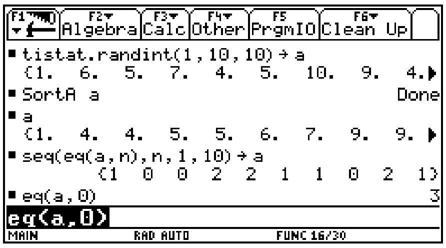
Simulation von Zufallsversuchen mit dem Voyage 200

Guido Herweyers
KHBO Campus Oostende
K.U.Leuven

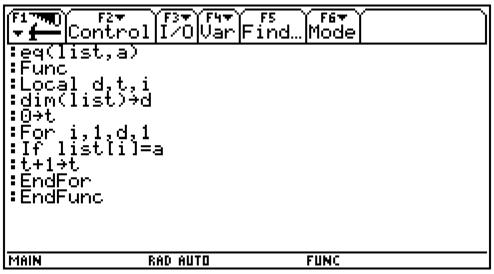
1. Entenjagd

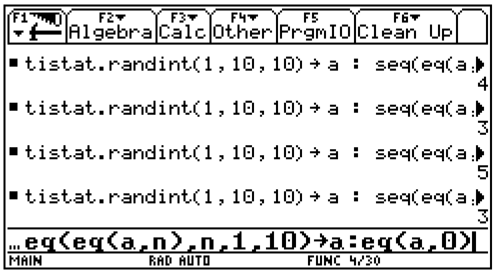
Zehn Jäger, alle perfekte Schützen, lauern vor einem Feld auf Enten. Bald landen dort 10 Enten. Die Jäger können nur einmal schießen und sie können nicht ausmachen, wer auf welche Ente schießt. Daher schießen sie gleichzeitig, aber jeder wählt sein Opfer zufällig aus. Wieviele Enten überleben im Durchschnitt, wenn dieses “Experiment” oft wiederholt wird?



Alle Kommandos werden zusammen ausgeführt (Eingabe in einer Zeile):

`tistat.randint(1,1Ø,1Ø)→a : seq( eq(a,n) , n , 1, 1Ø) →a : eq(a,Ø)`





Mittelwert nach 4 Versuchen : (4+3+5+3)/4 = 3.75

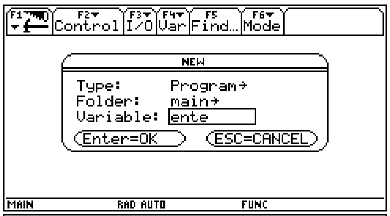
Theoretisch:

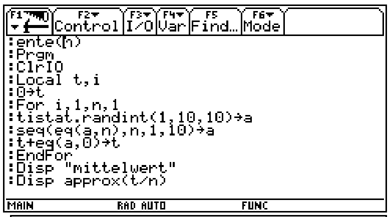
Betrachten wir z.B. Ente Nr.6 . Sie wird überleben, wenn jeder der 10 Jäger eine andere Ente als Nr.6 wählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $0.9^{10} \simeq 0.35$.

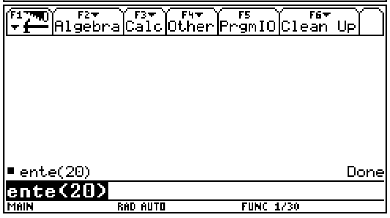
Aufgrund der Häufigkeitsdeutung der Wahrscheinlichkeit werden im Durchschnitt 3.5 Enten überleben.

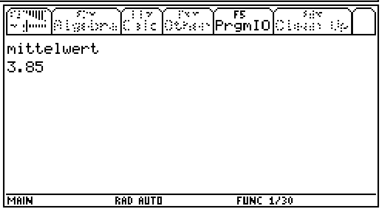
Die Anzahl der Enten, die pro Experiment überleben, ist *nicht* binomial verteilt !

Programmieren: ente(n) führt das Experiment n mal aus.



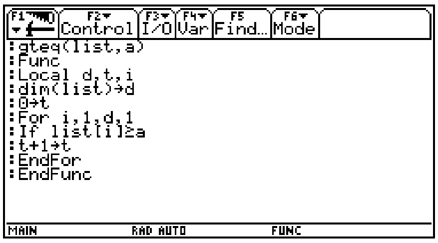


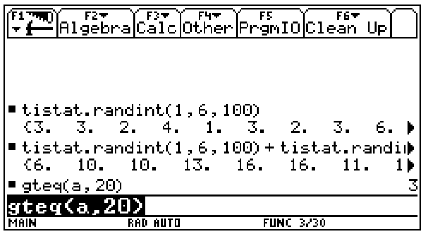




2. Würfeln

Wir werfen mit vier Würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dabei eine Augensumme von mindestens 20 zu erreichen?





100 Simulationen mit

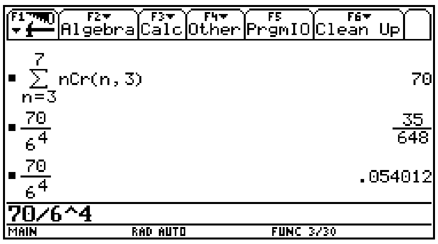
```
randint(1,6,100)+randint(1,6,100)+randint(1,6,100)+randint(1,6,100)
```

ergaben hier eine relative Häufigkeit von 0.03.

Theoretische Berechnung der Wahrscheinlichkeit:

P(Augenzahl ≥ 20) = P(Augenzahl = 20) + P(Augenzahl = 21) + … P(Augenzahl = 24) =

$$= \frac{\binom{7}{3}+\binom{6}{3}+\binom{5}{3}+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{6^4} = \frac{70}{6^4} = 0.054$$



Erklärung: Günstig für z.B. Augenzahl = 20 sind die Ausfälle, bei denen die 4 Würfel insgesamt 4 Punkte des Maximalwerts $4 \times 6 = 24$ verlieren.

Den Ausfall $(5,6,4,5)$ kodieren wir mit • 0 0 • • 0 •

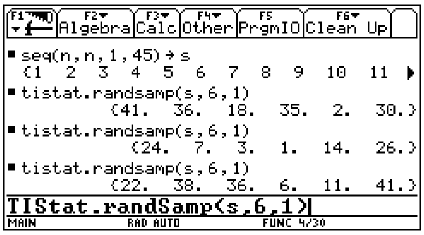
und (6, 2, 6, 6) kodieren wir mit 0 • • • • 0 0

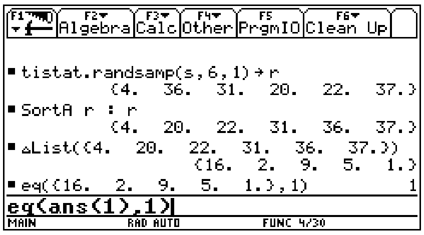
Das Zeichen 0 dient als Übergang zum nächsten Würfel.

Es gibt $\binom{7}{3}$ Möglichkeiten um 4 Plätze aus 7 Plätzen für die Punkte auszuwählen.

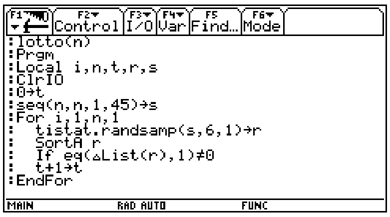
3. Nachbarn beim Lotto

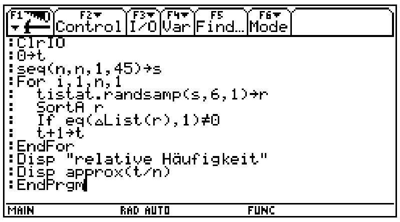
Beim Lotto werden jede Woche 6 Gewinnzahlen aus den 45 Zahlen 1, 2, 3, …, 45 zufällig und ohne Zurücklegen gezogen. Letzte Woche wurden folgende Zahlen gezogen: 3, 14, 15, 24, 35, 38 . Es kamen die beiden Nachbarn 14 und 15 vor. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Paar Nachbarn vorkommt?

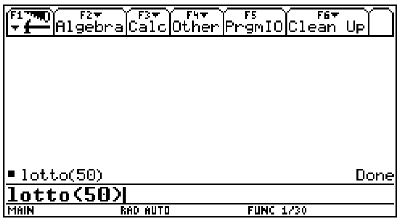


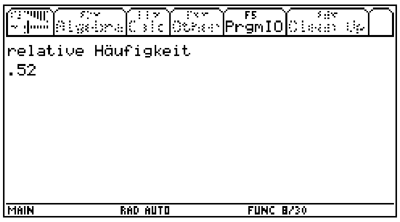


Programmieren: lotto(*n*) führt das Experiment *n* mal aus.



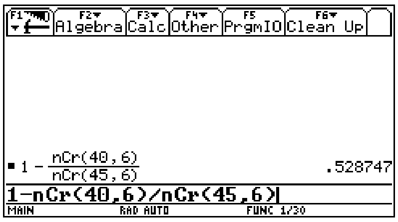






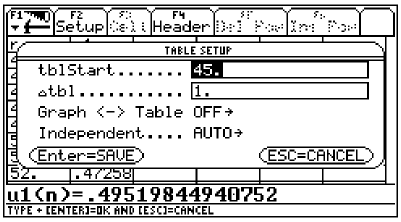
Theoretische Berechnung der Wahrscheinlichkeit:

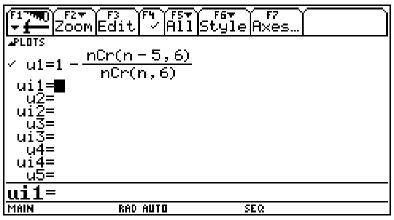
Wir denken uns die Zahlen 1 bis 45 als eine Reihe von Kugeln. Die 39 nicht gezogenen Kugeln weiß, die 6 gezogenen Kugeln schwarz. Für das Komplement $\overline{A}=$ “keine Nachbarn” dürfen keine zwei schwarzen Kugeln benachbart sein. Daher gibt es für sie 40 Plätze (links von jeder weißen Kugel und rechts von der letzten weißen Kugel). Daher gilt

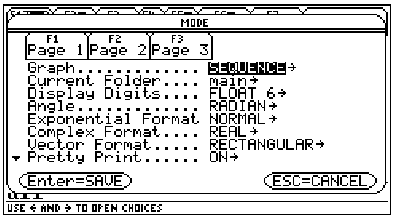


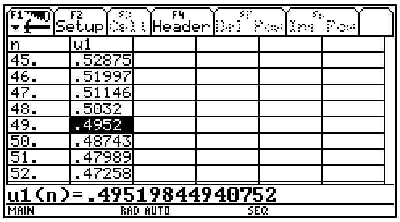
$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\binom{40}{6}}{\binom{45}{6}}=0.529$$

Verallgemeinerung: 6 Gewinnzahlen aus den *n* Zahlen 1, 2, 3, … *n* ziehen.
Ab welchem Wert von *n* ist $P(A)\le 50\%$?









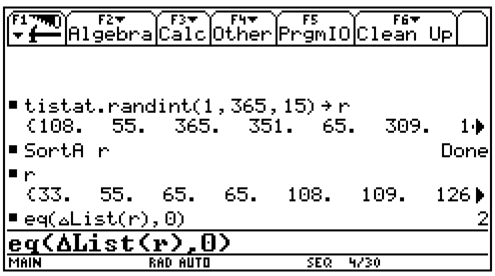
Lösung: ab $n=49$

4. Das Geburtstagsproblem

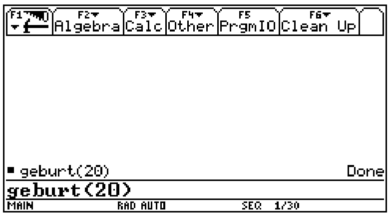
In einemZimmer ist eine Gesellschaft von 15 Personen versammelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag feiern?

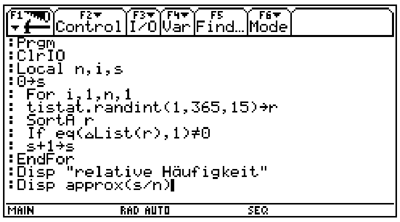
Wir nehmen an , dass das Jahr 365 Tage hat, die als Geburtstage gleich wahrscheinlich sind.

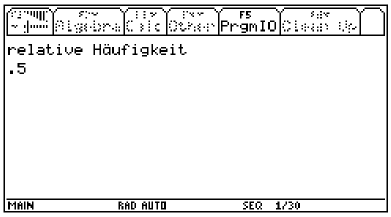
Wir simulieren die Geburtstage von 15 Personen:



Programmieren : geburt(*n*) simuliert das Experiment *n* mal.







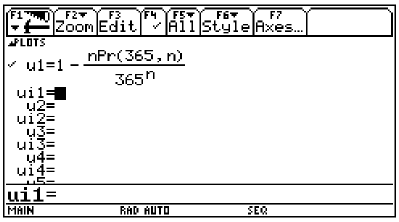
Theoretische Berechnung der Wahrscheinlichkeit:

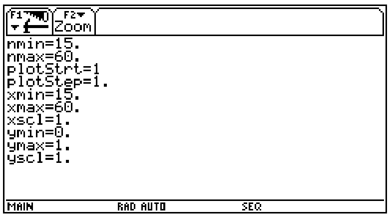
Betrachten wir das Ereignis *A*: “zwei Personen haben den gleichen Geburtstag”, dann gilt:

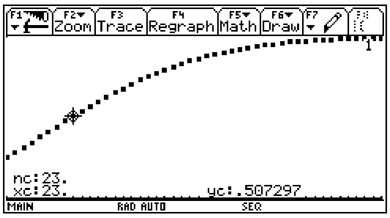
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 351}{365^{15}} \simeq 0.25$$

Verallgemeinerung für eine Gesellschaft von *n* Personen :

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^{n}}$$







Ab $n = 23$ ist $P(A) > 0.5$

5. Das Problem der Garderobefrau

Sechs Herren geben ihre Hüte bei der Garderobe ab. Die Garderobefrau gibt die Hüte zufällig zurück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Herr seinen eigenen Hut erhält?

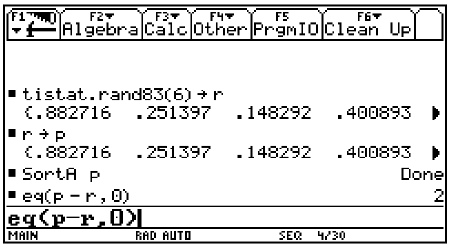
Herr 1 hat Hut 1 , Herr 2 hat Hut 2 , ….. Herr 6 hat Hut 6.

Eine Wahl der Garderobenfrau liefert eine Permutation von $\{1,2,3,4,5,6\}$ (die Hüte) nach $\{1,2,3,4,5,6\}$ (die Herren). Mindestens ein Herr bekommt seinen eigenen Hut zurück, wenn die Permutation mindestens einen “Fixpunkt” hat , z.B 3 geht nach 3.

Die Permutation $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 1, 5 \mapsto 6, 6 \mapsto 5$ hat einen Fixpunkt und das notieren wir kurz mit $(2, 4, 3, 1, 6, 5)$. Das Element 3 steht auf seinem richtigen Platz.

Zur Simulation generieren wir 6 (verschiedene) Zahlen zwischen 0 und 1 , und wir untersuchen ob es Zahlen gibt, die auf ihrem natürlichen Platz stehen (der Platz der Zahlen ist aufsteigend geordnet).

So liefert die Reihe (0.87 , 0.45 , 0. 92 , 0.68 , 0.38 , 0.15) oder die Permutation (5 , 3 , 6 , 4 , 2 , 1) einen Fixpunkt.

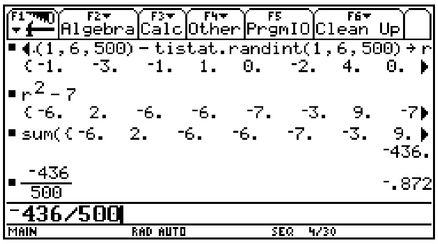


Allgemein ist $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ die Wahrscheinlichkeit für eine fixpunktfreie Permutation von n Elementen . Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Fixpunkt ist daher

$$1-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\simeq 1-e^{-1} \quad (n>2)$$
$$=0.6321\simeq\frac{2}{3}$$

6. Ein Glücksspiel

Sie werfen zwei Würfel und quadrieren die Differenz der Augenzahlen. Das Resultat erhalten Sie in € ausgezahlt - aber zuerst müssen Sie 7 € für die Teilnahme an diesem Spiel bezahlen. Sind sie bereit dieses Spiel oft zu spielen?



Theoretisch:

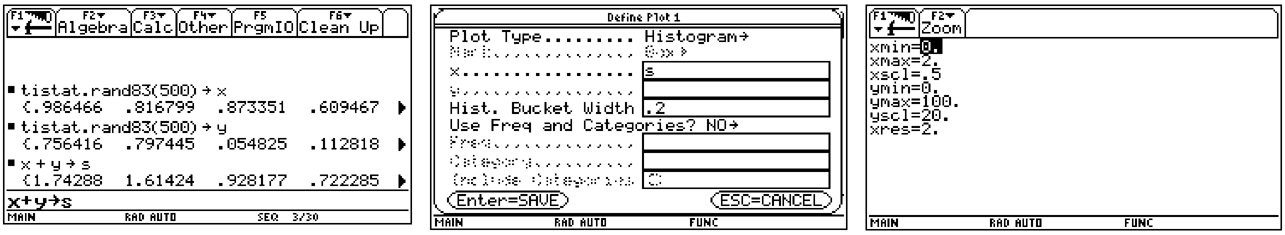
Die Augenzahlen der Würfel sind Zufallsvariable X und Y . Wir berechnen den Erwartungswert $E\left((X-Y)^2\right)=E\left(X^2-2XY+Y^2\right)=2\left(E\left(X^2\right)-E(X)^2\right)=2\cdot Var(X)=\frac{35}{6}$.

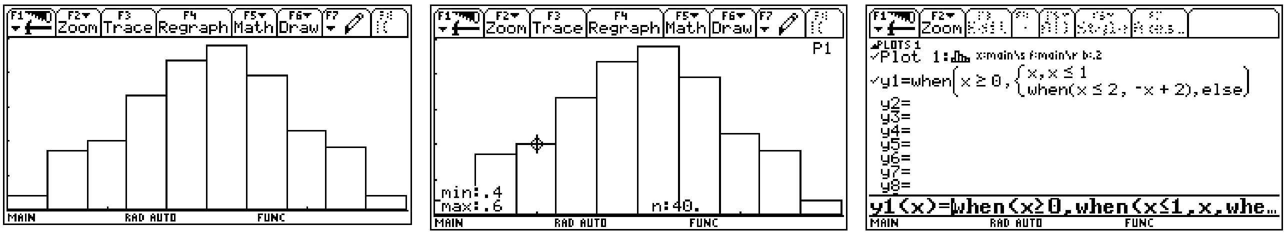
Sie gewinnen $G=(X-Y)^2-7$ mit dem Erwartungswert $E(G)=\frac{35}{6}-7=-1.17$.

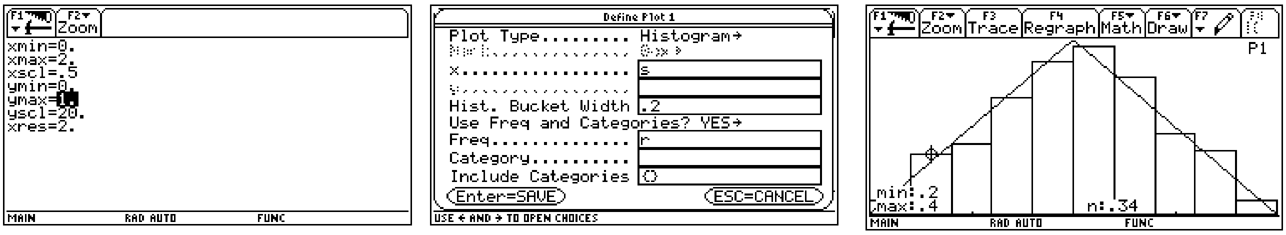
Es ist also für Sie vorteilhafter, dieses Spiel **nicht** zu spielen.

7. Verteilungen untersuchen

Man wählt zwei Zufallszahlen X und Y aus dem Intervall $[0,1]$. Untersuche die Verteilung der Summe dieser Zahlen $S = X + Y$.

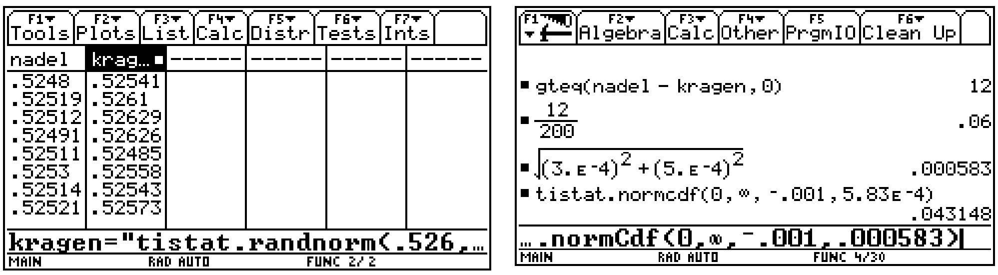






8. Stichproben aus Normalverteilungen

Der Durchmesser X der Nadel eines Plattenspielers ist nach $N(0.525\,,0.0003)$ verteilt. Die Weite der Halterung Y für die Nadel ist nach $N(0.526\,,0.0005)$ verteilt. Berechne die Wahrscheinlichkeit dass eine Nadel nicht in die Halterung passt.



Die Zufallsvariable $D = X - Y$ ist $N\left(0.525 - 0.526, \sqrt{0.0003^2 + 0.0005^2}\right)$ oder

$N(-0.001\,,0.000583)$ verteilt.

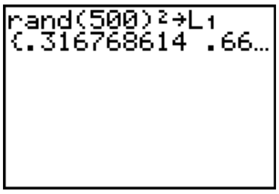
$P(D > 0) = 4.3\%$. Die Simulation ergab die relative Häufigkeit 0.06.

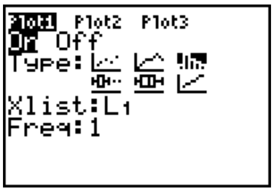
9. Beispiel mit dem TI-83 Plus

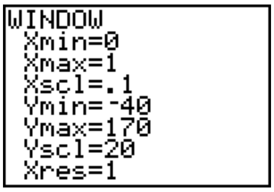
X sei eine im Intervall [0,1] gleichförmig verteilte Zufallsvariable. Wie ist X^2 verteilt? Es gibt – wie in den vorhergehenden Beispielen – zwei Möglichkeiten, dieses Problem zu lösen:

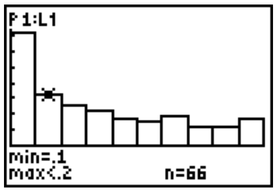
Eine Simulation gibt eine rasche und gute Vorstellung über die Art der Verteilung, die exakte Berechnung führt zur exakten Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen. Die Studenten sollten die Technik der Simulation parat haben, um ein besseres Verständnis für die theoretischen Ergebnisse zu gewinnen.

Der Rechner erzeugt eine Stichprobe von 500 gleichverteilten Zahlen aus dem Intervall und quadriert die entstandene Liste. Ein geeignetes Histogramm der Daten vermittelt eine erste Vorstellung der Verteilung von X^2









Die Verteilungsfunktion $F(y)$ und die Dichtefunktion $f(y)$ of $Y = X^2$ sind

$$F(y) = P(Y \le y) = P\left(X \le \sqrt{y}\right) = \int_0^{\sqrt{y}} 1 \cdot dx = \sqrt{y} \qquad (0 \le y \le 1)$$

$$f(y) = F'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad (0 < y < 1)$$

Um den Zusammenhang zwischen dem Histogramm und der Dichtefunktion $f(y)$ deutlich zu machen, können die senkrecht aufgetragenen Hufigkeiten durch $500 \cdot 0.1 = 50$ dividiert werden (die Anzahl der Beobachtungen multipliziert mit der Klassenbreite). Damit erhält man den Graphen der Dichte der relativen Häufigkeiten (oder, noch einfacher, man multipliziert $f(y)$ mit 50):

Man beachte, dass die relative Häufigkeit der Daten zwischen 0.1 und 0.4 den Wert von 0.33 annimmt. Das ist eine gute Approximation für die entsprechende theoretische Wahrscheinlichkeit. $P\left(0.1 \le X^2 \le 0.4\right) = 0.316$.

Literaturverzeichnis

Barret, G. (1997). *Statistics with the TI-83*. USA: Meridian Creative Group.

Engel, A . *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Band 1 (1973). Stuttgart: Ernst Klett.

Herweyers, G. , Stulens, K. (2000). *Statistiek met een grafisch rekentoestel*. Leuven: Acco.

Yates, D., Moore, S., McCabe, G. (1999). *The Practice of Statistics, TI-83 Graphing Calculator Enhanced*. New York: W.H. Freeman and Company.