T3 EUROPE

Von Pol zu Pol – Von Sprung zu Sprung

Eine numerisch-graphische Reise zu einem analytischen Ziel

Josef Böhm

Ein Unterrichtsbehelf zum Einsatz moderner Technologien im Mathematikunterricht

T3 Österreich / ACDCA am PI-Niederösterreich, Hollabrunn

Abstract

In dieser Unterrichtssequenz wird gezeigt, wie sich numerische und graphische Mittel von Computer Algebra Systemen dazu eignen, so abstrakte Begriffe wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Krümmungsverhalten einzuführen, bzw zu verdeutlichen.

Als Plattformen wurden der *TI*-89/92, bzw. *DERIVE* gewählt. Die Vorgangsweise läßt sich auf jedes andere CAS leicht übertragen.

In den Text eingestreute Schüleraufträge und –aufgaben sollen zu eigenständigen Bearbeitungen durch die Schüler anregen.

Kommentare, Anregungen, Kritik und Erfahrungsberichte sind immer sehr willkommen.

Die zugehörigen Dateien können beim Autor auf Anfrage gerne bezogen werden.

nojo.boehm@pgv.at

Inhalt

Von Pol zu Pol – von Sprung zu Sprung

Eine numerische Reise zu einem analytischen Ziel,
durchgeführt auf dem *TI*-92/89, bzw. mit *DERIVE*

Josef Böhm, Würmla, T[3] Austria und *DERIVE* User Group, nojo.boehm@pgv.at

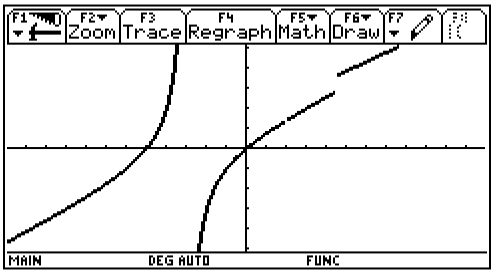
Der `Data/Matrix`-Editor des *TI*-89/92 ist ein hervorragendes Werkzeug, um Begriffsbildungen wie Häufungspunkte, Grenzwerte, Stetigkeit und Differenzierbarkeit zu unterstützen. Wie wir sehen werden, kann auch ein sehr intuitiver Zugang zu komplexeren Themen wie Krümmung und Evoluten gefunden werden. Einige Schritte können auch mit einem Tabellenlakulationsprogramm durchgeführt werden. Ich vermisse dabei aber bald den gewohnten Umgang mit Funktionen und noch wichtiger, die Computer Algebra. Es mag sein, dass Spreadsheetspezialisten alle hier angestrebten Ziele auch auf ihrer Plattform erreichen. Ich bezweifle aber, dass sie die analytische Form einer Ableitung oder gar einer Evolute so finden können. In diesem Papier wird weitgehend parallel mit dem *TI*-92/89 und mit *DERIVE* gearbeitet. Damit soll erstens beiden Benutzergemeinden gedient werden und sie können sich wechselseitig informieren, wie´s beim „kleinen Bruder“, bzw. der „großen Schwester“ gemacht wird. Mehr noch möchte ich aber demonstrieren, dass es bei der Durchführung eines Unterrichtskonzepts nur in zweiter Linie auf das gewählte Instrument ankommt. Ich selbst habe diesen Zugang zuerst in meinen *TI*-Klassen (4. Jg Handelsakademie) genommen und ihn später auf *DERIVE* übertragen. Jede andere CAS-Software würde sich ebenso gut eignen. Nebenbei erfahren Sie vielleicht manches Brauchbare über den Umgang mit dem *TI*, bzw. mit *DERIVE*:

Im Text eingestreut finden sich Hinweise auf Schüleraufgaben, bzw- fragen.

Wir beginnen mit der Betrachtung einer etwas ausgefallenen Funktion.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 4} + \frac{3\,\mathrm{sign}\,(2x - 9)}{x + 3}$$

(Hinweis: `ZoomDec` und `xres=1`)

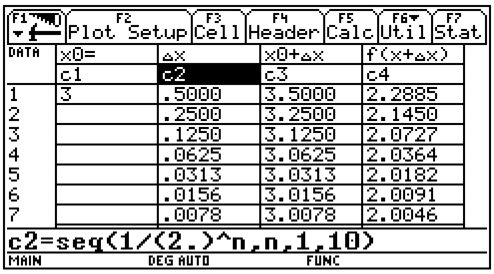


Schülerfragen: *Welche Werte für x sind nicht in der Definitionsmenge enthalten?*
Welche Auffälligkeiten lassen sich am Graphen erkennen?
Welche Antworten lassen sich aus einer geeigneten Wertetabelle ableiten?

Vorgangsweise auf dem *TI*:

Ich empfehle, die Funktion als `f(x)` im Home Screen zu speichern. Dann öffnen wir ein neues Datenblatt über den `Data/Matrix` Editor, und benennen dieses Blatt zB als `analysis`.

1 Stetigkeitsuntersuchung an der Stelle $x_0 = 3$



DATA	x0=	Δx	x0+Δx	f(x+Δx)
	c1	c2	c3	c4
1	3	.5000	3.5000	2.2885
2		.2500	3.2500	2.1450
3		.1250	3.1250	2.0727
4		.0625	3.0625	2.0364
5		.0313	3.0313	2.0182
6		.0156	3.0156	2.0091
7		.0078	3.0078	2.0046

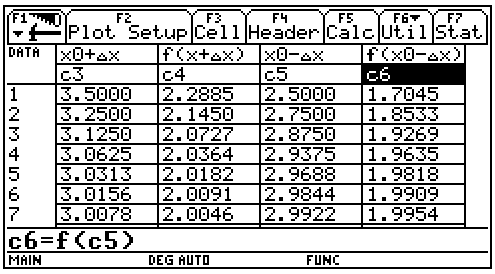
`c2=seq(1/(2.)^n,n,1,10)`

Zelle `c1` wird mit dem aktuellen Wert für x_0 belegt (hier $x_0 = 3$). Für Spalte `c2` definieren wir, wie gezeigt eine beliebige Nullfolge, mit deren Hilfe wir dann in `c3` eine Folge von x-Werten erzeugen, die sich von rechts der Stelle x_0 nähert. Schließlich können wir dann in Spalte `c4` verfolgen, wie die Folge der entsprechenden Funktionswerte gegen $f(x_0)$ strebt.

Die Einträge in der Kopfzelle (`Header`) für diese beiden Spalten lauten:

Für `c3`: `c1[1]+c2` und
für `c4`: `f(c3)`

(Die eckigen Klammern `[i]` fixieren das Element in der Zeile `i` der angegebenen Spalte)



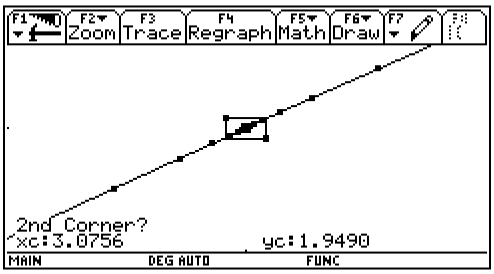
DATA	x0+Δx	f(x+Δx)	x0−Δx	f(x0−Δx)
	c3	c4	c5	c6
1	3.5000	2.2885	2.5000	1.7045
2	3.2500	2.1450	2.7500	1.8533
3	3.1250	2.0727	2.8750	1.9269
4	3.0625	2.0364	2.9375	1.9635
5	3.0313	2.0182	2.9688	1.9818
6	3.0156	2.0091	2.9844	1.9909
7	3.0078	2.0046	2.9922	1.9954

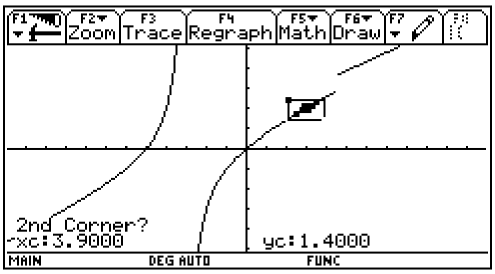
In den Spalten `c5` und `c6` wird auf gleiche Weise die Annäherung von links erzeugt.

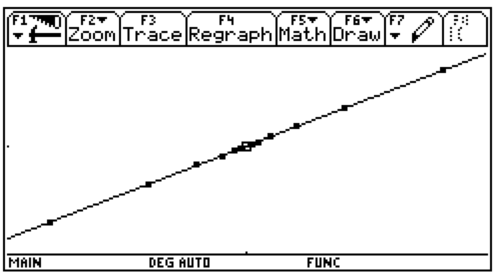
Schüleraufträge:	*Wähle eine beliebige andere Nullfolge und beobachte die Geschwindigkeit der Annäherung an eine feste Stelle. Welche Nullfolgen „arbeiten“ langsam und welche schnell?* *Wechsle auch die zu untersuchende Stelle x_0 und formuliere das Ergebnis allgemein.* *In einem letzten Schritt verallgemeinere auch die Stelle $x_0 = t$. (Wähle nicht x, als Variable, denn das könnte bei älteren TI-Modellen zu kompletten Abstürzen führen). Übertrage die jeweils „letzten“ Funktionswerte in den Home Screen. (Mit ◆C kannst du den markierten Zelleninhalt in die Zwischenablage übertragen und mit ◆V im Home Screen wieder abrufen).* *Was erwartest du als Ergebnis?* *Arbeite mit einer anderen Funktion deiner Wahl (Polynomfunktion, Exponentialfunktion, Winkelfunktion, ...) und führe eine analoge Untersuchungsreihe durch.* *Dokumentiere dabei genau deine Vorgangsweise.*

Mit den graphischen Möglichkeiten können wir nun den Prozess visualisieren und damit besser begreiflich machen.

Zusätzlich zum Funktionsgraphen (`y1(x)` wird im [Y=]-Editor mit `f(x)` belegt) werden die durch die Spalten `c3` und `c4`, bzw. `c5` und `c6` definierten Punkte auf dem Graphen gezeichnet. Die entstehenden Punktfolgen sind dann im [GRAPH]-Fenster zu bewundern. Mit Hilfe der [F2] `ZoomBox` vergrößern wir den interessanten Ausschnitt und erhalten eine gute Vorstellung eines Häufungspunktes.







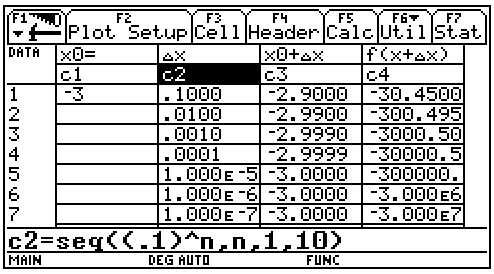
Schülerauftrag:

Unterschiedliche Folgen mit mehr oder weniger Elementen führen zu intensiveren Darstellungen.

Wie sieht die Punktwolke aus, die aus einer alternierenden Nullfolge entsteht?

Nun wird zu einer der Stellen gewechselt, die von der Definitionsmenge ausgenommen wurden:

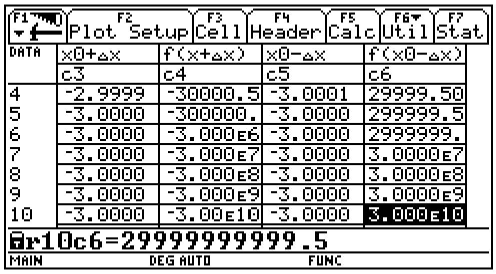
2 Stetigkeitsuntersuchung an der Stelle x_0 = -3



DATA	x0=	Δx	x0+Δx	f(x+Δx)
	c1	c2	c3	c4
1	-3	.1000	-2.9000	-30.4500
2		.0100	-2.9900	-300.495
3		.0010	-2.9990	-3000.50
4		.0001	-2.9999	-30000.5
5		1.000E-5	-3.0000	-300000.
6		1.000E-6	-3.0000	-3.000E6
7		1.000E-7	-3.0000	-3.000E7

c2=seq((.1)^n,n,1,10)

MAIN DEG AUTO FUNC



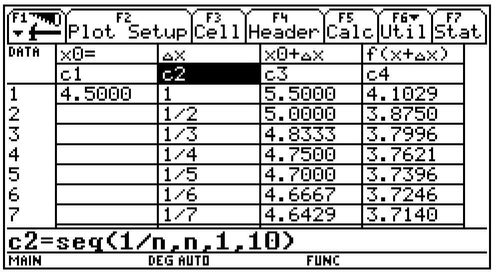
DATA	x0+Δx	f(x+Δx)	x0-Δx	f(x0-Δx)
	c3	c4	c5	c6
4	-2.9999	-30000.5	-3.0001	29999.50
5	-3.0000	-300000.	-3.0000	299999.5
6	-3.0000	-3.000E6	-3.0000	2999999.
7	-3.0000	-3.000E7	-3.0000	3.0000E7
8	-3.0000	-3.000E8	-3.0000	3.0000E8
9	-3.0000	-3.000E9	-3.0000	3.0000E9
10	-3.0000	-3.00E10	-3.0000	3.000E10

r10c6=29999999999.5

MAIN DEG AUTO FUNC

Die Ergebnisse in den Spalten `c4` und `c6` sind sehr aufschlussreich!

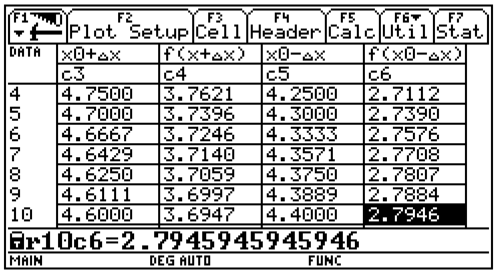
3 Stetigkeitsuntersuchung an der Stelle x_0 = 4,5



DATA	x0=	Δx	x0+Δx	f(x+Δx)
	c1	c2	c3	c4
1	4.5000	1	5.5000	4.1029
2		1/2	5.0000	3.8750
3		1/3	4.8333	3.7996
4		1/4	4.7500	3.7621
5		1/5	4.7000	3.7396
6		1/6	4.6667	3.7246
7		1/7	4.6429	3.7140

c2=seq(1/n,n,1,10)

MAIN DEG AUTO FUNC



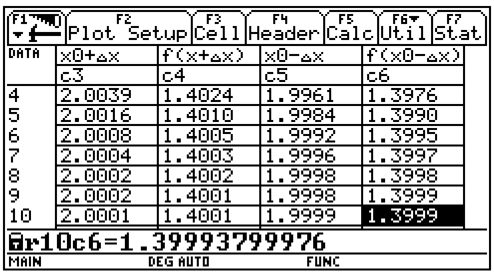
DATA	x0+Δx	f(x+Δx)	x0-Δx	f(x0-Δx)
	c3	c4	c5	c6
4	4.7500	3.7621	4.2500	2.7112
5	4.7000	3.7396	4.3000	2.7390
6	4.6667	3.7246	4.3333	2.7576
7	4.6429	3.7140	4.3571	2.7708
8	4.6250	3.7059	4.3750	2.7807
9	4.6111	3.6997	4.3889	2.7884
10	4.6000	3.6947	4.4000	2.7946

r10c6=2.7945945945946

MAIN DEG AUTO FUNC

> Schülerauftrag:
>
> *Diskutiere die Ergebnisse in den Spalten* `c4` *und* `c6`*. Ändere auch hier die Nullfolge in* `c2`*.*
>
> *Erzeuge eine graphische Darstellung.*

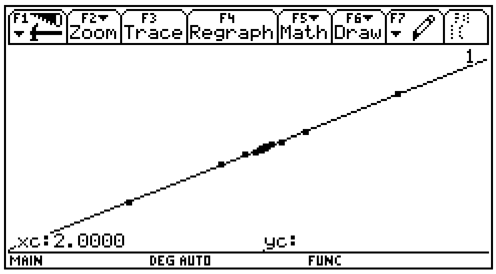
4 Die letzte interessante Stelle ist wohl x_0 = 2

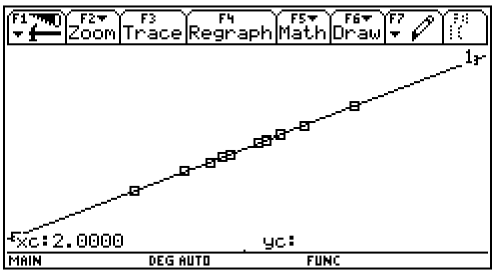


DATA	x0+Δx	f(x+Δx)	x0-Δx	f(x0-Δx)
	c3	c4	c5	c6
4	2.0039	1.4024	1.9961	1.3976
5	2.0016	1.4010	1.9984	1.3990
6	2.0008	1.4005	1.9992	1.3995
7	2.0004	1.4003	1.9996	1.3997
8	2.0002	1.4002	1.9998	1.3998
9	2.0002	1.4001	1.9998	1.3999
10	2.0001	1.4001	1.9999	1.3999

r10c6=1.39993799976

MAIN DEG AUTO FUNC





> Schülerauftrag:
>
> *Interpretiere **alle** Informationen, die du aus dem Bild herauslesen kannst.*
>
> *(Auch eine nicht erscheinende Zahl ist eine Information).*

Schülerauftrag:

Fasse vorerst mit eigenen Worten zusammen:

Wann ist eine Funktion an einer Stelle x_0 stetig?

Welche Arten von Unstetigkeit kannst du unterscheiden? Wie äußern sich diese in einer Wertetabelle? Wie stellen sich diese am Graphen dar?

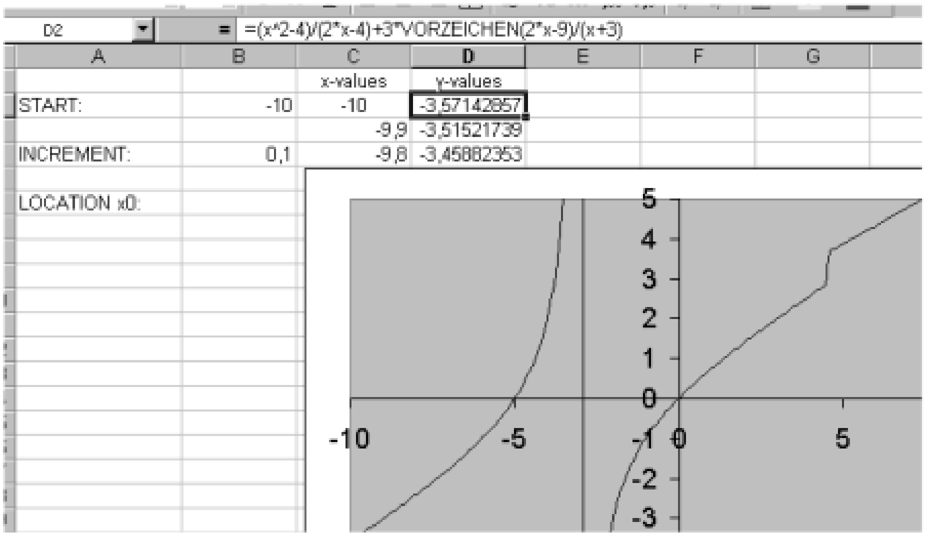
Schüleraufgaben:

Konstruiere eine Funktion mit 2 Polstellen.

Konstruiere eine Funktion mit 2 Sprungstellen.

Konstruiere eine Funktion, mit 2 hebbaren Unstetigkeitsstellen.

Die Stetigkeit kann mehr oder weniger erfolgreich auch mit einer Tabellenkalkulaiton untersucht werden. Unglücklicherweise wird aber oft bereits der Graph zu Missverständnissen führen. Fairerweise muss aber gesagt werden, dass man auch auf dem *TI* bei einer ungeschickten Wahl der [WINDOW]-Werte Ergebnisse wie diese vorfinden kann.



Vergleiche die Funktionswerte für die Stellen x = -3, 2 und 4,5. Da passiert nun schon einiges.

4,3	2,7390411
4,4	2,79459459
4,5	2,85
4,6	3,69473684
4,7	3,73961039

-3,2	14,4
-3,1	29,45
-3	1,4686E+14
-2,9	-30,45

1,8	1,275
1,9	1,3377551
2	1,4
2,1	1,46176471
2,2	1,52307692

Für x = -3 ergibt sich ein seltsamer Funktionswert, an der Stelle x = 2 ist keine Spur von einer Unstetigkeit zu merken und für x = 4,5 wird in vorauseilendem Gehorsam bereits das arithmetische Mittel aus der links- und rechtsseitigen Annäherung genommen!

Wir versuchen mit der Tabellenkalkulation eine ähnliche Vorgangsweise wie auf dem symbolischen Taschenrechner.
Verhalten an der Stelle $x_0 = -3$:

n	Δx = 0.5^n	$x_0 + \Delta x$	f($x_0 + \Delta x$)	$x_0 - \Delta x$	f($x_0 - \Delta x$)
15	3,0518E-05	-2,99996948	-98304,5	-3,00003052	98303,5
16	1,5259E-05	-2,99998474	-196608,5	-3,00001526	196607,5
17	7,6294E-06	-2,99999237	-393216,5	-3,00000763	393215,5
18	3,8147E-06	-2,99999619	-786432,5	-3,00000381	786431,5
19	1,9073E-06	-2,99999809	-1572864,5	-3,00000191	1572863,5
20	9,5367E-07	-2,99999905	-3145728,5	-3,00000095	3145727,5

und an der Stelle $x_0 = 2$:

n	Δx = 0.5^n	$x_0 + \Delta x$	f($x_0 + \Delta x$)	$x_0 - \Delta x$	f($x_0 - \Delta x$)
16	1,5259E-05	2,00001526	1,40000946	1,99998474	1,39999054
17	7,6294E-06	2,00000763	1,40000473	1,99999237	1,39999527
18	3,8147E-06	2,00000381	1,40000237	1,99999619	1,39999763
19	1,9073E-06	2,00000191	1,40000118	1,99999809	1,39999882
20	9,5367E-07	2,00000095	1,40000059	1,99999905	1,39999941

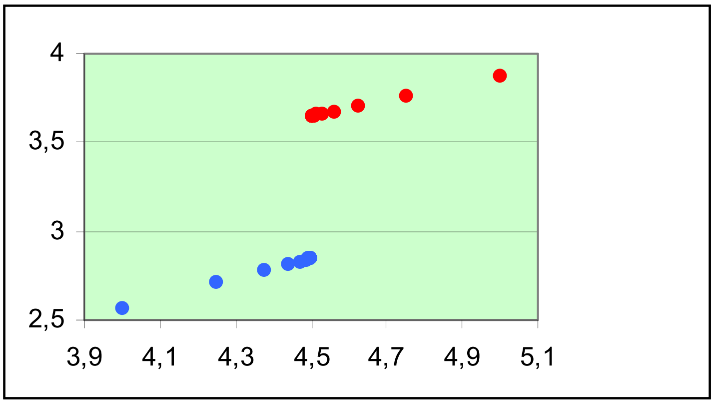
und schließlich für $x_0 = 4{,}5$:

n	Δx = 0.5^n	$x_0 + \Delta x$	f($x_0 + \Delta x$)	$x_0 - \Delta x$	f($x_0 - \Delta x$)
16	1,5259E-05	4,50001526	3,65000682	4,49998474	2,84999156
17	7,6294E-06	4,50000763	3,65000341	4,49999237	2,84999578
18	3,8147E-06	4,50000381	3,6500017	4,49999619	2,84999789
19	1,9073E-06	4,50000191	3,65000085	4,49999809	2,84999894
20	9,5367E-07	4,50000095	3,65000043	4,49999905	2,84999947

Wenn wir eine andere Folge für die Δx verwenden, dann finden wir eine „Konvergenz" gegen den Mittelwert aus den letzten links- und rechtsseitigen Funktionswerten.!

1E-14	4,5	3,65	4,5	2,85
1E-15	4,5	3,65	4,5	2,85
1E-16	4,5	3,25	4,5	3,25
1E-17	4,5	3,25	4,5	3,25

Die graphische Darstellung ist recht ordentlich.:



Die Arbeit mit *DERIVE* unterscheidet nur insofern von der Durchführung am *TI*, dass hier der `Data/Matrix`-Editor nicht verfügbar ist. Dafür verwendet man den `VECTOR`, bzw. in der letzten Version den `TABLES` - Befehl.

Die Wertetabelle ergibt sich aus:

$$f(x) := \frac{x^2 - 4}{2 \cdot x - 4} + \frac{3 \cdot \mathrm{SIGN}(2 \cdot x - 9)}{x + 3}$$

mit dem Befehl `TABLE([f(x)], x, -4, 5, 0.5)`

−4	2
−3.5	5.2
−3	±∞
−2.5	−6.2
−2	−3
−1.5	−1.7
−1	−1
−0.5	−0.45
0	0
0.5	0.39
1	0.75
1.5	1
2	?
2.5	1.7
3	2
3.5	2.2
4	2.5
4.5	±0.4 + 3.2
5	3.8

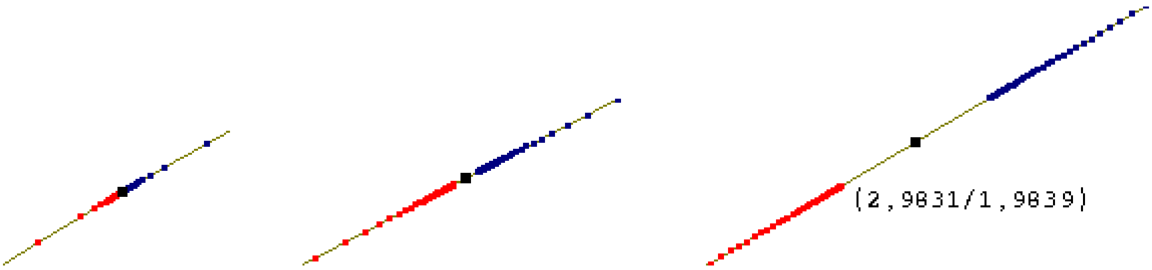
Beachte die Ergebnisse an den „interessanten“ Stellen!

Für die Annäherung entwickelt man am besten gemeinsam mit den Schülern eine möglichst allgemeine Funktion, in der man dann nach Belieben die Funktion `f_`, die zu untersuchende Stelle `x0`, die Nullfolge `u` (in Abhängigkeit von n), Anfangs- und Endwert für n und dessen Schrittweite `step` als Parameter anzugeben hat. Das könnte dann so aussehen:

```
appr(f_, x0, u, start, end, step) :=
VECTOR([x0 + u, SUBST(f_, x, x0 + u)], n,
start, end, step)
```

$$\mathrm{appr}\left(f(x),\ 3,\ \frac{1}{n},\ 1,\ 50,\ 1\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{appr}\left(f(x),\ 3,\ -\frac{1}{n},\ 1,\ 50,\ 1\right)$$

ergeben dann mit den entsprechenden Vergrößerungen auch sehr deutliche und ansprechende Darstellungen eines Häufungspunktes.

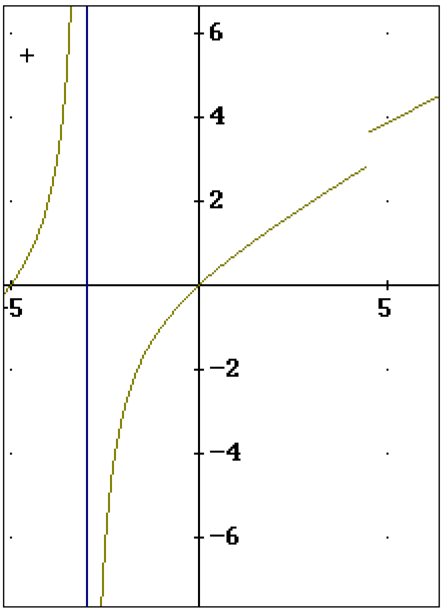


Eine weitere Funktion `appr_both(f_, x0, u, start, end, step)` liefert die Tabelle für links- und rechtsseitige Annäherung. Siehe das folgende Beispiel:

$$\mathrm{appr\_both}(f\_,\ x0,\ u,\ start,\ end,\ step) := \mathrm{APPEND}\left(\left[\begin{bmatrix} xnr \\ f(xnr) \\ xnl \\ f(xnl) \end{bmatrix}^{\backprime},\ \mathrm{VECTOR}([x0 + u,\ \mathrm{SUBST}(f\_,\ x,\ x0 + u),\ x0 - u,\ \mathrm{SUBST}(f\_,\ x,\ x0 - u)],\ n,\ start,\ end,\ step)\right]\right)$$

Die Eingabe dieser Funktionen ist natürlich schon etwas mühselig für Ungeübte, daher würde ich sie den Schülern in einer Hilfsdatei zur Verfügung stellen, begleitet von einer „Gebrauchsanweisung“. Im Anschluß an diesen Aufsatz finden sich alle Hilfsfunktionen zum „Abtippen“. Die entsprechende Datei kann vom Autor gerne erhalten werden. (email oder Anruf genügt).
Sehen wir uns die Anwendung dieser Funktion an der Stelle x_0 = -3 an:

$$\text{appr\_both}(f(x),\ -3,\ 0.5^{n},\ 10,\ 24,\ 2) = \begin{bmatrix} \text{xnr} & \text{f(xnr)} & \text{xnl} & \text{f(xnl)} \\ -2.99 & -3072.4 & -3 & 3071.4 \\ -2.99 & -12288.4 & -3 & 12287.4 \\ -2.99 & -49152.4 & -3 & 49151.4 \\ -2.99 & -196608.4 & -3 & 196607.4 \\ -2.99 & -786432.4 & -3 & 786431.4 \\ -2.99 & -3145728.4 & -3 & 3145727.4 \\ -2.99 & -12582912.4 & -3 & 12582911.4 \\ -2.99 & -50331648.4 & -3 & 50331647.4 \end{bmatrix}$$



Die Grafik kann nun leicht um die senkrechte Asymptote erweitert werden.

Sprungstelle und hebbare Unstetigkeit werden auf die gleiche Weise behandelt.

Schülerauftrag:

Wie kann man die Unstetigkeit beheben? Definiere die Funktion so, dass in der Wertetabelle kein ? mehr auftaucht!

Antwort: `fnew(x) := If(x=2,7/5,f(x))`

erscheint dann so am Schirm:

```
fnew(x) :=
  If x = 2
     7/5
     f(x)
```

Auch hier läßt sich mit Funktionen und Folgen aller Art experimentieren und schließlich zu einer letzten Verallgemeinerung schreiten.

$$\text{appr\_both}\left(\text{SIN}(3\cdot x),\ x0,\ \frac{1}{3^{n}},\ 5,\ 25,\ 5\right)$$

$$\begin{bmatrix} \text{xnr} & \text{f(xnr)} & \text{xnl} & \text{f(xnl)} \\ x0 + 0.008 & \text{SIN}(3\cdot x0 + 0.024) & x0 - 0.008 & \text{SIN}(3\cdot x0 - 0.024) \\ x0 + 0.001 & \text{SIN}(3\cdot x0 + 0.003) & x0 - 0.001 & \text{SIN}(3\cdot x0 - 0.003) \\ x0 + 0.00029 & \text{SIN}(3\cdot x0 + 0.00088) & x0 - 0.00029 & \text{SIN}(3\cdot x0 - 0.00088) \\ x0 + 0.00012 & \text{SIN}(3\cdot x0 + 0.00037) & x0 - 0.00012 & \text{SIN}(3\cdot x0 - 0.00037) \\ x0 + 6.4\cdot 10^{-5} & \text{SIN}(3\cdot x0 + 0.00019) & x0 - 6.4\cdot 10^{-5} & \text{SIN}(3\cdot x0 - 0.00019) \end{bmatrix}$$

$$\text{appr\_both}\left(\frac{\text{SIN(x)}}{\text{x}},\ 0,\ 0.2^{\text{n}},\ 7,\ 10,\ 1\right)$$

$$\begin{bmatrix} \text{xnr} & \text{f(xnr)} & \text{xnl} & \text{f(xnl)} \\ 1.2\cdot 10^{-5} & 0.99 & -1.2\cdot 10^{-5} & 0.99 \\ 2.5\cdot 10^{-6} & 0.99 & -2.5\cdot 10^{-6} & 0.99 \\ 5.1\cdot 10^{-7} & 0.99 & -5.1\cdot 10^{-7} & 0.99 \\ 1\cdot 10^{-7} & 0.99 & -1\cdot 10^{-7} & 0.99 \end{bmatrix}$$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ ein merkwürdiges Verhalten, das sich auch so leicht untersuchen läßt.!

5 Ein numerischer Zugang zur momentanen Änderungsrate

Wir kehren zurück zur „handheld technology“, zum *TI*.

Es ist nun sehr einfach, die bereits vorhandene Tabelle für das tiefere Eindringen in die Analysis auszubauen. Wir müssen ein paar Spalten , zuerst für die absoluten Änderungen und dann für die durchschnittlichen Änderungsraten wiederum von beiden Seiten anfügen. In der Klasse wird man natürlich mit einer bekannten Funktion beginnen (Parabel, Kurve 3.Grades und warum nicht mit einer linearen Funktion).

Dann bedienen wir uns einer anderen „künstlichen” Kurve. Wer kennt nicht die "**MM - Kurve**"?

$$f(x) = \left(\frac{|x|}{2} - 2\right)^2$$

$x_0 = 2$:

F1 | F2 Plot Setup | F3 Cell | F4 Header | F5 Calc | F6 Util | F7 Stat

DATA	rs.Δf	rs.Δf/Δx	ls.Δf	ls.Δf/Δx
	c7	c8	c9	c10
4	-.0615	-.9844	-.0635	-1.0156
5	-.0310	-.9922	-.0315	-1.0078
6	-.0156	-.9961	-.0157	-1.0039
7	-.0078	-.9980	-.0078	-1.0020
8	-.0039	-.9990	-.0039	-1.0010
9	-.0020	-.9995	-.0020	-1.0005
10	-.0010	-.9998	-.0010	-1.0002

c7=c4-f(c1[1])

MAIN DEG AUTO FUNC

$x_0 = 0$:

F1 | F2 Plot Setup | F3 Cell | F4 Header | F5 Calc | F6 Util | F7 Stat

DATA	rs.Δf	rs.Δf/Δx	ls.Δf	ls.Δf/Δx
	c7	c8	c9	c10
4	-.1240	-1.9844	.1240	1.9844
5	-.0623	-1.9922	.0623	1.9922
6	-.0312	-1.9961	.0312	1.9961
7	-.0156	-1.9980	.0156	1.9980
8	-.0078	-1.9990	.0078	1.9990
9	-.0039	-1.9995	.0039	1.9995
10	-.0020	-1.9998	.0020	1.9998

r10c10=1.9997558593536

MAIN DEG AUTO FUNC

In Spalte `c7` findet sich die rechtsseitige Differenz der Funktionswerte (= absolute Änderung) und daneben der Quotient aus `c7` und `c2`, der natürlich nichts anderes ist als der (rechtsseitige) Differenzenquotient.

Schülerauftrag:

Ergänze die Tabelle um die nächsten beiden Spalten, sodass auch der linksseitige Differenzenquotient ausgewiesen wird. Beachte die Vorzeichen.
Überprüfe die Ergebnisse anhand einer einfachen Funktion durch händisches Nachrechnen.

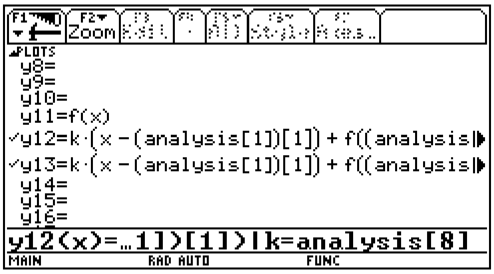
Kannst du einen Unterschied im Verhalten der Änderungsraten in den beiden Stellen erkennen?

Wie könnte sich das auf die Gestalt des Graphen auswirken?

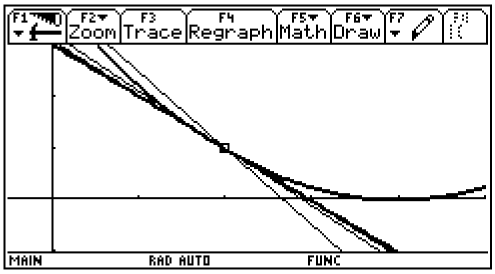
Wir können die vorliegenden Listen der momentanen Änderungsraten (in den Spalten `c8` und `c1Ø`) dazu benützen, um die entsprechende Folge der Sekanten zeichnen zu lassen:

> Schülerauftrag:
>
> *Wiederhole die Punkt-Richtungsform der Geraden!*

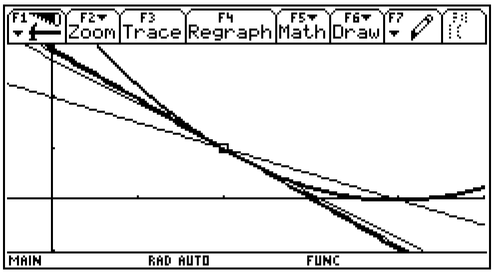
Zuerst an der „guten” Stelle $x_0 = 2$:



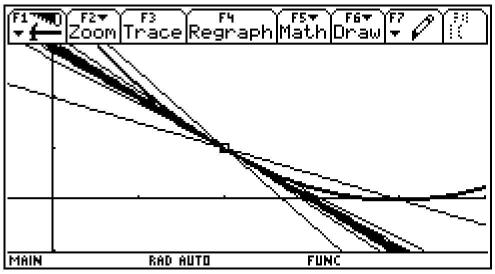
Verwende dir Werte der Tabelle um eine Sekantenschar zu erzeugen



Annäherung von links



Annäherung von rechts



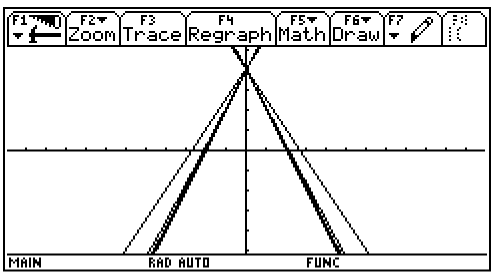
beide Geradenscharen

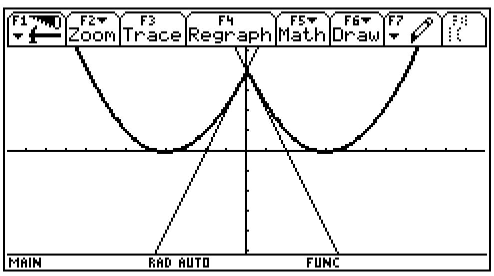
Die Geradenscharen erhält man direkt auf die folgende Weise:

`k∗(x-analysis[1][1])-f(anaysis[1][1]) | k = analysis[8]`, bzw.
`k∗(x-analysis[1][1])-f(anaysis[1][1]) | k = analysis[8]`

Dieser Ausdruck läßt sich direkt als eine Funktion in den [Y=]-Editor schreiben (zeichnet dann sehr langsam, bleibt aber allgemein) oder zuerst im Home Screen auswerten und das Ergebnis in den Funktioneneditor speichern (zeichnet schnell, muß aber bei jeder Änderung wiederholt werden).

> Schülerauftrag:
>
> *Verwende verschiedene Folgen, für eine Annäherung an die Stelle x_0. Ist die Funktion an dieser Stelle stetig?*
>
> *Erzeuge die links- und rechtsseitige Sekantenscharen und beurteile deren Endverhalten.*
> *Kannst du nun den Verlauf der Tangente im Punkt (0|4) voraussagen?*
> *Kannst Du den Kurvenverlauf überhaupt voraussagen?*

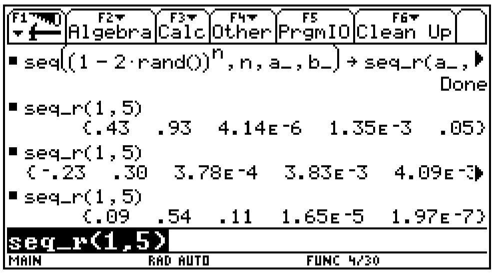




Die Definition der Differnzierbarkeit sagt aber doch aus, dass ein stabiler Wert für die momentane Änderungsrate für jede beliebige Nullfolge erreicht werden muss, und dass dieser Wert immer derselbe sein muss. So erzeugen wir eine „Zufalls-Nullfolge“. Sowohl in *DERIVE* als auch beim *TI* gibt es eine Funktion, die eine Zufallszahl zwischen 0 und 1 erzeugt (`RANDOM(1)`, bzw. `rand()`). Damit ergibt `1 - 2*RANDOM(1)` (oder `1 - 2*rand()`) eine Zufallszahl zwischen –1 und +1 und wir können leicht eine Folge erzeugen, die je nach dem Wert dieser Zahl eine positive oder eine alternierende Nullfolge erzeugen wird! Die Zufallsfolge könnte dann am *TI* so definiert werden:

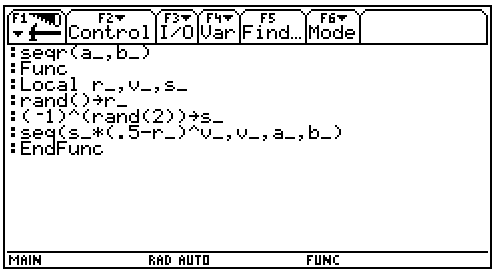
`seq((1 - 2*rand())^n,n,a_,b_)→seq_r(a_,b_)`

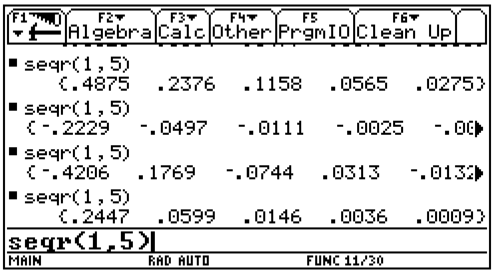
Wir testen dieser Funktion aber erst, bevor wir sie wirklich einsetzen:



Da dürfte aber etwas nicht stimmen, denn die 2. und 3. Elemente der Folgen sind offensichtlich nicht die Quadrate, bzw. Kuben des jeweiligen Startelements. Der Grund liegt darin, dass der Rechner für jedes Folgenelement eine neue Zufallszahl erzeugt. Um dem abzuhelfen, müssen wir eine etwas größere Funktion über den Programmeditor erzeugen.

Wir legen die Zufallsvariable als lokale Variable `r_` ab und dann funktioniert die Sache. Um ganz flexibel zu sein, wird mit `s_` zufällig +1 oder –1 erzeugt und damit erreichen wir auch konstant negative Nullfolgen, wie der nächste Testlauf zeigt.



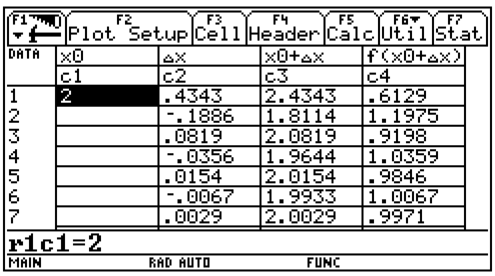


Schülerauftrag (eventuell Gruppenarbeit):

Versuche eine Vorschrift zu finden, die zufällig eine Nullfolge mit einem rational gebrochenen folgenbildenden Term erzeugt.

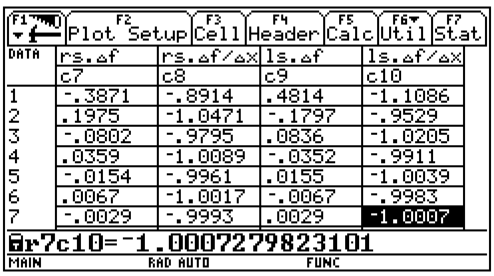
Wir übertragen diese spezielle Folge in unsere Tabelle. Bei jeder Neuberechnung wird eine andere Zufallsfolge erzeugt. Zufällig habe ich gleich eine alternierende Folge erhalten.

Im ersten Fall erkennt man wieder den Wert von ca –1, während im zweiten Fall für die Stelle $x_0 = 0$ schon die Betrachtung der einer Spalte mit den Änderungsraten ein verzweifeltes Hin- und Herspringen zwischen +2 und –2 offenbart.



DATA	x0	Δx	x0+Δx	f(x0+Δx)
	c1	c2	c3	c4
1	2	.4343	2.4343	.6129
2		-.1886	1.8114	1.1975
3		.0819	2.0819	.9198
4		-.0356	1.9644	1.0359
5		.0154	2.0154	.9846
6		-.0067	1.9933	1.0067
7		.0029	2.0029	.9971

r1c1=2



DATA	rs.Δf	rs.Δf/Δx	ls.Δf	ls.Δf/Δx
	c7	c8	c9	c10
1	-.3871	-.8914	.4814	-1.1086
2	.1975	-1.0471	-.1797	-.9529
3	-.0802	-.9795	.0836	-1.0205
4	.0359	-1.0089	-.0352	-.9911
5	-.0154	-.9961	.0155	-1.0039
6	.0067	-1.0017	-.0067	-.9983
7	-.0029	-.9993	.0029	-1.0007

r7c10=-1.0007279823101

DATA	x0	Δx	x0+Δx	f(x0+Δx)
	c1	c2	c3	c4
1	0	-.0939	-.0939	3.8143
2		.0088	.0088	3.9824
3		-.0008	-.0008	3.9983
4		7.784E-5	7.784E-5	3.9998
5		-7.31E-6	-7.31E-6	4.0000
6		6.868E-7	6.868E-7	4.0000
7		-6.45E-8	-6.45E-8	4.0000

r1c1=0

DATA	x0-Δx	f(x0-Δx)	rs.Δf	rs.Δf/Δx
	c5	c6	c7	c8
1	.0939	3.8143	-.1857	1.9765
2	-.0088	3.9824	-.0176	-1.9978
3	.0008	3.9983	-.0017	1.9998
4	-7.78E-5	3.9998	-.0002	-2.0000
5	7.312E-6	4.0000	-1.46E-5	2.0000
6	-6.87E-7	4.0000	-1.37E-6	-2.0000
7	6.451E-8	4.0000	-1.29E-7	2.0000

r7c8=2.0000013937097

Wir wenden uns wieder *DERIVE*-zu und zeigen ein Programm, das das selbe leistet wie die *TI*-Funktion inklusive der Ausgabe der Tabelle.

```
diff_rnd(f_, x0, sta, end, step, dx, k_, s_) :=
  Prog
    r_ := RANDOM(1)
    s_ := RANDOM(2)
    dx := VECTOR(s_·(1 - 2·r_)^k_, k_, sta, end, step)
    APPEND(["Δx"; "f(x0+Δx)-f(x0)"; "(f(x0+Δx)-f(x0))/Δx"]`, VECTOR([dx↓k_,

  SUBST(f_, x, x0 + dx↓k_) - SUBST(f_, x, x0), (SUBST(f_, x, x0 + dx↓k_) - SUBST(f_,

  x, x0))/dx↓k_], k_, sta, end, step))
```

(Ein Hinweis: während `rand(2)` am *TI* zufällig entweder 1 oder 2 erzeugt, generiert *DERIVE* mit `random(2)` eine Zufallszahl aus {0,1})

$$\mathrm{diff\_rnd}\left(\left(\frac{|x|}{2} - 2\right)^2, 0, 1, 10, 1\right)$$

Δx	f(x0+Δx)-f(x0)	(f(x0+Δx)-f(x0))/Δx
-0.334542	-0.641105	1.91636
0.111918	-0.220706	-1.97202
-0.0374415	-0.0745326	1.99063
0.0125258	-0.0250123	-1.99686
-0.00419041	-0.00837643	1.99895
0.00140187	-0.00280325	-1.99964
-0.000468985	-0.000937916	1.99988
0.000156895	-0.000313785	-1.99996
$-5.24882\cdot10^{-5}$	-0.000104975	1.99998
$1.75595\cdot10^{-5}$	$-3.51190\cdot10^{-5}$	-1.99999

Die Untersuchung des Verhaltens der Änderungsrate läßt sich mit *DERIVE* ähnlich durchführen. Man muss natürlich wieder für die Ausgabe in Tabellenform geeignete Funktionen definieren.

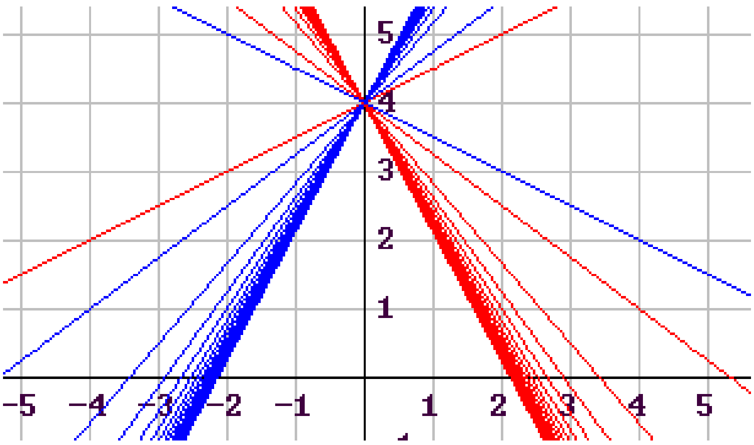
`diff_sh( )` zeigt (*shows*) mit den gleichen Parametern wie `appr_both( )` die Ergebnisse für die Änderungsraten. `slopes( )` liefert nur die Anstiege aus der 2. und 3. Spalte, wobei die Funktion `REST( )` die erste Zeile unberücksichtigt läßt. Damit können wir leicht die Sekantenscharen zeichnen lassen.

$$\mathrm{diff\_sh}\left(\left(\frac{|x|}{2}-2\right)^2,\ 0,\ 0.5^n,\ 8,\ 10,\ 1\right)$$

Δx	(f(x0+Δx)−f(x0))/Δx	(f(x0)−f(x0−Δx))/Δx
0.0039	−1.99	1.99
0.00195	−1.99	1.99
0.000976	−2	2

$$\mathrm{slopes} := \mathrm{diff\_sh}\left(\left(\frac{|x|}{2}-2\right)^2,\ 0,\ \frac{10}{n},\ 1,\ 20,\ 1\right)$$

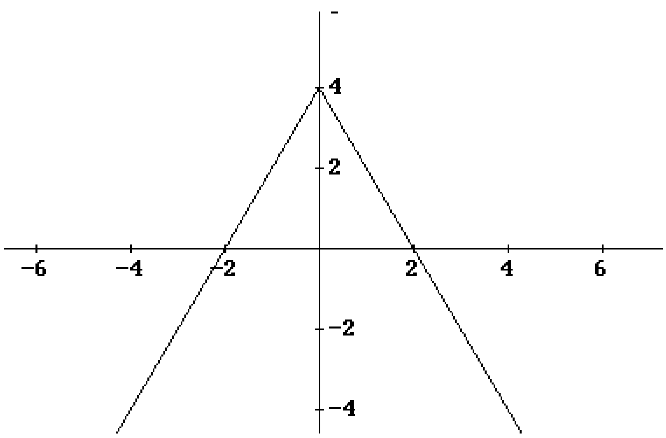
```
tangr := VECTOR(y = m_·x + 4, m_, REST(slopes COL 2))
tangl := VECTOR(y = m_·x + 4, m_, REST(slopes COL 3))
```



Schülerauftrag:

Erzeuge die vollständige „Tangente“ als abschnittsweise definierte Funktion und überlege, wie der Funktionsgraph aussehen könnte.

```
tangent := IF(x < 0, 4 + 2·x, IF(x > 0, 4 − 2·x, ?))
```



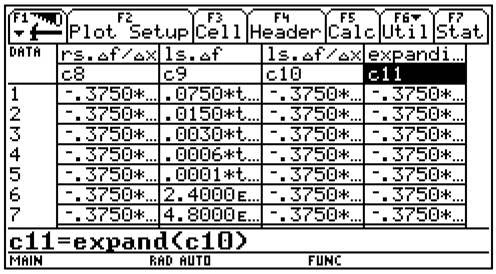
6 Eine entscheidende Verallgemeinerung

Die Änderungsrate wird auch *Differenzenquotient* genannt, und wenn es eine eindeutige momentane Änderungsrate gibt, dann bezeichnet man diese in der Mathematik auch als *Differentialquotient*. Dafür gibt es später noch eine exakte Erklärung.

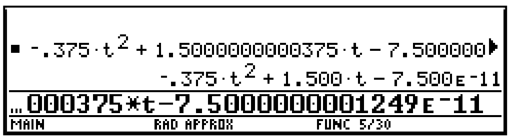
> Schülerauftrag (eventuell Gruppenarbeit):
>
> *Verwende zwei Polynomfunktionen (bis maximal 4. Grades, davon eine mit ganzen und eine mit nicht zu komplizierten, aber doch rationalen Koeffizienten) und suche die momentane Änderungsrate an zumindest 3 Stellen. Tritt dabei eine Stelle auf, von der du sagen kannst, dass es offensichtlich keinen eindeutigen Differentialquotienten zu geben scheint?*
>
> *Um eine allgemeine Aussage über diesen „Differentialquotienten“ zu erhalten, ersetze bei beiden Funktionen die zu untersuchende Stelle durch eine Variable. (Um mit keinen der bisher verwendeten Variablen in Konflikt zu geraten, nimm für $x_0 = t$).*
>
> *Wie lauten die Ergebnisse?*
> *Sammelt Eure Resultate in einer Tabelle, in der ihr Funktion und Differentialquotienten gegenüberstellt.*
> *Könnt ihr einen Zusammenhang zwischen der gegebenen Funktion und der „Formel“ für den Differentialquotienten entdecken?*

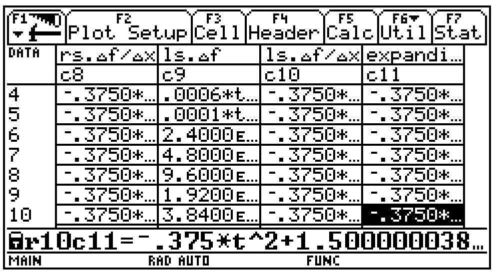
Diese Untersuchung wird nun exemplarisch mit der Funktion $f(x) = -\frac{x^3}{8} + \frac{3x^2}{4}$.

Füge in einer weiteren Spalte das ausmultiplizierte Ergebnis aus `c8` oder `c10` an.



Kopiere den Inhalt von Zelle `r10c11` über ◆ C in die Zwischenablage und dann im Home Screen wieder mit ◆ V in die Eingabezeile.





Auf älteren *TI*-Modellen läßt sich der Zelleninhalt nicht mit Copy & Paste übertragen. In diesem Fall wechsle in den Home Screen und hole dir mit `analysis[11][10]` das 10. Element der 11. Spalte her.

Beschreibe auch die „letzten” Elemente in den Spalten `c4` und `c6` – wiederhole dabei die Stetigkeitsuntersuchung. Wechsle auch immer wieder die Nullfolgen in Spalte `c2`.

Der letzte Teil der Formel für den Differenzenquotienten ($-7.5 * 10^{-11}$) ist so klein, dass man ihn vernachlässigen darf. Wie heißt dann das Ergebnis?

Und wie sieht das in *DERIVE* aus? Natürlich genauso!

$$f(x) := -\frac{x^3}{8} + \frac{3\cdot x^2}{4}$$

$$\text{EXPAND(diff\_sh}(f(x),\ x,\ 0.1^n,\ 19,\ 20,\ 1))$$

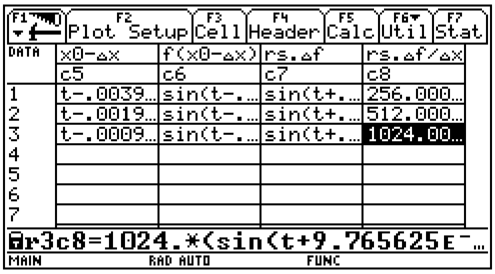
$$\begin{bmatrix} \Delta x & (f(x0+\Delta x)-f(x0))/\Delta x & (f(x0)-f(x0-\Delta x))/\Delta x \\ 10^{-19} & -0.375\cdot x^2 + 1.49\cdot x + 7.49\cdot 10^{-20} & -0.375\cdot x^2 + 1.5\cdot x - 7.5\cdot 10^{-20} \\ 10^{-20} & -0.375\cdot x^2 + 1.49\cdot x + 7.49\cdot 10^{-21} & -0.375\cdot x^2 + 1.5\cdot x - 7.5\cdot 10^{-21} \end{bmatrix}$$

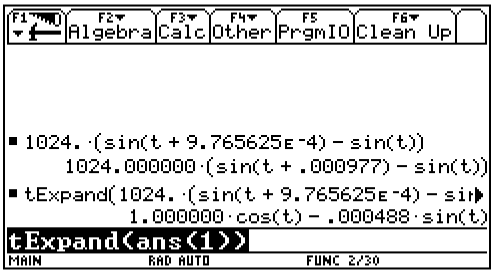
Schülerauftrag (eventuell Gruppenarbeit):

Suche für die dir bekannten Funktionstypen allfällige Formeln für den Differentialquotienten!

Winkelfunktionen, Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, einfache zusammengesetzte Funktionen, Wurzelfunktion, gebrochen rationale Funktionen, ...

Einige Beispiele: Wir suchen näherungsweise den Differentialquotienten für $f(x) = \sin x$





Wie lautet das Ergebnis?

Mit *DERIVE* gibt's anfänglich Schwierigkeiten, da die Genauigkeit erhöht werden muss:

#58: $\text{diff\_sh(SIN}(x),\ x,\ 0.1^n,\ 8,\ 10,\ 1)$

#59: $$\begin{bmatrix} \Delta x & (f(x0+\Delta x)-f(x0))/\Delta x & (f(x0)-f(x0-\Delta x))/\Delta x \\ 10^{-8} & 0 & 0 \\ 10^{-9} & 0 & 0 \\ 10^{-10} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#60: PrecisionDigits := 40

#61: NotationDigits := 6

#62: $$\begin{bmatrix} \Delta x & (f(x0+\Delta x)-f(x0))/\Delta x & (f(x0)-f(x0-\Delta x))/\Delta x \\ 10^{-8} & 0.999999\cdot \text{SIN}(x + 1.57079) & -0.999999\cdot \text{SIN}(x - 1.57079) \\ 10^{-9} & 0.999999\cdot \text{SIN}(x + 1.57079) & -0.999999\cdot \text{SIN}(x - 1.57079) \\ 10^{-10} & 0.999999\cdot \text{SIN}(x + 1.57079) & -0.999999\cdot \text{SIN}(x - 1.57079) \end{bmatrix}$$

Wer kennt 1,57079?? Wozu ist $\sin(x + \pi/2)$ äquivalent?

Jetzt kommt das Ergebnis noch deutlicher heraus!

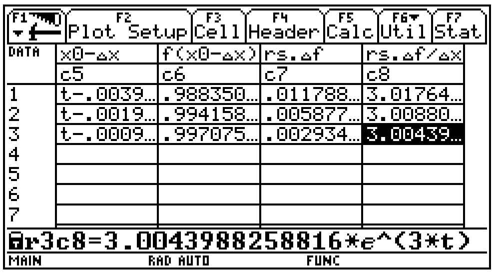
```
#63:   Trigonometry := Expand
```

$$\#64:\quad \begin{bmatrix} \Delta x & (f(x0+\Delta x)-f(x0))/\Delta x & (f(x0)-f(x0-\Delta x))/\Delta x \\ 10^{-8} & 0.999999\cdot COS(x) - 4.99999\cdot 10^{-9}\cdot SIN(x) & 0.999999\cdot COS(x) + 4.99999\cdot 10^{-9}\cdot SIN(x) \\ 10^{-9} & 0.999999\cdot COS(x) - 4.99999\cdot 10^{-10}\cdot SIN(x) & 0.999999\cdot COS(x) + 4.99999\cdot 10^{-10}\cdot SIN(x) \\ 10^{-10} & 0.999999\cdot COS(x) - 4.99999\cdot 10^{-11}\cdot SIN(x) & 0.999999\cdot COS(x) + 4.99999\cdot 10^{-11}\cdot SIN(x) \end{bmatrix}$$

Man verwendet hier sehr sinnvoll ein Grundprinzip der numerischen und angewandten Mathematik, nämlich zu kleine „Anhängsel“ ganz einfach wegzulassen, um zu einem brauchbaren Ergebnis zu gelangen.

Hier werden doch einige mathematische Kenntnisse verlangt, die über das Manipulieren mit Doppelbrüchen und Additionstheorem hinausgehen. Außerdem macht es Sinn, zu erkennen, dass nicht für alle Funktionstypen so einfach der Differentialquotient „bestimmt“ werden kann.

Ein letztes kleines Beispiel zur Vorbereitung auf die Kettenregel mit $f(x) = e^{3x}$.



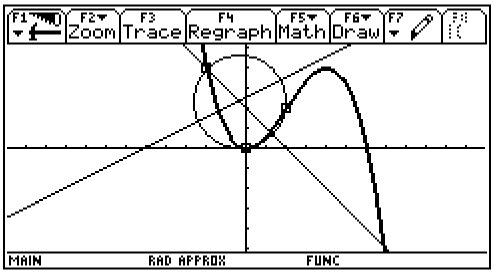
DATA	x0−Δx	f(x0−Δx)	rs.Δf	rs.Δf/Δx
	c5	c6	c7	c8
1	t−.0039…	.988350…	.011788…	3.01764…
2	t−.0019…	.994158…	.005877…	3.00880…
3	t−.0009…	.997075…	.002934…	3.00439…
4				
5				
6				
7				

Es soll nochmals klar ausgesprochen werden, dass mit dieser Vorgangsweise keineswegs die strengen mathematischen Herleitungen umgangen werden sollen. Aber Untersuchungen wie diese helfen doch weitgehend, dann die abstrakten Überlegungen durch sehr konkrete Erfahrungen verständlicher zu machen.

Dabei kann die Reihenfolge des Vorgehens durchaus unterschiedlich sein. Ich habe gute Erfahrungen in beiden Richtungen: numerisch-graphisch beginnen und dann analytisch exaktifizieren, aber es läßt sich auch gut analytisch beginnen und numerisch-graphisch begleitet, analytisch fortsetzen. Man kann auch zuerst analytisch durcharbeiten und dann auf der anderen Ebene die Inhalte verdeutlichen und vertiefen. Wie fast überall in der Schulmathematik liegt auch hier der Erfolg im geschickten Wechsel der Darstellungsformen, der der jeweiligen unterrichtlichen Situation angepasst werden muss.

Wenn wir nun den symbolischen Taschenrechner, *DERIVE* oder irgend ein anderes CAS einsetzen können, dann läßt sich ohne allzuviel Aufwand ein weiteres Ziel anstreben, das man ohne diese Hilfsmittel wohl nur schwer in der Sekundarstufe II erreichen kann. (Natürlich, Rezepte lassen sich immer angeben, aber ob das wohl das Richtige ist?)

7 Die Krümmung in der Datentabelle



Es ist sicher eine Herausforderung, noch einen Schritt weiter zu gehen, und auch das Krümmungsverhalten eines Graphen auf diese Art und Weise zu untersuchen. Man beginnt mit einer Variante des klassischen Zugangs, der ja zwei benachbarte Kurvennormale zusammenrücken läßt, und dabei beobachtet, ob es eine Grenzlage des Schnittpunkts dieser beiden Geraden gibt. Da uns aber die Differentialrechnung noch immer nicht zur Verfügung steht, können wir auch keine sichere Aussage über die Kurvennormale machen.

Wir wollen die Δx – Annäherung und das bereits aufgebaute Datenblatt weiterverwenden. Unsere Aufgabe soll also darin bestehen, den Krümmungskreis an den Stellen $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, und später vielleicht wieder ganz allgemein für $x_0 = t$ finden.

Dazu Zweck fixieren wir drei Punkte am Graphen $(x_0\text{-}\Delta x, f(x_0\text{-}\Delta x))$, $(x_0,f(x_0))$ und $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ und suchen den Umkreis des entstehenden Dreiecks. In der obigen Abbildung ist $x_0 = 0$. Wenn nun Δx gegen 0 geht, dann hat der Kreis immer noch drei Punkte mit der Kurve gemeinsam. Der „letzte“ dieser Kreise ist dann der gesuchte „Krümmungskreis“.

Wir stellen die Fragen: Wo liegt der Mittelpunkt dieses Kreises? Wie groß ist sein Radius?

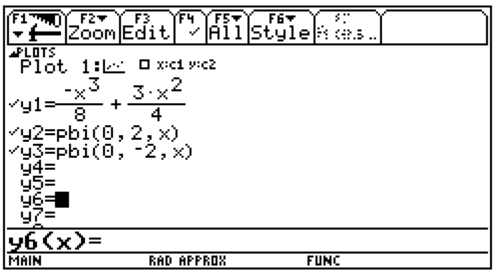
Der Mittelpunkt ist als Umkreismittelpunkt die Grenzlage des Schnittpunktes von zwei Streckensymmetralen. Damit erweitern wir wieder unser Datenblatt. Nun nützen wir aber die „power“ eines Computer Algebra Systems und definieren zuerst eine Funktion `pbi(x0,h,x)` für die Streckensymmetrale (= *perpendicular bisector*) zwischen den beiden Punkten $[(x_0,f(x_0)), (x_0+h, f(x_0+h))]$ und wir suchen die x-Koordinate des Schnittpunkts von `pbi(x0,h,x)` mit `pbi(x0,-h,x)`. Das Resultat speichern wir als `xco(x0,h)`. Die Abbildung zeigt die beiden Streckensymmetralen (h ist äquivalent zu Δx).

Schülerauftrag:

Wie lautet die Gleichung für die Streckensymmetrale zwischen zwei Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2)?

Forme die Gleichung so um, dass die allgemeinen Ausdrücke von oben verwendet werden und überprüfe die Formel mit zumindest zwei Punktepaaren.

Berechne den Schnittpunkt der Streckensymmetralen für $x_0 = 0$ und $h = 1$, bzw, $h = -1$ und dann noch für $x_0 = 5$ und $h = 0,5$, bzw. $h = -0,5$.




```
ªh/(f(x0+h)-f(x0))*(x-(2*x0+h)/2)+(f(x0)+
f(x0+h))/2»pbi(x0,h,x)

zeros(pbi(x0,h,x)-pbi(x0,ªh,x),x)[1]

ans(1) » xco(x0,h)

-x^3/8+3*x^2/4 » f(x)
```

Diese drei Funktionen führen zur graphischen Darstellung am Beginn des Abschnitts.

Dann wechseln wir wieder in den `Data/Matrix` Editor und fügen zwei weitere Spalten `c12` und `c13` an, in denen wir hoffentlich die Koordinaten der Mittelpunkte unserer Kreisfolge verfolgen können.

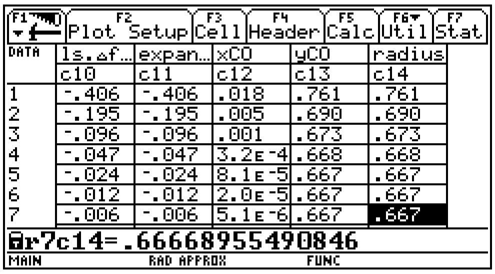
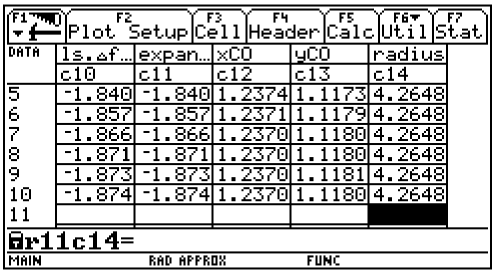


Tabelle für $x_0 = 0$ (`c1[1] = 0`)

Im `Header` von Spalte `c12` steht nun
c12 = `xco(c1[1],c2)` und daneben ist
`c13` = `pbi(c1[1],c2,c12).`

In `c14` werden die Radien der entstehenden Kreise ausgegeben. Das sind jeweils die Abstände vom Mittelpunkt zu einem der Kurvenpunkte. Alle Werte in den Spalten `c12`, `c13` und `c14` scheinen sich bei (0, 2/3, 2/3) „zu treffen“!.



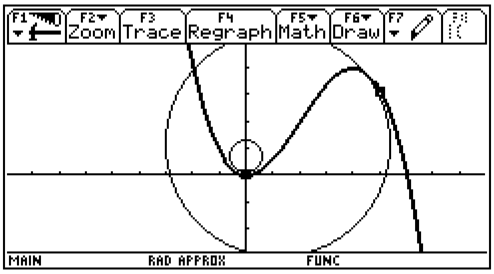
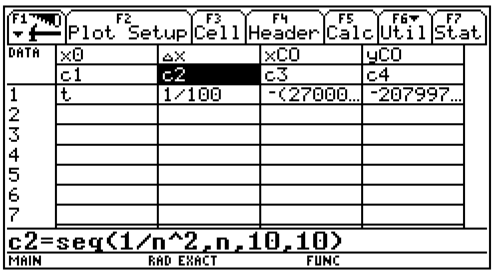


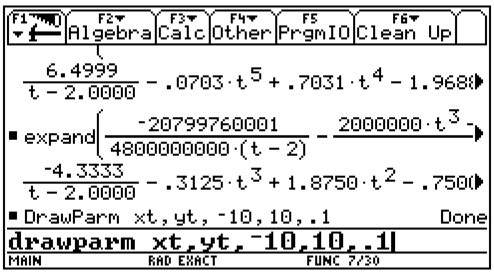
Tabelle für $x_0 = 5$ (mit `c1[1] = 5`) und der zugehörige Graph mit den approximierenden Kreisen.

> Schülerauftrag:
>
> *Wo dürfte der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel einer quadratischen Parabel liegen?*
>
> *Bestimme die Krümmungskreise in den Scheiteln einer Ellipse. Suche die entsprechenden Formeln in geeigneten Unterlagen und vergleiche die Ergebnisse. Wie kann man die Krümmungsmittelpunkte in den Scheiteln einer Ellipse konstruieren?*
>
> *Beatnworte die obigen Fragen auch für die reelen Scheitel einer Hyperbel.*

8 Noch eine Verallgemeinerung

Für die Verallgemeinerung ist es ratsam, die Tabelle auf dem *TI* auf das Notwendigste zu reduzieren, da sonst Speicherprobleme auftreten können. D.h., man wird ein neues Datenblatt eröffnen, in dem nur 4 Spalten vorzukommen brauchen. Die Rechnung wird beschleunigt, indem man die „Folge“ so konzipiert, dass nur ihre letzten Elemente oder überhaupt nur das letzte Element angezeigt wird.





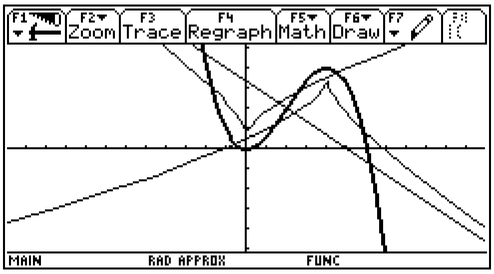
oder setze `c2[1]` = 1/10000 …..

(Ein Tipp: Bei mehrmaligem Wechsel zwischen `Data/Matrix` Editor und Home Screen sollte man besser über ◆ F `Auto Calculation Off` schalten, da sonst immer wieder zeitaufwendig neu gerechnet wird).

Was haben wir nun erreicht? In den letzten Zellen der Spalten für `xco` und `yco` ergeben sich allgemeine Ausdrücke, in denen die Koordinaten der Kreismittelpunkte in Abhängigkeit von der gewählten Stelle *t* beschrieben werden. Das ist der klassische Fall für die **Parameterdarstellung** einer Kurve.

Die Zellinhalte werden in den Home Screen kopiert und unter Variablennamen, zB. `xt` und `yt` gespeichert. Mit der `DrawParm` – Anweisung und geeigneten Argumenten erreicht man sofort die graphische Darstellung dieser Kurve.

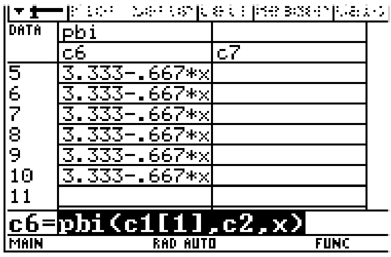
Damit haben wir die Ortslinie der Krümmungskreismittelpunkte zumindest näherungsweise gefunden. Diese Kurve nennt man „**Evolute**“.



Schülerauftrag:

Untersuche das Verhalten dieser Kurve an der Stelle t = 2. Warum gibt´s hier Schwierigkeiten?

Es sollte eine Herausforderung für die Schüler sein, die Polstelle dieser Kurve zu untersuchen und dann die offensichtlich bestehende schiefe Asymptote zu finden. Auch ohne schon vorher einen „Wendepunkt“ erwähnt zu haben kann man ihnen die Chance geben, einen Kurvenpunkt ohne Krümmung eigenständig zu erkennen – und damit die Tatsache, dass die gesuchte Asymptote die Normale auf die Tangente in diesem Punkt sein muss.



DATA	pbi	
	c6	c7
5	3.333-.667*x	
6	3.333-.667*x	
7	3.333-.667*x	
8	3.333-.667*x	
9	3.333-.667*x	
10	3.333-.667*x	
11		

c6=pbi(c1[1],c2,x)

MAIN RAD AUTO FUNC

Und hier endet auch der erste Teil unserer Reise. Wir haben mit der Untersuchung von Unstetigkeitsstellen begonnen. unter ihnen eine „Polstelle“ entdeckt und wir schließen hier mit der Entdeckung einer anderen Polstelle. Ich glaube, dass wir eine interessante Reise in das Reich der Analysis unternommen haben.

Unser letztes Ziel haben wir allerdings noch nicht erreicht. Jetzt könnte man ansetzen, um mit Grenzwertüberlegungen alle unsere numerischen und graphischen Erkenntnisse zu exaktifizieren und damit erst richtig zu begünden und zu bestätigen.

Schüleraufgaben:

Bestimme die Evoluten von bekannten Kurven wie Parabel, Ellipse, Winkelfunktionen, Exponentialfunktion,....?

Ein größeres Projekt ist*:*

Nimm an, dass die gegebene Funktion in Parameterdarstellung vorliegt. p(t) = [x(t), y(t)]. Bestimme nun die Evolute dieser Kurve. Starte mit $p(t) = [t, -t^3/8 + 3t^2/4]$ *um die Vorgangsweise zu bestätigen.*

Suche berühmte Kurven der Mathematik und suche deren Evoluten (Zykloide, Cissoide, ...)

Beginne mit einer Parabel und bestimme deren Evolute der Evolute.

Arbeite wieder mit verschiedenen Folgen, auch mit der Zufallsfolge.

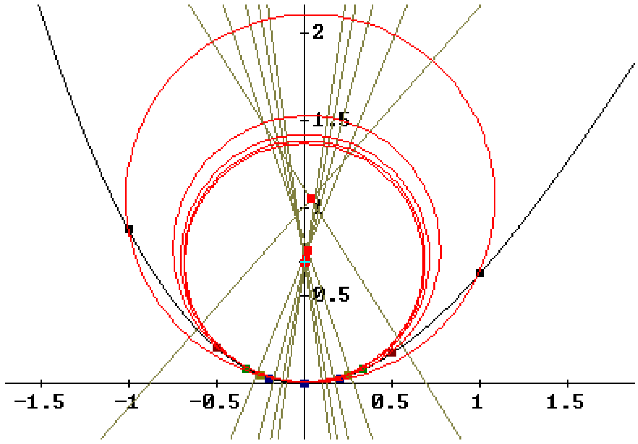
Dieser Teil wurde nun durchgängig mit dem *TI* bearbeitet. Im folgenden sollen einige Bildschirmausschnitte zeigen, wie einfach es ist, seine Ideen von einer Plattform auf die andere zu übertragen. Natürlich bietet der Schirm eines PC zusammen mit einer farbigen Darstellung noch eindrucksvollere Ergebnisse.

And subsequently a sequence of circles passing the point triples.

```
#95:  VECTOR((x-xn)^2 +(y-yn)^2 =|[xn,yn]|^2 ,n,1,5)
```

```
TABLE([xn, yn], n, 5, 25, 5)
```

5	0.00325	0.681
10	0.000828	0.67
15	0.000369	0.668
20	0.000208	0.667
25	0.000133	0.667



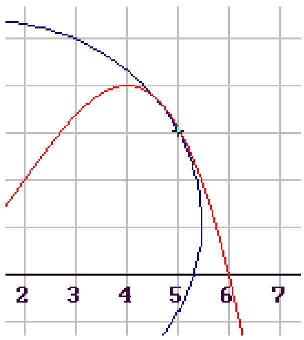
Zuerst zeigen wir eine Folge von Kreisen, die sich für die Stelle x_0 in eine Grenzlage zusammenziehen. Die Tabelle kommt sicherlich bekannt vor. Unten wird die Stelle $x_0 = 5$ angesprochen.

Which is the circle of curvature for x0 = 5.

```
#106: VECTOR([x0n(5,0.5^n),y0n(5,0.5^n),r0n(5,0.5^n)],n,8,10)
```

#107:
$$\begin{bmatrix} 1.23 & 1.11 & 4.26 \\ 1.23 & 1.11 & 4.26 \\ 1.23 & 1.11 & 4.26 \end{bmatrix}$$

```
#108: (x-1.23)^2 +(y-1.11)^2 =4.26^2
```

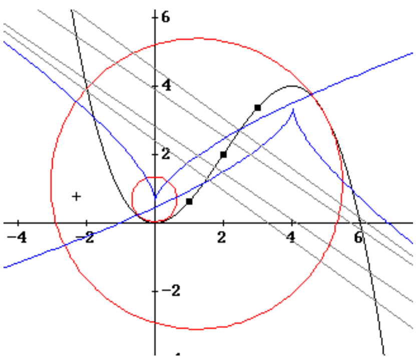


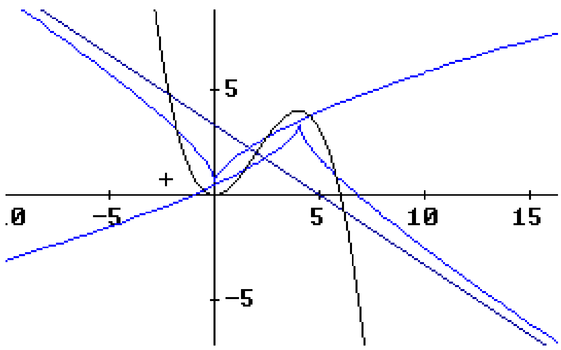
Und dann noch die ominöse Stelle $x_0 = 2$, an der die schon betrachteten Probleme auftreten.

Now for x0 = 2:

```
#109: VECTOR([x0n(2,0.5^n),y0n(2,0.5^n),r0n(2,0.5^n)],n,8,10)
```

Surprisingly problems are occuring ???? We leave this question open for the moment and proceed to a general place t:





Man erkennt, dass benachbarte `pbi`s fast parallel sind. Die „allerletzte" Streckensymmetrale wird die Richtung zum unendlich fernen Punkt zeigen.

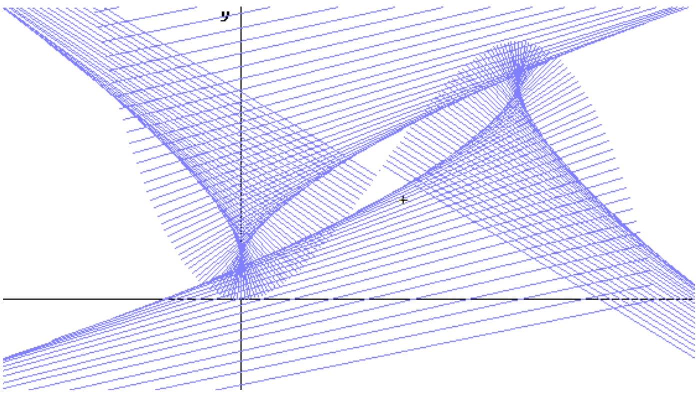
One can recognize that neighbouring pbis are parallel. The "very last" pbi will have the direction to a point in infinity:

#125: $\text{EXPAND}\left(\text{VECTOR}\left(\left[\text{pbi}\left(2, \frac{1}{n^2}\right)\right], n, 10, 50, 10\right)\right)$

#126: $\begin{bmatrix} 3.34-0.666\cdot x \\ 3.33-0.666\cdot x \\ 3.33-0.666\cdot x \\ 3.33-0.666\cdot x \\ 3.33-0.666\cdot x \end{bmatrix}$

The result is very clear: y = (10 - 2x)/3

#127: $\frac{10-2\cdot x}{3}$

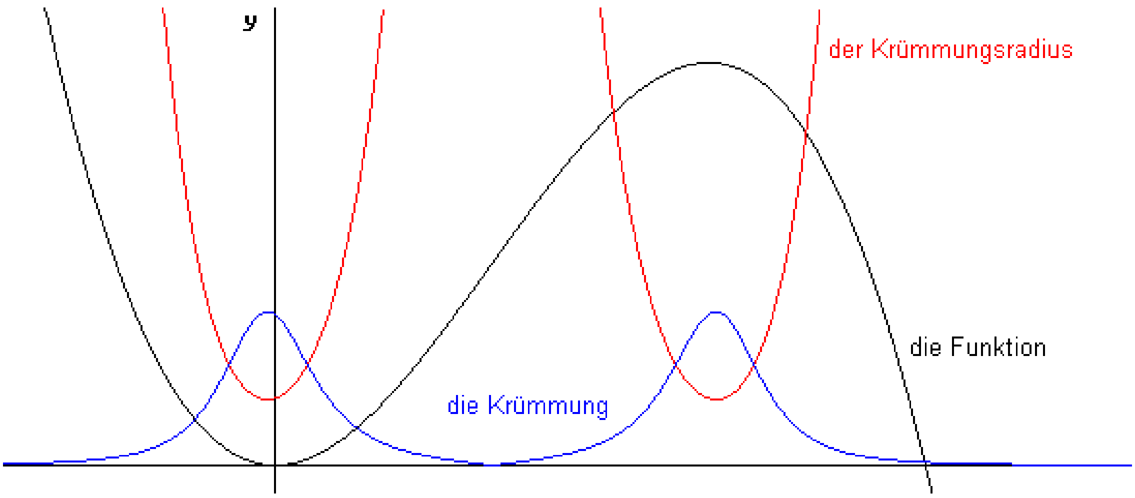


Die Schar der gezeichnetenKreisradien ergibt ein hübsches Muster und läßt deutlich erkennen, dass die Evolute die Einhüllende der Kurvennormalen darstellt.

Schüleraufgaben:

Erzeuge solche Fadengrafiken nach eigenen Vorstellungen, indem Du passende Grundfunktionen suchst. Auch stückweise definierte Funktionen eignen sich gut dazu.

Zum Abschluss stellen wir in einer Grafik den Graphen der Funktion, des Krümmungsradius und dessen Kehrwert, der Krümmung, in Abhängigkeit von der Stelle *x* dar. Die gegenseitigen Abhängigkeiten können hier sehr deutlich erkannt werden.



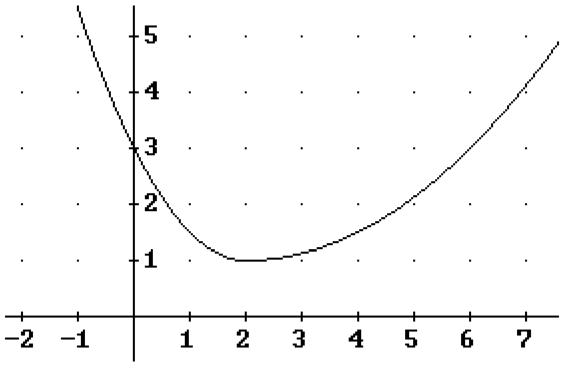
9 Und noch eine Sprungstelle

Im Titel dieses Papiers wird ein „Zielsprung” versprochen. Wir werden nun versuchen, auch bei der Krümmung eine Sprungstelle zu entdecken, bzw. zu provozieren. Dazu soll eine andere Funktion, die abschnittsweise definiert wird, dienen.

Da die Vorgangsweise auf dem *TI* einige “Tricks” erfordert”beginnen wir mit der *DERIVE* - Durchführung.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 2x + 3 & \text{for } x \le 2 \\ \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2} & \text{else} \end{cases}$$

```
f(x) :=
  If x ≤ 2
     x^2/2 - 2·x + 3
     x^2/8 - x/2 + 3/2
```

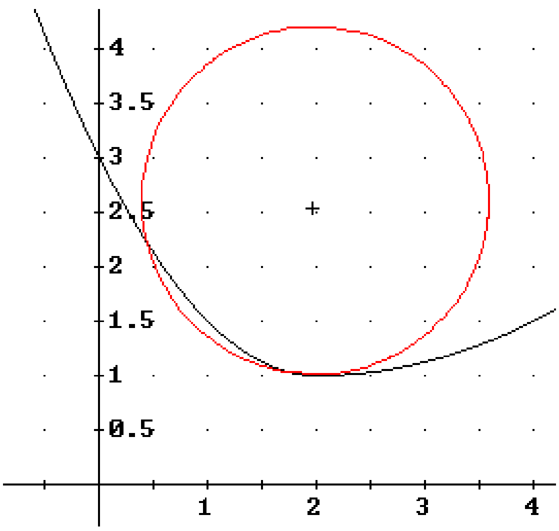


Die definierte Funktion `circles` arbeitet ähnlich wie die `VECTOR`-funktion in Ausdruck #106 von vorhin und liefert ein deutliches Ergebnis! Der Kreis kann gezeichnet werden.

#168: $\text{circles}(2, 0.5^n, 10, 15, 1)$

#169: $$\begin{bmatrix} 2.0002 & 2.6 & 1.6 \\ 2.0001 & 2.6 & 1.6 \\ 2 & 2.6 & 1.6 \\ 2 & 2.6 & 1.6 \\ 2 & 2.6 & 1.6 \\ 2 & 2.6 & 1.6 \end{bmatrix}$$

#170: $(x - 2)^2 + (y - 2.6)^2 = 1.6^2$

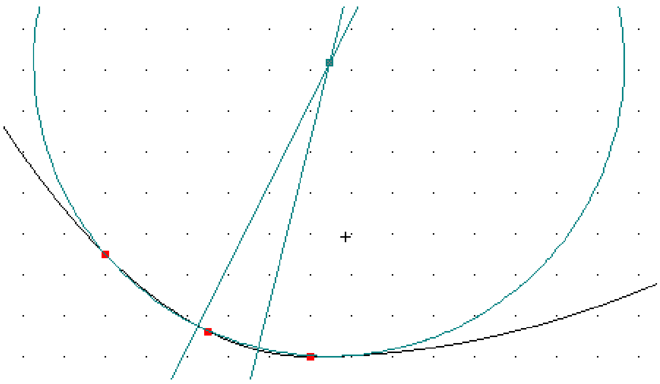


Dieses Resultat kann nicht befriedigen!

Wir müssen auch hier zwischen einer rechts- und linksseitigen Annäherung unterscheiden:

Der rechtsseitige Kreis wird bestimmt durch drei Punkte auf dem Graphen mit den Argumenten x_0, x_0+u und $x_0+u/2$ und $u > 0$. Sein Mittelpunkt ist wieder der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks, und damit der Schnittpunkt von zwei der drei Streckensymmetralen.

Dementsprechend ist der linksseitige Kreis definiert durch die Kurvenpunkte mit den Argumenten x_0, x_0-u und $x_0-u/2$.



Die Abbildung zeigt den möglichen Beginn einer Annäherung von links an die Stelle $x_0 = 0$. Eingezeichnet sind zwei Streckensymmetralen und deren Schnittpunkt.

Über `xcol(x0,u)` und `ycol(x0,u)` definieren wir die Mittelpunktskoordinaten dieses Kreises und hoffen wiederum auf ein Paar von stabilen Zahlen, wenn wir nur das $u = \Delta x$ eine Nullfolge durchlaufen lassen. Die **`pbi`**-Funktion leistet dabei gute Dienste.

$$\#179: \quad \mathrm{xcol}(x0,\ u) := \left[\mathrm{SOLUTIONS}\left(\mathrm{pbi}(x0,\ -u) = \mathrm{pbi}\left(x0,\ -\frac{u}{2}\right),\ x\right)\right]_1$$

$$\#180: \quad \mathrm{ycol}(x0,\ u) := \mathrm{pbi}(x0,\ -u,\ \mathrm{xcol}(x0,\ u))$$

$$\#181: \quad \mathrm{r0nl}(x0,\ u) := \left|[x0,\ f(x0)] - [\mathrm{xcol}(x0,\ u),\ \mathrm{ycol}(x0,\ u)]\right|$$

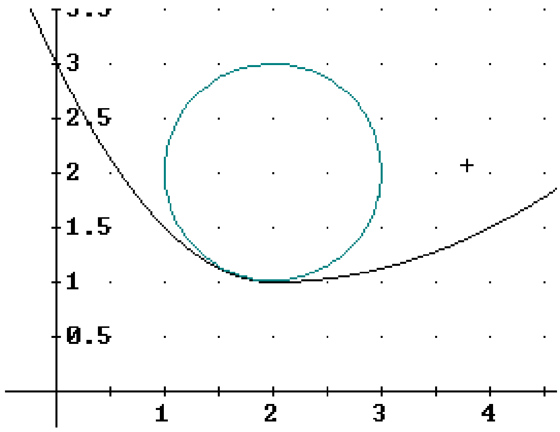
$$\#182: \quad \mathrm{VECTOR}\left(\left[\mathrm{xcol}(2,\ 0.5^n),\ \mathrm{ycol}(2,\ 0.5^n),\ \mathrm{r0nl}(2,\ 0.5^n)\right],\ n,\ 0,\ 10\right)$$

Und wie wir sehen, hoffen wir nicht vergeblich, allerdings mit einem deutlich anderen Ergebnis als vorhin:

$$\#183: \quad \begin{bmatrix} 2.0937 & 2.4375 & 1.4405 \\ 2.0117 & 2.1093 & 1.1094 \\ 2.0014 & 2.0273 & 1.0273 \\ 2.0001 & 2.0068 & 1.0068 \\ 2 & 2.0017 & 1.0017 \\ 2 & 2.0004 & 1.0004 \\ 2 & 2.0001 & 1.0001 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\#184: \quad (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

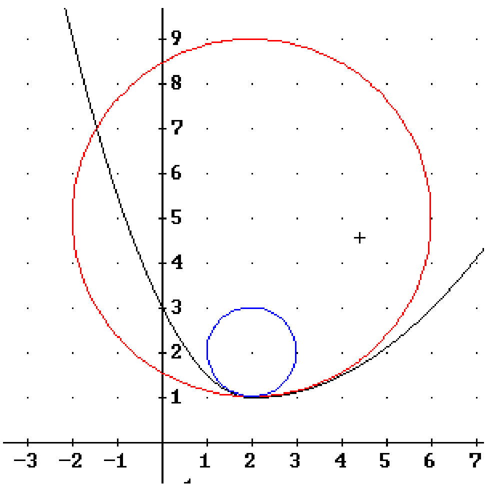
So sieht der „Fast-Krümmungskreis” an der Stelle $x_0 = 2$ bei Annäherung von links aus. Die gleiche Vorgangsweise kann auch von rechts vorgenommen werden, wie der nächste Ausdruck zeigt.



```
#185: xcor(x0, u) := xcol(x0, -u)
#186: ycor(x0, u) := pbi(x0, u, xcor(x0, u))
#187: r0nr(x0, u) := |[x0, f(x0)] - [xcor(x0, u), ycor(x0, u)]|
#188: VECTOR([xcor(2, 0.5^n), ycor(2, 0.5^n), r0nr(2, 0.5^n)], n, 7, 10)
```

#189: $\begin{bmatrix} 1.99999 & 5.00000 & 4.00000 \\ 1.99999 & 5.00000 & 4.00000 \\ 1.99999 & 5.00000 & 4.00000 \\ 1.99999 & 5.00000 & 4.00000 \end{bmatrix}$

#190: $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 4^2$



Das führt nun zu einem anderen Kreis.

Wir müssen daher zur Kenntnis nehmen, dass es an dieser Stelle – an der die beiden Teilgraphen stetig und differenzierbar – aneinander stoßen, keinen eindeutigen Krümmungskreis besitzen. Später wird die Differentialrechnung dafür die Begründung liefern.

Wir definieren die Funktion `circles_both`, die uns die Daten aus beiden Annäherungen übersichtlich in einer Tabelle zusammenstellt.

#197: $\text{circles\_both}\left(2, \dfrac{1}{2^n}, 10, 20, 2\right)$

#198:

x-left	y-left	radius-left	x-right	y-right	radius-right
2.000000093	2.00004375	1.00004375	1.999999994	5.000010937	4.000010937
2.000000031	2.000021098	1.000021098	1.999999998	5.000005274	4.000005274
2.000000012	2.000011388	1.000011388	1.999999999	5.000002847	4.000002847
2.000000005	2.000006675	1.000006675	1.999999999	5.000001668	4.000001668
2.000000002	2.000004167	1.000004167	1.999999999	5.000001041	4.000001041
2.000000001	2.000002734	1.000002734	1.999999999	5.000000683	4.000000683

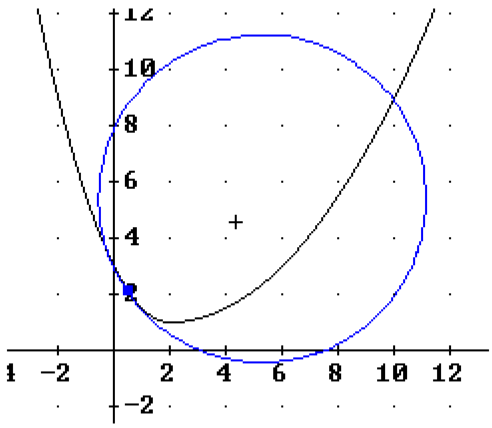
Damit sind vorerst unsere Ergebnisse von vorhin bestätigt. Wie sieht es aber an einer anderen Stelle aus, etwa für $x_0 = 0.5$.

#217: $\text{circles\_both}\left(\dfrac{1}{2}, 0.1^n, 12, 15, 1\right)$

#218:

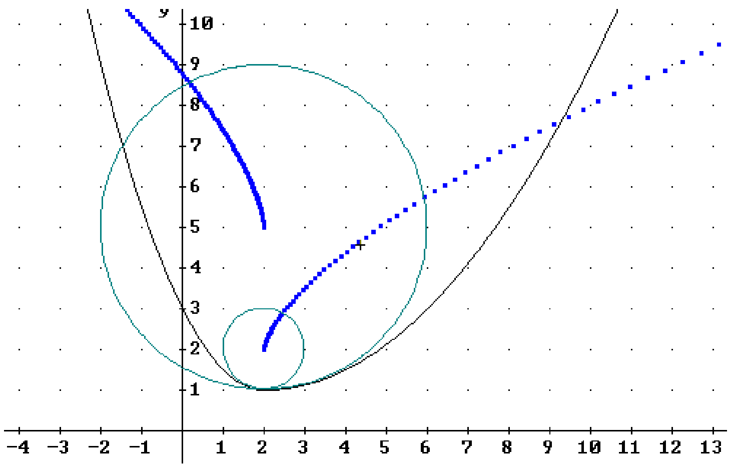
x-left	y-left	radius-left	x-right	y-right	radius-right
5.37500	5.37500	5.85902	5.37499	5.37499	5.85902
5.37500	5.37500	5.85902	5.37499	5.37499	5.85902
5.37500	5.37500	5.85902	5.37499	5.37499	5.85902
5.37500	5.37500	5.85902	5.37499	5.37499	5.85902

Für $x_0 = 0.5$ gibt es offensichtlich einen eindeutig bestimmten Krümmungskreis.



Natürlich wird wieder mit $x_0 = t$ verallgemeinert, um die Ortslinie der Kreismittelpunkte zu finden. Machen wir das ganz einfach mit einem flotten „Einzeiler“ – indem wir ein sehr kleines letztes $u = \Delta x$ wählen und sofort zum Zeichnen dieser Parameterdarstellung wechseln.

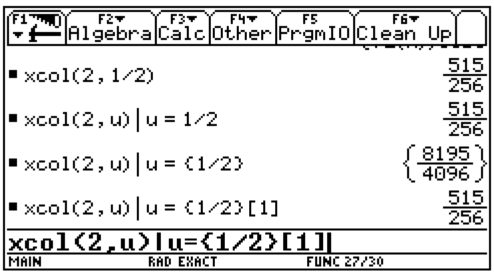
$$\#204:\ \left[\mathrm{x0n}\left(t,\ \frac{1}{1000}\right),\ \mathrm{y0n}\left(t,\ \frac{1}{1000}\right)\right]$$



Wenn Du einmal einen so richtig „schönen” mathematischen Ausdruck bewundern willst, dann „vereinfache” den Term #204!

Die Evolute zeigt – und nun nicht mehr überraschend – eine Unstetigkeitsstelle, und zwar eine Sprungstelle. So haben wir endlich doch unser zweites Ziel, wieder eine Sprungstelle (von zweifellos höherer Qualität) erreicht. Aber nun müssen wir dieses Ziel auch noch mit unserem „Taschenfahrzeug“, dem TI-92 anpeilen.

Wenn man versucht, die Vorgangsweise von eben in ein `Data`-Blatt zu übernehmen, treten unerwartete Schwierigkeiten auf. Der *TI* behandelt nämlich Listen als Argumente von abschnittsweise definierten Funktionen im `Data/Matrix`-Editor nicht in der erwarteten Weise.



Betrachte die merkwürdigen Ergebnisse im linken Bild. Die Funktion `xcol(x0,u)` macht einen Unterschied in der Verarbeitung des $u = 1/2$ abhängig davon ob 1/2 Element einer Liste ist oder nicht. Damit ist aber auch klar, dass man mit Listen in diesem Fall keine richtigen Ergebnisse erwarten kann.

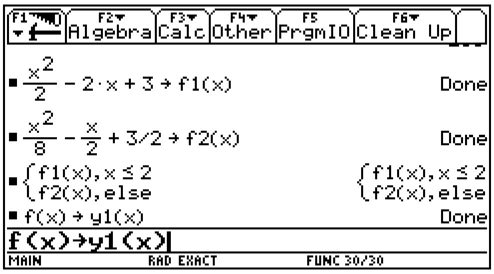
Ich bat David Stoutemyer – er implementierte das CAS in den *TI* – und ich bekam umgehend zwei Antworten, die ich im Original zitiere.

> *Dear Josef,*
> *I have verified the behavior that you observed and eliminated several possible causes, but it will take me awhile to identify the cause.*
>
> *Thanks for sending the example. We always want to know about such things.*
>
> *-- aloha, David*

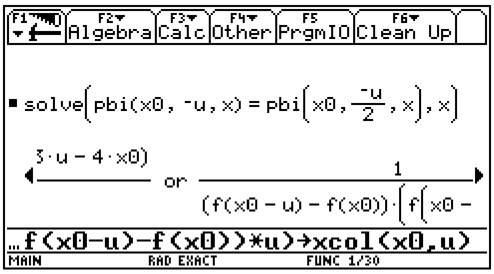
...und einige Stunden später fand ich noch eine Nachricht in meinem elektronischenBriefkasten:

> *Hi Josef,*
> *The cause of the behavior is:*
>
> *a) DERIVE simplifies expressions such as [-1, 0] <= 0 to [-1 <= 0, 0 <= 0], which simplifies to [true, true] when it is the predicate of a DERIVE IF statement; whereas*
>
> *b) the TI-89 and TI-92+ simplify expressions such as {-1, 0} <= 0 to false, so the WHEN statement takes the x^2 branch rather than the x^2/8 branch.*
>
> *In this case the DERIVE approach is more useful. However, there are cases where it is important to decide that a list is never comparable to a scalar -- particularly in programming applications.*
>
> *To do this application for lists, you could write a multi-line function that iterates the existing xcol(...) over the elements of a list.*
>
> *I hope this helps.*

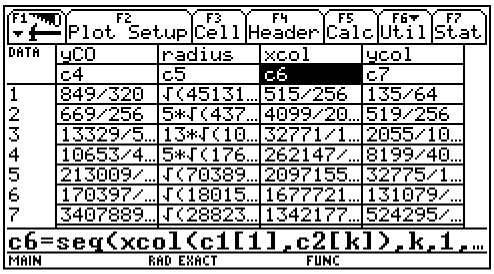
Wie man sich aber leicht vorstellen kann, wollte ich meine Reise zur zweiten Sprungstelle auf dem `Data-Matrix`-Editor vollenden und nicht auf einmal die Methode wechseln. Und dann fand ich doch zwei Möglichkeiten, die ich gerne vorzeigen möchte.



Ich empfehle, die abschnittsweise definierte Funktion mit Hilfe zweier Hilfsfunktionen `f1` und `f2` zu definieren, weil wir diese später brauchen werden.



Sehr ähnlich dem *DERIVE* Ausdruck #179 erhalten wir dann `xcol(x0,u)` – wobei man nur den linken Teil der angebotenen Lösung nimmt.



Um nun die oben angesprochenen Berechnungsprobleme zu überwinden, werden wir die Listen nicht im Ganzen verarbeiten, sondern Zelle für Zelle. Wir sprechen jede Zelle einzeln an, indem wir in jeder Spalte die `seq`-Funktion sinnvoll einsetzen. Weil hier auch wegen interner Rundungsalgorithmen Fehler auftreten können, empfehle ich, im `EXACT`-Mode zu arbeiten.

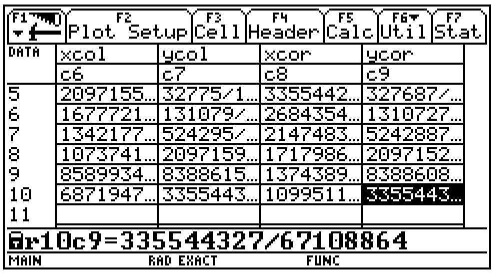
Die definierenden Kopfzellen (Headers) für die Spalten `c6`, `c7`, `c8` und `c9` lauten dann:

`c6` (`xcol` = *x*-Koordinate des Kreismittelpunkts bei linksseitiger Annäherung:
`seq(xcol(c1[1],c2[k]),k,1,10)`

`c7` (`ycol`): `seq(pbi(c1[1],-c2[k],c6[k]),k,1,10)`

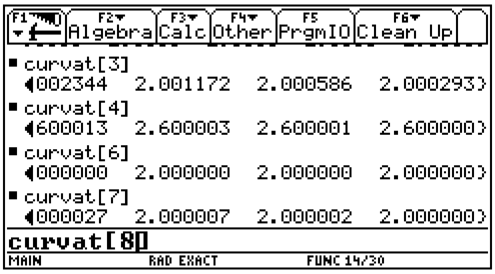
`c8` (`xcor`): `seq(xcol(c1[1],-c2[k]),k,1,10)`

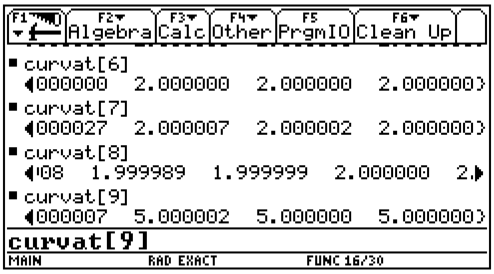
`c9` (`ycor`): `seq(pbi(c1[1],c2[k],c8[k]),k,1,10)`



Die Spalten 3 und 4 (`xco` and `yco`) können dementsprechend angepasst werden.

Um die Ergebnisse schließlich als Dezimalzahlen zu sehen wechsle in den Home Screen, rufe die Listen -wie unten gezeigt - auf und approximiere dann die Spalten aus dem Datenblatt, dem ich bei seiner Eröffnung die Bezeichnung `curvat` gegeben hatte.

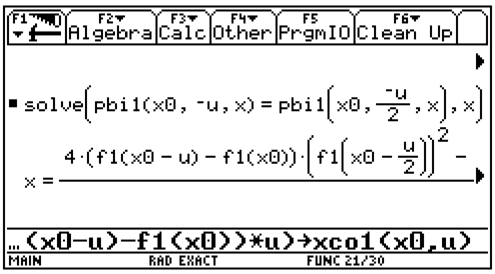




Wir finden die gleichen Werte wie bei der *DERIVE* Prozedur. Leider funktioniert aber die letzte Verallgemeinerung noch immer nicht. *t* läßt sich nicht erfolgreich in `c1[1]` einsetzen. So kommen wir also nicht an die Parameterdarstellung der Evolute. Noch eine Idee ist gefragt!

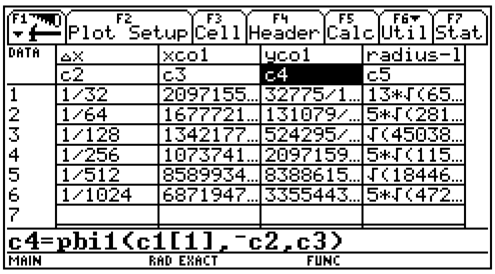
Jetzt nützen wir die Tatsache, dass wir zwei Funktionen vordefiniert haben, nämlich f1(x) und f2(x), wobei f1 gültig für $x \le 2$ und f2 gültig für $x > 2$.

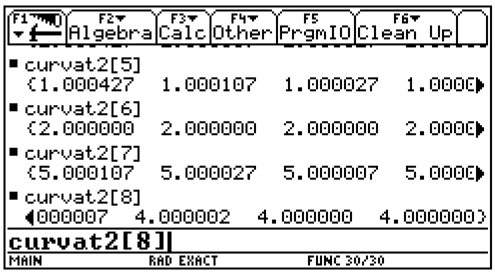
Definiere `xco1, yco1` und `xco2, yco2` getrennt, indem Du zwei verschiedene Funktionen für die Streckensymmetralen `pbi1` und `pbi2` erzeugst, – eine für f1(x) und die andere für f2(x).
Dazu lade `pbi` in den `Program Editor` und ersetze erst `f` durch `f1` und speichere als `pbi1`. Auf die gleiche Weise wird durch Ersatz von `f` durch `f2` die Funktion `pbi2` erzeugt.



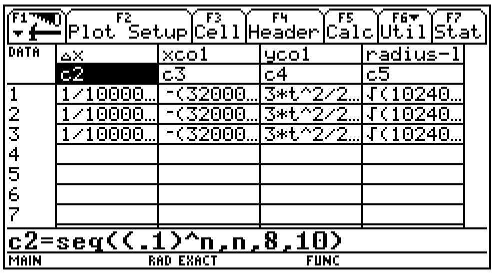
Der Bildschirm zeigt wie man dann `xco1(x0,u)` und natürlich auch `xco2(x0,u)` findet.

Diese beiden Funktionen verwenden wir nun in einem neu-zu eröffnenden `Data`-Blatt `curvat2.` Vergleiche nun mit dem *DERIVE* Ergebnis von #198.



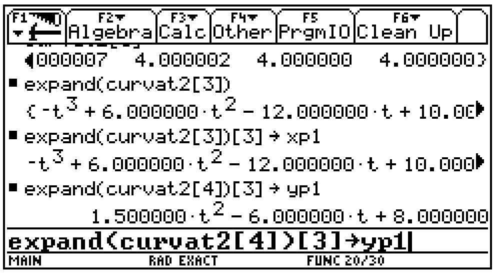


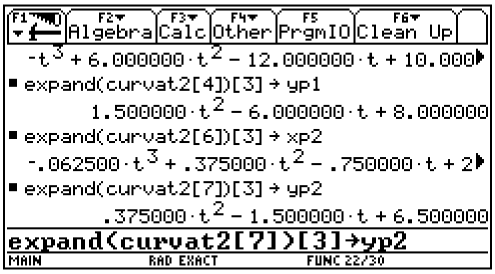
Jetzt werden wir nochmals versuchen, die allgemeine Stelle $x_0 = t$ einzusetzen:

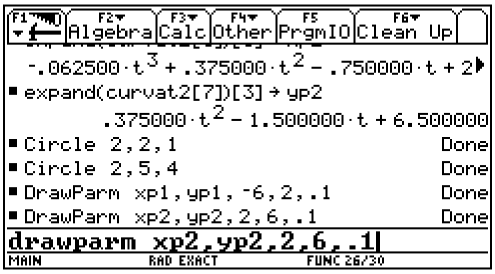


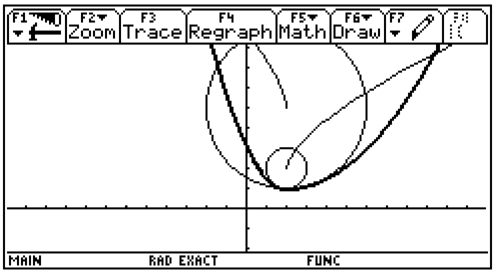
Jetzt haben wir den gewünschten Erfolg und erhalten Resultate für zwei getrennte Ortslinien. Wir übertragen die Zellinhalte in den Home Screen und speichern die approximierten Werte als `xp1`, `yp1`, `xp2` und `yp2`. Damit können wir in bereits bewährter Manier die beiden Äste der Evolute zeichen (lassen).

Die folgenden Abbildungen sollen die Vorgangsweise illustrieren.





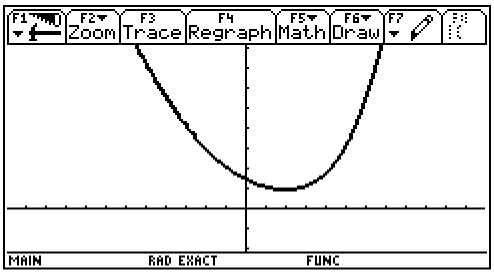




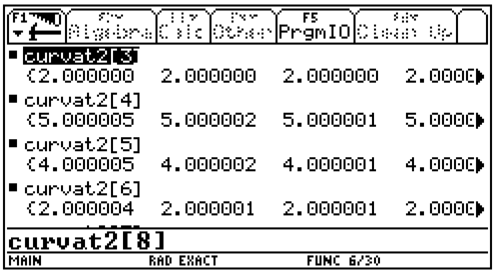
So haben wir denn endlich unser Ziel – den anderen Sprung – auch mit dem leichteren Fahrzeug, dem *TI*-89 oder *TI*-92 erreicht.

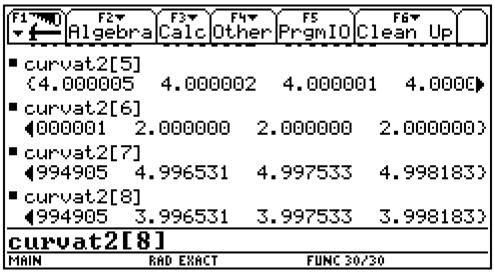
Die Studenten könnten nun den Eindruck gewonnen haben, dass der Grund für diese Unstetigkeit in der Krümmung die abschnittsweise Definition der Kurve ist, und dass dieses Phänomen immer an den Anschlussstellen auftritt. Um diese Vermutung zu stätigen oder zu widerlegen nehmen wir ein letztes Beispiel und arbeiten sofort in unserem ausgeklügelten Datenblatt `curvat2`.

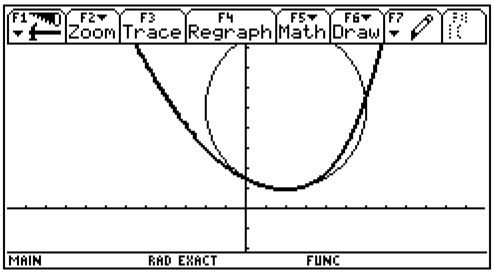
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2} & \text{for } x \le 2 \\ \dfrac{x^3}{24} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{7}{6} & \text{else} \end{cases}$$



Die Ergebnisse sind überzeugend. Wir erhalten offensichtlich einen eindeutig bestimmten Krümmungskreis für die Stelle $x_0 = 2$!



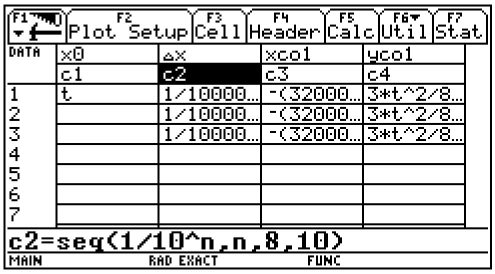




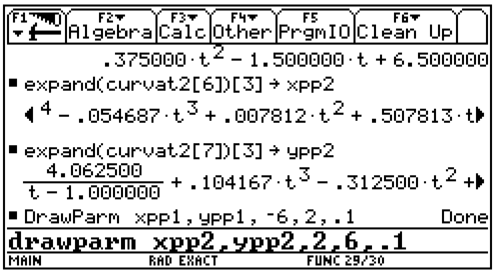
Vergleiche die Ergebnisse der Spalten 3,4 und 5 mit denen der Spalten 6, 7 und 8.

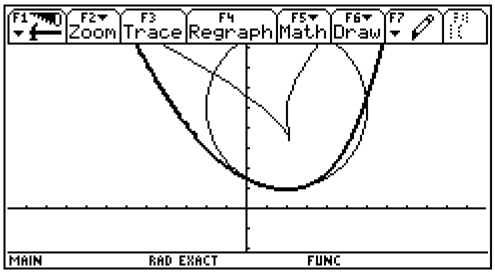
Daher können wir auch eine stetige Ortslinie der Mittelpunkte erwarten!

Ersetze $x_0 = 2$ durch $x_0 = t$ und …..

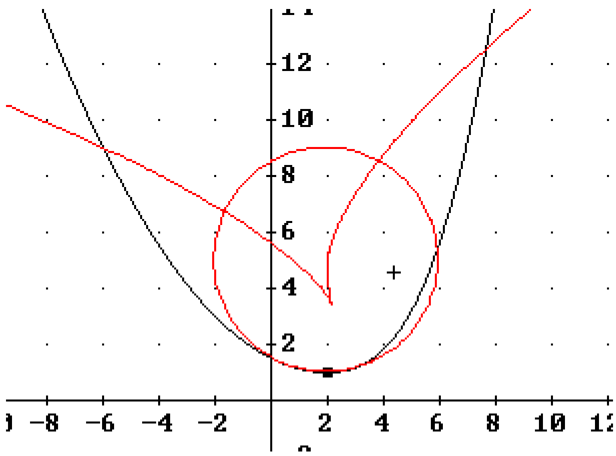


.... erzeuge die Parameterform wie vorhin. Lasse anschließend die Kurve zeichnen.





Hier ist die entsprechende *DERIVE* Grafik.



Schüleraufgabe:

Versuche eine Evolute mit zwei Sprungstellen zu finden.
Wie sieht die Evolute der MM-Funktion von Seite 8 aus?

10 Abschließende Bemerkungen

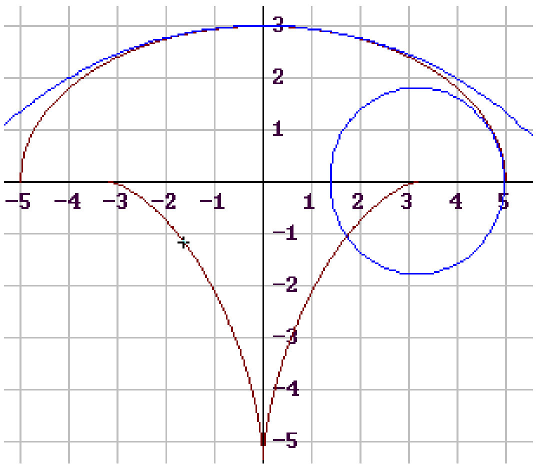
Ich habe die – für mich überraschende - Erfahrung gemacht, dass die Schülerinnen und Schüler gerne diesen sehr innermathematischen Gedanken und Überlegungen folgen. Irgendwie fühlen sie die Abenteuer in ihren Köpfen und werden ein wenig vom Geist der Mathmetik inspiriert.

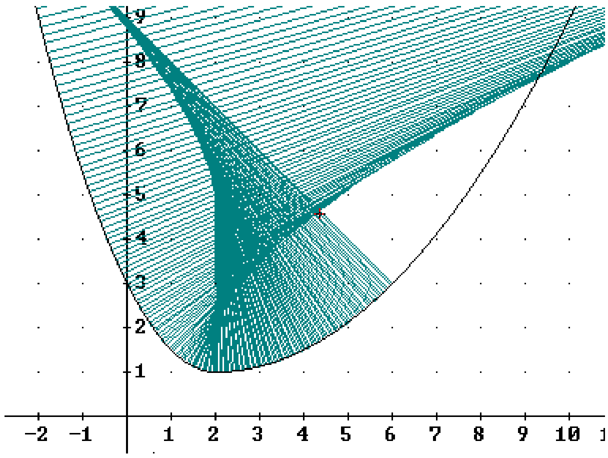
Ich möchte mich besonders bei David Bowers bedanken, der in seinem fabelhaften Workshop in San Francisco auf die vielen pädagogischen und diaktischen Möglichkeiten des `Data/Matrix` Editors hingewiesen hat.

Außerdem bin ich einigen Teilnehmern an der 1. T^3 – Winterakademie (1.-6. Jänner 2001, Spital/Pyhrn, Österreich) zu großem Dank verpflichtet. Sie zeigten die Idee der „absoluten Adressierung“ einer Zelle im `Data/Matrix` Editor (K.-H. Keunecke, Detlev Kirmse and Manfred Grote). Darüber hinaus extra noch meinem Freund K.-H. Keunecke, da mich gerade sein für die ICTMT Klagenfurt bestimmter Vortrag inspiriert hat, meine ursprünglichen Untersuchungen auf die Krümmung auszuweiten.

Ich widme dieses Papier unserem Detlev Kirmse und seiner Familie. Detlev hat unmittelbar nach Heimkunft von der Winterakademie einen Schlaganfall erlitten. Alle Freunde und Kollegen wünschen ihm eine baldige völlige Genesung und wir freuen uns auf viele weitere gemeinsame Stunden.

Mit diesem mathematischen Inhalt verbinde ich außerdem schöne Erinnerungen an Jim Schultz (University of Ohio). Während seines Besuches in St. Pölten war er Zeuge meines ersten Versuches, dieses mathematische Stoffgebiet so an die Schüler heranzutragen. Am darauffolgenden Abend hatten wir ein langes Gespräch – bei einem Wiener Heurigen, versteht sich – über die Schülerreaktionen und die Vorzüge einer graphisch-numerischen Vorbereitung der Grundlagen, auf denen später strenge Analytik und Exaktifizierung aufbauen können und sollen. Und schließlich muss ich mich auch bei den Schülern der 4. Jahrgänge der BHAK St.Pölten im Schuljahr 2000/2001 dafür bedanken, dass sie so willig den Spuren ihres neugierigen Lehrers gefolgt sind.





Die diesbezügliche DERIVE 5 Datei kann beim Autor auf Anfrage erhalten werden. Auch sonstige Anfragen, Anregungen und Kritik werden gerne entgegengenommen.

[1] K.-H. Keunecke, Curvature as a Limit, DERIVE Newsletter #41, 2001
[2] Josef Böhm, From Pole to Pole on the Data-Editor, DERIVE Newsletter #41, 2001
[3] David Bowers, The Best of Two Worlds, Lecture on the ICTCM12, San Francisco
[4] Briefwechsel mit Wolfgang Pröpper