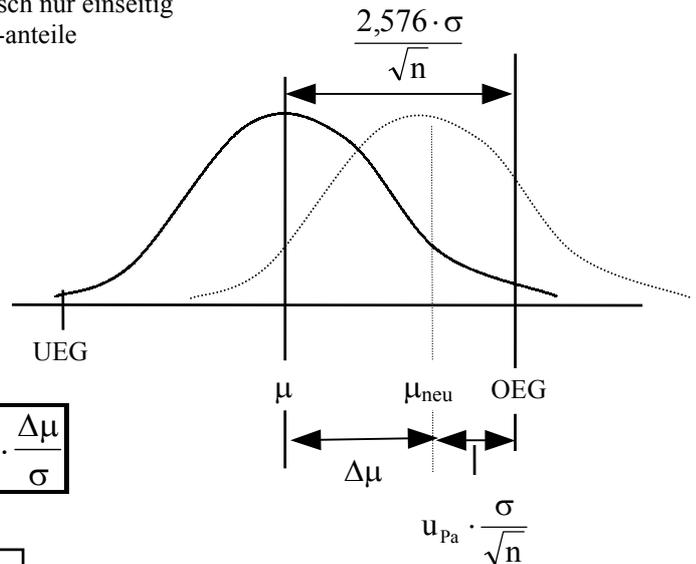
OWG	$= \mu \pm 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm u_{0,975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
UEG	$= \mu \pm 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm u_{0,995} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

**Beachte:** Nicht die Einzelwerte, sondern die Mittelwerte müssen innerhalb der Grenzen liegen, es werden auch nur die Mittelwerte in die Karte eingetragen.

#### **Eingriffswahrscheinlichkeiten - OC:**

Die Berechnung der Eingriffswahrscheinlichkeiten ist praktisch nur einseitig nötig, weil nur auf einer Seite nennenswerte Überschreitungs-anteile auftreten können.

$$1 - Pa = 1 - G_{NV} \left( \frac{OEG - (\mu + \Delta\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)$$



Variante:

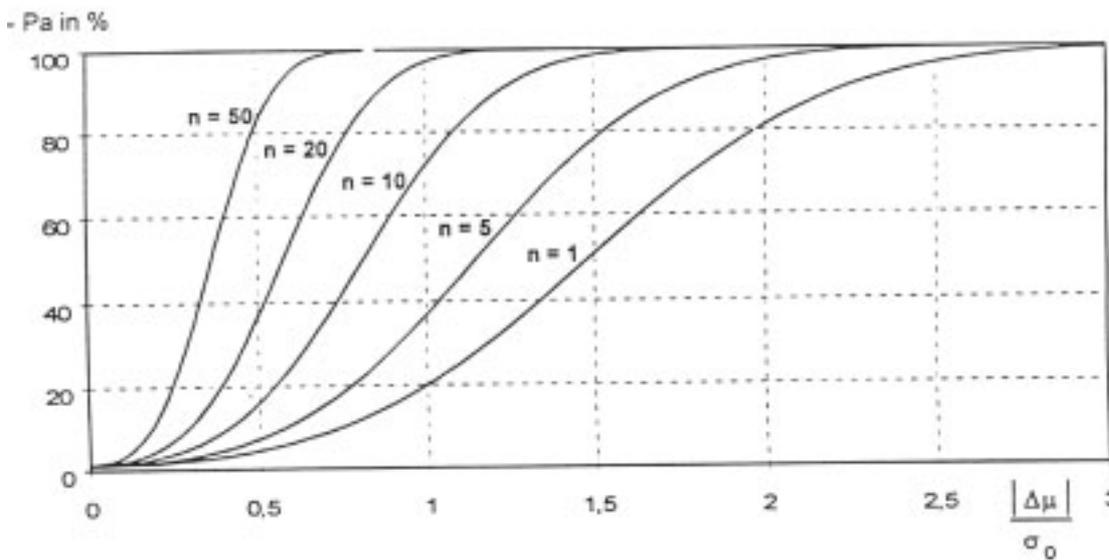
$$\Delta\mu + u_{Pa} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2,576 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow u_{Pa} = 2,576 - \sqrt{n} \cdot \frac{\Delta\mu}{\sigma}$$

Pa

↔

1-Pa

Die Operationscharakteristik wird meist als Funktion in Abhängigkeit von  $\frac{\Delta\mu}{\sigma}$  dargestellt und zeigt anschaulich, wie empfindlich die Karte reagiert.



**1.3.2. STREUUNGSKARTE – s-Karte**

Warn- und Eingriffsgrenzen

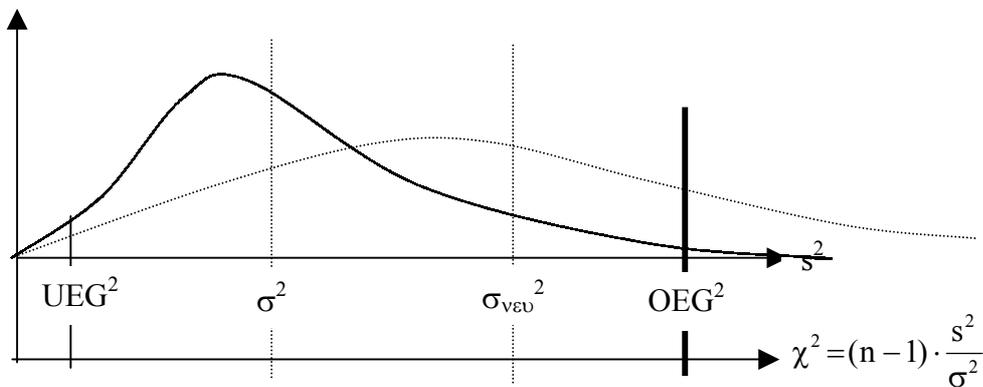
$$\begin{aligned} \text{OEG} &= \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 0.995}}{n-1}} \cdot \sigma & \text{OWG} &= \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 0.975}}{n-1}} \cdot \sigma \\ \text{UEG} &= \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 0.005}}{n-1}} \cdot \sigma & \text{UWG} &= \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 0.025}}{n-1}} \cdot \sigma \end{aligned}$$

Eingriffswahrscheinlichkeiten - OC

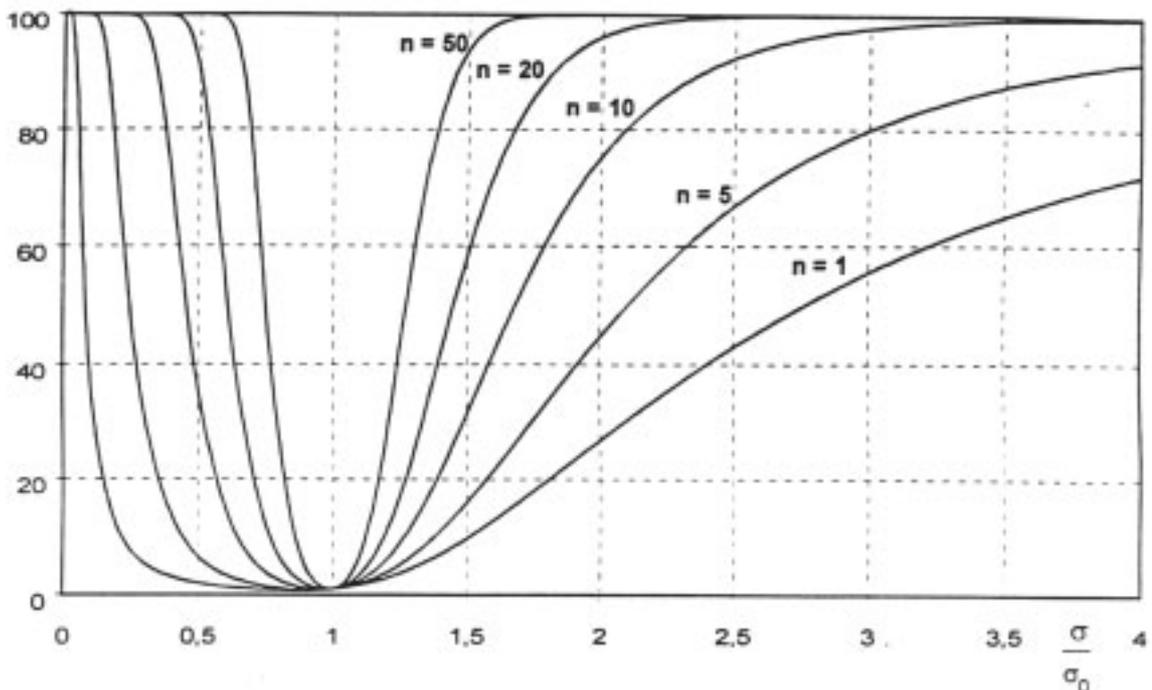
Eingriff oben bei Verschlechterung (bzgl. OEG)

Eingriff unten bei „Verbesserung“ (bzgl. UEG)

$$\begin{aligned} 1 - P_a &= 1 - G^*(\chi_{\text{oben}}^2) & [+ G^*(\chi_{\text{unten}}^2)] &= \\ &= 1 - G\left((n-1) \cdot \frac{\text{OEG}^2}{\sigma_{\text{neu}}^2}\right) & \left[ + G\left((n-1) \cdot \frac{\text{UEG}^2}{\sigma_{\text{neu}}^2}\right) \right] \end{aligned}$$



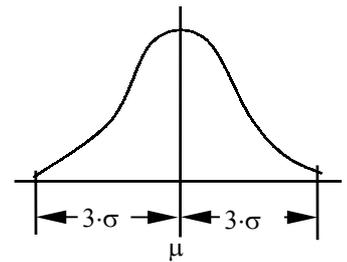
1 - Pa in %



## Prozeßfähigkeit

**Vorbemerkungen:**

	$T = \text{OGW} - \text{UGW} \dots$	<i>Toleranzbreite</i>	
innerhalb	$\mu \pm \sigma$	liegen bei NV ca.	68% der Werte ( $u=1$ )
	$\mu \pm 2\sigma$	liegen bei NV ca.	95,5% der Werte
	$\mu \pm 3\sigma$	liegen bei NV ca.	99,7% der Werte [„alle“]
	$\mu \pm 4\sigma$	liegen bei NV ca.	99,994% der Werte



**Maschinenfähigkeitsanalyse:** „Kurzzeitaufnahme“ : Vor oder spätestens am Beginn der Fertigung unter realistischen, aber optimalen Bedingungen (*Probefertigung*)

$\sigma_m$  ... momentane Standardabweichung der Maschine gemäß Probefertigung  
(mittels Standardabweichung  $s$  von mindestens 50 (100) Meßwerten schätzen)

$$c_m = \frac{T}{6 \cdot \sigma_m} \quad \text{Maschinenfähigkeitsindex}$$

**Prozeßfähigkeit:** „Langzeitaufnahme“ : Ermittlung während der Fertigung bei optimaler Einstellung (auf Toleranzmitte)

$\sigma_p$  Streuung des Prozesses [gegenüber Maschinenfähigkeit zusätzliche Prozeßeinflüsse  $\Rightarrow$   
 $\sigma_p > \sigma_m$   
 in der Praxis  $\sigma_p$  wieder aus 50 (100) Meßwerten über  $s$  schätzen]

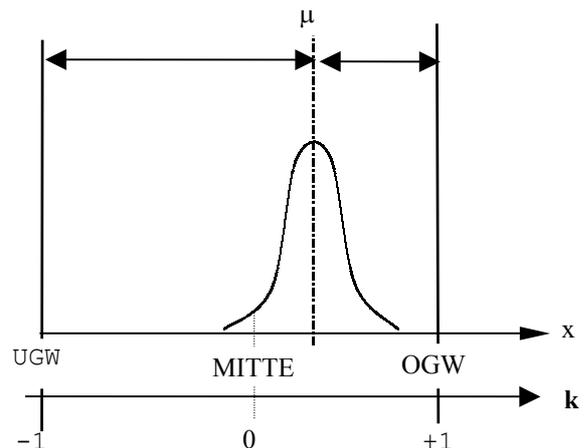
$$c_p = \frac{T}{6 \cdot \sigma_p} \quad \text{Prozeßfähigkeitsindex}$$

**Kritische Prozeßfähigkeit:** „Ist“-Zustand des Prozesses mit Berücksichtigung der tatsächlichen Maschinenstreuung (LAGE) – gibt an, wieviel % Ausschuß zu erwarten sind.

$$c_{pk} = \text{MIN} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{OGW} - \mu}{3 \cdot \sigma_p} \\ \frac{\mu - \text{UGW}}{3 \cdot \sigma_p} \end{array} \right.$$

Alternative: Beschreibung der Prozeßkennzahlen mit Hilfe der Größe „k“:

$$k = \frac{\mu - \frac{\text{OGW} + \text{UGW}}{2}}{\frac{\text{OGW} - \text{UGW}}{2}} \Rightarrow \begin{cases} c_{pu} = c_p(1+k) \\ c_{po} = c_p(1-k) \\ c_{pk} = c_p(1-|k|) \end{cases}$$



Es gilt :  $c_m \geq c_p \geq c_{pk}$

## Anmerkungen zur Prozeßfähigkeit

- $c_p = 1$  bedeutet, daß die „natürliche“ Streuung  $6 \cdot \sigma_p$  gleich der Toleranzbreite ist.  
Dann ist der Ausschußanteil  $p$  etwa 0,3% !
- $c_p \geq 1$  ist daher eine unabdingbare Forderung, die aber noch zu wenig Spielraum läßt.
- $c_p \geq 1,33$  wird derzeit in vielen Fällen von der Industrie gefordert. , zB: FORD-Normen:  $c_m, c_p, c_{pk} \geq 1,33$
- $c_p \geq 1,66$  , manchmal auch 2 gilt in vielen Fällen als vorbildlich.
- In Japan werden „üblicher Weise“  $c_p$ - Werte zwischen 3 und 5 erzielt (!) → dies führt zu „sicheren“ Prozeßen, die kaum mehr kontrolliert werden müssen !! [ → „TAGUCHI - Philosophie“ ]

## Überprüfung eines Meßgerätes auf Prüfmittelfähigkeit

geg: richtiger Wert  $x_R$   
Meßreihe  $x_1, \dots, x_n$  des Normals

**Wiederholbedingungen**, d.h. festgelegtes Verfahren, am selben Ort, zur selben Zeit bzw. kurz hintereinander, durch denselben Beobachter am identischen Objekt mit derselben Geräteausrüstung .

Schätzwert für die **systematische Abweichung**:

$$A_a = |\bar{x}_a - x_r| \quad \text{mit} \quad \bar{x}_a = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

Abschätzung der **zufälligen Abweichung** durch die Berechnung der Wiederholstandardabw.  $s_w$

$$s_w = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_a)^2} \quad \text{Variationskoeffizient:} \quad V = \frac{s_w}{|\bar{x}_a|}$$

**Prüfmittelfähigkeitsindizes** (analog zu den Indizes der Prozeßfähigkeit)

$$T = \text{OGW} - \text{UGW}$$

$$c_g = \frac{0,2 \cdot T}{6 \cdot s_w} \quad c_{gk} = \frac{0,1 \cdot T - A_a}{3 \cdot s_w}$$

**Forderung:**  $c_g > 1$  und  $c_{gk} > 1$   
(manchmal auch 1,33)

Anmerkungen:

- Die Forderung  $c_g > 1$  bedeutet, daß die Meßunsicherheit  $u$  10% der Toleranz nicht überschreiten soll (der Unsicherheitsbereich  $2u$  ist dann 20% der Toleranz)
- Der in der Formel von  $c_g$  angegebene Faktor 0,2 wird nicht einheitlich verwendet. zum Teil gibt es firmenspezifische Werte. (z.B: 0,15 ...)

## Übungsbeispiele zur Prozeßfähigkeit / Prüfmittelfähigkeit

- 1) Was bedeuten folgende Vorgaben für  $c_p$  bzw.  $c_{pk}$  :
- $c_p = c_{pk}$
  - $c_{pk} = 0$
  - $c_{pk} < 0$
- 2) Man skizziere jene Normalverteilung, die einen Prozeß mit bestimmter Toleranz  $T$  und  $c_p = 3$  sowie  $c_{pk} = 2$  charakterisiert.
- 3) Gegeben sind die Toleranzgrenzen einer Fertigung mit  $UGW = 68$  und  $OGW = 92$ . Man berechne die  $c_p$  und  $c_{pk}$ -Werte für  $\sigma_p=2$  und  $\mu = 80 \mid 83 \mid 86 \mid 92 \mid 95$ .
- 4) Zur Feststellung der Prozeßfähigkeit bei der Herstellung von elektr. Widerständen werden 80 Widerstände gemessen. Es ergab sich  $s = 3,8 \Omega$ . Man gebe den zweiseitigen 95%-Vertrauensbereich für  $c_p$  an, wenn  $T = 40,0 \Omega$  ist. (die Werte der Widerstände werden als normalverteilt angenommen)
- 5) In der Endprüfung von keramischen Bauteilen wird die Laufzeit eines Ultraschallimpulses gemessen, da aus der Schallgeschwindigkeit mittels eines empirisch ermittelten Zusammenhangs die Festigkeit der Produkte zerstörungsfrei bestimmt wird. Die gegebenen Grenzwerte für die Festigkeit entsprechen einer Toleranz für die Schall-Laufzeit von  $120 \pm 3 \mu s$ .  
Im Rahmen der Prüfmittelüberwachung wird ein Normal mit dem richtigen Wert  $x_r = 120,00 \mu s$  von einem Bediener 25mal gemessen. Folgende Werte wurden ermittelt:
- |                 |                    |                    |                    |                    |
|-----------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $x_1 = 119,688$ | $x_6 = 119,803$    | $x_{11} = 119,819$ | $x_{16} = 119,964$ | $x_{21} = 119,892$ |
| $x_2 = 119,871$ | $x_7 = 120,037$    | $x_{12} = 119,741$ | $x_{17} = 119,883$ | $x_{22} = 119,868$ |
| $x_3 = 119,939$ | $x_8 = 119,796$    | $x_{13} = 119,989$ | $x_{18} = 119,783$ | $x_{23} = 119,747$ |
| $x_4 = 119,956$ | $x_9 = 119,965$    | $x_{14} = 119,815$ | $x_{19} = 119,654$ | $x_{24} = 119,838$ |
| $x_5 = 119,686$ | $x_{10} = 119,708$ | $x_{15} = 119,911$ | $x_{20} = 119,881$ | $x_{25} = 119,865$ |
- Quantifiziere die Genauigkeit des Meßsystems mittels der bekannten Komponenten der Meßunsicherheit und der Prüfmittelfähigkeitsindizes  $c_g$  und  $c_{gk}$ .  
Interpretiere das Ergebnis und gib an, welche Bedingungen der Meßreihe zugrunde liegen.
- 6) Man stelle das Ergebnis einer Fähigkeitsanalyse eines Prüfmittels anschaulich dar, wenn der Zusammenhang zwischen der Toleranz und den Fähigkeitskennwerten mit  $c_g = 1,33$  und  $c_{gk} = 1,0$  ermittelt wurde.

## Stichprobensysteme

### 1) Stichprobensysteme in der Praxis

Bei *Stichprobensystemen* handelt es sich um eine leicht verständliche Methode der statistischen Qualitätssicherung. Stichproben ersetzen in vielen Fällen 100%-Prüfungen, insbesondere bei zerstörenden Prüfungen oder Prüfungen an nicht allzu kritischen Teilen (d.h. ein gewisser *durchschlüpfender* Fehleranteil kann verkraftet werden.) bzw. Prüfungen, die sonst nicht wirtschaftlich durchführbar sind.

In der Praxis wird eine Vielzahl unterschiedlicher Stichprobensysteme verwendet. Wir wollen uns auf den einfachsten und bekanntesten Fall einer sogenannten *Einfachstichproben-anweisung* für *qualitative Merkmale* beschränken. „*Qualitativ*“ soll heißen, daß die Prüfung eines Teiles nur auf der Basis *gut* oder *schlecht* (bzw. *fehlerfrei* oder *fehlerhaft*) erfolgt.

#### **Beispiel :**

Monatlich werden 20.000 Spritzgußteile bestimmter Spezifikation an eine Firma geliefert. Der Lieferant hat zugesichert, daß höchstens 1% dieser Spritzgußteile unbrauchbar sind. Damit erklärt sich die Firma einverstanden, jedoch soll diese Angabe des Lieferanten im Wareneingang *stichprobenartig* überprüft werden. Aus der Norm DIN ISO 2859-1 (*AQL-Stichprobensystem*)<sup>1</sup> wurde folgende Stichprobenanweisung herausgelesen:

$$n - c = 315 - 7$$

Was bedeutet diese *Stichprobenanweisung* ?

Aus dem *Losumfang*  $N=20.000$  soll eine Stichprobe von  $n=315$  Spritzgußteilen entnommen und geprüft werden. Die Zahl  $c$  wird *Annahmezahl* genannt, das bedeutet: Sind bis zu 7 fehlerhafte Teile unter den 315 geprüften Teilen, so gilt das Los im obigen Sinne als „o.k.“ und wird *angenommen*. Werden mehr als 7 fehlerhafte Teile gefunden, so wird das Los *abgelehnt* bzw. *rückgewiesen*. Was dann zu tun ist, muß vertraglich geregelt sein (z.B.: Reklamation / Rücksendung an den Lieferanten).

### 2. Fragestellungen

Offensichtlich ist eine Stichprobenentnahme mit einem bestimmten Risiko verbunden.

- So können etwa „zufälliger Weise“ mehr als 7 schlechte unter den 315 untersuchten Teilen sein, obwohl in der gesamten Lieferung der Ausschußprozentsatz kleiner als 1% ist.
- Es kann aber sein, daß „zufälliger Weise“ die Anzahl der gefundenen Schlechtstücke  $\leq 7$  ist, obwohl der Ausschußprozentsatz in der gesamten Lieferung größer als 1% ist.

Zur Abschätzung dieser Risiken müssen etwa folgende Fragen beantwortet werden können:

- a) Wie groß ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, daß die Lieferung angenommen wird, wenn die Lieferung  $p$  gerade 2% fehlerhafte Teile enthält ?  
Umgekehrt: Bei welchem Fehlerprozentsatz beträgt die Annahmewahrscheinlichkeit genau 90% ?

<sup>1</sup> bezüglich des Begriffes „AQL“ siehe Anhang

- b) Wie groß ist die Anzahl der *durchschlüpfenden* fehlerhaften Teile für einen bestimmten vorgegebenen Ausschußprozentsatz  $p$  ?
- c) Bei welchem Ausschußprozentsatz  $p$  ist dieser *Durchschlupf* maximal ?

Bei der Beantwortung dieser Fragen stößt man sehr schnell auf Grenzen, was die praktische Berechenbarkeit ohne Computerprogramm oder CAS-Programm bzw. CAS-fähigen Taschenrechner betrifft. Daher gibt es auch umfangreiche Tabellen (siehe ANHANG), denen man die Lösungen entnehmen kann. Gerade deshalb ist es aber sehr reizvoll, diese (rein gedanklich) nicht allzu schweren Fragen mittels CAS zu lösen.

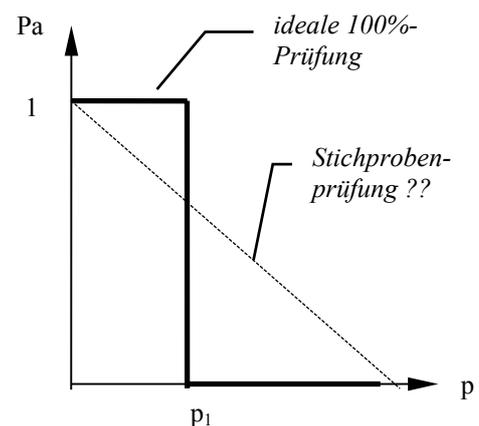
### 3. Die Operationscharakteristik einer n-c-Stichprobenanweisung

Die Operationscharakteristik soll die obige Frage 2a) beantworten. Wir wollen in einem Diagramm darstellen, bei welchem Ausschußprozentsatz  $p$  welche Annahmewahrscheinlichkeit  $P_a$  gemäß der n-c-Stichprobenanweisung gegeben ist. Damit erhält man auch Einblick in die möglichen Risiken einer Stichprobenanweisung im Vergleich zu einer wirklich „sicheren“ 100%-Prüfung (die es in der Praxis bestenfalls nur bei Automateinsatz geben kann)

Durchaus reizvoll ist es, zunächst eine Vermutung aufzustellen, wie diese *Operationscharakteristik* im Vergleich zur 100%-Prüfung aussieht.

Bei der 100%-Prüfung gibt es einen vereinbarten Schlechtanteil  $p_1$ , bis zu dem die Lieferung mit Wahrscheinlichkeit 1 angenommen wird. ( $p_1$  wäre im Beispiel aus dem 1. Abschnitt 1%)

Die strichlierte Linie stellt eine mögliche Vermutung für den Verlauf der Operationscharakteristik einer Stichprobenanweisung (etwa 315-7) dar, die allerdings nicht dem tatsächlichen Ergebnis entspricht.



Wie berechnet man diese Annahmewahrscheinlichkeiten  $P_a$  ?

Prinzipiell liegt hier eine Situation vor, auf die das Modell der *Hypergeometrischen Verteilung* zutreffen würde. Im vorliegenden Beispiel und in den meisten Fällen der Praxis ist jedoch die Losgröße  $N$  recht groß im Vergleich zu  $n$ , sodaß die Näherung durch die *Binomialverteilung* möglich ist. Recht häufig wird (gerade bei Stichprobensystemen) die Näherung durch die *Poissonverteilung* (Parameter  $\mu = n \cdot p$ ) verwendet, die ja typischerweise für kleines  $p$  und relativ großes  $n$  Anwendung findet. Außerdem findet die Poissonverteilung auch dann Anwendung, wenn nicht *fehlerhafte Einheiten* ( $\rightarrow$  Binomialverteilung) sondern *Fehler pro Einheit* gezählt werden (z.B. Lackfehler je  $m^2$ , Isolationsfehler je km Draht, ...).

Das Los wird angenommen, wenn höchstens  $c$  fehlerhafte Einheiten (bzw. Fehler/Einheit) gefunden wurden. Unabhängig von der verwendeten Verteilung gilt daher:

$$\text{Annahmewahrscheinlichkeit } P_a = P(x \leq c) = G(c) = g(0) + g(1) + \dots + g(c)$$

$G(x)$  ist dabei die *Verteilungsfunktion* der gewählten Verteilung.

$g(x)$  ist die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* der gewählten Verteilung

Zur Umsetzung auf ein CAS-System definieren wir uns zunächst die benötigten Verteilungen:

<i>Binomialverteilung</i>	<i>Poissonverteilung</i>
$g_{BI}(x, n, p) := \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$	$g_{PO}(x, \mu) := \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!}$
$G_{BI}(x, n, p) := \sum_{k=0}^x g_{BI}(k, n, p)$	$G_{PO}(x, \mu) := \sum_{k=0}^x g_{PO}(k, \mu)$

Mit Hilfe der obigen Funktionen werden nun die Annahmewahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von p definiert - das ist dann die *Operationscharakteristik* (kurz „OC“).

<i>Binomialverteilung</i>	<i>Poissonverteilung</i>
$Pa_{BI}(n, c, p) := G_{BI}(c, n, p)$	$Pa_{PO}(n, c, p) := G_{PO}(c, n, p)$

Damit können nun die nachfolgenden Kurven gezeichnet und mit den Ergebnissen zur Vertiefung des Verständnisses der Operationscharakteristik herumexperimentiert werden. Die Abbildungen sollen hierzu nur als mögliche Beispiele bzw. Anregungen dienen.

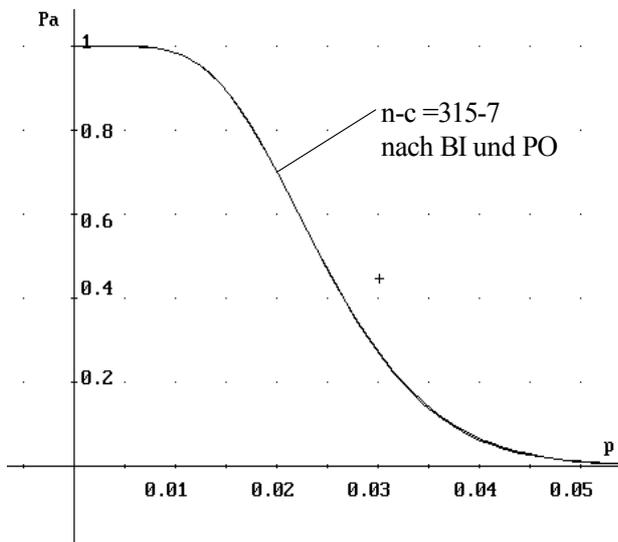


Abb.1: OC der Anweisung 315-7

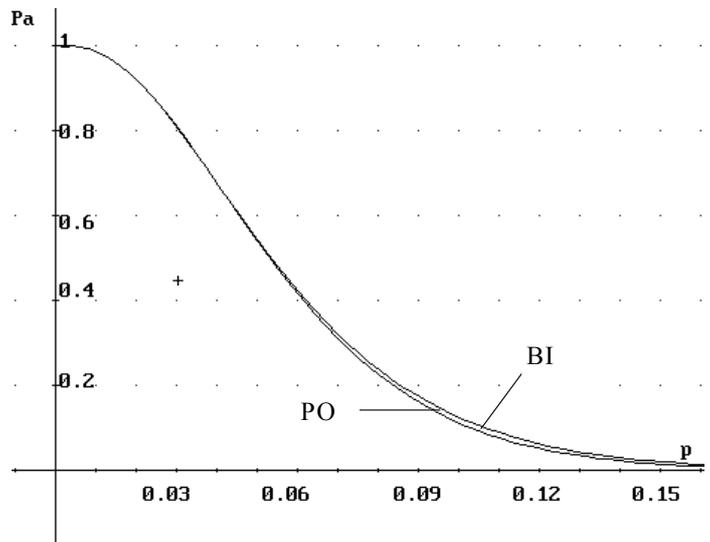


Abb.2 : OC der Anweisung 50-2

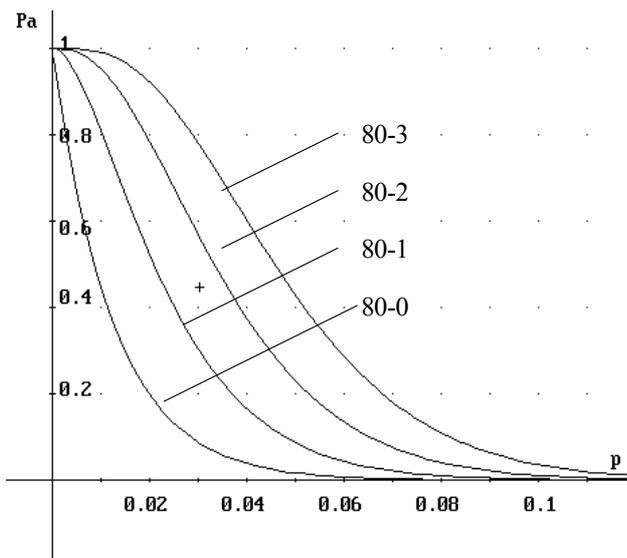


Abb.3 : Vergleich verschiedener OC's :  
Einfluß der Annahmezahl c

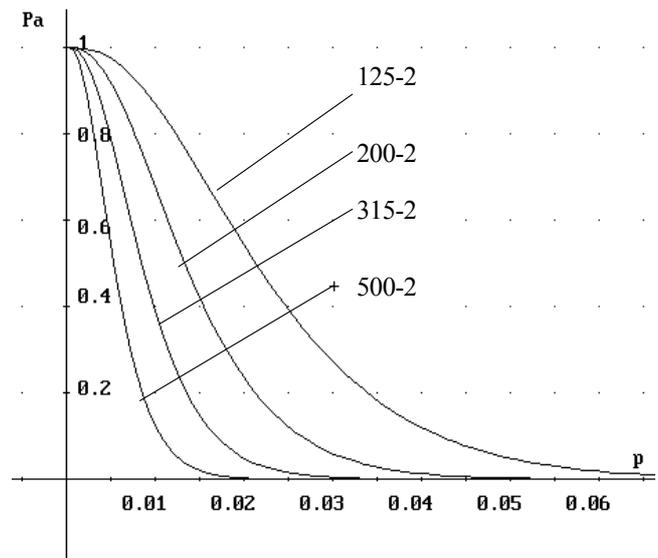


Abb.4 : Vergleich verschiedener OC's :  
Einfluß des Stichprobenumfanges n

**Interpretation von Abb.1 - Abb.4 :**

- Je größer n und je kleiner p, desto besser wird die Binomialverteilung durch die Poissonverteilung approximiert. In Abb.1 liegen die beiden Kurven direkt übereinander, in Abb.2 ist erst für größeres p ein optischer Unterschied wahrnehmbar.
- Je kleiner die Annahmezahl c (bei gleichbleibendem Stichprobenumfang n) ist, desto steiler verläuft die OC, was wiederum bedeutet, daß die *Trennschärfe* der Stichprobenanweisung größer wird (Abb. 3). Analog gilt dies selbstverständlich für größer werdendes n bei gleichbleibendem c (Abb. 4).

Mit Hilfe der Funktionen für die Annahmewahrscheinlichkeiten sind nun folgende Berechnungen möglich:

**Wie groß ist die Annahmewahrscheinlichkeit für ein bestimmtes p ?**

Dazu braucht nur in die oben definierte Funktion ein spezieller Wert für p eingesetzt werden. Beispielsweise liefern :

$$Pa\_BI(315, 7, 0.01) \rightarrow 0.9850$$

$$Pa\_BI(315, 7, 0.02) \rightarrow 0.7028$$

$$Pa\_BI(315, 7, 0.04) \rightarrow 0.0626$$

einzelne Punkte der OC. (Die Berechnung mit Pa\_PO liefert hier nahezu dieselben Werte)

### Wie groß ist der Ausschußprozentsatz bei vorgegebener Annahmewahrscheinlichkeit ?

Es sei  $p_\beta$  jener Fehleranteil, bei dem die Annahmewahrscheinlichkeit  $\beta$  % beträgt.  
 2 spezielle Punkte der OC (meist  $[p_{90} | 90\%]$  und  $[p_{10} | 10\%]$  (eventuell auch das Verhältnis  $\frac{p_{90}}{p_{10}}$ ) werden in der Praxis gerne für die Charakterisierung einer Stichprobenanweisung herangezogen.

Aus diesem Grund gibt es entsprechende Tabellen, die auszugsweise im Anhang wiedergegeben werden. Beispielsweise liefern die Gleichungen

$$\begin{aligned} Pa\_BI(315, 7, p) &= 0.9 \\ PO\_PO(315, 7, p) &= 0.9 \end{aligned}$$

nach **SOLVE** den Wert für  $p_{90}$  :  $p = 0.0148366$  (mit der Binomialverteilung)  
 $p = 0.0147813$  (mit der Poissonverteilung)

Allerdings gelingt die Berechnung hier nur numerisch (d.h. im Approximate-Modus bzw. mit dem Bwefehl **nsolve**). Außerdem benötigt die Berechnung über die Binomialverteilung deutlich mehr Zeit.

Dies wäre eine Möglichkeit, auf die Lösbarkeit algebraischer Gleichungen einzugehen bzw. dies an dieser Stelle zu wiederholen. Bei der Berechnung über die Binomialverteilung ist für dieses Beispiel folgende Gleichung 315.Grades zu lösen:

$$(p-1)^{308} \cdot (5.58 \cdot 10^{13} \cdot p^7 + 1.24 \cdot 10^{12} \cdot p^6 + 2.39 \cdot 10^{10} \cdot p^5 + 3.82 \cdot 10^8 \cdot p^4 + 4.92 \cdot 10^6 \cdot p^3 + 47586 \cdot p^2 + 308 \cdot p + 1) = 0.9$$

Außerdem ist für die Berechnung der numerischen Lösung die Angabe des Suchintervalls sinnvoll. (hier: zwischen 0 und 1).

#### 4. Durchschlupf:

Wir wollen uns nun an die Beantwortung der Fragen aus 2b) und 2c) machen. Unter *Durchschlupf* versteht man den mittleren Anteil der fehlerhaften Teile des Loses, der die Prüfung passiert ohne aussortiert worden zu sein. (In der Fachliteratur wird der *Durchschlupf* auch *AOQ-Wert* genannt = „Average **O**utgoing **Q**uality“)

In einer ersten NÄHERUNG können wir uns daher überlegen: Der Anteil der fehlerhaften Teile ( $p$ ) muß mit der Wahrscheinlichkeit multipliziert werden, daß das Los angenommen wird ( $Pa$ ).

Das Ergebnis muß schließlich noch mit dem Anteil der nicht geprüften Teile im Los ( $\frac{N-n}{N}$ ) multipliziert werden (da ja selbstverständlich fehlerhafte Teile, die in der Stichprobe gefunden wurden, aussortiert werden). Wir erhalten also:

$$D = \frac{N-n}{N} \cdot Pa \cdot p \quad \approx Pa \cdot p \quad (\text{für } n \ll N)$$

Gedanklich einfach ist es nun auch, jenes  $p$  zu bestimmen, bei dem der Durchschlupf maximal wird, um schließlich diesen maximalen Durchschlupf zu bestimmen. (Dieser wird in der Fachliteratur AOQL-Wert genannt, der dazugehörige Fehleranteil  $p_{AOQL}$ ; AOQL steht für „Average **O**utgoing **Q**uality **L**imit“ )

Die Gleichung  $\frac{dD(p)}{dp} = 0$  liefert als Lösung  $p_{AOQL}$  und daher ist:  $D_{max} = AOQL = D(p_{AOQL})$

Ähnlich wie bei der Berechnung von  $p_{\beta}$  ist aber auch hier im allgemeinen eine algebraische Gleichung höheren Grades zu lösen, die meist nur numerisch zu lösen ist.

Graphische Darstellung:

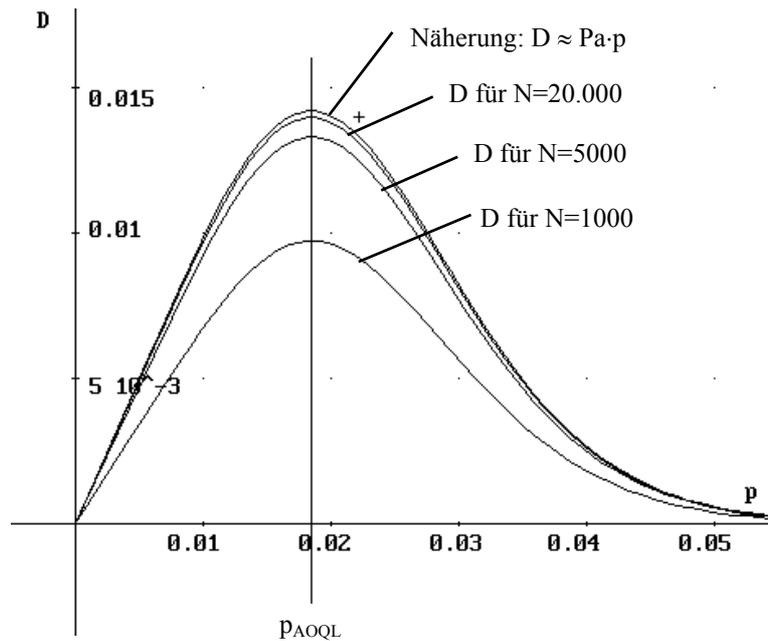
Nebenstehend sind einige Durchschlupfkurven für die Anweisung

$$n-c = 315-7$$

dargestellt. Man erkennt, daß für große  $N$  die Kurve gegen die Grenzfunktion

$$D \approx Pa \cdot p$$

wandert. Ferner ist ersichtlich, daß  $\frac{N-n}{N}$  als konstanter Faktor die Lage des Maximums (also  $p_{AOQL}$ ) nicht beeinflußt.



**Zurück zum eingangs formulierten Beispiel:**

Nebenstehende Abbildung zeigt in der Gegenüberstellung die OC und Durchschlupfkurve der n-c-Anweisung

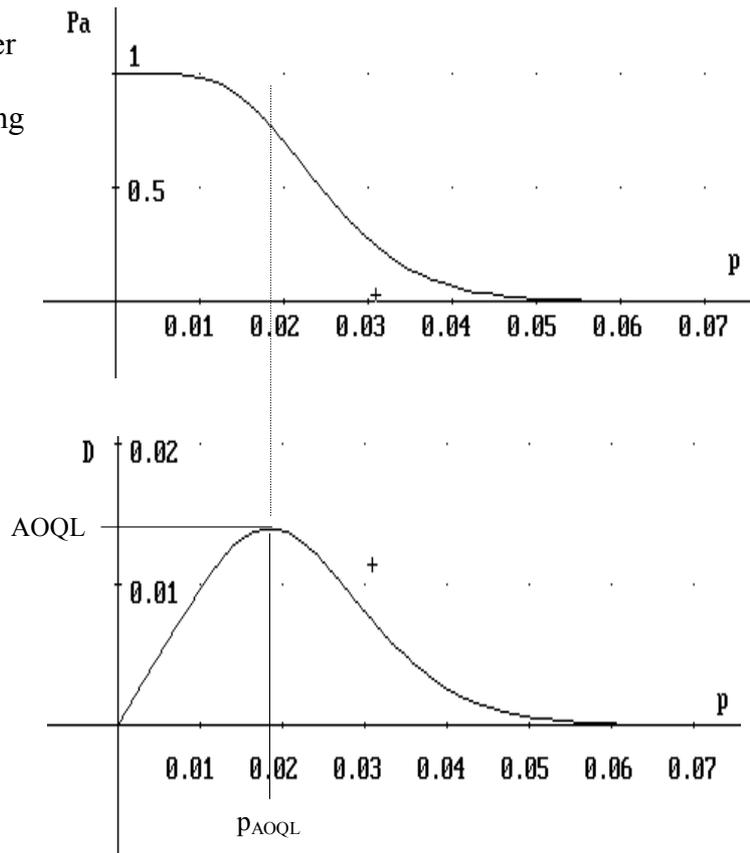
315-7

Bei Berechnung mit Hilfe der Poissonverteilung erhält man :

$$p_{AOQL} = 1,84 \%$$

$$D_{max} = AOQL = 1,397 \%$$

Die Binomialverteilung liefert: fast das gleiche Ergebnis.



**5. Ausblick:**

Die hier vorgeführten Berechnungen und Funktionsdarstellungen lassen sich relativ leicht auf andere Stichprobensysteme ausweiten (*Doppelstichprobensysteme, Mehrfachstichprobenpläne, messende Prüfung*). Für den Mathematikunterricht scheint mir aber die hier gezeigte Besprechung der qualitativen Einfachstichprobenanweisungen (n-c) ausreichend zu sein.

**ANHANG: Ausschnitt aus Tabellen für genormte Stichprobenanweisungen (den Lehrgängen der Österr. Vereinigung für Qualitätssicherung (ÖVQ) entnommen)**

In den Tabellen bedeuten:

- $p_{0,90}$  ... Fehleranteil, für den die n-c-Anweisung 90% Annahmewahrscheinlichkeit aufweist
- $p_{0,10}$  ... Fehleranteil, für den die n-c-Anweisung 10% Annahmewahrscheinlichkeit aufweist
- $p_{AOQL}$  Jener Fehleranteil, für den der Durchschlupf D maximal wird.

Berechnungen mit Hilfe der Binomialverteilung:

n-c	$p_{0,90}$ (%)	$p_{0,10}$ (%)	$p_{AOQL}$ (%)
50-0	0,210	4,50	2,0
50-1	1,07	7,56	3,2
50-2	2,23	10,30	4,5
50-3	3,54	12,9	5,8
50-5	6,42	17,8	8,6
80-0	0,132	2,84	1,2
80-1	0,666	4,78	2,0
80-2	1,38	6,52	2,8
80-3	2,20	8,16	3,7
80-5	3,98	11,3	5,4

Berechnet mit Hilfe der Poissonverteilung:

<b>n-c</b>	<b>p<sub>0,90</sub> (%)</b>	<b>p<sub>0,10</sub> (%)</b>	<b>p<sub>AOQL</sub> (%)</b>
50-0	0,21	4,61	2,0
50-1	1,06	7,78	3,2
50-2	2,20	10,6	4,5
50-3	3,49	13,4	5,9
50-5	6,30	18,6	8,7
80-0	0,131	2,88	1,2
80-1	0,665	4,86	2,0
80-2	1,38	6,65	2,8
80-3	2,18	8,35	3,7
80-5	3,94	11,6	5,4
125-0	0,084	1,84	0,80
125-1	0,426	3,11	1,30
125-2	0,882	4,26	1,82
125-3	1,40	5,35	2,36
125-5	2,52	7,42	3,48
200-0	0,053	1,15	0,50
200-1	0,266	1,95	0,81
200-2	0,551	2,66	1,14
200-3	0,873	3,34	1,48
200-5	1,58	4,64	2,18
200-7	2,33	5,89	2,90
315-0	0,0333	0,731	0,317
315-1	0,168	1,23	0,52
315-2	0,349	1,69	0,72
315-3	0,553	2,12	0,94
315-5	1,00	2,94	1,38
315-7	1,48	3,74	1,84
315-8	1,72	4,13	2,08

*Anmerkung:* In der Praxis werden **genormte** Stichprobensysteme verwendet. Daher kommen auch nur ganz bestimmte Stichprobenumfänge vor (z.B.  $n = 8,13,20,32,50,80,125,200,\dots$ ). Von allen Stichprobensystemen ist das sogenannte **AQL-System** das bekannteste. (AQL = *Acceptable Quality Limit* = *Annehmbare Qualitätsgrenzlage*) Beim AQL-System versucht man, mit nur **EINEM** Wert im Wesentlichen das statistische Risiko der jeweiligen Stichprobe zu beschreiben – mit anderen Worten: nur ein Wert soll die OC „kurz“ beschreiben. Man wählt dazu einen Punkt aus der Sicht des *Lieferanten*: **AQL = 1%** bedeutet beispielsweise, dass die jeweilige Stichprobenanweisung **bis zu einem Anteil fehlerhafter Einheiten von 1%** eine hohe Annahmewahrscheinlichkeit (in der Gegend von 90-98%) garantiert. *Vorschlag:* Man vergleiche die in der Norm bei AQL = 1% stehenden Stichprobenanweisungen 13-0, 50-1, 80-2, 125-3, 200-5, 315-5.

## Der $\chi^2$ – Anpassungstest – einfache Beispiele:

Der  $\chi^2$  - Anpassungstest ist ein wichtiger und recht anschaulicher Test. Er prüft die Verträglichkeit von **Stichprobenwerten (= beobachtete Werte  $B_i$ )** mit beliebigen Verteilungstypen (diskret oder stetig) durch Vergleich mit den **unter  $H_0$  zu erwartenden Werten  $E_i$  (Näherungslösung !)**. Jede Abweichung führt zu einer Vergrößerung der Prüfgröße.

**Prüfgröße :** 
$$\chi^2_{Pr} = \sum_{i=1}^k \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$

**Kritischer Wert :**  $\chi^2_{Krit}$  ( $P_{eins}$  | Freiheitsgrad  $f$ )  $f = k-1$  mit  $k$  ... Anzahl der „Klassen“  
 $f = k-a-1$  (bei Anpassungstest auf best. Verteilungen)  
 z.B.: Normalverteilung:  $a=2$ , weil 2 Parameter ( $\mu, \sigma$ ) geschätzt wurden.)

**Voraussetzungen :**

- keine der Größen  $E_i$  darf kleiner als 1 sein
- höchstens 20% der  $E_i$  dürfen kleiner 5 sein.  
 (*gegebenenfalls Klassen zusammenfassen*)

1) Mit Hilfe des  $\chi^2$ - Testes können Zufallszahlen auf „Zufälligkeit“ untersucht werden.

Beispiel Münzwurf: Gilt  $p(\text{Wappen}) = p(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}$  ?

Beispiel Würfel: Ist der Würfel „fair“, d.h. gilt für alle Seiten  $i$   $p(i) = 1/6$  ?

2) Bei der Beleuchtung eines Bauplatzes zeigt sich zwischen der Anzahl der verwendeten Lampen einer gegebenen Wattzahl und dem Mittelwert der in einer vierwöchigen Periode ersetzten Lampen folgendes Bild:

Watt	Anzahl verwendeter Lampen	Anzahl ersetzter Lampen / Monat
300	1200	90
200	1500	128
150	1000	90
100	820	64
15	2200	108

Unter der Annahme, daß alle Lampen unter gleichen Bedingungen verwendet worden sind, soll die Hypothese, wonach die Zahl der ausgefallenen Lampen unabhängig von ihrer Wattzahl ist, getestet werden.

3) Verteilung der Geburten auf Monate und Wochentage (Land Salzburg 1994)

Jan.	Feber	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
525	494	541	518	539	547	548	565	548	550	473	490

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
903	1030	927	898	928	855	797

Sind die Unterschiede zwischen den Monaten/Tagen zufallsbedingt erklärbar ?

## Übersicht über die TI-92-Programmbefehle / Folder QS (Programme © Wilfried Rohm)

Menüaufruf: **help()** , anschließend (2<sup>nd</sup>) *Custom* , Rückkehr wieder mit (2<sup>nd</sup>) *Custom*.

**F1: V-Grafik:** Tabellarische Berechnung von  $g(x)$  und  $G(x)$  diskreter Verteilungen. Zeichnen der Dichtefunktion  $g(x)$  (PROGRAMME)

hyp()	Hypergeometrische Verteilung
bi()	Binomialverteilung
po()	Poissonverteilung

**F2 Vtlgen:** diskrete und stetige Verteilungen (TI-92-Funktionen)

ghyp(x,N,d,n)	$g(x)$ der Hypergeometrischen Verteilung
gghyp(x,N,d,n)	$G(x)$ der Hypergeometrischen Verteilung
gbi(x,n,p)	$g(x)$ der Binomialverteilung
ggbi(x,n,p)	$G(x)$ der Binomialverteilung
gpo(x, $\mu$ )	$g(x)$ der Poissonverteilung
ggpo(x, $\mu$ )	$G(x)$ der Poissonverteilung
ggnv(u)	$G(u)$ = Verteilungsfkt. Normalverteilung
unv(G)	$u(G)$ = Inverse Normalverteilung
ggt(t>0, f)	$G(t)$ der t-Verteilung
tinu(G,f)	t-Wert (inverse t-Verteilung)
ggchi(chi <sup>2</sup> ,f)	$G(\chi^2)$ = Chiquadratverteilung
chiinv(G,f)	$\chi^2$ -Wert (inverse $\chi^2$ - Verteilung)
ggf(F,f1,f2)	$G(F)$ = Verteilungsfkt. der F-Verteilung
finv(G,f1,f2)	F-Wert (inverse F-Verteilung)

**F3 ZSB / VB:** Zufallsstreu- und Vertrauensbereiche diskreter Verteilungen (PROGRAMME)

zbbi()	Zufallsstrebereich der Binomialverteilung
zbpo()	Zufallsstrebereich der Poissonverteilung
vbbi()	Vertrauensbereich der Binomialverteilung
vbpo()	Vertrauensbereich der Poissonverteilung

**F4 Stichpr:** n-c-Stichprobenanweisungen (FUNKTIONEN)

pa(n,c,p)	Annahmewahrscheinlichkeit einer n-c-Anweisung für bestimmtes p Def: $ggbi(c,n,p) \rightarrow pa(n,c,p)$
oc(n,c,x)	Zeichnen der OC einer n-c-Anweisung mit variablem $x=p$ OC zeichnen (zB. im y-Editor): $oc(50, 2, x)$ ; $oc(50, 3, x)$ ; usw.

**F5 QRK-xquer:** Mittelwert-Qualitätsregelkarte (FUNKTION)

peingr( $\mu, \sigma, \Delta\mu, n$ )	Eingriffswahrscheinlichkeit eine x-quer-Karte für bestimmtes $\Delta\mu$ und $n$ . Def: $1 - ggnv((ogw(nn) - (\mu + \Delta\mu)) / (\sigma / \sqrt{nn})) \rightarrow peingr(\mu, \sigma, \Delta\mu, nn)$ mit: $\mu + 2.576 * \sigma / \sqrt{nn} \rightarrow ogw(nn)$ OC zeichnen (Beispiel): ClrGraph Graph peingr(100, 0.1, x, 5), x (oder über den y-Editor wie bei n-c-Anweisung)
---------------------------------------	---