Finanzmathematik mit grafischen und symbolischen Taschenrechnern

Teil 2 – Rentenrechnung

Josef Böhm

Ein Unterrichtsbehelf zum Einsatz moderner Technologien im Mathematikunterricht

T³ Österreich / ACDCA am PI-Niederösterreich, Hollabrunn

Inhalt

Vorwort

In diesem zweiten Teil des Finanzmathematikskriptums[1] sollte ursprünglich neben der Rentenrechnung auch die Investitionsrechnung, die Schuldtilgung und die Wertpapierrechnung aufgenommen werden. Im Lauf der Arbeit am vorliegenden Papier wurde klar, dass dies den vorgesehenen Umfang bei weitem übersteigen würde. So habe ich mich entschlossen, hier nur die Rentenrechnung – und dafür hinreichend ausführlich – zu behandeln und für die genannten Anwendungen einen dritten Teil folgen zu lassen.

Für die finanzmathematischen Grundlagen, die sich auf die Zinseszinsrechnung beziehen, verweise ich auf Teil 1. Inzwischen hat der Voyage 200 den TI-92 abgelöst, außerdem ist der TI-83-Silveredition auf den Markt gekommen. Daher wurde der Titel etwas der neuen Situation angepasst. Grundsätzlich hat sich nichts geändert, nur die Finanzapplikation ist auf dem Voyage 200 standardmäßig implementiert.

Im besonderen will ich auf den gegenüber der ersten Version von Teil 1 deutlich verbesserten, selbst entwickelten TVMS-Solver hinweisen, der die CAS-Möglichkeiten der symbolischen Taschenrechner einigermaßen ausschöpft.

Ein besonderes Anliegen ist mir die ausführliche Behandlung der finanzmathematischen Grundformel in Kapitel 4. Hier kann (und soll) eine *Black Box* ohne viel Aufwand zu einer *White Box* gemacht werden. Der didaktische Gewinn rechtfertigt sicherlich die Beschäftigung damit.

Die vorgestellte kleine Sammlung an Beispielen ermöglicht einerseits den sofortigen Einsatz in der Klasse, soll aber auch eine Anregung zur „Komposition" von eigenen Angaben sein. Dass nicht alle möglichen Lösungsgänge vorgestellt werden können, liegt in der Natur der Sache. Im Unterricht sollte besonderer Wert auf unterschiedliche Lösungsstrategien und den damit verbundenen sinnvollen Einsatz der Zeitlinie gelegt werden.

So wie in Teil 1 möchte ich auf den Einsatz von im Unterricht zu entwickelnden Funktionen hinweisen. Diese Funktionen ermöglichen oft nicht nur den kürzesten, sondern auf jeden Fall den „mathematischesten" Lösungsweg. Vergessen wir aber trotzdem nicht den Wechsel zwischen numerischen und grafischen Darstellungsmöglichkeiten.

In den „Reminiszenzen" in Kapitel 8 habe ich Ausschnitte aus uralten Büchern verwendet und an ihnen zu zeigen versucht, dass man auch diese mit Erfolg dazu verwenden kann, ganz moderne Anliegen des M-Unterrichts umzusetzen (rekursive Methoden, Arbeiten mit einer Tabellenkalkulation, ...).

Abschließend bleibt noch der Hinweis auf das ausführliche Literaturverzeichnis.

Für Rückmeldungen bin ich wie immer sehr dankbar.

Josef Böhm

Bei Anfragen und Problemen wenden Sie sich bitte an nojo.boehm@pgv.at.

[1] Der erste Teil *Finanzmathematik auf dem TI-83/92, Teil 1 – Zinseszinsrechnung* kann auch von der Homepage www.acdca.ac.at heruntergeladen werden.

1 Grundlagen der Rentenrechnung

Unter einer *Rente* versteht man eine regelmäßig wiederkehrende (periodische) Zahlung in i.a. gleicher Höhe. Typische Anwendungen von Renten sind Kreditrückzahlungen und verschiedene Sparformen. Die Renten werden nach verschiedenen Gesichtspunkten eingeteilt:

- nach der Laufzeit
  - bis zum Tod des Empfängers der Zahlung; dann spricht man von *Leibrenten*. Deren Behandlung ist Sache der *Versicherungsmathematik*. Darunter fällt auch die *Altersrente*.
  - mit einer genau definierten Laufzeit; dies sind *Zeitrenten*, die in der *Finanzmathematik* behandelt werden.

- nach dem Fälligkeitstermin
  - fällig am Beginn jeder Zahlungsperiode; die Rente ist *vorschüssig* (*pränumerando*).
  - fällig am Ende jeder Zahlungsperiode; die Rente ist *nachschüssig* (*postnumerando*).

- nach dem Abstand zwischen den Zahlungen
  - Jahresrenten oder *Annuitäten*.
  - *unterjährige* Renten (Monats-, Quartals-, Semesterrenten). Grundsätzlich ist jede Rentenperiode möglich.
  - die Periode ist länger als ein Jahr; man spricht von *überjährigen* Renten.

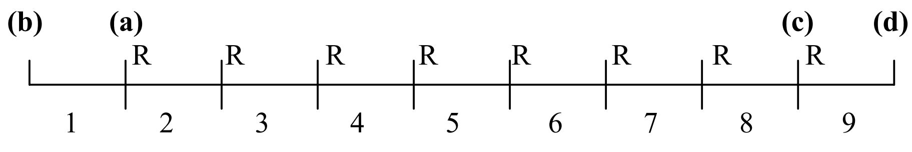
Die Grundaufgabe besteht darin, den Gesamtwert der Rente zu bestimmen. Dieser Wert hängt, wie in der Zinseszinsrechnung vom gewählten Zeitpunkt (= *Bezugspunkt*) ab:

Bezugspunkt ist der Beginn der ersten Rentenperiode: *Barwert der Rente*.

Bezugspunkt ist das Ende der letzten Rentenperiode: *Endwert der Rente*.

Ein einführendes Beispiel soll die wichtigen Zusammenhänge dieser Begriffe demonstrieren.

Wir wollen annehmen, dass 8 Zahlungen in der Höhe von 1000 EURO vereinbart wurden. Die Abstände zwischen den Zahlungen seien vorerst ein Jahr und wir setzen die Verzinsung mit i = 3,5% fest. Durch welchen Beträge können diese Zahlungen äquivalent ersetzt werden?



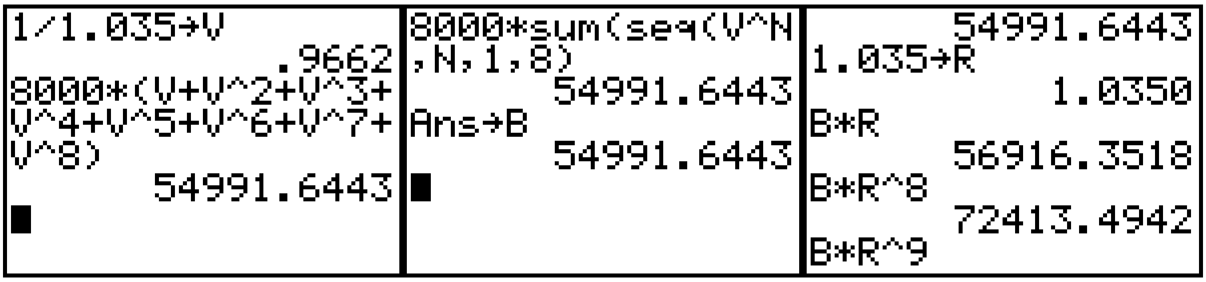
Hier fragt der Schüler sicherlich: „Ist die Rente nachschüssig oder vorschüssig?“. Die Antwort des Lehrers könnte lauten: „Das kannst du halten, wie du willst!“ Es kommt nämlich darauf an, wo man den Bezugspunkt hinsetzt. Natürlich ist nach dem *Äquivalenzprinzip* der Finanzmathematik jeder Zeitpunkt auf der *Zeitlinie* geeignet, tatsächlich erweisen sich vier Termine als besonders günstig:

(a)	zugleich mit der ersten Zahlung →	*Barwert einer vorschüssigen Rente*
(b)	eine Periode vor ersten Zahlung →	*Barwert einer nachschüssigen Rente*
(c)	zugleich mit der letzten Zahlung →	*Endwert einer nachschüssigen Rente*
(a)	eine Periode nach der letzten Zahlung →	*Endwert einer nachschüssigen Rente*

Man erkennt, dass – hat man erst einmal eine Bewertung durchgeführt – die anderen durch Auf-, bzw. Abzinsung erreicht werden können. Damit kann die Rente an jedem beliebigen Termin bewertet werden.

Berechne den Barwert nachschüssig und leite daraus alle anderen Bewertungen ab:
(Verwende Bezugspunkt (b).)

$B_{\text{nach}} = 8000v + 8000v^2 + 8000v^3 + ... + 8000v^8 \quad \text{mit} \quad v = \frac{1}{1{,}035}.$



Es ergibt sich der nachschüssige Barwert mit 54991,64 EURO, der vorschüssige mit 56918,35 EURO, der nachschüssige Endwert mit 72413,49 EURO und der vorschüssige Endwert mit 74947,97 EURO. Die acht Zahlungen könnten durch diese Beträge zu den Terminen (a) – (d) abgelöst werden. Zwei mögliche Interpretationen für diese „trockene“ Angabe wären:

(1) Wie hoch kann ein Kredit sein, wenn er durch 8 nachschüssige Annuitäten in der Höhe von 8000 EURO bei i = 3,5% Zinsen zurückgezahlt werden soll. (54991,64 EURO)

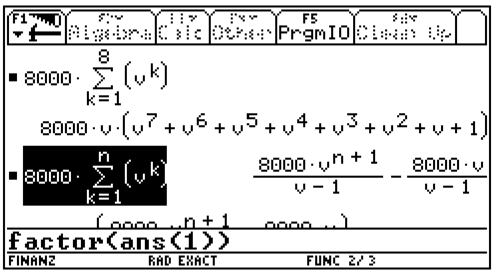
(2) Jemand kann acht mal jährlich jeweils am Jahresanfang 8000 EURO auf ein mit i = 3,5% verzinstes Konto legen. Welcher Betrag steht ihm/ihr am Ende des 8. Jahres zur Verfügung? (74947,97 EURO)

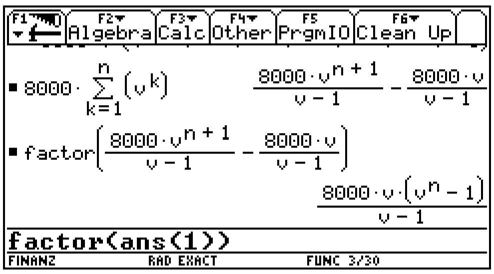
Man sieht im mittleren Bild, dass man mit der Summe einer Folge bequemer rechnen kann. Bei dieser Gelegenheit erinnern wir uns an die *geometrische Folge* und die zugehörige *geometrische Reihe*:

$$\underbrace{a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots\dots\dots\dots}_{\text{insgesamt } n \text{ Summanden}} = a\frac{q^n - 1}{q - 1} = a\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Verwende diese Summenformel, um für die vier Bewertungen B_{nach}, B_{vor}, E_{nach} und E_{vor} einer ganzjährigen Rente bei Jahresverzinsung vier passende Formeln zu finden. Arbeite bei den Endwertformeln mit dem Aufzinsungsfaktor *r*. Überprüfe die Richtigkeit dieser Formeln am obigen Beispiel.

z.B.: $B_{nach} = 8000v\frac{v^8 - 1}{v - 1}$; am CAS-TI lässt sich die symbolische Summation durchführen:





Interessanterweise wird nur die allgemeine Summe als Bruch dargestellt, während für n = 8 immer die Polynomdarstellung gewählt wird.

Bevor wir zum `TI-FINANCE` – Werkzeug wechseln, soll aber die Problemstellung gleich so allgemein wie möglich behandelt werden, d.h., wir wollen uns nicht auf Annuitäten bei Jahresverzinsung beschränken und dann alles nochmals für unterjährige Renten bei unterjähriger Verzinsung wiederholen, bevor dann auch noch die überjährigen Renten besprochen werden (- wie das noch in manchen Lehrbüchern geschieht).

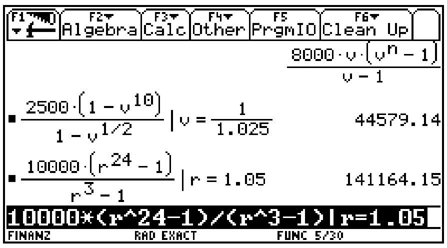
Auch wenn man die Absicht hat, nur mit `TI-FINANCE` zu arbeiten, bleibt es nicht erspart, manchmal auf die geometrische Reihe zurückzugreifen, da dieses sonst recht praktische Programm in manchen Fällen versagt.

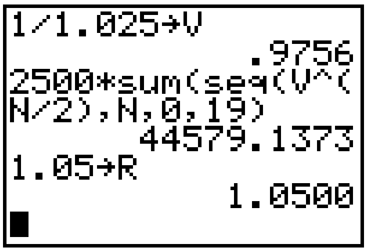
Bestimme den Barwert einer vorschüssigen Quartalsrente von 2500.- mit einer Laufzeit von 5 Jahren bei j_2 = 5%.

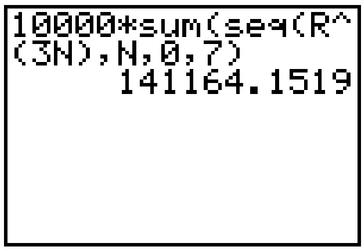
$$B_{vor} = \underbrace{R + Rv^{\frac{1}{2}} + Rv^{\frac{2}{2}} + Rv^{\frac{3}{2}} + ...}_{\text{insgesamt 20 Zahlungen}} = R\,\frac{1-\left(v^{\frac{1}{2}}\right)^{20}}{1-v^{\frac{1}{2}}} \quad \text{mit } v = \frac{1}{1{,}025} \text{ und } R = 2500. \quad (B_{vor} = 44579{,}14)$$

Eine Zahlung in der Höhe von 10000.- ist in drei Jahren zum ersten Mal und dann noch sieben Mal in Abständen von jeweils drei Jahren fällig. Bestimme den Endwert aller Zahlungen (zum Zeitpunkt der letzten Zahlung) bei i = 5%.

$$E_{nach} = \underbrace{R + Rr^3 + Rr^6 + ...}_{\text{8 Zahlungen}} = R\,\frac{\left(r^3\right)^8 - 1}{r^3 - 1} \quad \text{mit } r = 1{,}05 \text{ und } R = 10000. \quad (E_{nach} = 141164{,}15)$$







Damit kristallisiert sich ein Formelmechanismus heraus, der später die Grundlage für hilfreiche Funktionen bzw. Programme bilden wird.

Wir arbeiten vorerst mit *theoretischer Verzinsung*. Bei den Banken wird oft bei unterjährigen Renten die *gemischte Verzinsung* angewendet. Diese verkompliziert die Rechnung – unnötigerweise. Wir werden auf diese Variante erst in einem späteren Kapitel näher eingehen können.

2 Die Werkzeuge

Barwert nachschüssig: $bwrn = \dfrac{R\,v^k\,(1-v^{k\cdot n})}{1-v^k}$

Barwert vorschüssig: $bwrv = \dfrac{R\,(1-v^{k\cdot n})}{1-v^k} = bwrn \cdot r^k$

Endwert nachschüssig: $ewrn = \dfrac{R\,(r^{k\cdot n}-1)}{r^k-1} = bwrn \cdot r^{k\cdot n}$

Endwert vorschüssig: $ewrv = \dfrac{R\,r^k\,(r^{k\cdot n}-1)}{r^k-1} = bwrn \cdot r^{k\cdot(n+1)}$

R ...... die Rentenzahlung
n ...... die Anzahl der Zahlungen
k ...... eine Hilfsgröße, und zwar

$$k = \frac{\text{Zinsperioden/Jahr}}{\text{Rentenperioden/Jahr}}$$

Überprüfe die Formeln an den beiden Aufgaben auf der vorigen Seite!

1. Beispiel: $R = 2500;\ n = 5\times 4 = 20;\ k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow bwrv\ = \dfrac{2500\,(1-v^{10})}{(1-v^{0,5})}$

2. Beispiel: $R = 10000;\ n = 8;\ k = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3\ \rightarrow ewrn\ = \dfrac{10000\,(r^{24}-1)}{r^3-1}$

Bevor wir auf den `TVM-Solver` des TI-83+, bzw. von `TI-FINANCE` eingehen, erzeugen wir – ähnlich zu den `ew()` und `bw()`-Funktionen aus Teil 1 – geeignete Funktionen zur Berechnung von Bar- und Endwerten von Renten.

Diese Aufgabe lässt sich hervorragend von den Schülern selbst bewältigen. Ich schlage vor, eventuell eine der Funktionen gemeinsam zu erarbeiten. Alle anderen können dann entweder als Hausaufgabe oder in Gruppenarbeit fertig gestellt werden. Es ist aber sinnvoll, sich auf gemeinsame Funktionsnamen und Parameterlisten zu einigen.

Wir beginnen z.B. mit der Funktion für den Barwert einer vorschüssigen Rente und gehen nach der Summenformel vor:

```
rente*(r_^(⁻zp*anzahl/rp)-1)/(r_^(⁻zp/rp)-1)→
                                   bwrv(rente,anzahl,rp,r_,zp)
```

Dabei bedeuten `rp` und `zp` die Anzahlen der Renten- und Zinsperioden/Jahr. Es erweist sich außerdem als praktisch und konsequent, ebenso wie in der Zinseszinsrechnung, in allen Formeln nur den Aufzinsungsfaktor, der für die angegebene Zinsperiode gilt, in die Parameterliste aufzunehmen.

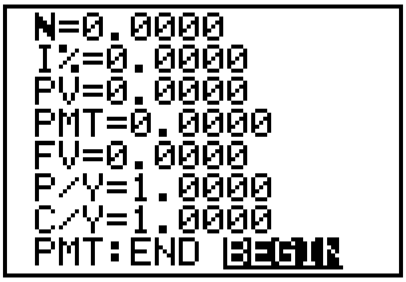
(*Die Sammlung aller Funktionen finden Sie auf der letzten Seite. Außerdem können Sie alle Funktionen und Programme, die in diesem Skriptum verwendet werden von der ACDCA/T³-Homepage herunterladen.*)

Damit stehen uns ab nun zur Verfügung:

```
bwrv(rente,anzahl,rp,r_,zp)
bwrn(rente,anzahl,rp,r_,zp)
ewrv(rente,anzahl,rp,r_,zp)
ewrn(rente,anzahl,rp,r_,zp)
```

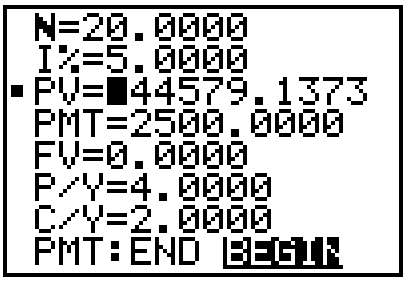
Diese Funktionen lassen sich mit `ew()` und `bw()` aus Teil 1 kombinieren.

Der `TVM-Solver` wurde schon in Teil 1 ausgiebig vorgestellt.

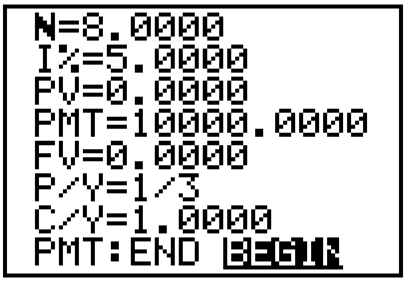


Die Zeile `PMT=` wurde bislang nur mit 0 gefüllt, während für `P/Y` immer 1 gesetzt war. Auch die letzte Zeile hatte keine Bedeutung.
Ab nun wird für `PMT=` die Zahlung (Rente) eingesetzt, `P/Y=` stellt die Anzahl der Rentenperioden/Jahr dar und `END/BEGIN` ist ein Schalter für nach-/vorschüssige Zahlungen.

Wenn wir nun zur Einstimmung die beiden Aufgaben von vorhin mit dem TVMS lösen wollen, dann gehen wir so vor:

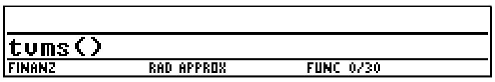


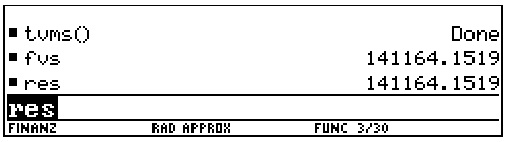
Der `TVM-Solver` wird aufgerufen, alle Daten mit Ausnahme eines Wertes für den Barwert `PV` werden eingegeben. Dann stellt man den Cursor in die `PV`-Zeile und ruft den `Solver` auf.
Dieser letzte Aufruf erfolgt beim TI-83 über [ALPHA] [ENTER], bei den CAS-TI über [F2].

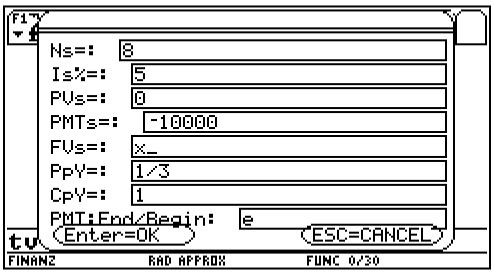


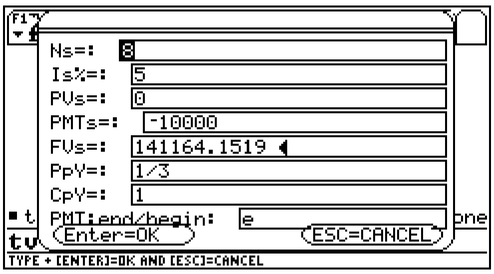
Bei der zweiten Aufgabe versuchen wir es ähnlich, nur für `P/Y` müssen wir ja 1/3 angeben, da die Zahlungen in Abständen von 3 Jahren erfolgen sollen. Unverständlicherweise verweigert der `TVM-Solver` hier seinen Dienst – auch auf den CAS-Geräten.

Daher können wir auf dem TI-83 diese Aufgabe vorerst nur über die Summenformel der geom. Reihe lösen. Für die CAS-Rechner habe ich in Teil 1 bereits einen symbolischen Solver `TVMS` bereitgestellt. (Für die unbekannte Größe ist ein `x_` zu setzen.)



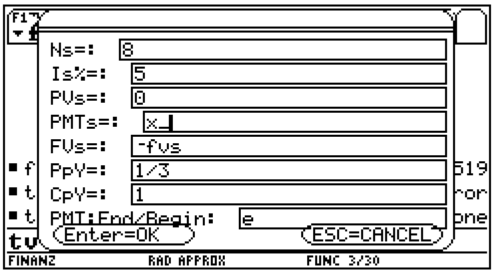


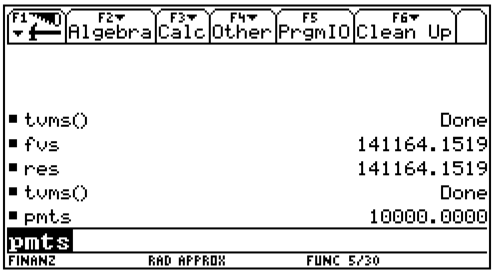




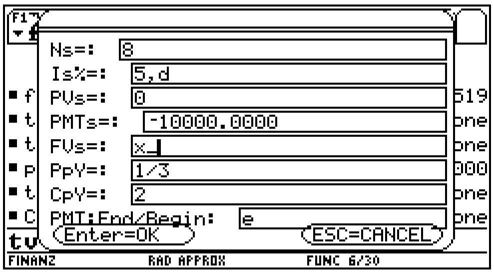
Das Ergebnis wird unmittelbar nach [ENTER] in der Eingabemaske mit einem nachgestellten ◄ angezeigt. Im Homescreen kann es unter den Namen `fvs`, bzw. `res` aufgerufen werden. Unter diesen Namen könnte es auch wieder in den `TVMS`-Solver für eine Folgerechnung eingesetzt werden. Außerdem wird das Resultat auch beim nächsten Aufruf von `tvms()` im entsprechenden Dialogfeld angezeigt. Das ◄ ist vor der nächsten Verarbeitung zu löschen.

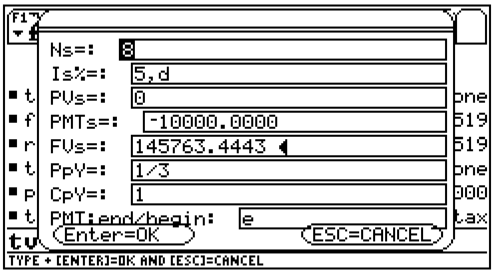
Ich demonstriere zuerst die Kontrolle und löse dann die Aufgabe bei einer gegebenen antizipativen Verzinsung von f_2 = 5%. (D.h., dass halbjährlich ein Diskont von d = 2,5% gerechnet wird.)





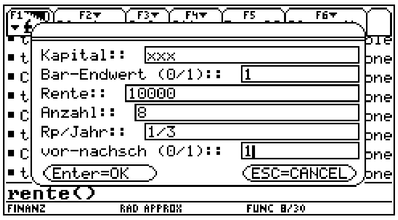
Der Diskont wird durch ein nachgestelltes d gekennzeichnet.

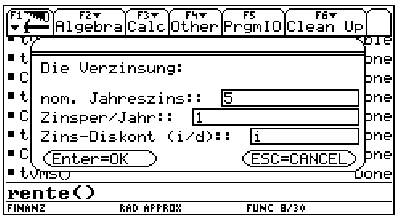


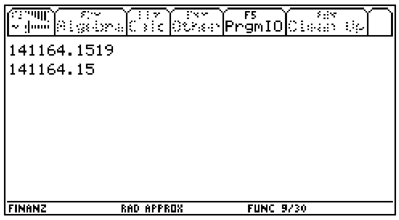


Rechne diesen Endwert mit der Summenformel nach!

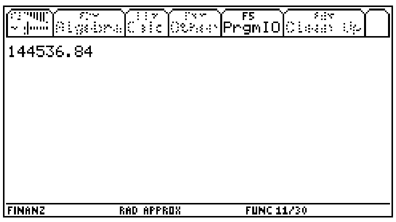
In den „Vor-TVM-Solver-Zeiten“ habe ich ein TI-92-Programm rente() entwickelt, das gute Dienste geleistet und diesen Solver bereits vorweggenommen hat. Hier wurde auch die antizipative Verzinsung berücksichtigt. Das Ergebnis wird unter erg gespeichert und kann weiter verwendet werden. (Für die unbekannte Größe kann eine beliebige Variable gewählt werden!)

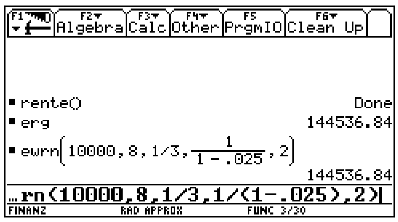






Nun folgt die Aufgabe mit der antizipativen Verzinsung. Da ist nur die Eingabe der zweiten Seite zu ändern. Eine weitere Kontrollrechnung wurde im Homescreen durchgeführt.





Wir werden später sehen, dass tvms() das universellste Werkzeug für die CAS-TI darstellt, da auch allgemeine Eingaben verarbeitet werden können.

Aufgabe: Über einen – unattraktiven – Umweg kann man auch mit der Standard-Finanzapplikation die überjährige Rente behandeln.
Tipp: Fasse die drei Jahre in eine Zinsperiode zusammen! Welcher Zinsfuß gilt für diese 3 Jahre? ....

3 Grundaufgaben

Die nächsten 4 Aufgaben werden exemplarisch mit allen bisher zur Verfügung stehenden Werkzeugen gelöst. Für mich hat es sich als sinnvoll erwiesen, auch den Schülern mehr als nur ein Mittel zur Bearbeitung dieser Aufgaben anzubieten. Der wesentliche Teil, das Herauslesen des Sachverhalts aus einem mehr oder weniger umfangreichen Text, bleibt ungeschmälert – eine Zeitlinie mit entsprechenden Eintragungen bleibt die entscheidende Überlegungshilfe. Bei der Umsetzung ins mathematische Modell zeigen sich unterschiedliche Vorlieben der Schüler. Während die einen nur mehr mit dem `TVM-Solver` arbeiten, bevorzugen andere die funktionale Arbeitsweise. Wir werden sehen, dass der `TVM-Solver` doch auch seine Grenzen hat, und es sehr gut ist, wenn man sich nicht nur auf die *Black Box* des `TVM-Solvers` verlassen muss, und zumindest auf die *Gray Box* der selbst definierten Funktionen zurückgreifen kann. Auf dem TI-83+ lassen sich derartige Funktionen leider nicht erstellen, hier wird man auf die *White Box* – geometrische Reihe – verweisen müssen.

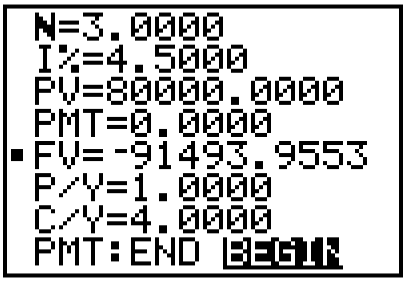
Hinweis: `rente()` und `tvms()` laufen auch ohne Flash, d.h. auf den alten TI-92!

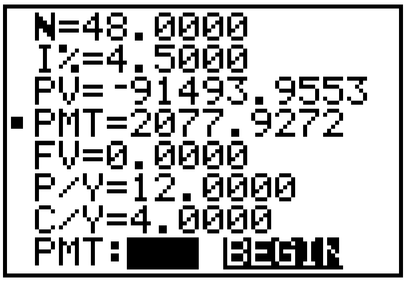
Persönlich gebe ich dem Arbeiten mit den selbsterstellten Funktionen den Vorzug, weil es am ehesten der mathematischen Denk- und Ausdrucksweise entspricht. Daneben lernen die Schüler den Umgang mit Funktionen mit mehreren Variablen.

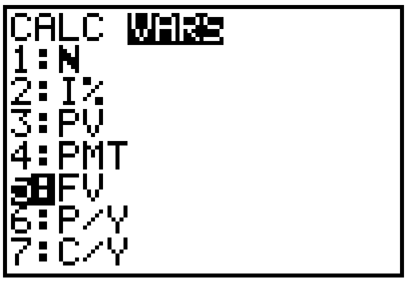
Für die folgenden Aufgaben sind keine besonderen Zusatzüberlegungen erforderlich.
(Ich verzichte aus schreibtechnischen Gründen bewusst bei den meisten Aufgaben auf eine Währungsbezeichnung.)

rr1 Ein Kredit über 80000 wird aufgenommen. Er soll nach 3 Jahren Wartezeit innerhalb der nächsten 4 Jahre durch vorschüssige Monatsraten zurückgezahlt werden. Wie groß sind diese Raten bei j_4 = 4,5%?

Hier bedarf es nicht unbedingt einer Zeitlinie. Die 80000 sind 3 Jahre aufzuzinsen und stellen dann den Barwert aller Rückzahlungen – einer vorschüssigen Rente – dar.



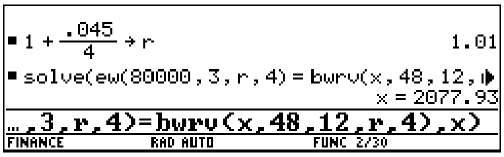




Der Endwert FV wird zum Barwert PV der gesuchten Rente. Dabei muss man nicht den Zahlenwert abschreiben, sondern kann beim TI-83+ über die Tastenkombination
[APPS], `1:Finance, VARS, 5:`
diesen Wert direkt übernehmen.

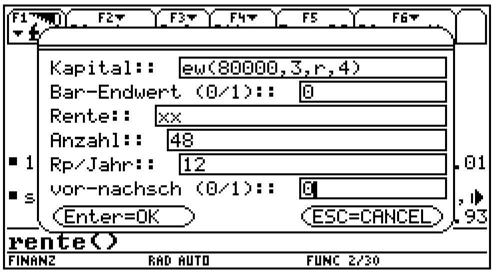
In den Flash-Applikationen der CAS-TI geht es einfacher: entweder überträgt man mit Cut and Paste - [◆] [X] und [◆] [V] - den Wert oder man schreibt einfach `fv` in die PV-Zeile, wobei darauf zu achten ist, dass man sich im – vom System geschaffenen – Folder `FINANCE` befindet.

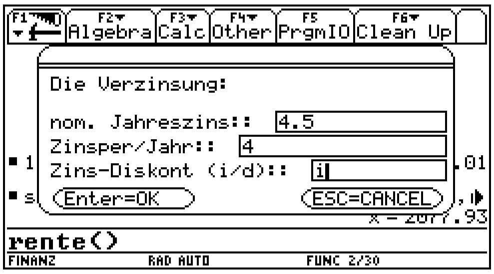
Bei Verwendung der Funktionen reduziert sich die Aufgabe auf einen eleganten „Einzeiler“:

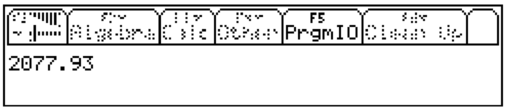


`ew(80000,3,r,4)` = `80000 r`^{12}

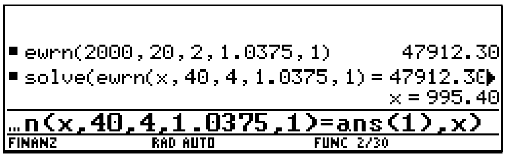
Gott sei Dank liefert auch die Durchführung mit `rente()` das gleiche Ergebnis:



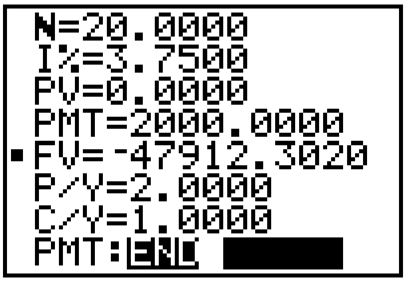


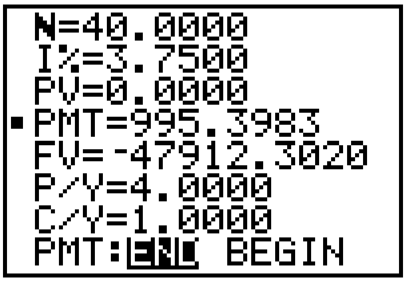


rr2 Welches Kapital ergeben halbjährige nachschüssige Rücklagen à 2000.- durch 10 Jahre hindurch bei *i* = 3,75%?
Wie hoch müssten vorschüssige Quartalsraten sein, um denselben Endwert innerhalb der gleichen Zeit zu erreichen?



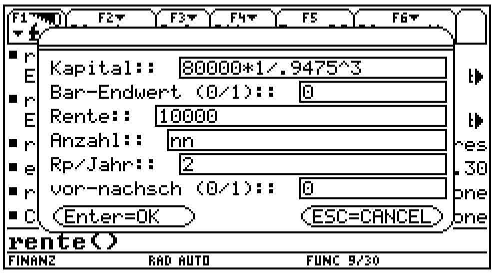
Der Endwert beträgt 47912,30 und die Quartalsrente müsste eine Höhe von 995,40 aufweisen.

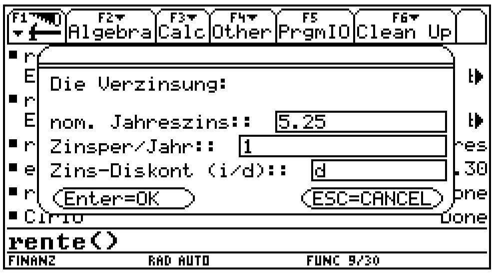




rr3 Der Kredit von Aufgabe rr1 wird nach drei rückzahlungsfreien Jahren durch vorschüssige Semesterraten in der Höhe von 10000.- getilgt. Wieviele volle Zahlungen sind zu leisten? Welcher Gleichungstyp ist hier zu lösen?
Wie groß ist die Restzahlung (die Schlussrate), wenn sie eine Periode nach der letzten Vollrate fällig ist?
Rechne mit einer antizipativen Verzinsung von *d* = 5,25%

Ich beginne die Demonstration, mit meinem Programm `rente()`, da hier auch für die antizipative Verzinsung vorgesorgt wurde.



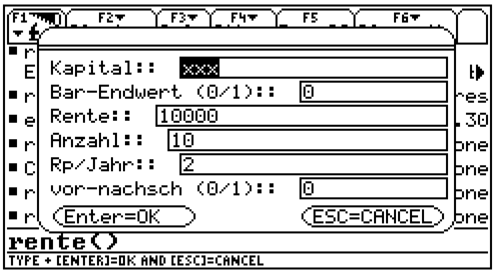


Die Antwort am PrgmIO-Schirm lautet 10.68, d.h., dass 10 volle Raten zu begleichen sind. Natürlich steckt hinter der Aufgabe eine Exponentialgleichung – die wir dann noch sehen können. Die noch offene Frage nach der *Schlussrate* ist bei den Schülern nicht sehr beliebt.

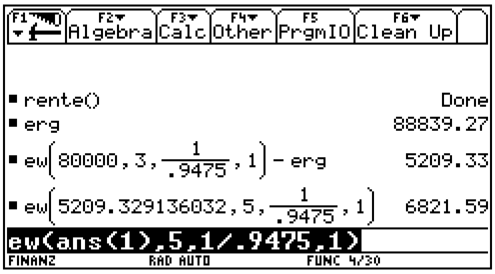
Die Vorgangsweise immer dieselbe und lässt sich leicht mehr oder weniger automatisieren:

(1) Man berechnet den Barwert der vollen Raten und bildet die Differenz aus dem Wert des Kredits zum Bezugspunkt und diesem Barwert. Damit hat man bereits den Wert der Restzahlung zum „Zeitpunkt Null“ = T_0.

(2) Dann bleibt nur noch die Aufgabe zu erfüllen, diesen Betrag T_0 zur geforderten Fälligkeit auf- (zumeist) oder abzuzinsen.

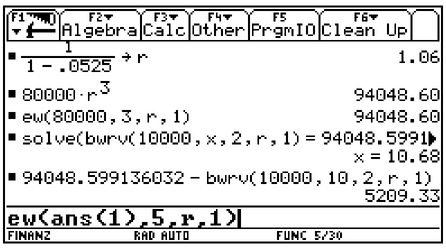


Man muss nur die erste Seite geringfügig ändern. Der Barwert wird im Homescreen unter erg abgerufen.

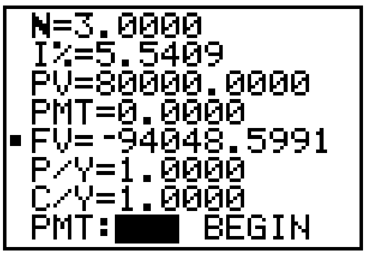


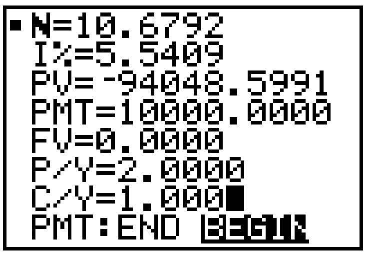
T_0 ist 5209,33. Da der dazu äquivalente Betrag eine Periode nach der letzten – der 10. – vorschüssigen Semesterzahlung fällig ist, muss T_0 bis zum **Beginn** des 11. Halbjahres aufgezinst werden, das sind 10 Halbjahre oder 5 Jahre.
Die Schlussrate – die allerletzte Zahlung – beträgt demnach 6821,59.

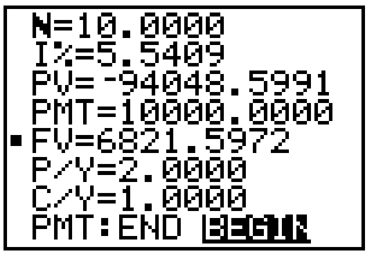
Wir machen die „Probe“ mit den finanzmathematischen Funktionen und mit dem TVM-Solver. In der Gleichung bwrv(.... steckt die oben angesprochene Exponentialgleichung.



Das Resultat lautet natürlich wieder 6821,59.
Mit dem TVM-Solver geht das besonders elegant. Hier spart man sich auch noch die Aufzinsung von T_0, da der noch offene Betrag unmittelbar als Endwert der Differenz von PV und allen 10 Zahlungen ausgegeben wird.



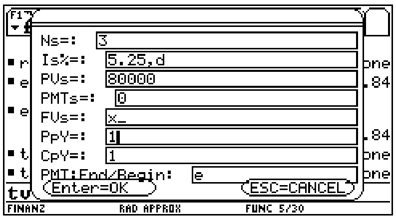


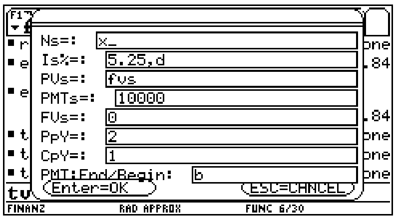


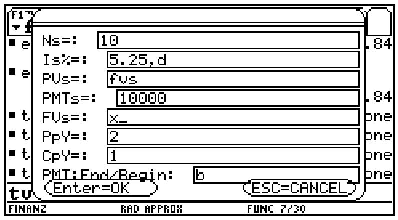
Allerdings muss ich an dieser Stelle an *Finanzmathematik 1* erinnern, wo beschrieben wird, wie eine antizipative Verzinsung in den `TVM-Solver` einzugeben ist:

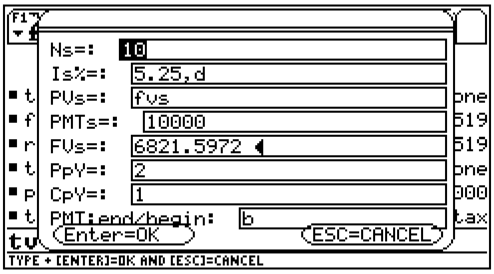
Man muss den äquivalenten nominellen Jahreszinsfuß zum gegebenen Diskont finden. Das ist hier nicht so schwierig: (1/(1-0,0525)-1)×100.

Beim `TVMS-Solver` ist selbst das nicht mehr notwendig:



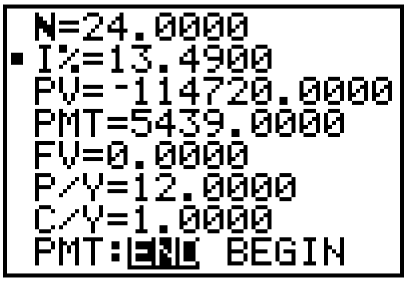


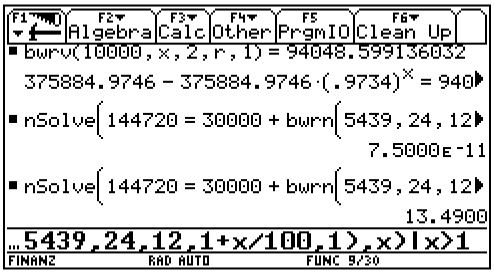




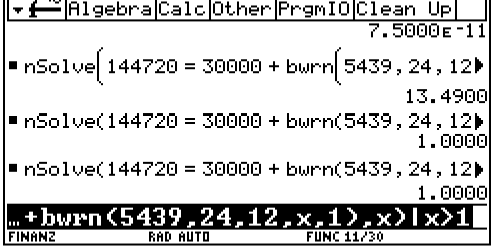
Der letzte Schirm zeigt das Ergebnis. Unterwegs treten alle Zwischenergebnisse von vorhin in den mit `x_` als unbekannt angegeben Feldern auf.

rr4 Eine Realität zum Verkaufspreis von 144720.- kann bei einer Anzahlung von 30000.- auf 24 nachschüssige Monatsraten zu je 5439.- erstanden werden. Welcher tatsächlichen Verzinsung entspricht dies?

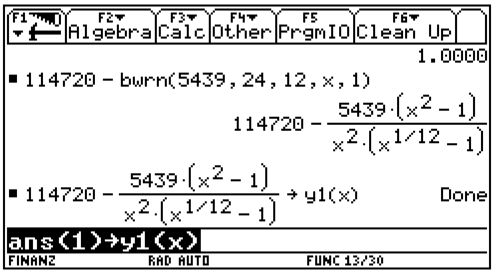


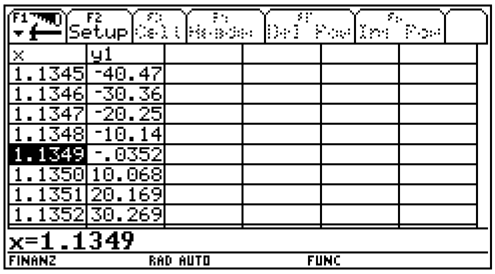


Der `TVM-Solver` liefert sofort eine Rendite von 13,49%. Wenn man hingegen auf die eigenen Funktionen und damit auf die Summenformel der geometrischen Reihe zurückgreift, kommt man nur mit dem numerisch basierten `nSolve` zum Ziel, da die entstehende Gleichung höheren Grades keine exakte Lösung mehr zulässt.

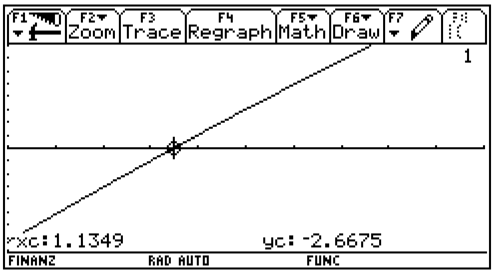


Auch hier sind fallweise „Tricks" notwendig, um den Rechner zur Herausgabe einer geeigneten Lösung zu „überreden". Neben der Angabe eines Bereichs für die Lösung über den `with`-Operator (`|x > 1` oder ähnlich) ist es sinnvoll, die Gleichung nicht nach dem Aufzinsungsfaktor *r*, sondern direkt nach dem Zinsfuß lösen zu lassen.





Eine weitere Möglichkeit, die nicht vergessen werden soll, ist die numerische Lösung über eine dezimale Suche in einer geeigneten Tabelle. Zu diesem Zweck wird die Funktion zur Nullstellensuche aufbereitet, die dann über die Tabelle schrittweise verfeinert wird.
Steht einmal die Funktion – hier `y1(x)` – zur Verfügung, führt auch die graphische Lösung sofort zum Ziel.



4 Ein Blick hinter den `TVM-Solver`

Was steckt hinter dem `TVM-Solver`? Diese Frage kann ruhig auch im Unterricht einmal thematisiert werden. Ich finde dies ein schönes Beispiel, wie man

(1) eine „Black Box“ zu einer „White Box“ erhellen und

(2) ein bestehendes Werkzeug verbessern kann (um etwa auch überjährige Renten in den Griff zu bekommen.

Im Handbuch zum findet man die finanzmathematische Grundgleichung:

$$PV + PMT \times (1 + i \times t)\,\frac{1 - (1 + i)^{-N}}{i} + FV \times (1 + i)^{-N} = 0$$

t ist ein „Schalter“: $t = 0$ für nachschüssige Renten und $t = 1$ für vorschüssige Zahlungen.

Dabei ist `i` der zur gegebenen Verzinsung äquivalente Zinsfuß für die vorliegende Zinsperiode. Dieser Zinsfuß wird in einem Unterprogramm aus den Eingabedaten ermittelt, und zwar:

$$i = e^{\frac{C/Y \times \ln(x+1)}{P/Y}} - 1 \text{ mit } x = \frac{I\%}{100 \times C/Y}.$$

Welcher Bezugspunkt wird für diese Superformel angenommen. Erkläre die Wirkung des „Schalters“ *t*.

Zeige, dass die Formel für die Berechnung des Zinsfußes unserer bisherigen Formel entspricht und überprüfe an den folgenden Beispielen die Gültigkeit der Formel für die Zinsfüße *i*:

a) Jahresrente; j_4 = 8%
b) Quartalsrente; i = 7%
c) Rente in Abständen von 2 Jahren, j_2 = 3%

Das Computeralgebra-System *DERIVE* hat jetzt auch einige finanzmathematische Funktionen implementiert. In den ersten *DERIVE*-Versionen war die Vorgangsweise sehr durchsichtig. Um die interne Verzinsung *i* zu berechnen musste man eine Datei ANNUITY.MTH nachladen und in die folgende Gleichung für die gegebenen Größen substituieren.

$$\mathtt{pv}\cdot(1+\mathtt{i})^{\mathrm{N}}+\mathtt{pmt}\cdot(1+\mathtt{i}\cdot\mathtt{t})\frac{(1+\mathtt{i})^{\mathrm{N}}-1}{\mathtt{i}}+\mathtt{fv}=0$$

Dabei haben `t` und `i` die gleiche Bedeutung wie in der TI-Gleichung.

Zeige, dass die beiden Gleichungen äquivalent sind. Worin liegt der Unterschied in der Darstellung?

Nimm die Aufgabe rr2 und löse sie durch Einsetzen der Daten in die TI- oder DERIVE-Gleichung.

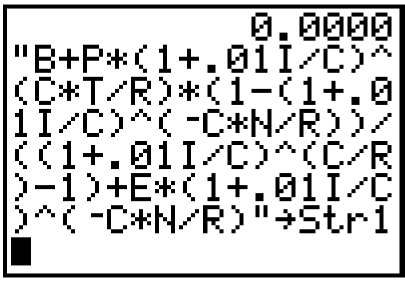
Es ist nun erstaunlich, dass die TI-Formel für `P/Y` durchaus den Wert 1/3 verträgt. Es ist also offensichtlich für die Eingabe in den `TVM-Solver` eine Art Plausibilitätskontrolle für die Eingabe der Anzahl der Zahlungen pro Jahr eingebaut, die – fälschlicherweise – nur ganzzahlige Werte zulässt. Diese Hürde werden wir nun nehmen. Eine zweite Hürde lässt sich – nicht am TI-83+, aber auf den CAS-TI – dann auch noch überspringen.

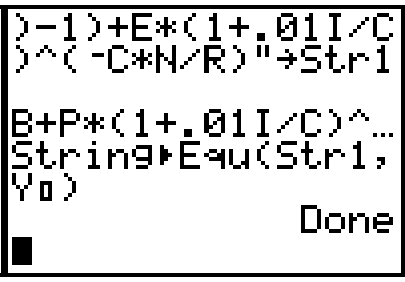
Zuerst muss aber eine lästige Eingabe durchgeführt werden. Die TI-Grundgleichung wird editiert und beim Aufruf des numerischen Gleichungslösers werden wir der Reihe nach um die Eingabe der Parameter gefragt. Wir hoffen, dass dann 1/3 für `P/Y` angenommen wird.

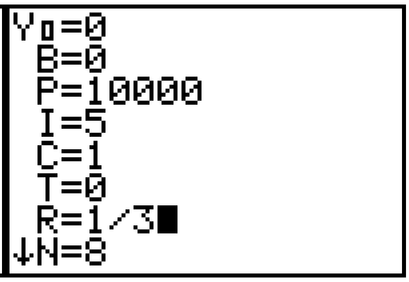
Da der TI-83 nur einbuchstabige Variable zulässt, wähle ich B, E, P, I, N, C, R und T für PV (Barwert), FV (Endwert), PMT, I%, N, C (C/Y) und R für P/Y. Damit sieht die TI-Gleichung so aus (mit einer bereits „entschlüsselten“ Form für *i*:

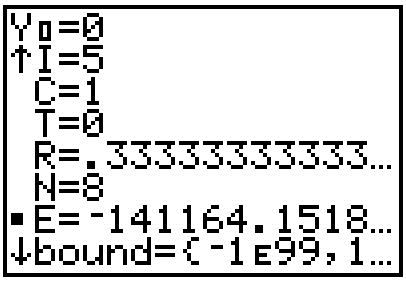
$$B+P\cdot\left(1+\frac{I}{100C}\right)^{\frac{C\cdot T}{R}}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{I}{100C}\right)^{-\frac{C\cdot N}{R}}}{\left(1+\frac{I}{100C}\right)^{\frac{C}{R}}-1}+E\cdot\left(1+\frac{I}{100C}\right)^{-\frac{C\cdot N}{R}}=0$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird als String (Zeichenkette) gespeichert (unter $\boxed{\text{VARS}}$ `7:`). Diese Zeichenkette wandelt man nach Bedarf in eine Funktion für den Funktionseditor um. $\boxed{\text{Y=}}$. Ich wähle Funktion Nr. 0. Wenn man nun in den `Equation-Solver` wechselt hat man seinen selbstgebastelten `TVM-Solver` vor sich, bei dem man nur bei `T=` den richtigen Parameter für vorschüssig (`T=1`) und nachschüssig (`T=Ø`) einsetzen muss.









Und wie man sieht, funktioniert unser „Privatsolver“ offensichtlich besser als der offizielle!!

Auf die zweite Hürde kommen wir gleich im nächsten Kapitel zu sprechen.

Wenn jemand als Perfektionist die Kompatibilität zwischen dem `rente()`-Programm und diesem `Solver` hinsichtlich des Schlüssels für vor- und nachschüssig vermisst, dann muss er in der obigen Gleichung nur die Variable `T` durch `(1-T)` ersetzen. Auch das Herz meines `TVMS-Solvers` für die CAS-TI bildet diese finanzmathematische Grundgleichung.

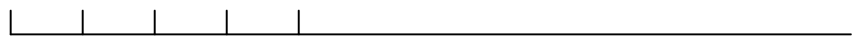
5 Die ewige Rente

Bevor wir mit einer kleinen Beispielsammlung die klassische Rentenrechnung abschließen, muss noch ein Begriff erklärt werden, der zumindest bei den Schülern immer wieder Erstaunen hervorruft. Eine einfache Anwendung führt in das Problem:

rr5 Der Huberbauer ist bereit, seinem Nachbarn, dem Hanslbauern, für die Errichtung und Instandhaltung einer gemeinsam benützbaren Zufahrt zu einem Waldgrundstück für alle Zeiten am Beginn eines jeden Vierteljahres den Betrag von 250 EURO zu bezahlen?
Nach einer gewissen Zeit fragt er den Berater bei seiner Bank, ob er sich dieser Pflicht nicht durch die einmalige Bezahlung eines Betrages entbinden könnte?
Welche Antwort gibt der Bankangestellte, wenn er eine Verzinsung von i = 3,5% annehmen kann?

Für die Beantwortung dieser Frage sind einige Zugänge möglich:

(1) B



Jeder Teilstrich stellt einen Zahlungstermin dar. Der Barwert aller Zahlungen ergibt sich demnach als:

$$B = 250 + 250v^{1/4} + 250v^{2/4} + 250v^{3/4} + ...$$

Die rechte Seite lässt sich sofort als eine unendliche geometrische Reihe identifizieren und wenn die Summenformel für diese bekannt ist, dann erhält man für den Barwert B:

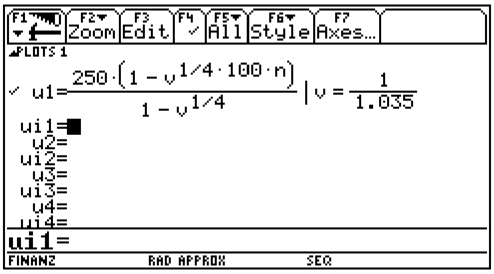
$$B = \frac{250}{1 - v^{1/4}} \text{ mit } v = \frac{1}{1{,}035};\ B = 29193{,}74\,\text{EURO}.$$

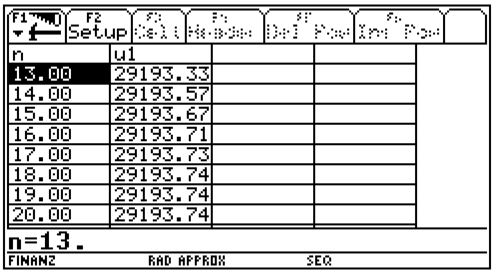
Wenn die Schüler die unendliche geometrische Reihe schon kennen, dann stellt das Ergebnis für sie wohl keine so große Überraschung dar, als wenn sie dieses Phänomen einer endlichen Summe für unendliche viele Summanden hier zum ersten Mal antreffen. Trotzdem ist eine Verifizierung des Ergebnisses – eventuell als Schüleraufgabe – sehr dankbar.

(2) Der zweite Zugang kann über die bereits bekannte Rentenbarwertformel gewählt werden:

$$B = 250\frac{1-v^{1/4\,n}}{1-v^{1/4}}$$

Nach dem Lehrplan ist der Grenzwertbegriff noch nicht verfügbar, daher kann man nur heuristisch vorgehen: „Was passiert, wenn n immer größer wird?“ oder „Erzeuge eine Folge mit größeren Schrittweiten für n und beobachte den Barwert!“





n	u1
13.00	29193.33
14.00	29193.57
15.00	29193.67
16.00	29193.71
17.00	29193.73
18.00	29193.74
19.00	29193.74
20.00	29193.74

Ich setze bereits 100n in die Formel, und erhalte bei Schrittweite 1 viel rascher die Ergebnisse als bei n und der Schrittweite 100. Man sieht, dass ab ca. n = 1800 an der Summe sich nichts mehr ändert.

(3) Ganz ohne unendliche geometrische Reihe – und damit ohne Grenzwert – gelangt man sofort zu einer leicht verständlichen Antwort, wenn man die Problemstellung aus Sicht des Huberbauern etwas umformuliert:

„Welchen Betrag muss ich auf die Bank legen, dass ein Dauerauftrag für eine vierteljährliche Überweisung in der Höhe von 250 EURO an den Hanslbauern auf „ewige Zeiten“ erfüllt werden kann? Dabei soll die erste Zahlung sofort erfolgen. Die Bank verzinst mein Konto mit 3,5% (- auch unveränderlich) und die allfälligen Kontoführungsspesen zahle ich separat, um mein Kapital nicht zu schmälern.“

$$\left(B-250\right)r^{1/4} = B \;\rightarrow\; B = \frac{250\,r^{1/4}}{r^{1/4}-1} = 29193{,}74$$

Zeige, dass dieser Ausdruck zur Summenformel für die unendliche geometrische Reihe äquivalent ist. Zeige, dass dieses System funktioniert!

Der Huberbauer legt 29193,74 EURO auf das Konto und auf Grund des Dauerauftrags werden sofort 250 EURO überwiesen, womit nur mehr 28943,74 EURO verbleiben. Dieser Betrag wird in den nächsten 3 Monaten aufgezinst: $28943{,}74 \times 1{,}035^{1/4} = 29193{,}74$. Jetzt werden wieder 250 EURO abgebucht und das Spielchen beginnt von vorne. Wie lange kann das so weiter gehen?

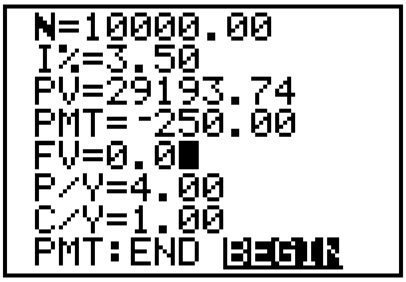
Als Formeln für den vor-, bzw. nachschüssigen Barwert einer ewigen Rente ergeben sich:

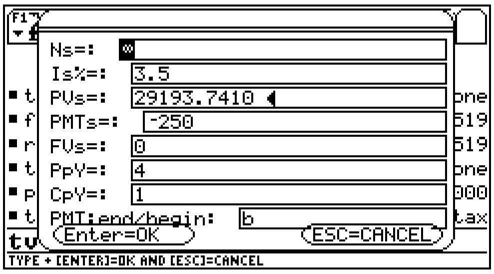
$$B_{vor}^{\infty} = \frac{R}{1-v^{k}} \quad \text{und} \quad B_{nach}^{\infty} = \frac{R\,v^{k}}{1-v^{k}}$$

Auf den symbolischen CAS-TI kann man das Symbol ∞ über die Taste [∞] bedenkenlos einsetzen:

`bwrv(250,∞,4,1.035,1)` liefert den richtigen Wert 29193,74. Auch das vorhin vorgestellte Programm `rente()` akzeptiert ∞ problemlos als Anzahl der Zahlungen.

Auf dem TI-83+ wird man ∞ vergeblich suchen, und daher ist es auch nicht verwunderlich, dass `TI-FINANCE` die exakte Berechnung des Barwerts einer ewigen Rente nicht zulässt. Man muss daher zur Formel zurückgreifen oder man arbeitet mit dem „faulen“ Trick, dass man eine *seehhhhr* große Zahl für *N* eingibt.





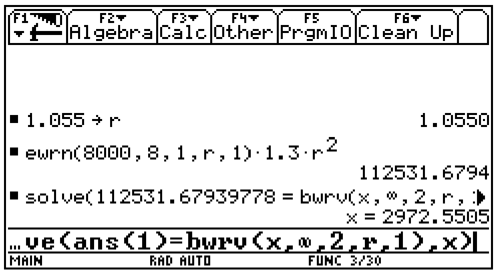
Für mich gänzlich unverständlich werden auch mit der Finanzapplikation auf den CAS-TIs deren symbolische Möglichkeiten nicht genutzt (wie bei den überjährigen Renten). Abhilfe schafft auch hier mein selbst geschriebener TVMS-Solver.

Zusatzfrage: Wie verändert sich der einzuzahlende Betrag, wenn der Huberbauer sich diese Lösung erst nach 5 Jahren überlegt?

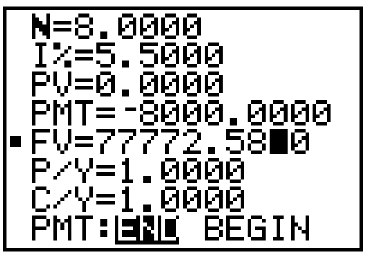
rr6 In einen mit i = 5,5% verzinsten Fonds werden jährlich von einer großen Firma am Jahresende 8000 € eingezahlt. Nach 8 Jahren erhöht der Mutterkonzern das angesparte Kapital um 30%. Nach weiteren 2 Jahren Ruhezeit dient das Guthaben für eine Stiftung, aus der nun für „ewige Zeiten“ vorschüssige Semesterstipendien für Weiterbildung von Mitarbeitern gewährt werden. Wieviel kann pro Semester vergeben werden?

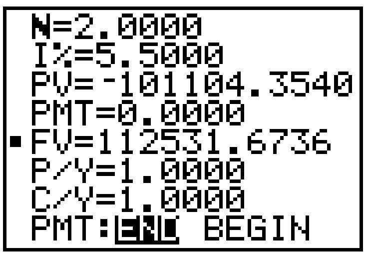
Die Aufgabe lässt sich bequem – sogar in einer einzigen Zeile – lösen.

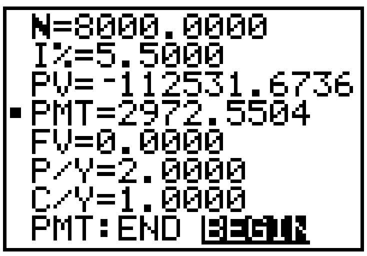
Dem Unternehmen steht pro Halbjahr der Betrag von 2972 € zur Verfügung.



Auf dem TI-83 sind einige Schritte notwendig. Dazu kommt das Problem mit der ewigen Rente. Das System nimmt wohl 8000 Zahlungen (anstelle von ∞), aber nicht mehr 9000! `tvms()` schafft das mühelos. Im zweiten Tableau wurde für PV der Wert `-FV*1.3` eingegeben.







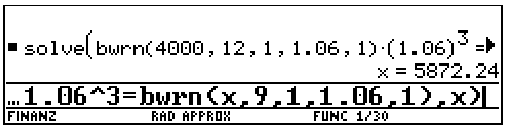
6 Eine kleine Aufgabensammlung

Die nun folgende Sammlung versucht, die wesentlichen Fragestellungen der Renten- und Zinseszinsrechnung zusammenzufassen. Dabei werden die verschiedenen, in diesem Skriptum angebotenen Hilfsmittel eingesetzt. In der Literaturliste finden sich weitere Quellen.

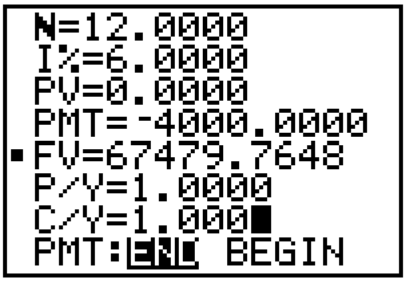
rr7 Eine Verpflichtung aus einem Geschäftsanteil soll durch 15 nachschüssige Jahresraten zu je 4000 EURO abgelöst werden. Im 4., 5. und 6. Jahr kann nichts gezahlt werden. Welche neuen Raten sind nun für alle folgenden Jahre festzusetzen, um in der ursprünglich vorgesehenen Zeit der Verpflichtung nachkommen zu können? Rechne mit i = 6%.

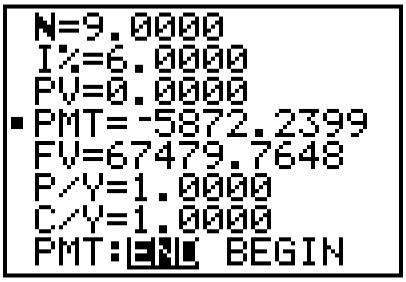
Die ersten drei Jahre sind erledigt und gelten als abgehakt. Sie brauchen nicht mehr berücksichtigt zu werden. Als Bezugspunkte bieten sich an:

- Beginn des 4. Jahres: Barwert der ausständigen 12 Zahlungen drei Jahre aufzinsen = = Barwert der neuen 9 Zahlungen,
- Beginn des 7. Jahres: Endwert der ausgefallenen 3 Zahlungen = Barwert der Zusatz zahlungen für die kommenden 9 Jahre,
- Ende des 15. Jahres: Endwert der vorgesehenen 12 Zahlungen à 4000 EURO = = Endwert der erhöhten 9 Zahlungen.

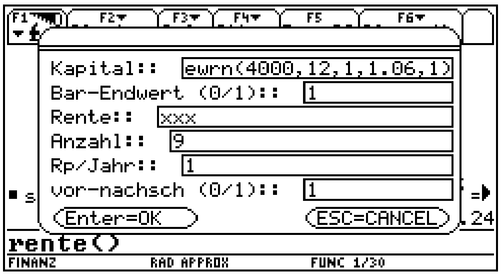


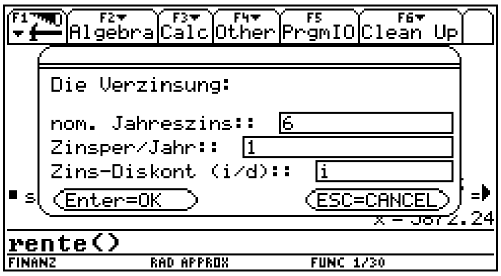
auf dem TI-83+:

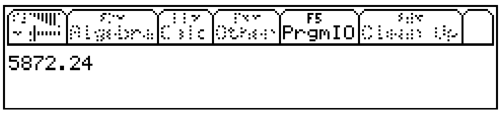


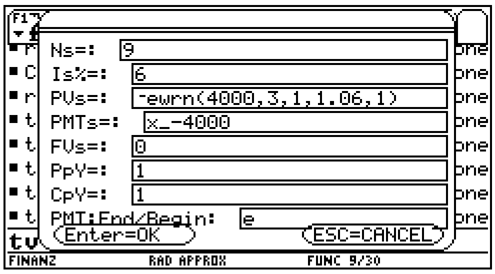


mit `rente()` auf den CAS-TI:







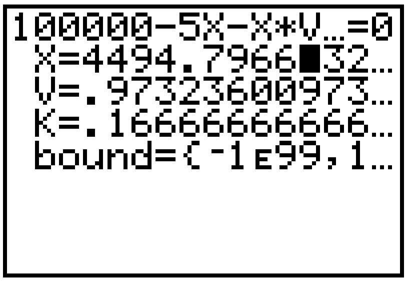


`tvms()` liefert in der Zeile PMTs wieder das gesuchte Ergebnis 5872,24.

rr8 Eine Schuld von 100000.- soll durch 18 nachschüssige Monatsraten und eine Sofortzahlung in der Höhe von fünf dieser Monatsraten beglichen werden. Wie groß ist diese Sofortzahlung bei j_2 = 5,5%?

Der TI-83+ lässt in diesem Fall nur die Anwendung des `Equation Solvers` zu. Bei einem Barwertvergleich ist die folgende Gleichung zu lösen:

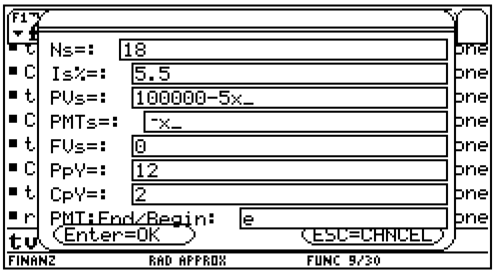
$$100000 - 5x - \frac{x \cdot v^k (1 - v^{k \cdot 18})}{1 - v^k} = 0 \quad \text{mit } v = \frac{1}{1{,}0275} \text{ und } k = \frac{2}{12}$$

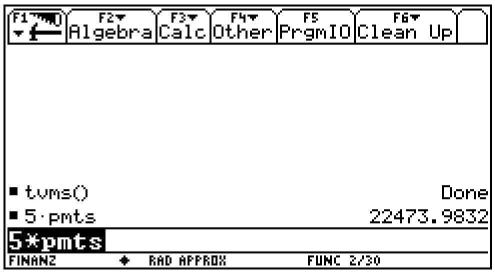


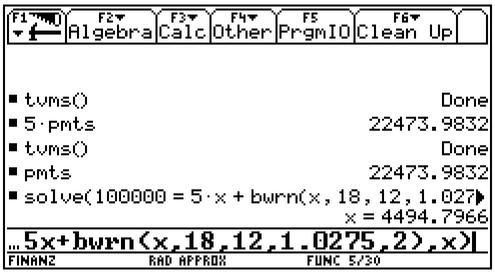
Um die gestellte Frage zu beantworten ist das Ergebnis für X noch zu verfünffachen:

Die Sofortzahlung beträgt 22473,98.

Mit dem `TVMS-Solver` kann man den Ansatz sofort in die Eingabemaske füllen. Wenn man `x_` durch `x_/5` ersetzt, dann erhält man in der Zeile PMTs direkt die Sofortzahlung.

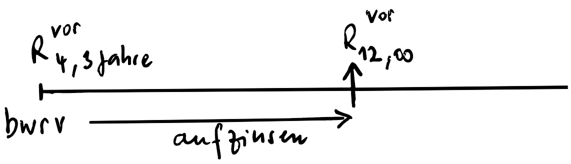


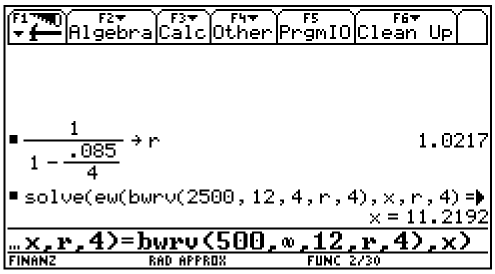


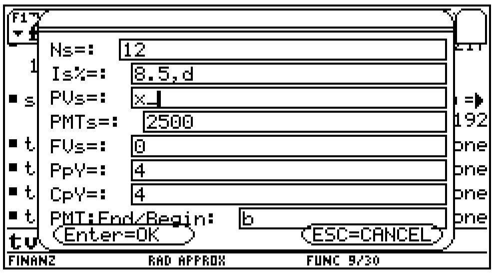


Meinen persönlichen Vorzug genießt der Einsatz einer geeigneten Funktion, die den Text in einer einzige Zeile zusammenfassen lässt.

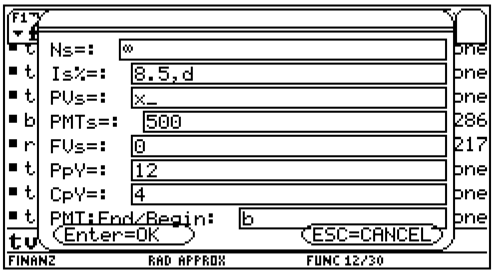
rr9 Jemand hat Anspruch auf eine drei Jahre laufende vorschüssige Quartalsrente in der Höhe von 2500.-. Er möchte diesen Anspruch in eine ewige Monatsrente in der Höhe von 500.- umwandeln.
Wie lange muss er bei f_4 = 8,5% auf die erste Auszahlung dieser Monatsrente warten?



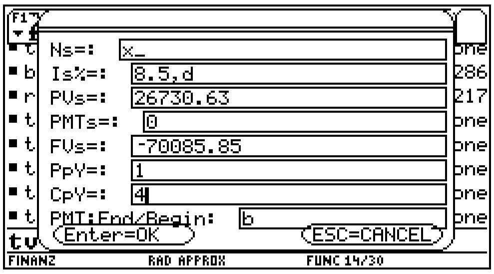




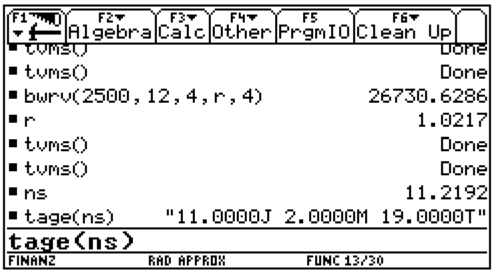
PVs = -26730.63



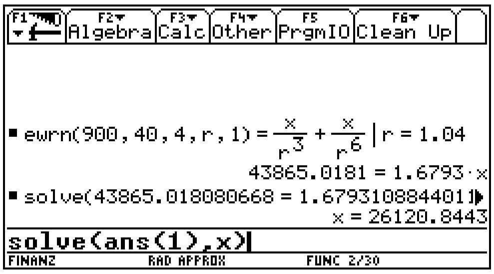
PVs = -70085,85



Ns = 11.2192

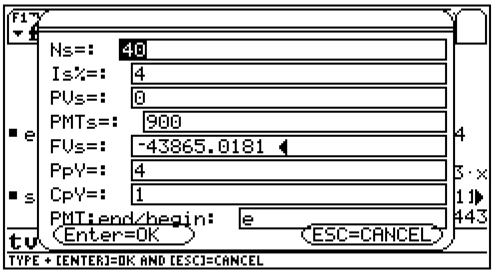


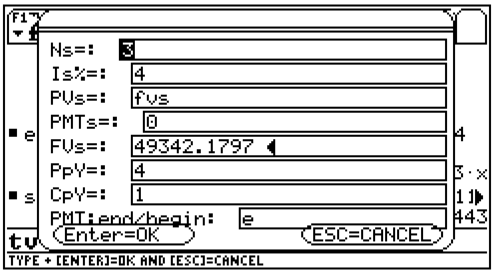
rr10 Frau Sparmeister kann aus ihren Nebeneinkünften 10 Jahre hindurch nachschüssig und vierteljährlich 900 EURO zurücklegen. Drei Jahre nach der letzten Einzahlung behebt sie gerade soviel, dass ihr nach weiteren drei Jahren ein gleich großer Betrag übrig bleibt. Wie groß ist dieser bei *i* = 4%?

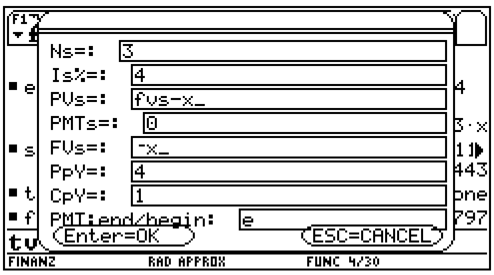


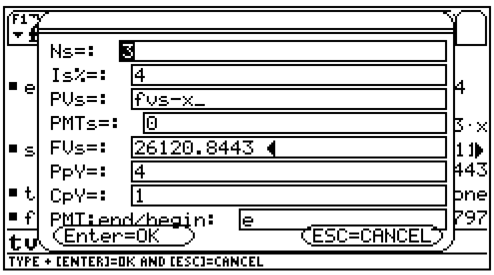
Dieser Betrag macht 26120,84 EURO aus.

Weder mit dem Standard `TVM-Solver` noch mit `rente()` läßt sich die Aufgabe lösen. Entweder geht man mit der Gleichung in den `Equation Solver` oder man benützt `tvms()`.



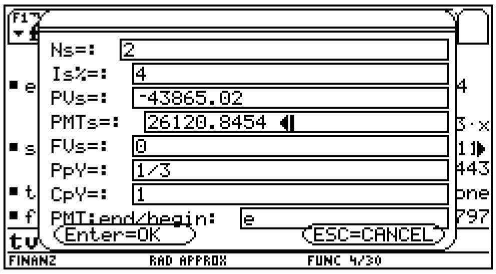






Die beiden Zahlungen lassen sich auch als überjährige Rente interpretieren.

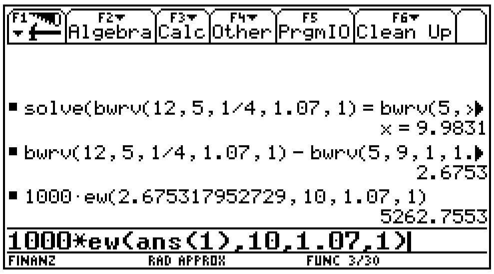
So ließe sich auch mit `rente()` arbeiten.



rr11 Ein Unternehmen hat Anspruch auf 5 Auszahlungen in der Höhe von je 12000 USD. Die erste ist sofort, die anderen in Abständen von jeweils 4 Jahren fällig. Er möchte seinen Anspruch in Form einer sofort beginnenden vorschüssigen Jahresrente in der Höhe von 5000 USD beziehen. *i* = 7%

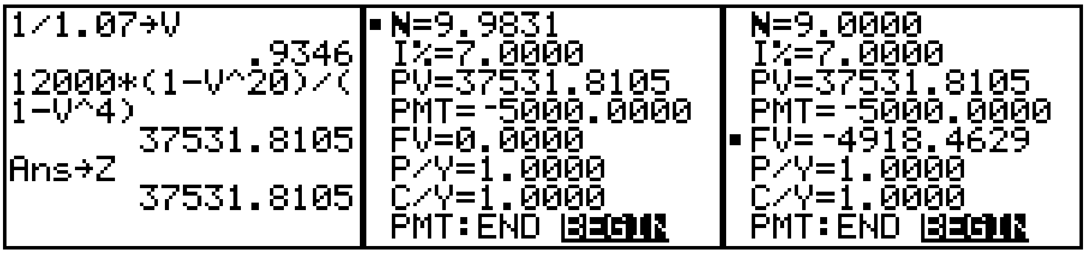
a) Auf wie viele Vollraten hat er Anspruch?

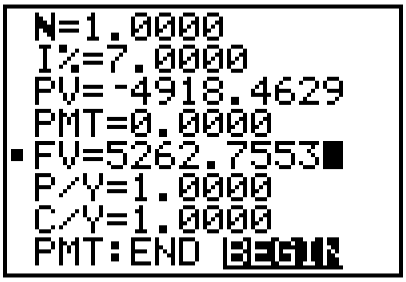
b) Wie groß ist die Schlussrate, wenn diese zwei Jahre nach der letzten Vollrate be zogen werden soll?



Mit `tvms()` kann man auch den Barwert der überjährigen Rente bestimmen, dann geht´s weiter wie am TI-83+, auf dem vorerst auf die Barwertformel zurück gegriffen werden muss.

Die Durchführung auf dem TI-83:

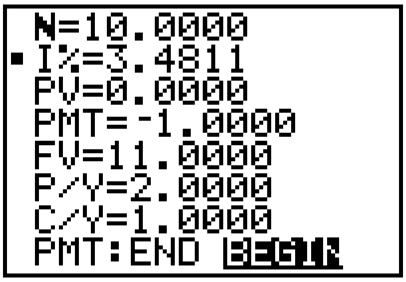


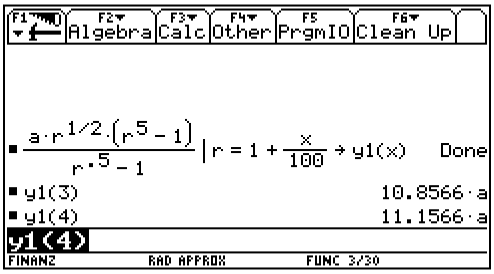


Hier ist besonders sorgfältig auszuzählen: die letzte vorschüssige Rente ist zu Beginn des 9. Jahres fällig. Zwei Jahre nach der letzten Zahlung ist der Beginn des 11. Jahres. Der Endwert der Rente gilt für das Ende des 9. Jahres. Die Zeitspanne von hier bis zur Fälligkeit der Schlussrate ist demnach nur **ein Jahr**!

rr12 Bei einem Sparsystem verpflichtet man sich, fünf Jahre hindurch am Beginn eines jeden halben Jahres einen fixen Betrag einzuzahlen. Am Ende des 5. Jahres erhält der Sparer den elffachen Betrag einer Einzahlung zurück. Welcher effektiven Verzinsung *i* entspricht dies?

Am einfachsten nimmt man einen fiktiven fixen Betrag (z.B. 1) an und verfährt beliebig.





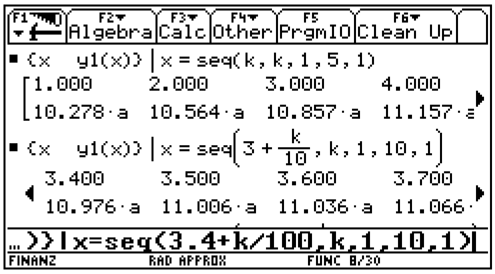
Wenn man wirklich allgemein, d.h. mit dem allgemeinen fixen Betrag „a" arbeiten will, dann versagt die Tabelle mit einer Fehlermeldung. Auch `tvms()` verweigert, weil die Suche nach dem Zinsfuß (und nach der Anzahl der Zahlungen) intern mit `nsolve` programmiert wurde und diese interne Funktion eine "univariate" Gleichung (d.i. eine Gleichung mit nur einer Variablen) verlangt.

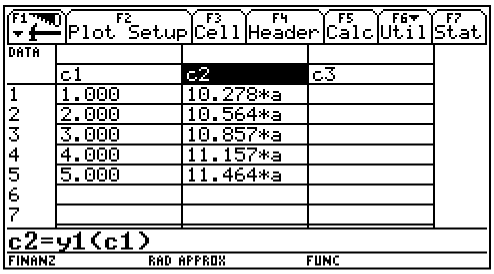
Man kann die Kompetenz der Schüler bezüglich des Umgangs mit ihrem Werkzeug „testen", indem man sie beauftragt, allen Widrigkeiten zum Trotz eine allgemeine dezimale Suche durchzuführen.

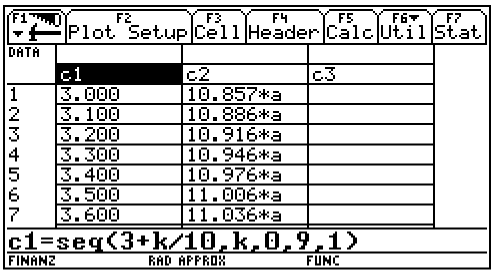
Zwei Vorschläge dazu:

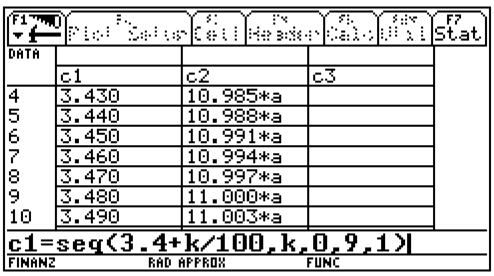
Im Homescreen können Folgen erzeugt werden, die schrittweise Verfeinerungen zulassen.

Oder man erzeugt die Folgen (Listen) im `Data/Matrix Editor`.









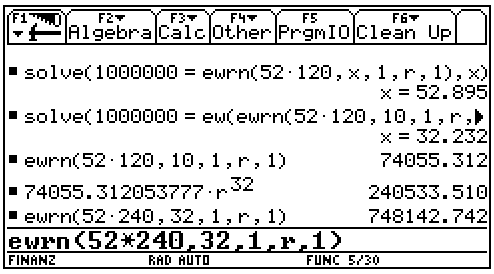
rr13 Donald hat einen immer wiederkehrenden Traum: er wäre so gerne Millionär wie sein Onkel Dagobert. Sein Lieblingsneffe Track gibt ihm einen Tipp: „Wenn du von deinen Einkünften aus der Werbung wöchentlich 120 Ententaler sparen würdest, dann sind das in einem Jahr eine ganze Menge ET. Die bringst du dann auf die Bank, die dir 3,75% Zinsen gibt. Dann bist du bald so reich wie der alte Geizkragen Onkel Dagobert, der uns nicht einmal ein Taschengeld gibt.“

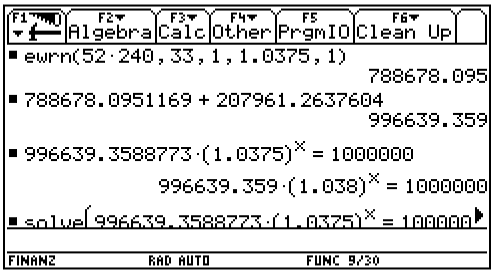
a) Kannst Du Donald helfen? Nach wie viel Jahren wäre er Millionär?

b) Nach 10 Jahren eifrigen Sparens kann Donald den doppelten Betrag wöchentlich sparen. Wieviele volle Jahre sind notwendig? Nach der letzten vollen Jahreseinzahlung wartet Donald nur mehr auf den Tag, an dem die Million voll wird. Wie lange muss er warten?

c) Beantworte Frage a) unter der Annahme, dass Donald nicht die Mühe scheut, seine 100 Ententaler wöchentlich (immer am Freitag) zur Bank zu bringen. Nimm für jedes Jahr 52 Wochen an und rechne mit theoretischer Verzinsung. (In Wirklichkeit rechnen die Banken jedoch während des Jahres mit einfachen Zinsen. Das wird in Abschnitt 7 behandelt.)

a) und b)





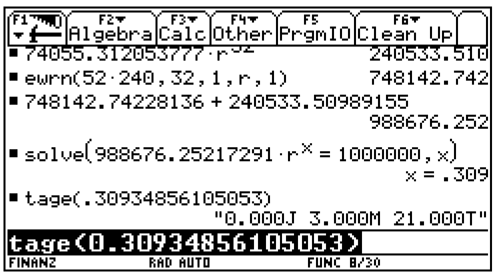

```
1.Ø375 → r
1ØØØØØØ = ewrn(52*12Ø,x,1,r,1)
1ØØØØØØ = ew(ewrn(52*12Ø,1Ø,1,r,1),x,r,1)+ewrn(52*24Ø,x,1,r,1)
```

Er müsste 52 Jahre sparen.

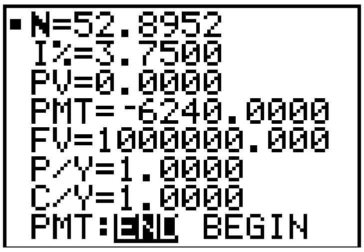
10 + 32 Jahre.

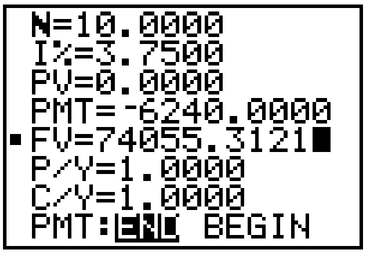
Nach 10 Jahren hat er 74055,31 Ententaler, die 32 Jahre aufgezinst einen Endwert von 240533,51 ET ergeben. Dazu kommen 748142,74 ET als Endwert der erhöhten Rente. Damit besitzt Donald am Ende des 42. Jahres 988676,25 ET. Nun kann er seine Hände in den Schoß legen und zusehen, wie sein Kapital wächst.

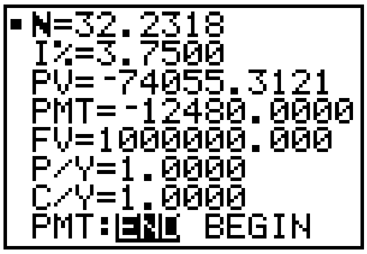
Am einem 22. April ist es dann endlich so weit: Donald ist Millionär.

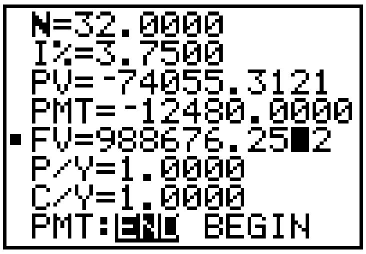


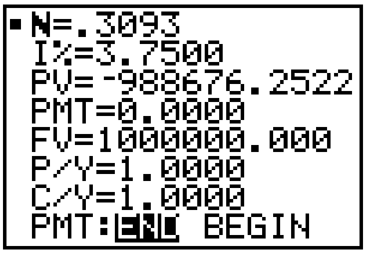
Es folgt die Durchführung auf dem TI-83+:







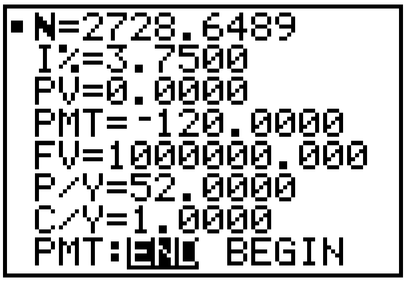


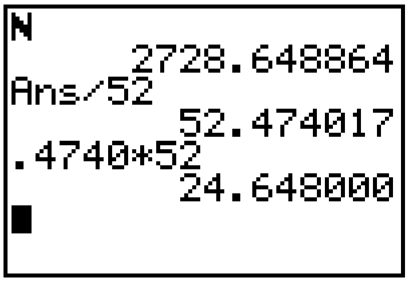


Die Berechnung der Tage ist eine Routineangelegenheit.

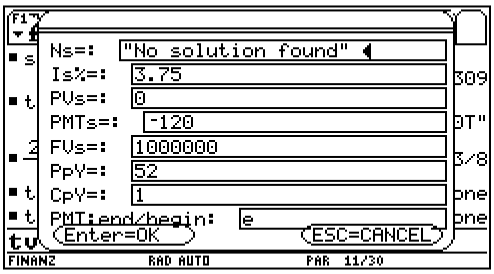
c)

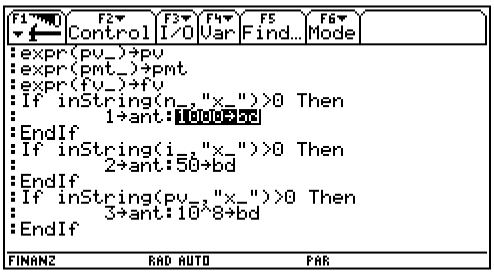
Die Wartezeit verkürzt sich etwas auf 2728 Wochen. Das sind nicht ganz 52 ½ Jahre.

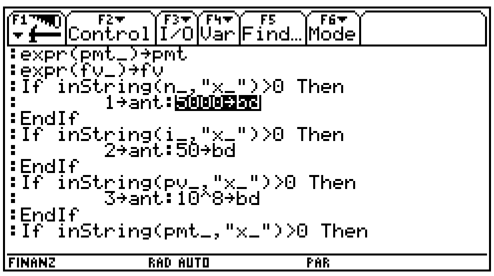


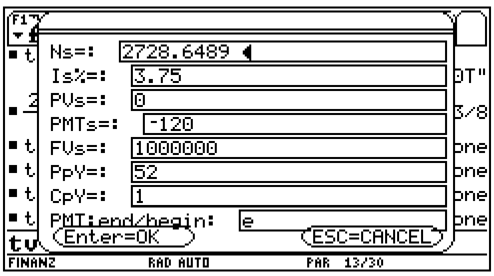


Mit meinem TVMS-Solver habe ich eine unliebsame Überraschung erlebt, deren Ursache aber sofort aufgespürt werden konnte. Um den `nsolve`-Prozess zu beschleunigen wurde eine Eingrenzung für die möglichen Lösungen eingebaut. Dabei hatte ich bei der Programmerstellung nicht an mehr Zahlungen als 1000 gedacht. Im Programmeditor erhöhe ich diese Grenze bd auf – sicherheitshalber – 5000 und versuche es erneut.

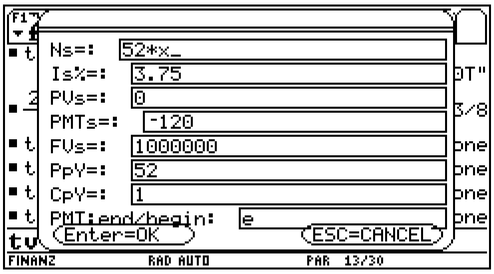


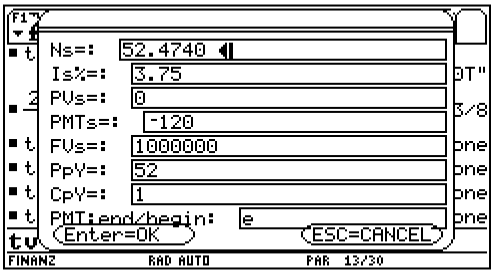




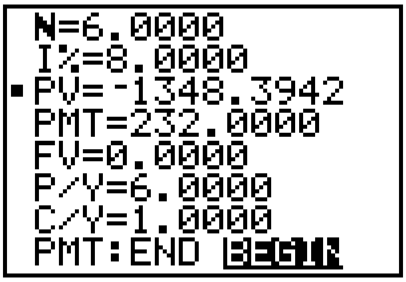


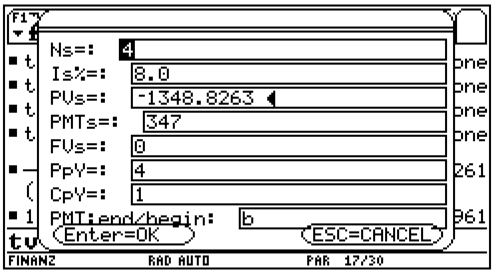
Jetzt funktioniert´s nach Wunsch. Die CAS-Tauglichkeit von `tvms()` ermöglicht aber eine elegantere Lösung auch ohne „Herumdokterei“ am Programm:



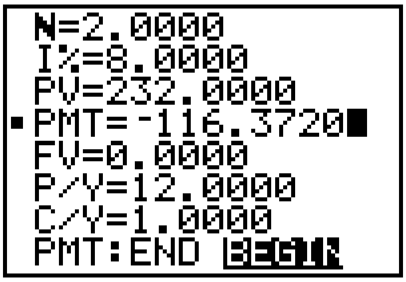


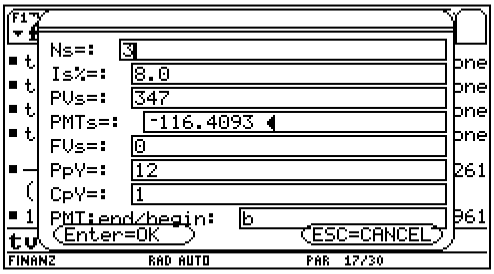
rr13 Eine Großtischlerei benötigt Sägeblätter. Zwei Angebote liegen vor: Firma EverSharp bietet 10 Stück um 232 EURO an, Firma Tigerzahn verkauft die Zehnerpackung um 347 EURO. Die beiden Sägeblätter unterscheiden sich in der Haltbarkeit. Während das billigere alle 2 Monate ersetzt werden muss, hält das teurere durchschnittlich 3 Monate. Welches Angebot ist günstiger, wenn man annehmen kann, dass die Blätter am Ende ihrer Nutzungsdauer jeweils identisch ersetzt werden. Der Barwert aller Kosten wird *kapitalisierte Kosten* genannt. Man rechnet mit einer Kapitalverzinsung von i = 8%.



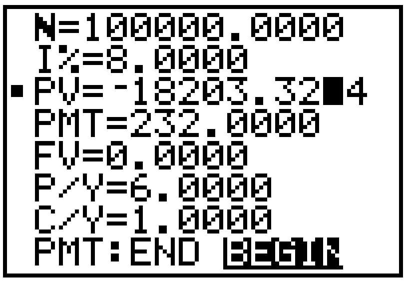


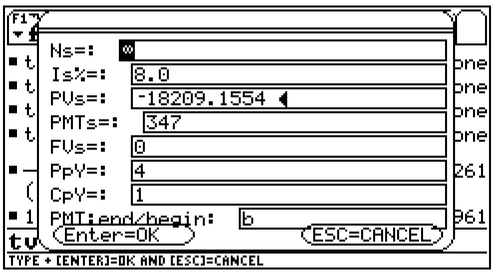
Vergleich der Kosten pro Jahr (links am TI-83+, rechts mit `tvms()`)





Vergleich der Kosten pro Monat (links am TI-83+, rechts mit `tvms()`)

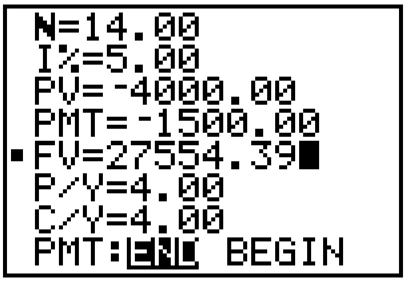


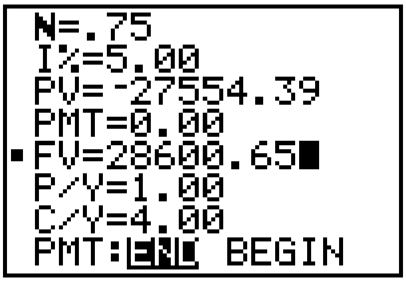


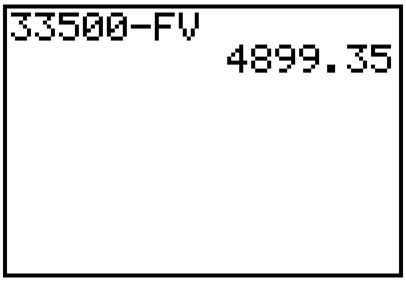
Vergleich der „ewigen“ kapitalisierten Kosten (links am TI-83+, rechts mit `tvms()`)

Natürlich ist das Ergebnis in seiner Aussage immer das selbe: EverSharp ist geringfügig günstiger.

rr14 Der Sportverein FFF (*FIT FOR FUN*) plant langfristig einen großzügigen Ausbau seiner Sportanlagen. Die Kosten werden mit ca. 30000 EURO veranschlagt. 4000 EURO liegen bereits auf einem für diesen Zweck gewidmeten Konto. Vierteljährlich können nachschüssig jeweils 1500 EURO aus den Mitgliedsbeiträgen auf dieses Konto übertragen werden. Die Verzinsung beträgt j_4 = 5%. Nachdem 14 Ansparraten erlegt worden sind, wird mit der Einzahlung geendet und mit dem Bau begonnen, der nach weiteren 9 Monaten abgeschlossen ist. Welcher Betrag ist von FFF über Sponsoren noch aufzubringen, wenn die Endabrechnung eine Summe von 33500 EURO ausweist?



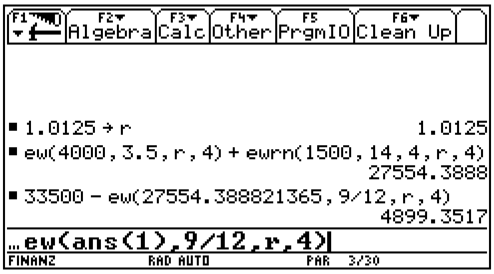




Das nach 14 Raten insgesamt angesparte Kapital wird 9 Monate aufgezinst.
Die Differenz auf 33500 beträgt 4899,35€.

Beachte, dass FV nur über das Finanzwerkzeug auf den Rechenschirm gebracht werden kann. Das Schreiben von FV nützt nichts!

Auf den CAS-TI können wir bequem mit den Funktionen arbeiten:



rr15 Ein Ausstellungszentrum mit einer vermietbaren Fläche von 1200m^2 soll mit einem Kostenaufwand von 1,5 Millionen EURO modernisiert werden. Die halbjährlichen nachschüssigen Betriebskosten werden mit 120000 EURO veranschlagt. Nach drei und dann nach weiteren vier Jahren ist ein Ausbau mit Kosten von jeweils ca. 50000 EURO geplant.
Die Fragen a) und b) sind vorerst unter der Annahme einer vollständigen Eigenfinanzierung beantwortet werden.

a) Wie hoch müsste die vierteljährliche vorschüssig zu zahlende Platzmiete pro m^2 sein, wenn mit einer Amortisationsdauer von 10 Jahren gerechnet wird und eine Verzinsung von 10% erreicht werden soll?

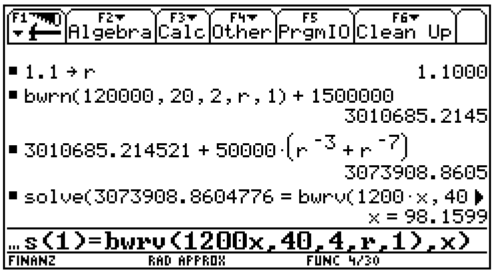
b) Welche Verzinsung (Rendite) erreicht die Anlage, wenn jeder der gewonnenen 65 Daueraussteller zuzüglich zur Miete am Beginn eines jeden Geschäftsjahres den Verwaltungsbeitrag von 600 EURO bezahlt?

c) Eine halbe Million der Errichtungskosten wird durch einen Kredit aufgebracht. Nach zwei Jahren ist die erste Monatsrate in der Höhe von 17000 EURO fällig. Wie viele Raten sind zur vollständigen Tilgung der Schuld nötig. Wie groß ist die Schlussrate, wenn sie einen Termin nach der letzten Vollrate beglichen werden soll? Der Kreditzins beträgt i = 12,5%.

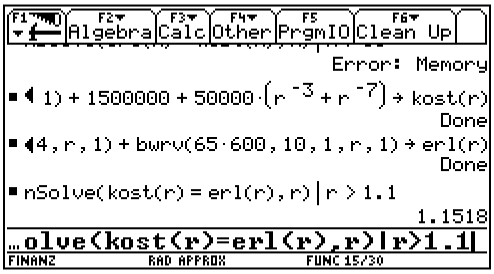
d) Wie hoch ist die Rendite, wenn die Aussteller die in a) berechnete Miete und den in b) eingeführten Verwaltungsbeitrag zahlen, wenn man auch noch die Fremdfinanzierung über den Kredit berücksichtigt?

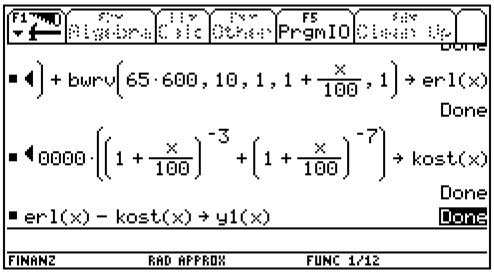
a) Der Barwert aller Kosten muss durch den Barwert der zu erwartenden Einnahmen aus den Mieten gedeckt werden.

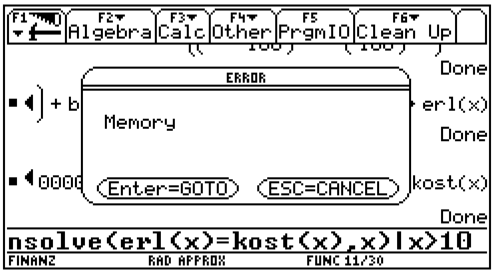
Die Miete pro m² beträgt 98,16€.

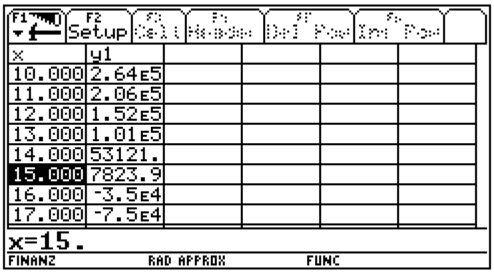


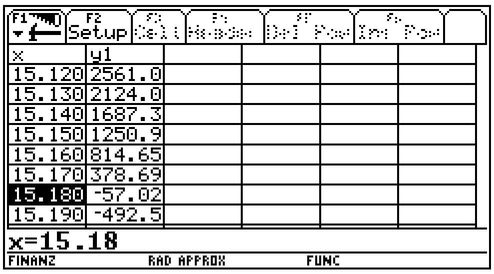
b) Zu den Mieten kommen die Verwaltungsbeiträge als Einnahmen dazu. Zu welchem Jahreszinsfuß i stimmen Barwert der Kosten und Barwert der Einnahmen überein? Die entstehende Gleichung ist schon recht umfangreich und deren numerische Lösung erfordert eine gewisse Kompetenz im Umgang mit dem Werkzeug: setzt man – wie vielleicht gewohnt und früher empfohlen für r = 1+x/100, dann übersteigt die Aufgabe das Vermögen des Speichers, wogegen der Aufzinsungsfaktor r rasch berechnet wird. Die Rendite steigt auf 15,2%.









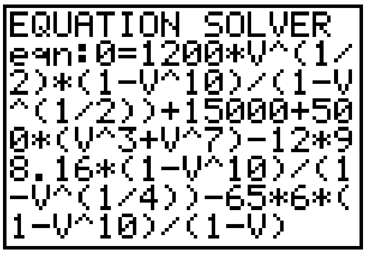


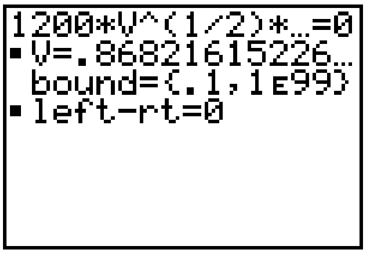
Wir wollen aber – gerade bei numerischen Problemen - nie die Möglichkeit außer Acht lassen, eine Gleichung entweder grafisch oder über eine dezimale Suche mit der Tabelle zu lösen.

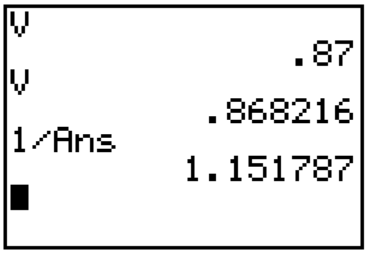
Ich habe die Gleichung in zwei Teile (Barwert der Kosten = `kost(r)` und Barwert der Erlöse = `erl(r)`) zerlegt. Die Gleichung in einem Stück würde so lauten:

```
bwrn(120000,20,2,r,1) + 1500000 + 50000(r^(-3)+r^(-7) =
bwrv(1200*98.16,40,4,r,1)+bwrv(65*600,10,1,r,1)
```

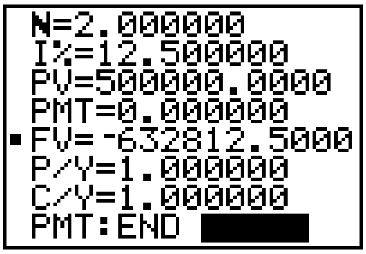
Auf dem TI-83+ lässt sich eine derartig komplexe Aufgabe nur über den `Equation Solver` lösen. Dazu ist die Gleichung in traditioneller Weise über die Summenformel der geometrischen Reihe (Seite 7) zusammenzustellen. (Die Gleichung wurde vorher durch 100 gekürzt.)

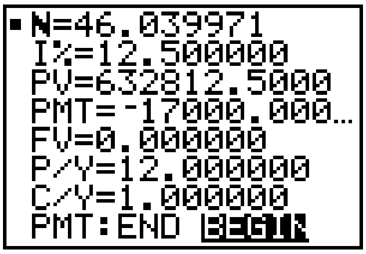


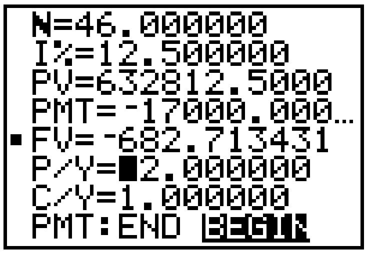




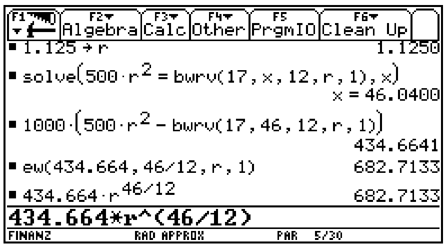
c) Das ist eine unkomplizierte Schlussratenaufgabe (siehe auch rr3 und rr11).
46 monatliche Rückzahlungen sind notwendig und die Schlussrate beträgt 682,71€.







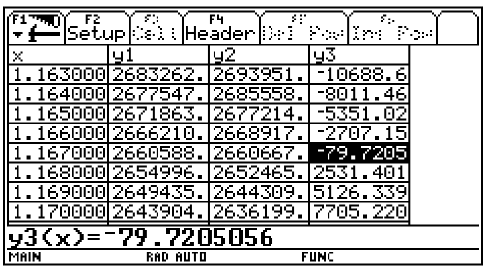
Die Rückzahlungen sind vorschüssig, daher ist die letzte Rate am Beginn des 47.Monats = Ende des 46. Monats – nach den zwei rückzahlungsfreien Jahren gerechnet – zu leisten.



d) Gegenüber dem Ansatz von oben verringern sich die Anschaffungskosten auf 1000000, dafür kommt der Barwert der Rückzahlungen – zum gesuchten Zinsfuß – dazu. Ich gehe gleich auf die Lösung über die Tabelle los und definiere die Barwerte der Kosten und der Erlöse als y1(x) bzw. y2(x) im Funktioneneditor:

```
y1(x)=bwrn(120000,20,2,x,1)+1000000+50000(1/x^3+1/x^7)+
bwrv(17000,46,12,x,1)/x^2+682.71/x^(46/12+2)

y2(x)=bwrv(1200*98.16,40,4,x,1)+bwrv(600*65,10,1,x,1)
```



In der dritten Spalten steht die Differenz der Barwerte. Da die Kreditverzinsung unter den 15,2% liegt, steigt die Rendite (auf 16,7%), weil bei dieser Form der Rechnung unter der – kritisch zu bewertenden - Annahme gearbeitet wird, dass alle Erträge zum hohen Renditezinsfuß wieder veranlagt werden können (siehe Teil 3, Investitionsrechnung).

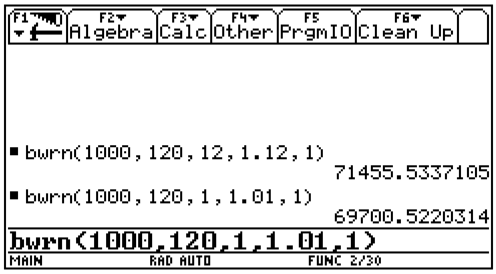
7 Rentenrechnung bei gemischter Verzinsung

Schon in Teil 1 des Skriptums wurde von der *gemischten Verzinsung* gesprochen. Und leider gibt es diesen Anachronismus auch noch in der Rentenrechnung. Alle Fachleute in der einschlägigen Literatur verfechten die ISMA-Methode (**I**nternational **S**ecurities **M**arket **A**ssociation), die die gegebene Verzinsung in die für die vorliegende Rentenperiode äqivalente Periodenverzinsung umrechnet. Das ist genau das, was bisher durchgeführt wurde.

Daneben gibt es noch die US-Methode, die vor allem in den Vereinigten Staaten gepflegt wird. Hier wird der i.a. Jahreszinsfuß einfach proportional auf die Rentenperioden aufgeteilt und dann wird wieder die Summenformel angewendet. Bei i = 12% und monatlichen Zahlungen wird einfach mit i_{12} = 1% gerechnet. Darin dürfte auch der Grund liegen, dass beim originalen `tvm`-Solver der Wert für `C/Y` automatisch an `P/Y` angepasst wird und man oft nachjustieren muss. Auf der US-Methode basieren auch die finanzmathematischen Formeln von Excel. Daher sind sie nur mit Vorsicht anzuwenden.
So liefert z.B., eine 10 Jahre lang zahlbare nachschüssige Monatsrente von 1000€ bei einer Jahresverzinsung von 12%, wenn man der Excel-Hilfe folgt das Ergebnis 69700,52€. Um mit unserer Gepflogenheit konform zu gehen, muss man in einer Nebenrechnung erst den entsprechenden äquivalenten Zinsfuß berechnen. Das in unserem Sinn richtige Ergebnis ist 71455,53€.

`BW(12%/12;120;1000;0;0) = 69700,52€`

Man sieht, dass dies vom erwarteten Ergebnis abweicht. Die Excel – Funktion macht ganz einfach aus i = 12% eine Verzinsung von j_{12} = 12%



Beide Methoden haben aber die Eigenschaft, dass unterschiedliche Bezugspunkte bei Rentenumwandlungen gleiche Ergebnisse liefern und damit keinerlei Widersprüchlichkeiten zum Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik auftreten. Anders ist es bei der Anwendung der schon angesprochenen gemischten Verzinsung in der Rentenrechnung, die natürlich nur dann von Bedeutung ist, wenn

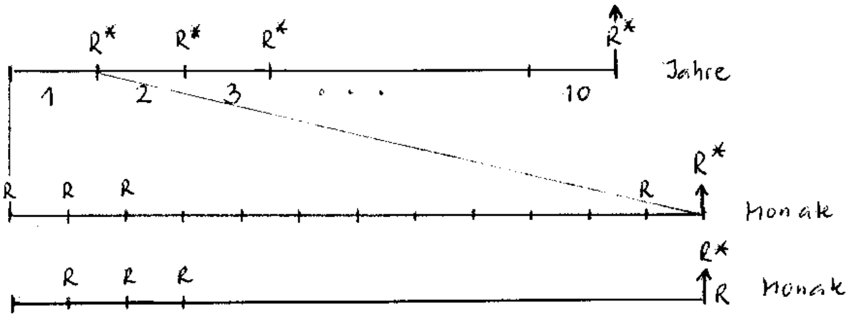
- die Zinstermine nicht auf einen Zahlungstermin fallen und
- wenn die Rentenperiode kleiner ist als die Zinsperiode.

Das Thema soll hier nicht ausgereizt werden, sondern es wird mit einigen wenigen Beispielen gezeigt, wie an diese Problematik herangegangen wird.

rr16 Bei einem Sparsystem zahlt jemand monatlich 100€ auf ein Konto, das mit i = 4,25% verzinst wird. Welcher Betrag kann innerhalb von 10 Jahren angesammelt werden, wenn man annimmt, dass die erste Zahlung

a) am Beginn des ersten Monats,
b) am Ende des ersten Monats,
aber immer am Beginn der ersten Verzinsungsperiode erfolgen. Die Verzinsung innerhalb der Zinsperioden ist linear.
c) Vergleiche die Ergebnisse mit jenen bei Anwendung der ISMA- und der US-Methode.

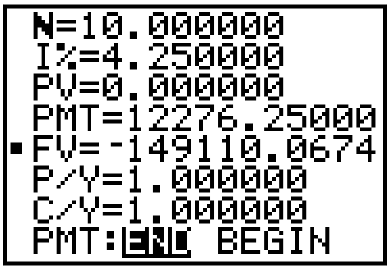
In diesem Fall bedient man sich einer sogenannten *Ersatzrente* (R^*). Dabei werden die periodischen Zahlungen gemeinsam mit den angesammelten – einfachen – Zinsen am Ende der Zinsperioden zusammengefasst. Diese Ersatzrenten sind dann immer nachschüssig! Eine Zeitlinie verdeutlicht dies:



a) Wir betrachten zuerst die Teilaufgabe a) mit den vorschüssigen Monatsrenten. Die Ersatzrente R^* setzt sich zusammen aus den 12 Zahlungen R und den jeweiligen linearen Zinsen.

$$R^* = 12R + R\left(\frac{i}{12}+\frac{2i}{12}+\frac{3i}{12}+...+\frac{12i}{12}\right) = 12R + \frac{R\cdot i}{12}(1+2+...+12) =$$

$$= 12R + \frac{78R\cdot i}{12} = R\cdot\left(\frac{24+13i}{2}\right);\; R^* = 1000\cdot\left(\frac{24+13\cdot 0,0425}{2}\right) \approx 12276,25$$



Der Endwert beträgt 149110,07€

In einem – übrigens ausgezeichneten – Buch über Finanzmathematik [1] wird für die Ersatzrente in diesem Fall (vorschüssige innerperiodische Raten) die folgende Formel angeboten:

$$R^* = m\cdot R\cdot\left(1+i\cdot\frac{m+1}{2m}\right)$$

Dabei bedeutet m die Anzahl der Rentenperioden innerhalb einer Zinsperiode

Überprüfe das obige Ergebnis mit dieser Formel.

Leite eine eigene Formel her und zeige die Äquivalenz zur vorliegenden. (Hinweis: Denke dabei an die arithmetische Reihe.)

Wie ändert sich die Formel für den Fall nachschüssiger Zahlungen? (R^* = 12233,75€)

b) Das Ergebnis lautet dann: 148593,85€.

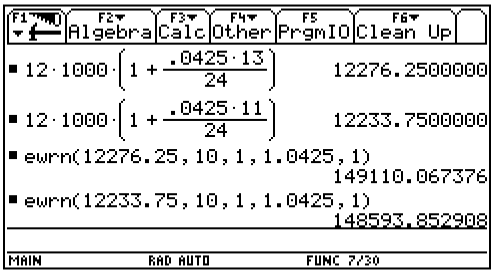
c) Die Ergebnisse bei der für uns üblichen (ISMA-) Methode sind 149088,73€, bzw. 148572,52€.

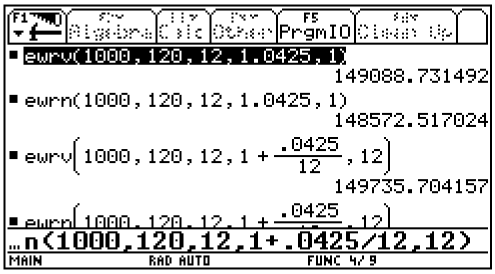
Bei Anwendung der US-Methode ergeben sich die Werte 149735,70€ und 149207,26€.

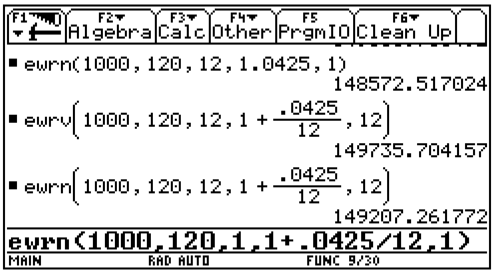
Zusammenstellung der Ergebnisse:	vorschüssig	nachschüssig
gemischte Verzinsung:	149110,07	148593,85
theoretische Verzinsung (ISMA)	149088,73	148572,52
theoretische Verzinsung (US)	149735,70	149207,26

Fragen: Warum ergibt die US-Methode (immer?) einen größeren Endwert?
Wann wird dieser Unterschied deutlicher?

(Antworten: Weil die effektive Verzinsung bei einem nominellen Jahreszinsfuß j_m immer höher ist als die Jahresverzinsung i = j_m. j_{12} = 6% bringt einen höheren Ertrag als i = 6%. Der Unterschied wird umso deutlicher, je höher die Verzinsung, aber auch je kürzer die Rentenperiode wird. j_{12} = 6% wirkt sich stärker aus als j_2 = 6%. Noch schlimmer wird´s bei wöchentlichen Ratenzahlungen!)







Noch eine Frage:

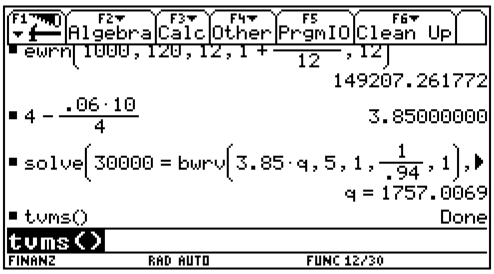
Wird der Ausdruck in der Eingabezeile ebenfalls das Ergebnis 149207,26 liefern?

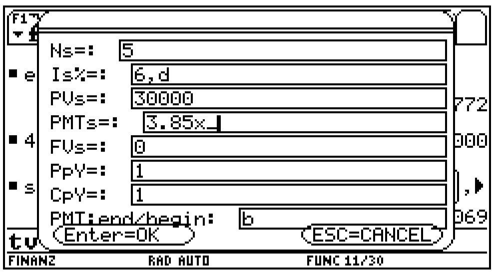
Begründe auch die Antwort.

rr17 Ein Kredit über 30000€ ist innerhalb von 5 Jahren in Form von nachschüssigen Quartalsraten zurückzuzahlen. Wie hoch sind diese Raten, wenn ein antizipativer Zinsfuß *d* = 6% verrechnet wird. Außerdem wird innerhalb des Jahres linear verzinst (= kaufmännischer Diskont angewendet).
Welcher effektiven Verzinsung *i* entspricht die angegebene?
(Hinweis: über kaufmännischen Diskont siehe im Teil 1 dieses Skriptums).

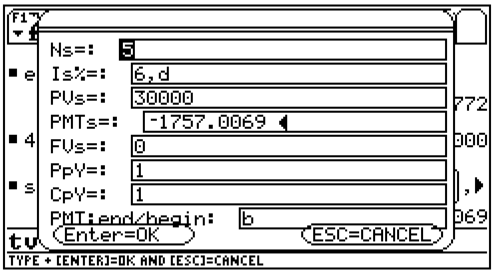
Hier wird die Ersatzrente R^* immer am Beginn der letzten Diskontperiode angesetzt. Wenn man die Quartalszahlung mit Q bezeichnet, dann erhält man (ohne hier eine *Formel* zu bemühen):

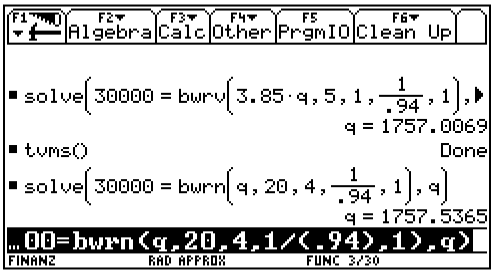
$$R^* = 4Q - \left(\frac{Q\cdot d}{4} + \frac{Q\cdot 2d}{4} + \frac{Q\cdot 3d}{4} + \frac{Q\cdot 4d}{4}\right) = 4Q - \frac{10Q\cdot d}{4} =$$
$$= Q\cdot\left(4 - \frac{5d}{2}\right) = Q\cdot(4 - 0{,}15) = 3{,}85Q$$





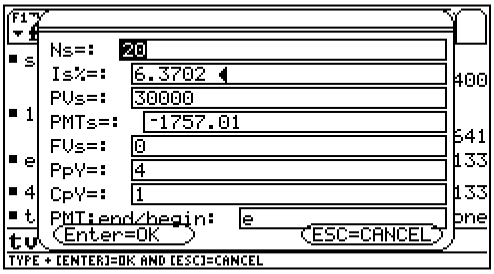
Die Ersatzrenten sind in diesem Fall immer vorschüssig.





Eine Zahlung beträgt 1757,01€. Zum Vergleich beträgt eine Rate 1757,54€, wenn nicht gemischt, sondern theoretisch verzinst wird. Der Unterschied ist hier sehr gering.

Mit irgend einem Werkzeug ermittelt man die effektive Verzinsung mit i = 6,37%.



Den Abschluss dieses Kapitels bildet eine etwas umfangreichere Aufgabe:

rr18 Eine längere Zahlungsverpflichtung besteht aus 60 Quartalsraten zu je 2000€. Die erste Zahlung erfolgt am 1. 4. 2003. Die Verzinsung beträgt i = 6,5% per anno, wobei der Zinszuschlag kalendermäßig erfolgt (bei Jahresende). Während des Jahres wird linear verzinst.

a) Wie hoch ist die jährliche Ersatzrate?
b) Wie hoch ist der Gesamtwert aller Zahlungen per 1. 6. 2004?
c) Die Zahlung soll umgewandelt werden in eine halbjährliche Zahlungsweise mit insgesamt 10 Jahren Laufzeit, wobei aber der Termin der ersten Zahlung mit 1. 4. 2003 erhalten bleibt (20 Zahlungen!). Wie hoch ist dann eine Semesterzahlung?
d) Der gesamte Anspruch ist umzuwandeln in eine Barauszahlung von 30000€ am 1. 6. 2003 und eine ewige Rente, die alle zwei Monate fällig ist, beginnend mit dem 1. 1. 2007. Wie hoch ist diese Rente?
e) Zur Abschätzung (und Kontrolle) des Ergebnisses führe die Berechnung von b) – d) auch mit theoretischer Verzinsung durch. Die Resultate sollten nur geringfügig voneinander abweichen.

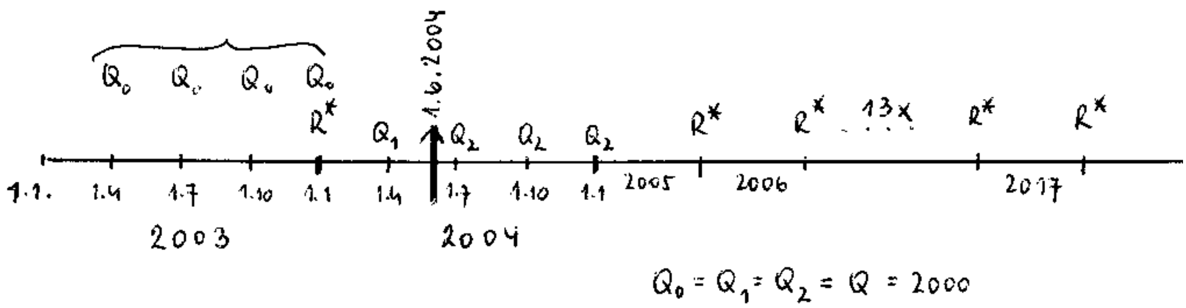
Wegen der schon mehrmals betonten Inkonsistenz der linearen Verzinsung ist die Berechnung erstens sehr aufwändig und kann zweitens je nach Auffassung zu etwas abweichenden Ergebnissen führen.

Unproblematisch ist Frage a) nach der Ersatzrente. Hingegen erfordern alle anderen Teilaufgaben sorgfältige Überlegungen unter Verwendung einer ordentlichen Zeitlinie.

a) Wir treffen die – sicher zulässige – Vereinfachung, dass die Zahlungen am 1. 1. eines jeden Jahres noch zum Vorjahr zählt und interpretieren die Rente als vierteljährlich nachschüssig zahlbar. Die Ersatzrente hat dann den Wert (mit oder ohne Formel von S.31):

$$R^* = 4Q + Q \cdot \left(\frac{i}{4} + \frac{2i}{4} + \frac{3i}{4} \right) = 8195{,}00 \qquad i = 0{,}065$$

b) Jetzt wird die Angelegenheit lästig. Es folgt zuerst eine Zeitlinie.

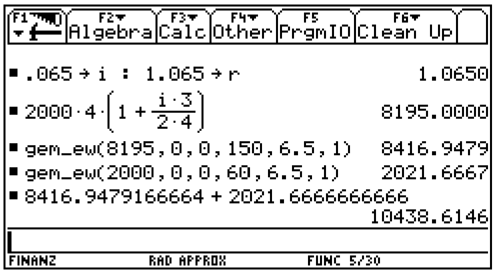


$$R^* \cdot \left(1 + \frac{5i}{12}\right) + Q_1 \cdot \left(1 + \frac{2i}{12}\right) = 10438{,}61€\,.$$

- die ersten fünf Zahlungen ergeben zum Bezugspunkt den Wert 10438,61€

Das lässt sich auch umständlicher mit der Funktion `gem_ew()` aus Teil 1 berechnen.

(150 Tage, bzw. 60 Tage sind die Zeiten, für die die lineare Verzinsung gilt.)



- die restlichen drei Raten aus dem Jahr 2004 werden linear abgezinst und repräsentieren den Gesamtwert von 5873,75€.

$$\frac{Q_2}{\left(1+\frac{i}{12}\right)} + \frac{Q_2}{\left(1+\frac{4i}{12}\right)} + \frac{Q_2}{\left(1+\frac{7i}{12}\right)} = 5873{,}75€$$

eine andere Variante wäre:

$$\frac{Q_2 \cdot \left(1+\frac{6i}{12}\right) + Q_2 \cdot \left(1+\frac{3i}{12}\right) + Q_2}{\left(1+\frac{7i}{12}\right)} = 5874{,}75€$$

Nach einer anderen Auffassung könnte man den linearen Endwert dieser drei Zahlungen aus 2004 bestimmen und diesen gemeinsam auf den 1. Juni sieben Monate abzinsen.

- Damit wurden bereits 8 Raten berücksichtigt und es bleiben noch 52 übrig. Das sind 13 volle Jahre, für die bereits die Ersatzrente R^* ermittelt wurde. Deren Barwert ist linear 7 Monate abzuzinsen, was schließlich zum Gesamtwert von 67900,33€ führt.

Der Gesamtbarwert für alle Quartalszahlungen beträgt 84212,69€. Eine Kontrollrechnung, die mit der theoretischen Verzinsung durchgeführt wird, ergibt 84218,94€. Der Unterschied ist wirklich sehr klein.

c) Die Ersatzrente R^{**} für das jeweilige Jahresende ist gegeben durch

$$R^{**} = 2R + \frac{R \cdot i}{12}(9+3) = R(2+i)\ .$$

Beim Vergleich der beiden Renten richten wir uns nach dem in Teil 1 (Seite 21) aufgestellten Grundsatz

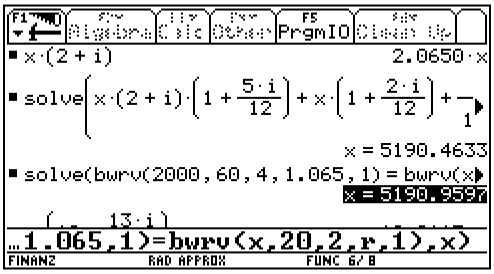
> Bei dekursiver gemischter Verzinsung muss der Termin der letzten vorkommenden Geldbewegung zum Bezugspunkt gemacht werden, bei antizipativer der Termin der ersten auftretenden Zahlung.

- Diese Ersatzrente ist vom 1.1.2004 bis zum 1. 6. 2004 aufzuzinsen. Dazu kommen die beiden Zahlungen, die 2004 fällig sind. Davon wird eine 2 Monate auf-, die andere 4 Monate abgezinst.

Das ergibt in Summe bisher: $\quad R^{**}\cdot\left(1+\frac{5i}{12}\right) + R\cdot\left(1+\frac{2i}{12}\right) + \frac{R}{\left(1+\frac{4i}{12}\right)}\ .$

- Die fehlenden 16 Zahlungen werden im Barwert von 8 Ersatzrenten R^{**} zusammengefasst (zum 1. 1. 2005), der noch 7 Monate abzuzinsen ist. Somit ergibt sich eine Gleichung in der Variablen R (bzw. x).

$$R^{**}\cdot\left(1+\frac{5i}{12}\right) + R\cdot\left(1+\frac{2i}{12}\right) + \frac{R}{\left(1+\frac{4i}{12}\right)} + \frac{\text{bwrn}(R^{**},8,1,1.065,1)}{\left(1+\frac{7i}{12}\right)} = 84212{,}69$$



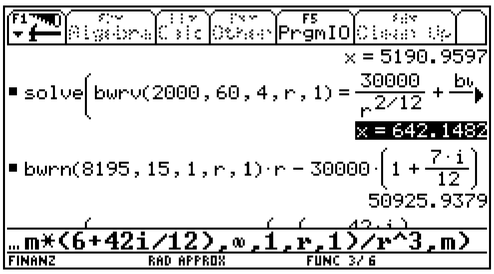
Die Kontrollrechnung ergibt 5190,96€

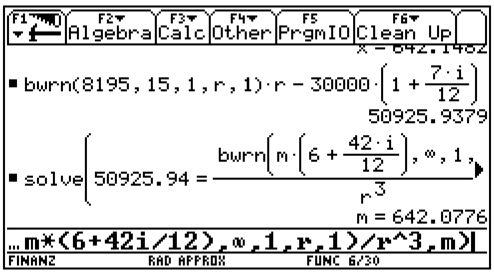
d) Zur Abschätzung des Ergebnisses wird zuerst die Rechnung mit der theoretischen Verzinsung durchgeführt, die zu einer ewigen Rente in der Höhe von 642,15€ führt.

$$\text{bwrv}(2000,60,4,r,1) = \frac{30000}{r^{2/12}} + \frac{\text{bwrv}(x,\infty,6,r,1)}{r^{3+9/12}} \qquad \text{(Bezugspunkt ist der 1. 4. 2003)}$$

Die Ersatzrente $R^{***} = 6m + \frac{m\cdot i}{12}(2+4+6+8+10+12) = m\cdot\left(6+\frac{42i}{12}\right)$. (ab dem Jahr 2007)

Für die Rechnung habe ich den 1. 1. 2004 als Bezugspunkt gewählt und erhalte 642,08€.





8 Reminiszenzen

Im letzten Abschnitt sind einige Aufgaben aus alten Lehrbüchern angeführt, die einerseits von der Formulierung interessant wirken und die andererseits zeigen, dass die Rentenrechnung schon immer ein Teil der Mittelschulmathematik gewesen sind.

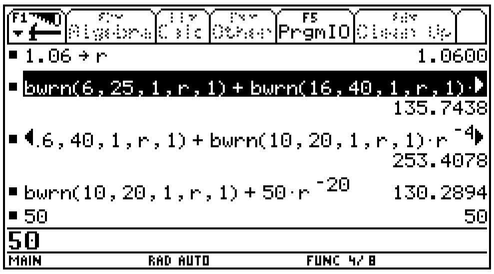
rr19 Berechne die angegebenen Ertragswerte.

Aus *Rechenbuch für landwirtschaftliche Schulen, Huber & Co, 1911*

20) Wer sich für derartige Aufgaben besonders interessiert und sich in deren Lösung noch weiter üben will, kann sich leicht ähnliche Aufgaben selber bilden. Er nehme z. B. einen Birnbaum an, der 100 Jahre alt werden kann. Die Jungperiode ohne nennenswerten Ertrag daure 15 Jahre, die 1. Tragperiode 25 Jahre, die 2. Tragperiode 40 Jahre und die 3. Tragperiode 20 Jahre. Die mittleren Jahres-Reinerträge seien in der I. Periode 6 Fr., in der II. Periode 16 Fr. und in der III. Periode 10 Fr. Der Holzwert des abgehenden Baums werde auf netto 50 Fr. veranschlagt. Nun berechne man die Ertragswerte des 15jährigen (Beginn der Tragbarkeit), des 40jährigen (Beginn der 2. Tragperiode), des 60jährigen (Mitte der 2. Tragperiode), des 80jährigen (Beginn der 3. Tragperiode) und des 100jährigen Baums, event. auch des 25jährigen, des 50jährigen und des 75jährigen Baums, bei wieder 6 % Zins und Risikoprämie.

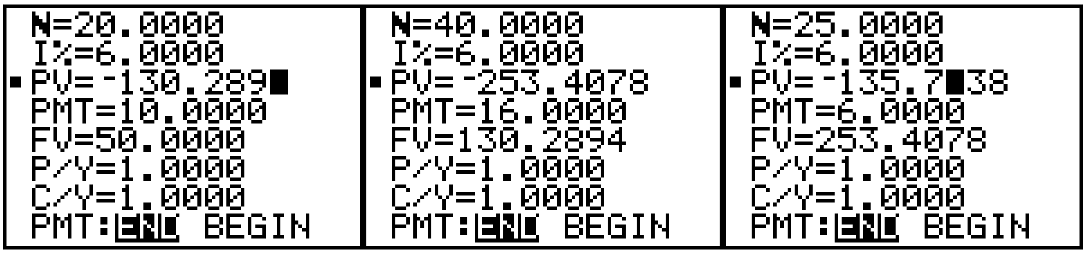
Der Ertragswert ist der Barwert der noch zu erwartenden Erträge des Baums. Wenn man mit E_n den jeweiligen Ertragswert des n-jährigen Baums bezeichnet, ergeben sich:

```
E15 = bwrn(6,25,1,r,1)+bwrn(16,40,1,r,1)*r^(-25)+
                      bwrn(10,20,1,r,1)*r^(-65)+50*r^(-85)
```



Hier erweist sich die Arbeit mit dem TVM-Solver als sehr elegant, wenn man die Zeitlinie von den letzten Jahren des Baums her rückwärts aufrollt.

Diskutiere, warum der Ertragswert im Baumalter 40 so besonders hoch ist?



rr20

Finde eine allgemeine Formel, in die nur mehr die Werte für *A*, *D*; *n* und *r* einzusetzen sind.

Beispiel für die zunehmende Rente: Zu ermitteln sei für 1 Jahr nach dem letzten Rententag und unter Anrechnung von 4% Zinseszinsen der Endwert von 12 vorauszahlbaren Jahresrenten, die mit 600 ℳ beginnen und jedes Jahr um 50 ℳ zunehmen.

A = 600 ℳ; D = 50 ℳ; n = 12 Beträge; p = 4%; π = 1,04.

1.) $x = 600\,\mathrm{III}^{12}_{4} + 50\,\mathrm{VII}^{11}_{4} = 50\left(12\,\mathrm{III}^{12}_{4} + \mathrm{VII}^{11}_{4}\right) = \mathbf{13\,309{,}65}$ ℳ.

2.) $x = 600\,\mathrm{III}^{12}_{4} + 50\left(\mathrm{III}^{12}_{4} - (12 \times 1{,}04)\right) \cdot \frac{100}{4}$

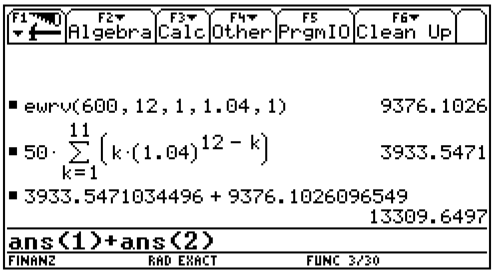
$= 50\left\{12\,\mathrm{III}^{12}_{4} + \left(\mathrm{III}^{12}_{4} - (12 \times 1{,}04)\right) \cdot \frac{100}{4}\right\} = \mathbf{13\,309{,}65}$ ℳ.

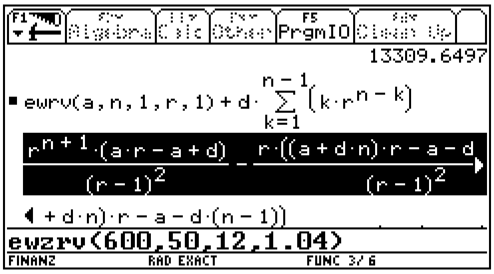
Ermittle den gesuchten Endwert auch über den Folgeneditor.

Aus: *Schlimbach, Politische Arithmetik*

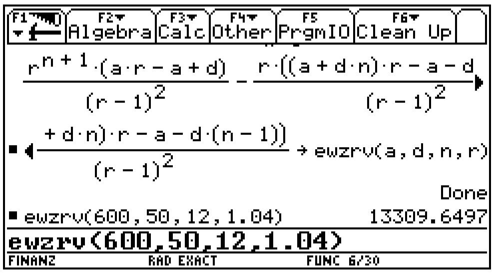
Der Zeitlinie entnimmt man, dass der Endwert aus dem Endwert einer vorschüssigen Jahresrente von 600*M* und der Summe der Endwerte der Steigerungsbeträge besteht.

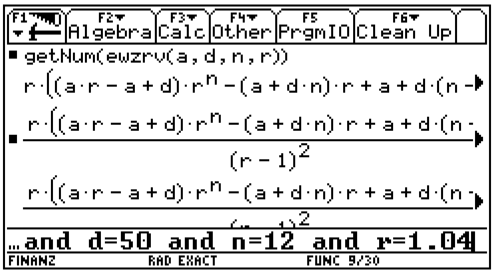
ewrn(600,12,1,1.04,1) + D·r^{11} + 2D·r^{10} + 3D·r^9 + ... + 11D·r = 13309,65*M*.

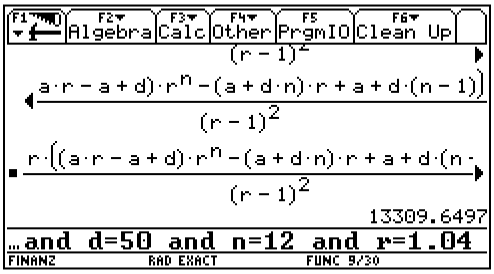




Man ersetzt die konkreten Daten durch *a*, *d*, *n* und *r* und erhält eine umfangreiche Formel, aus der sofort eine entsprechende Funktion hergeleitet werden kann.



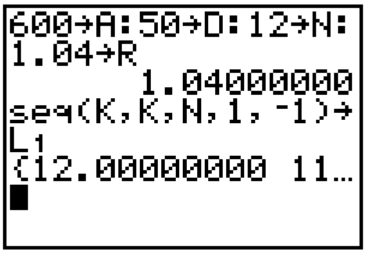


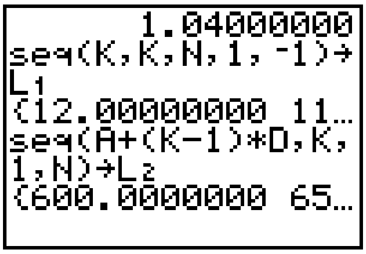


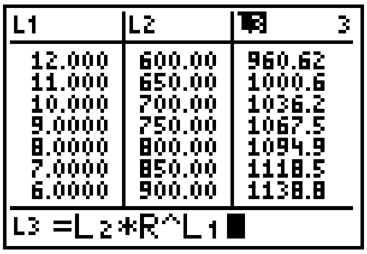
Die gesuchte Formel lautet:

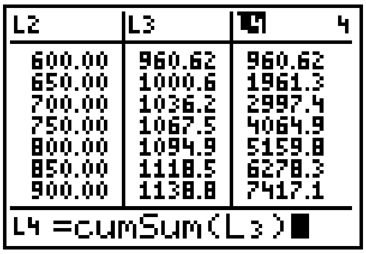
$$\frac{r\big((A\cdot r-A+D\big)\cdot r^{n}-(A+D\cdot n)\cdot r+A+D\cdot(n-1))}{(r-1)^{2}}$$

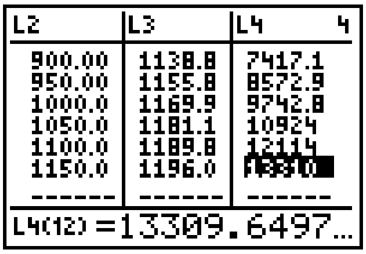
Auf dem TI-83+ bietet sich eine reizvolle Variante an, die Aufgabe über Listen zu lösen.





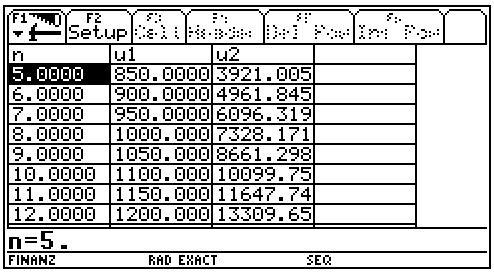






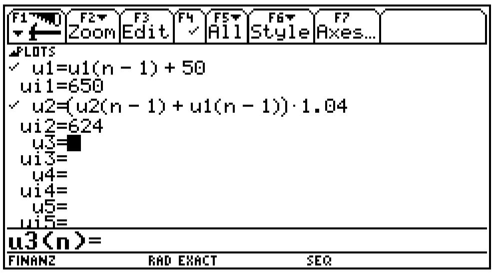
Mit dem `Data/Matrix-Editor` kann bei Bedarf auf den symbolischen TIs analog vorgegangen werden.

In der zur Eingabe im Folgeneditor gehörigen Tabelle liest man ebenfalls das Ergebnis ab:



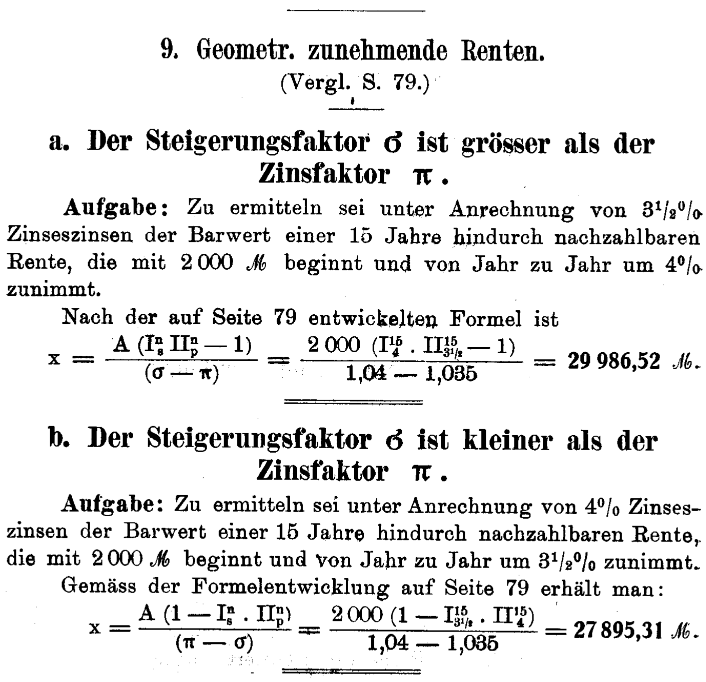
n	u1	u2
5.0000	850.0000	3921.005
6.0000	900.0000	4961.845
7.0000	950.0000	6096.319
8.0000	1000.000	7328.171
9.0000	1050.000	8661.298
10.0000	1100.000	10099.75
11.0000	1150.000	11647.74
12.0000	1200.000	13309.65

n=5.



rr21 Löse die beiden Probleme mit Hilfe **einer** gemeinsamen Formel und vergleiche die Ergebnisse.

Aus: *Schlimbach, Politische Arithmetik*



9. Geometr. zunehmende Renten.

(Vergl. S. 79.)

a. Der Steigerungsfaktor σ ist grösser als der Zinsfaktor π.

Aufgabe: Zu ermitteln sei unter Anrechnung von $3^1/_2$% Zinseszinsen der Barwert einer 15 Jahre hindurch nachzahlbaren Rente, die mit 2 000 ℳ beginnt und von Jahr zu Jahr um 4% zunimmt.

Nach der auf Seite 79 entwickelten Formel ist

$$x = \frac{A\,(I_s^n\,II_p^n - 1)}{(\sigma - \pi)} = \frac{2\,000\;(I_4^{15} \,.\, II_{3^1/_2}^{15} - 1)}{1{,}04 - 1{,}035} = 29\,986{,}52 \text{ ℳ}.$$

b. Der Steigerungsfaktor σ ist kleiner als der Zinsfaktor π.

Aufgabe: Zu ermitteln sei unter Anrechnung von 4% Zinseszinsen der Barwert einer 15 Jahre hindurch nachzahlbaren Rente, die mit 2 000 ℳ beginnt und von Jahr zu Jahr um $3^1/_2$% zunimmt.

Gemäss der Formelentwicklung auf Seite 79 erhält man:

$$x = \frac{A\,(1 - I_s^n \,.\, II_p^n)}{(\pi - \sigma)} = \frac{2\,000\;(1 - I_{3^1/_2}^{15} \,.\, II_4^{15})}{1{,}04 - 1{,}035} = 27\,895{,}31 \text{ ℳ}.$$

Auf dem TI-83+ muss die allgemeine Formel über die Summe einer geometrischen Reihe traditionell ermittelt werden, bevor man durch Substitution der Variablen deren Richtigkeit überprüfen kann. Auf den CAS-TI lässt sich die allgemeine Summe bilden, wobei die Schwierigkeit wahrscheinlich in der Formulierung des Summanden liegt.

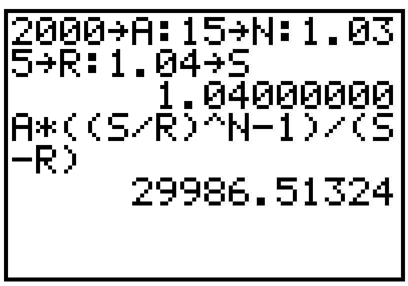
Mit Bezug auf die Angabe bezeichnen wir den Anfangsbetrag mit *a* und den *Steigerungsfaktor* mit *s*. Der *Zinsfaktor* ist unser bekannter Aufzinsungsfaktor *r*.

Die *Zahlungsreihe* lautet dann – mit der ersten beginnend: $a, a{\cdot}s, a{\cdot}s^2, a{\cdot}s^3, ..., a{\cdot}s^{n-1}$. Diese Zahlungen sind dann 1, 2, ..., *n* Jahre lang abzuzinsen.

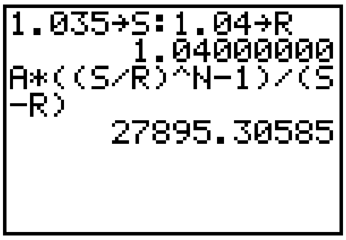
$$Barwert = a \cdot v + a \cdot s \cdot v^2 + a \cdot s^2 \cdot v^3 + \ldots + a \cdot s^{n-1} \cdot v^n =$$

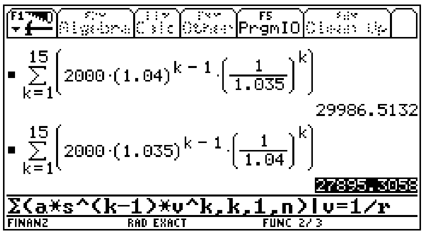
$$= \frac{a \cdot v\left(s^n \cdot v^n - 1\right)}{s \cdot v - 1} \quad \text{mit } v = \frac{1}{r}$$

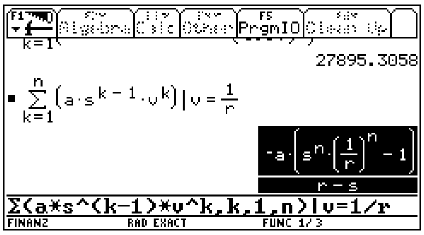
$$= \frac{a \cdot \frac{1}{r}\left(\left(\frac{s}{r}\right)^n - 1\right)}{s \cdot \frac{1}{r} - 1} = \frac{a \cdot \left(\left(\frac{s}{r}\right)^n - 1\right)}{s - r}$$



s und *r* vertauscht führen zur Antwort auf Frage b).







Auf den CAS-TI ergibt sich sofort die gesuchte Formel. (Beachte das Vorzeichen!)

rr22 Wende die eben erst gewonnenen Formeln und Verfahren zur Lösung der beiden Aufgabe an.

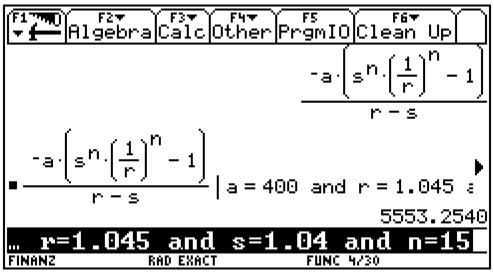
Aus: *Wallentin, Maturitätsfragen*

93) Welches Kapital muß man bei $p\,\%$ Zinseszins einzahlen, wenn man n Jahre lang am Ende eines jeden Jahres eine Rente von r K beziehen will, welche sich jedes Jahr um $\alpha\,\%$ der am Ende des ersten Jahres bezogenen Rente vermehrt?

Beispiel: $r = 400\,K$, $\alpha = 4$, $p = 4^1/_2$, $n = 15$.

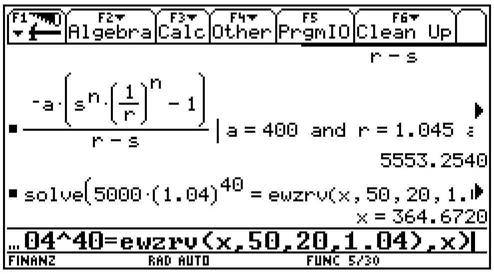
94) A legt mit vollendetem 30. Lebensjahr $a = 5000\,K$ in einer Bank an, um sich oder seinen Erben eine nach $m = 20$ Jahren beginnende, durch $n = 20$ Jahre dauernde, vorschußweise von Jahr zu Jahr um $b = 50\,K$ steigende Rente zu sichern. Wie groß wird der erste Rentenbezug sein, wenn die Bank ihren Berechnungen $p = 4\,\%$ zugrunde legt?

Allgemein und speziell durchzuführen.

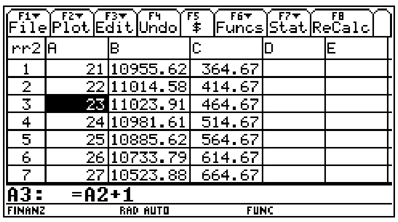


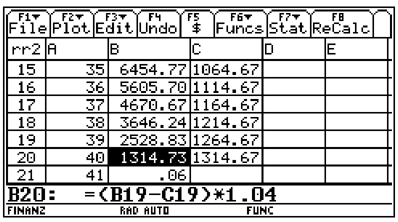
Das ist eine unmittelbare Anwendung der Überlegungen aus rr21.

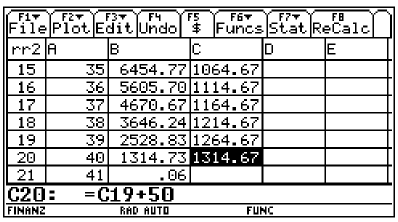
Um die gewonnene Formel (Funktion) von rr20 verwenden zu können, wird der Bezugspunkt ans Ende des 40. Jahres verlegt.



Mit `CellSheet` kann man den laufenden Kontostand des (lachenden) Erben erzeugen und damit das Ergebnis auf seine Richtigkeit überprüfen. In Zelle B1 steht das angesparte Ausgangskapital. In Spalte C kann der aktuelle Rentenbetrag abgelesen werden. Am Anfang des 41. Jahres ist das Konto leer (bis auf Rundungsungenauigkeiten).







Referenzen

[1] Jürgen Tietze, Einführung in die Finanzmathematik, Vieweg 2000

[2] Jürgen Tietze, Einführung in die Wirtschaftsmathematik, Vieweg 1990

[3] Josef Böhm, Mathematik Aufgabensammlung, Manz 1995

[4] Josef Böhm, Finanzmathematik auf dem TI-83/92, Teil 1, T^3-& ACDCA-Skriptum

[5] Handbücher des TI-83/83+/89/92/92+/Voyage 200

[6] Handbuch der `TI-FINANCE` Applikation (für alle Rechner von der TI-Seite als pdf-file kostenlos beziehbar)

[7] Bernhard Kutzler, Einführung in den Voyage 200, bk-teachware SR-30

[8] Helmuth Brunner, H-D. Hinkelmann u.a., Mathematik für Handelsakademien 2.Teil, Gewerbeverlag

[9] Manfred Kronfellner, Werner Peschek, Angewandte Mathematik, Band 2, hpt

[10] Fritz Tinhof, Schneider u.a., Mathematik HAK, Band 2, Trauner

[11] Böhm, Brunner, Hinkelmann, Raßmann, Aufgabensammlung Mathematik, Gewerbeverlag

[12] Franz Wallentin, Maturitätsfragen aus der Mathematik, Carl Gerold, 1932

[13] Ed. Imhof, Rechenbuch für landwirtschaftliche Schulen, Huber & Co, 1911

[14] August Schlimbach, Politische Arithmetik, Franz Benjamin Auffahrt, Frankfurt, 1902

Anhang

Funktionen und Programme für die CAS-Rechner.

(Können von der Homepage heruntergeladen werden).

Die Funktionen für Bar- und Endwert (Erläuterungen findet man in Teil 1)

```
bw(kap,zeit_j,r_,zp)
kap/r_^(zeit_j*zp)
```

```
ew(kap,zeit_,r_,zp)
kap*r_^(zeit_*zp)
```

Die Funktionen für Bar- und Endwerte von vor- und nachschüssigen Renten

```
bwrv(rente,anzahl,rp,r_,zp)
rente*(r_^(⁻zp*anzahl/rp)-1)/(r_^(⁻zp/rp)-1)
```

```
bwrn(rente,anzahl,rp,r_,zp)
bwrv(rente,anzahl,rp,r_,zp)/r_^(zp/rp)
```

```
ewrv(rente,anzahl,rp,r_,zp)
bwrv(rente,anzahl,rp,r_,zp)*r_^(zp*anzahl/rp)
```

```
ewrn(rente,anzahl,rp,r_,zp)
bwrn(rente,anzahl,rp,r_,zp)*r_^(zp*anzahl/rp)
```

```
ewzrv(a,d,n,r)
r^(n+1)*(a*r-a+d)/(r-1)^2-r*((a+d*n)*r-a-d*(n-1))/(r-1)^2
```

`fmf()` ist eine Funktion, in der eine Variante der finanzmathematischen Grundformel verwendet wird. Sie kann zur Lösung aller Grundaufgaben verwendet werden. Die Parameterliste ist angegeben. Für die unbekannte Größe kann eine beliebige Variable eingesetzt werden.

Das folgende Programm `rente()` verwendet diese Formel. Für die Eingabe der Parameter wurde eine benutzerfreundliche Oberfläche geschaffen.

```
fmf(Kapital, (Barwert=0,Endwert=1), Rente,Anzahl, Rp/Jahr,
    (vorsch.=0,nachsch.=1), nom.Jahreszins(-diskont), Zp/Jahr,
    (Zins=1,Diskont=0))
```

Beispiel für die Anwendung

Welche effektive Verzinsung hat eine Kreditrückzahlung in der Höhe von monatlich 550 USD, die 48 mal vorschüssig fällig ist, wenn der aufgenommene Kredit eine Höhe von 25000 USD hat.

`fmf(25000,0,550,48,12,0,zins,1,i)` → `i = 2,85%`

```
fmf(t1,s1,t2,t3,t6,s2,t4,t5,s3)
Func
Local  ti,si,tempfunc,tempstr1,aux1,bd
Local  t3_
If s3=1 Then
  (1+t4/(100*t5))^(t5/t6)→aux1
Else
   1/(1-t4/(100*t5))^(t5/t6)→aux1
EndIf
limit(⁻t1+t2*(aux1^t3_-1)*aux1^(1-s2)/((aux1-1)*aux1^(t3_-
t3_*s1)),t3_,t3)→tempfunc
For  ti,1,4,1
"t"&exact(string(ti))→tempstr1
If when(#tempstr1=0,false,false,true) Then
If ti=4 Then
  50→bd
ElseIf ti=3 Then
  1000→bd
ElseIf ti<3 Then
  10^7→bd
EndIf
Return  floor(100*approx(nSolve(tempfunc=0,#tempstr1)|#tempstr1>0 and
#tempstr1<bd)+0.5)/100
EndIf
EndFor
Return  "Eingabefehler!"
EndFunc
```

Das Programm `rente()`

```
rente()
Prgm
Local  t1,t2,t3,t4,t5,t6,s1,s2,s3
setMode("Display Digits","FIX 2")
Dialog
Request  "Kapital:",t1
Request  "Bar-Endwert (Ø/1):",s1
Request  "Rente:",t2
Request  "Anzahl:",t3
Request  "Rp/Jahr:",t6
Request  "vor-nachsch (Ø/1):",s2
EndDlog
Dialog
Text  "Die Verzinsung:": Text  ""
Request  "nom. Jahreszins:",t4
Request  "Zinsper/Jahr:",t5
Request  "Zins-Diskont (i/d):",s3
EndDlog
If  s3="i":1→s3
If  s3="d":Ø→s3
expr(t1)→t1:expr(t2)→t2:expr(t3)→t3
expr(t4)→t4:expr(t5)→t5:expr(t6)→t6
expr(s1)→s1:expr(s2)→s2
fmf(t1,s1,t2,t3,t6,s2,t4,t5,s3)→erg
Disp  erg
EndPrgm
```

Der symbolische Time-Value-Money-Solver `tvms()`

```
tvms()
Prgm
Local s1,s2,s3,aux,ii_,gl,ant,bd
Local tempfunc
setMode("Display Digits","FIX 4")
Dialog
Request "Ns=",n_
Request "Is%=",i_
Request "PVs=",pv_
Request "PMTs=",pmt_
Request "FVs=",fv_
Request "PpY=",s1_
Request "CpY=",s2_
Request "PMT:end/begin",s3_
EndDlog
If ok=0:Goto ende
expr(n_)→n
If inString(i_,"d")=0 Then
      expr(i_)→i
    Else
      expr(left(i_,dim(i_)-2))→i
EndIf
expr(pv_)→pv
expr(pmt_)→pmt
expr(fv_)→fv
If inString(n_,"x_")>0 Then
       1→ant:5000→bd
EndIf
If inString(i_,"x_")>0 Then
       2→ant:50→bd
EndIf
If inString(pv_,"x_")>0 Then
       3→ant:10^8→bd
EndIf
If inString(pmt_,"x_")>0 Then
       4→ant:10^8→bd
EndIf
```

```
If inString(fv_,"x_")>Ø Then
       5→ant:1Ø^8→bd
EndIf
expr(s1_)→s1
If pmt_="Ø":1→s1
expr(s2_)→s2
If s3_="e":Ø→s3
If s3_="b":1→s3

If inString(i_,"d")=Ø Then
    1+i/(1ØØ*ss2)→ii_
   Else
    1/(1-i/(1ØØ*ss2))→ii_
EndIf

limit(ii_^(ss2/s1),ss2,s2)→aux
limit(pv+pmt*aux^s3*(1-aux^(⁻nn))/(aux-1)+fv/aux^nn,nn,n)→tempfunc
If ant<3: nSolve(tempfunc=Ø,x_)|x_≥.Ø1 and x_≤bd→res
If ant>2: right(solve(tempfunc=Ø,x_)|x_≥⁻bd and x_≤bd)→res
If ant=1 Then
   res→ns:string(res)&" "&char(25)→n_
EndIf
If ant=2 Then
   res→is:string(res)&" "&char(25)→i_
EndIf
If ant=3 Then
   res→pvs:string(res)&" "&char(25)→pv_
EndIf
If ant=4 Then
   res→pmts:string(res)&" "&char(25)→pmt_
EndIf
If ant=5 Then
   res→fvs:string(res)&" "&char(25)→fv_
EndIf
tvms()
Lbl ende
EndPrgm
```