Finanzmathematik auf dem TI-83 / 92

Teil 1 - Zinseszinsrechnung

Josef Böhm

Ein Unterrichtsbehelf zum Einsatz moderner Technologien
im Mathematikunterricht

T³ Österreich / ACDCA am PI-Niederösterreich, Hollabrunn

Inhalt

Vorwort

Dieses Skriptum soll kein Lehrbuch der Finanzmathematik darstellen und auch nicht als Lehrbucher-satz gelten, sondern eine Hilfestellung für die Lösung von typischen Aufgaben aus diesem Gebiet mit Hilfe von TI-89/92/92+, bzw. TI-83783+ anbieten. Ich verweise auf die Lehrbücher der HAK, in denen alle Kapitel der Finanzmathematik bestens eingeführt werden. Die Autoren Tinhof, Girlinger u.a. haben den Gebrauch zumindest eines grafischen Taschrenrechners – des TI-83 – zum Thema Finanzmathematik in ein Lehrbuch integriert. [1]

Einer kurzen Einführung in die Thematik und Wiederholung, bzw. Zusammenfassung der Formeln folgt eines ausgiebige Aufgabensammlung mit exemplarischen Lösungsvorschlägen.

In den Text eingestreut finden sich immer wieder mögliche Schüleraufträge (eingerahmt).

Die Beispiele werden mit CAS-tauglichen und Grafikrechnern exemplarisch gelöst und es wird versucht, so weit wie möglich auch das `FINANCE`-Tool des TI-92+ zu verwenden, das gleicherweise auch auf den TI-83 Rechnern verwendet werden kann. Dahinter verbirgt sich der sogenannte `TVM-Solver` (`TVM` von **T**ime – **V**alue – **M**oney).

`TI-FINANCE` ist in den Rechnern der TI-83 Serie bereits integriert. Für den TI-89, bzw. TI-92+ kann es als Flash-Applikation kostenlos von der TI-Homepage heruntergeladen werden.

Für die CAS-Rechner werden auch funktionsorientierte Zugänge angeboten, bzw. es wird mit fertigen benutzerfreundlichen Programmen gearbeitet. Außerdem wird für die CAS-Rechner eine „symbolische" Version des TVM-Solvers angeboten, die die Funktionalität dieses Werkzeugs mit der „Power" des CAS verknüpft.

Programm- und Funktionslistings finden sich im Anhang. Die Programme und Funktionen können von der ACDCA-T^3-Homepage heruntergeladen werden. Wenn Hinweise auf spezielle TI-Funktionen gegeben werden, soll man im Handbuch des entsprechenden Geräts die Syntax der Funktionen nachlesen. (Dieser Hinweis soll auch den Schülern immer wieder gegeben werden).

Abschließend möchte ich als langjähriger Mathematiklehrer an einer HAK einen Unterrichtstipp anbringen: Es hat sich bewährt, bei den Aufgaben auch jeweils eine „Antwort" zu verlangen, so wie in der Unterstufe. Es soll nicht genügen, irgend ein Ergebnis unreflektiert zu unterstreichen oder irgendwo im Raum stehen zu lassen und der – korrigierende – Lehrer soll sich das Ergebnis, bzw. dessen Interpretation selbst zusammenreimen. Das Formulieren einer „Antwort" zwingt zum nochmaligen Überdenken des Ergebnisses im Zusammenhang mit der Fragestellung.

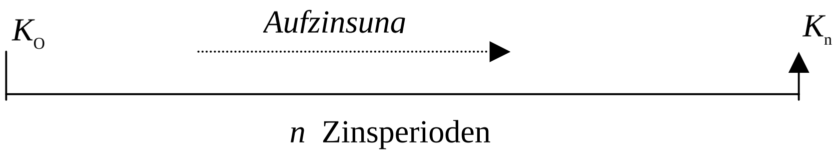
Josef Böhm

[1] Mathematik, Band 2 für II. Jahrgang HAK, Trauner Verlag

1 Zinseszinsrechnung

End- und *Barwert*berechnungen sind die Standardaufgaben in der Zinseszinsrechung. Dazu soll zuerst mit einer Vereinheitlichung der Begriffe begonnen werden.

Eine *Zeitlinie* veranschaulicht den Vorgang:



Das Kapital K_0 liegt n Zinsperioden zu einer Verzinsung i_m auf einem Konto, dann nimmt es am Ende der Verzinsungsdauer den *Endwert* K_n an, der sich bekanntlich einfach berechnen läßt:

$$K_n = K_0(1+i_m)^n \qquad \textit{dekursive Endwertformel} \qquad (1)$$

Dabei ist i_m der für die Zinsperiode gültige *relative Zinsfuß*.

$$1 + i_m = r_m = \textit{dekursiver Aufzinsungsfaktor}$$

Als Zinsperioden sind üblich m = 1, 2, 4, 12 Perioden pro Jahr. Man spricht von Jahres-, Semester-, Quartals- und Monatsverzinsungen. Diese Verzinsungen können auch als *nominelle Jahreszinsfüße* j_m angegeben werden.

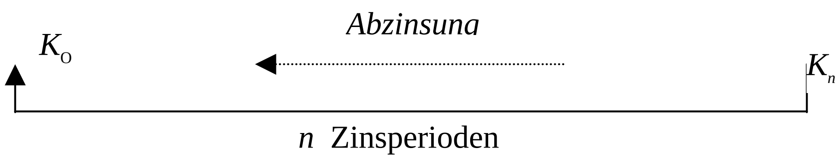
Z.B.: j_2 = 6% heißt, dass 6% Jahreszinsen bei zweimaliger *Kapitalisierung* gegeben oder verlangt werden. Tatsächlich entspricht diese einer zweimaligen Verzinsung im Jahr mit je i_2 = 3%.

i = 6% sind 6% Jahreszinsen, j_{12} = 6% sind nur am Papier (nominell) 6%, in Wirklichkeit wird monatlich mit je 0,5% verzinst.

Reihe die folgenden Verzinsungen aus der Sicht des Sparers nach dem Zinsertrag. Beginne mit der geringsten Verzinsung:

$i = j_1 = 5\%$, $j_2 = 5\%$, $j_4 = 5\%$, $j_{12} = 5\%$

Dazu ist keine Rechnung notwendig!



Wenn man (1) nach dem Anfangs- oder *Barwert* K_0 auflöst, dann erhält man

$$K_0 = K_n\left(\frac{1}{1+i_m}\right)^n \qquad \textit{dekursive Barwertformel} \qquad (2)$$

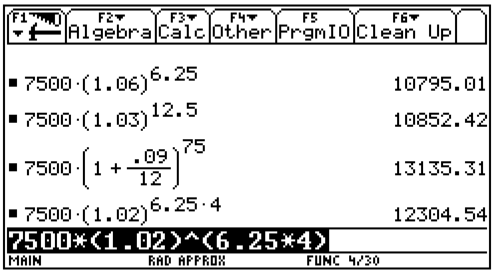
$\frac{1}{1+i_m} = \frac{1}{r_m} = v_m$ = *dekursiver Abzinsungsfaktor* (In manchen Büchern wird mit r_m^{-1} gearbeitet.)

Ein erstes Beispiel:

Mit welchem Betrag ist ein für 6 Jahre und 3 Monate geliehenes Kapital in der Höhe von 7500 € am Ende der Laufzeit zurückzuzahlen, wenn

a) $i = 6\%$
b) $j_2 = 6\%$
c) $j_{12} = 9\%$
d) $i_4 = 2\%$ Zinsen verrechnet wurden? Rechne mit *theoretischer Verzinsung*!

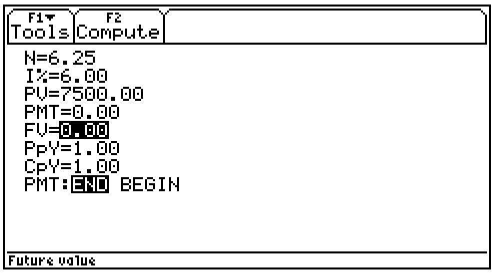
Theoretische Verzinsung anwenden heißt, dass die Formeln (1) und (2) auch für Teile von Zinsperioden gelten. Vielfach wird aber die *praktische Verzinsung* durchgeführt, über die wir später sprechen werden.

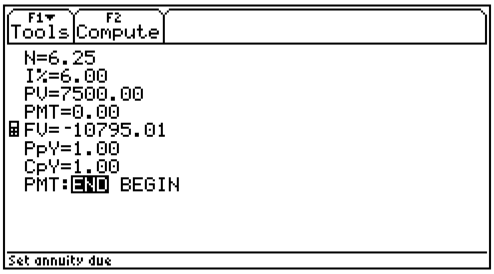


Überlege bei jeder einzelnen Aufgabe den *Aufzinsungsfaktor* und dessen Exponent (= Laufzeit ausgedrückt in Zinsperioden).

Hier werden die häufigsten Fehler gemacht.

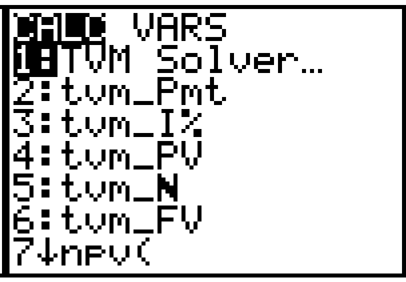
Der `TVM-Solver` auf dem TI-92+, der über [APPS] aufgerufen wird:

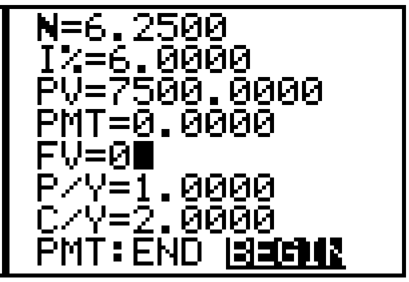


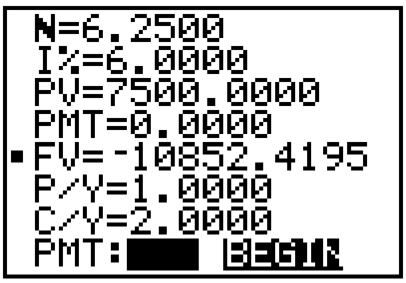


Man setzt den Cursor auf die zu berechnende Position und läßt über [F2] rechnen.

Praktisch identisch präsentiert sich der `TVM-Solver` auf dem TI-83:







Auch hier wird der Cursor in die entsprechende Zeile gesetzt, die Berechnung wird über [ALPHA] [ENTER] aufgerufen.

Das kleine Kästchen zeigt die jeweils letzte im `Solver` berechnete Größe an. Unter dieser Variablenbezeichnung sind die Werte beim TI-89/92+ im Homescreen abrufbar (`n,i,pv,pmt,fv`), vorausgesetzt, dass man sich im Folder `finance` befindet, der automatisch beim ersten Aufruf der Applikaiton eingerichtet wird.

Beim TI-83 werden die Werte der Finanz-Variablen unter den `VARS` abgelegt und können von dort in den Rechenschirm, in den Gleichungslöser oder an eine andere Stelle des `TVM-Solvers` übertragen werden.

Spätestens jetzt muss eine Erklärung der Eingabeparameter im `TVM-Solver` erfolgen. Vorweg sei gesagt, dass dieses Werkzeug viel mehr kann als nur die Zinseszinsrechung, und dass daher noch nicht alle Parameter wichtig sind. An dieser Stelle werden nur jene Parameter erklärt, die nun gebraucht werden. Später – im Rahmen der Rentenrechnung - folgt auch eine Erklärung für den hinter diesem Werkzeug liegenden Algorithmus.

`N`	Zeit in Jahren
`I%`	nomineller Jahreszinsfuß j_m
`PV`	Barwert, Anfangskapital K_0 (Present Value)
`FV`	Endwert, Endkapital K_n (Future Value)
`C/Y` oder `CpY`	Anzahl der Zinsperioden pro Jahr *m* (Compounding Periods / Year)

Zahlungseingänge sind positiv und Zahlungsausgänge negativ zu setzen – jedenfalls mit jeweils umgekehrten Vorzeichen.

Wie wir später aber auch sehen werden, ist `FINANCE` nicht in der Lage, alle Aufgaben der Zinseszinsrechung zu lösen – schon in dem Moment, wo wir die *praktische Verzinsung* verlangen, versagt das Programm.

Natürlich können wir den Rechner, wie einen gewöhnlichen Taschenrechner verwenden, der entstehende Gleichungen mit dem eingebauten `Solver` löst. Vielleicht werden wir auch darauf zurückkommen müssen. Wir wollen nicht nur abhängig sein von Fremdwerkzeugen, sondern uns auch auf eigene verlassen können. Daher erzeugen wir eine End- und Barwertfunktion, die universell einsetzbar ist – und später auch für den Fall der *praktischen Verzinsung* erweitert werden kann. Beim CAS-Rechner lassen sich eigene Funktionen sehr einfach definieren, wogegen das der grafische Rechner nur in beschränktem Maße und über ein „Hintertürchen“ erlaubt.

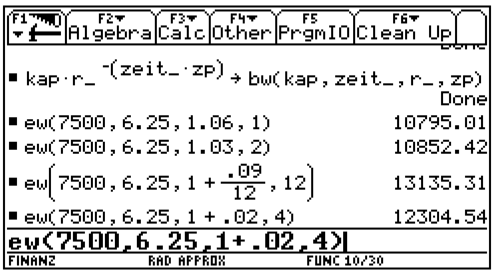
Definiere am TI-89/92/92+ die beiden Funktionen `ew` und `bw` und speichere sie in einem eigenen Folder `finanz`:

$ew = kap \cdot (1 + i_m)^{Laufzeit\ in Zinsperioden} \rightarrow$ `kap * r_^(zeit_ * zp) → ew(kap,zeit_,r_,zp)`

$bw = kap \cdot (1 + i_m)^{-\ Laufzeit\ in Zinsperioden} \rightarrow$ `kap / r_^(zeit_ * zp) → bw(kap,zeit_,r_,zp)`

(dabei ist `zeit_` die Laufzeit in Jahren!!)

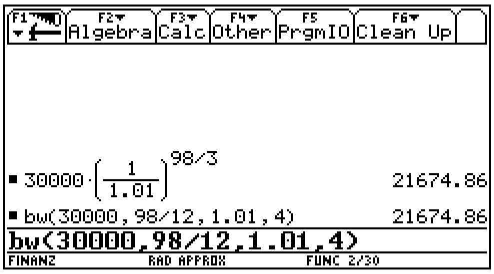
Um die Sache möglichst einfach zu halten, verwenden wir in End- und Barwertfunktion immer nur den entsprechenden Aufzinsungsfaktor und geben die Laufzeit grundsätzlich in Jahren an. Damit sehen unsere vier Beispiele von Seite 5 so aus:

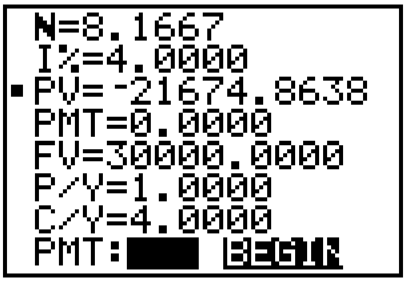


2 Grundaufgaben mit End- und Barwert, gelöst auf drei Methoden

(2 mal TI-92, 1 mal TI-83)

Wieviel muss man heute einzahlen, wenn man in 8 Jahren und 2 Monaten über einen Betrag von 30 000 € verfügen will und dabei eine Verzinsung von j_4 = 4% erzielen kann?

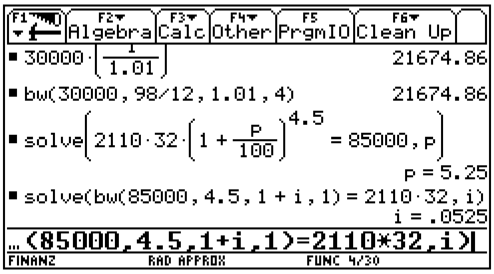


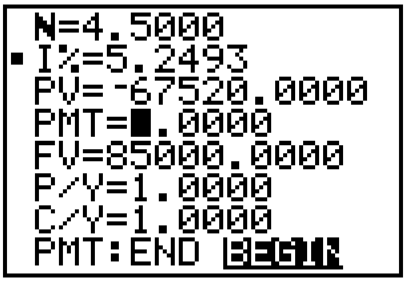


Für N gibt man am besten `N = 98/12` ein.
Auch `N = 6+2/12` ist erlaubt.

Man muss 21674,86€ einzahlen.

Herr Immo Hai kauft ein Grundstück im Ausmaß von 2110m² zum Quadratmeterpreis von 32 € und kann es nach 4 1/2 Jahren um insgesamt 85000 € verkaufen. Welche *Rendite* brachte ihm dieses Geschäft (wenn man von Steuern, usw. absieht)?
(Rendite ist immer eine Jahresverzinsung!)

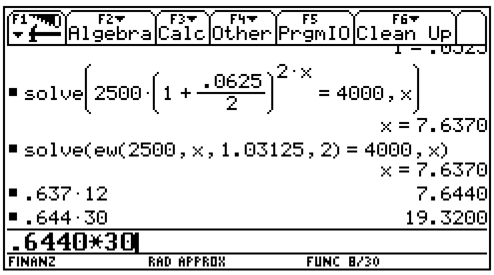


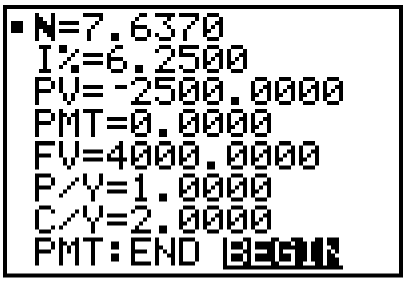


`PV = -2110*32` (Vorzeichen beachten!)

Das Unternehmen brachte eine Rendite von 5,25%.

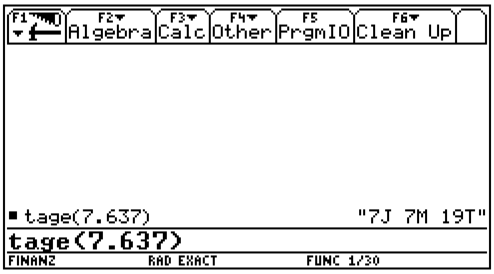
Wie lange muss ein Kapital von 2500 USD auf einem mit j_2 = 6,25% verzinsten Konto liegen, dass es sich – bei theoretischer Verzinsung – um 1500 USD vermehrt?

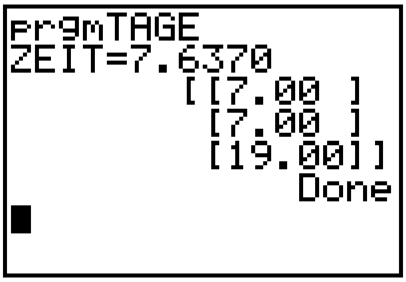




Es dauert 7 Jahre 7 Monate und 19 Tage.

Die Umrechnung von Dezimaljahren in Jahre, Monate und Tage ist eine immer wiederkehrende Routineaufgabe. Versuche dafür eine Funktion oder ein Programm zu schreiben.





Tipp: Verwende die Funktionen `iPart` und `fPart`. Die Programme finden sich im Anhang.

3 Die antizipative Verzinsung

Neben *dekursiver* Verzinsung (Nachhineinverzinsung) gibt es noch die *antizipative* Verzinsung. Diese kommt dann ins Spiel, wenn von einem *Diskont* die Rede ist. Während Zinsen (und Zinsezinsen) immer am Ende der Zinsperiode dem Kapital hinzugefügt werden (weil sich die Schuld um die Gebühr für die Geldleihe vermehrt), wird ein Diskont vom schuldigen Kapital abgezogen, wenn man es vor Fälligkeit zurückzahlt. Dieser Abzug erfolgt dann jeweils am Beginn der Periode (antizipative Verzinsung = Vorhineinverzinsung).

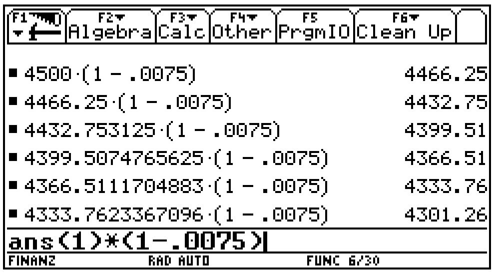
Ein Beispiel soll das illustrieren:

Ein Schuld über 4500 € wird 3 1/4 Jahre vor Fälligkeit zurückgezahlt. Was ist nun tatsächlich zu zahlen, wenn der Gläubiger einen Diskont d_2 = 0,75% einräumt?

d_2 = 0,75% heißt, dass für jedes Halbjahr vor Fälligkeit ein Zahlungsnachlass in der Höhe von 3/4% der – jeweils letzten - Schuld gewährt wird. Bei *kaufmännischem Diskont* wäre das einfach: 3 1/4 Jahre sind dann 6 1/2 Diskontperioden → 6,5 ∗ 0,75% = 4,875% Nachlass.

Wir müssen aber mit Zinseszins rechnen:

Für das erste Semester werden 0,75% von 4500 € erlassen, es bleiben 4500 * (1-0,0075) = 4466,25;
für das nächste Semester werden auch 0,75% nachgelassen, aber nur mehr vom ohnehin schon verminderten Kapital, dann bleiben 4466,25 * (1-0,0075) = 4432,75 usw.



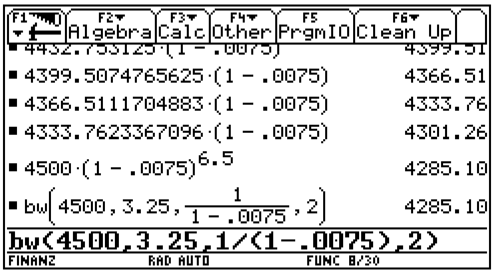
Die Suche geht wieder nach einem Barwert:

$4500 * (1 - 0{,}0075)^{6{,}5} = 4285{,}10$

Ein Jahresdiskont wird i.a. mit einem d bezeichnet, während d_m der relative *Diskont* ist. Für den *nominellen Jahresdiskont* hat sich die Bezeichnung f_m eingebürgert.

Entscheidend ist, dass sich Bar- und Endwertformeln im wesentlichen Gehalt nicht ändern, nur Auf- und Abzinsungsfaktoren sind an die antizipative Verzinsung anzupassen.

Antizipativer Abzinsungsfaktor $v_m = 1 - d_m$ und der Aufzinsungsfaktor $r_m = \frac{1}{v_m} = \frac{1}{1 - d_m}$.



Nun wird das Arbeiten am TI-92 mit den vorbereiteten Funktionen einfach. Sie können ohne Änderung auch für antizipative Verzinsung verwendet werden. Man muss nur darauf achten, dass man den Aufzinsungsfaktor dementsprechend angepasst eingibt.

Aufgaben mit antizipativer Verzinsung lassen sich mit dem TI-83 nicht so unmittelbar lösen, da die „Diskontierung“ nicht vorgesehen ist. Der Grund liegt möglicherweise darin, dass diese Art der Verzinsung nicht so verbreitet ist. Leider verzichten auch Lehrbücher, die den Gebrauch des TI-83 in den Text integriert haben, auf die Behandlung der antizipativen Verzinsung, Wie die folgenden Abbildungen mit einem Vergleich der Ergebnisse zeigen, lassen sich mit zusätzlichen Überlegungen - die von grundsätzlicher Bedeutung sind – auch diese Probleme behandeln.

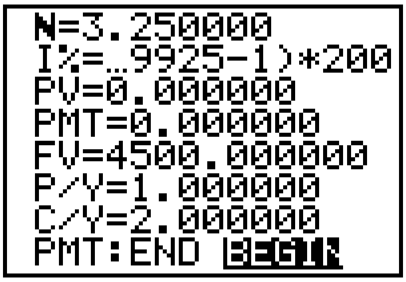
Unter `I%` verlangt der **`TMV`**`-Solver` den nominellen Jahreszinsfuß. Wenn ein relativer Diskont d_m oder der entsprechende nominelle Jahresdiskont f_m gegeben ist, dann muss der dazu äquivalente nominelle Jahreszinsfuß j_m ermittelt werden. Dazu sucht man zuerst den relativen Zinsfuß i_m, der den gleichen Aufzinsungseffekt bewirkt und schließt dann auf den nominellen Jahreszinsfuß. Zum Schluss ist noch darauf zu achten, dass der Zinsfuß in Prozent anzugeben ist:

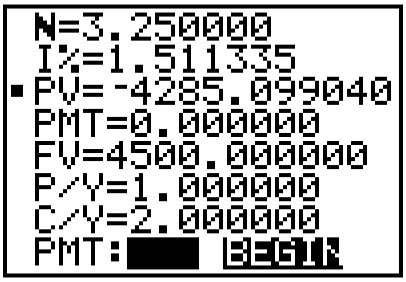
$$r_2 = \frac{1}{1-d_2} = 1 + i_2 \;\Rightarrow\; i_2 = \frac{1}{1-d_2} - 1$$

und $j_2 = i_2 \cdot 2 \cdot 100$

$$\text{Allgemein: } j_m = \left(\frac{1}{1-d_m} - 1\right) \cdot m \cdot 100 \qquad (3)$$

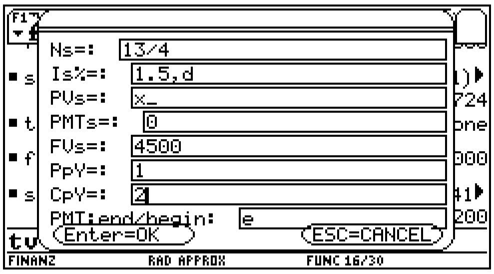
In die zweite Zeile wird daher eingegeben: `(1/(1-0.0075)-1)*2*100`. Nachdem man mit ENTER oder ⌄ bestätigt hat, erscheint sofort 1.5113.... j_2 = 1,5113% liefert den gleichen Endwert wie f_2 = 1,5%.

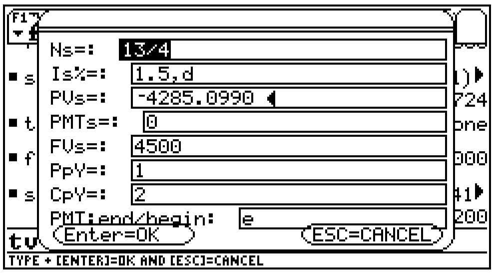




Mit ein wenig Geschick und Programmiererfahrung kann man auf den CAS-TI die Unzulänglichkeiten des `TVM-Solvers` überwinden. Mit `tvms()` ruft man den `TVMS-Solver` (TIME-MONEY-VALUE-Sybolically) auf und gibt die Daten in die Eingabemaske ein. Anstelle der unbekannten Größe **muss** man `x_` einsetzen. Wenn die Verzinsung *antizipativ* erfolgen soll, ist der Diskont durch ein angefügtes "`,d`" zu kennzeichnen.

Der `TVMS-Solver` funktioniert natürlich auch auf den noch nicht Flash-fähigen TI-Rechnern. Wir werden an ihm später noch viel wichtigere Dinge schätzen lernen, als nur mit Diskonten rechnen zu können.





(Hinweis: in allen Ausgaben, die durch ein ◄ gekennzeichnet sind wurde vorher die Frage nach der unbekannten Größe mit `x_` gestellt. Es wird hier zumeist der Ergebnisschirm gezeigt.)

Die Lösung wird durch das kleine Dreieck angezeigt. Dieses ist bei Wiederverwendung desselben Eingabefeldes zu löschen. Mit ESC kann man entweder eine Rechnung abbrechen oder aus dem Programm aussteigen. Das Ergebnis kann im Homescreen unter dem Namen `pvs` oder `res` abgerufen werden. Unter diesen Bezeichnungen kann das Ergebnis als Zwischenergebnis in eine weitere Verarbeitung mit `TVMS` eingesetzt werden.

Im Unterschied zum `TVM-Solver` ist bei `tvms()` im Rahmen der Zinseszinsrechnung nicht nur die Angabe von `e` oder `b` (für nach- oder vorschüssig) unerheblich, sondern auch der Inhalt des Feldes `PpY` (= Payments per Year = Anzahl der Zahlungen pro Jahr).

Im zweiten Teil des Finanzmathematik-Skriptums werde ich näher auf das Innenleben des `TVM-Solvers` eingehen können.

Solange mit theoretischer Verzinsung gerechnet wird, ist die Wahl des *Bezugspunkts* i.a. nicht von Bedeutung. Es gibt nur bequemere und weniger bequeme Bezugspunkte.

Der Bezugspunkt oder *Bezugstermin* steht in ursächlichem Zusammenhang mit dem *Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik*:

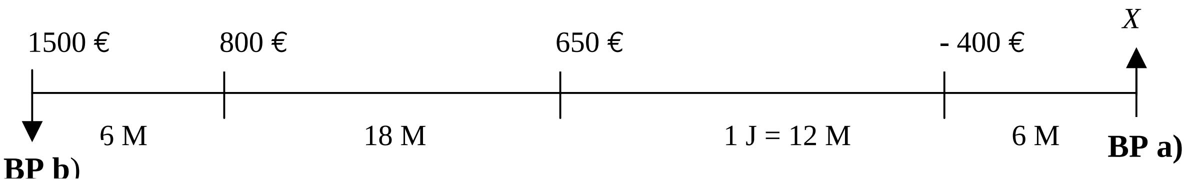
> *Zwei oder mehrere Zahlungen, die zu unterschiedlichen Terminen fällig sind, können nur verglichen werden, wenn sie unter Anwendung eines gemeinsamen Zinsfußes (oder Diskonts) auf den gleichen Termin (Bezugspunkt) auf- oder abgezinst werden.*
>
> oder nach Fritz Tinhof:
>
> *In allen Vereinbarungen soll die Summe der erbrachten Leistungen gleich der Summe aller Gegenleistungen unter Berücksichtigung einer festgelegten Verzinsung sein.*

Die Zahlungen repräsentiert man am besten auf einer *Zeitlinie* und den *Bezugspunkt* hebt man dann besonders hervor (z.B. durch einen Pfeil).

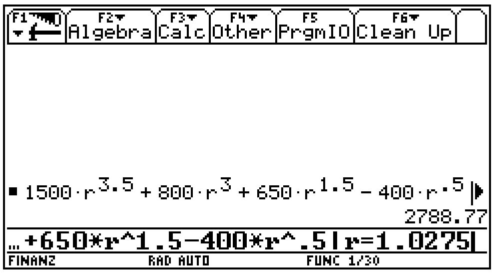
Einige Aufgaben sollen diese Vorgangsweise erklären und den Umgang mit den Werkzeugen festigen.

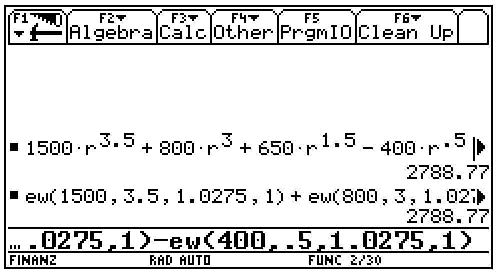
4 Einige Aufgaben zur Zinseszinsrechnung (vorerst nur theoretische Verzinsung)

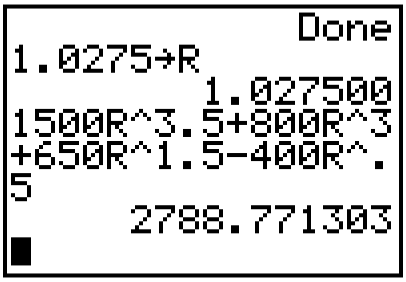
zz1 Ein Konto wird mit 1500 € eröffnet. Nach 6 Monaten werden 800 € und nach weiteren 18 Monaten 650 € eingezahlt. Nach drei Jahren werden 400 € behoben. Wie hoch ist der Kontostand nach weiteren 6 Monaten, wenn mit i = 2,75% verzinst wird.
Löse die Aufgabe mit zwei verschiedenen Bezugspunkten.



a) Bezugspunkt nach 3 1/2 Jahren: alle Beträge sind aufzuzinsen (r = 1,0275)



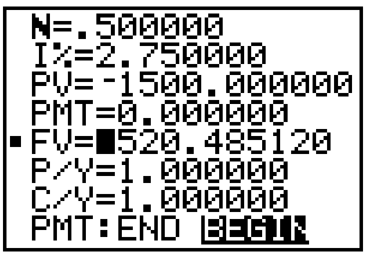


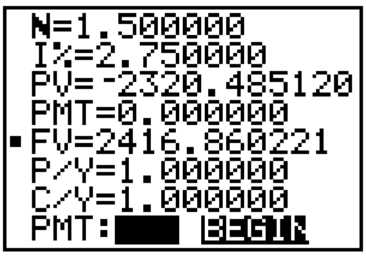


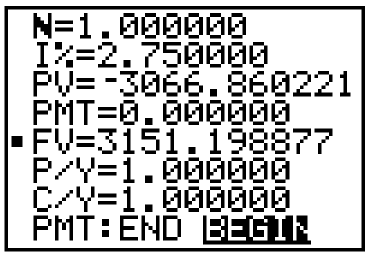
Die erste Vorgangsweise am TI-83 ist sehr traditionell – wie die erste Berechung am TI-92.

Die `ew`-Formel steht nicht zur Verfügung, aber mit dem `TVM-Solver` kann man hier und am TI-92 *kontokorrent*-mäßig vorgehen:

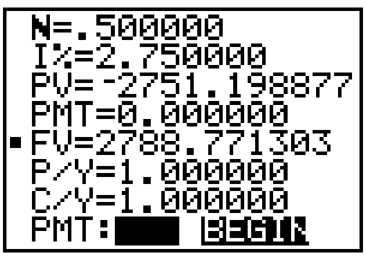
Man beginnt mit der ersten Einzahlung (negativ) und berechnet deren Wert nach 6 Monaten, denn zu diesem Zeitpunkt findet eine Kontobewegung statt. Der Endwert FV wird zusammen mit der neuen Einzahlung (auch negativ) zum neuen Barwert PV für die nächste Zeitspanne von 18 Monaten, (= 1,5 Jahre), usw. Beachte, dass die Behebung von 400 € positiv zu nehmen ist – sie kommt in unsere Geldtasche.







`PV=-1520.485120-800` `PV=-2416.860221+650`



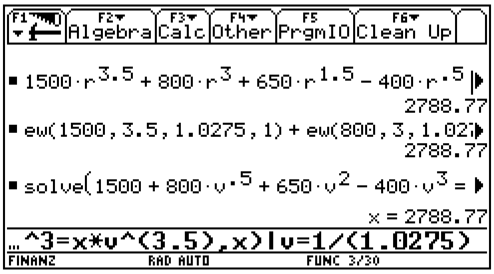
`PV=-3151.18877+450`

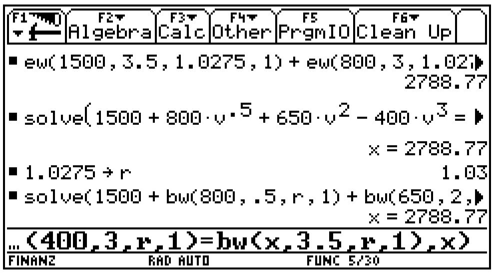
Beim `TVM-Solver` des TI-89/92+ würde genügen: `PV = -fv - 800`, usw.

Beim TI-83 schreibt man die Zwischenwerte ab oder holt sich die Variablen aus den VARS.

b) Bezugspunkt sofort: alle Beträge sind abzuzinsen (v = 1/1,0275)

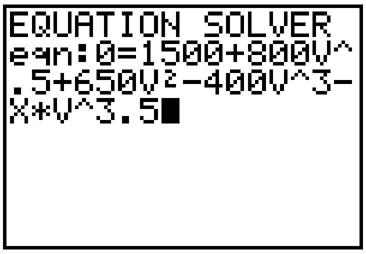
$1500 + 800\, v^{0,5} + 650\, v^{2} – 400\, v^{3} = X\, v^{3,5}$



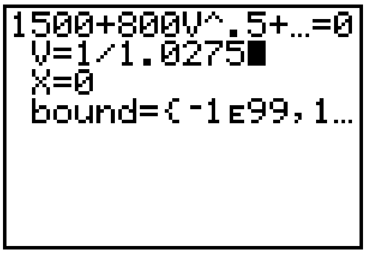


Mit dem TI-83 läßt sich halbwegs bequem nur die traditionelle Form über die Gleichung durchführen, wobei man entweder die Gleichung händisch nach X auflöst oder den implementierten Solver aufruft. Im Anschluss zeige ich die Umkehrung der schrittweisen Aufzinsung als schrittweise durchgeführte Abzinsung mit dem `TVM-Solver`.

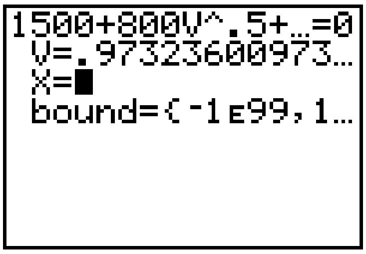
(Das Beispiel dient zur Vorstellung des Solvers, denn diese Äquivalenzumformung sollte doch auch ohne Computerunterstützung möglich sein!)



Man ruft über MATH `0:Solver` den `EQUATION SOLVER` auf und gibt die Gleichung (inklusive von allfälligen Formvariablen) ein. Dabei muß man darauf achten, dass immer die Form 0 = Gleichungsterm gewählt wird. (Hinter dem Algorithmus steht offensichtlich eine Nullstellensuche).

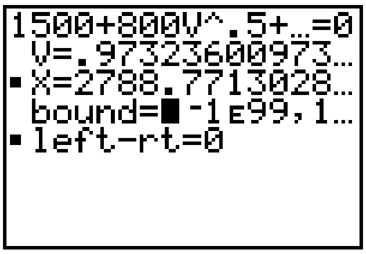


Nach Bestätigung durch ENTER erscheint der Gleichungsterm nochmals mit allen vorkommenden Variablen, von denen nun eine unbekannt bleiben muss. Alle anderen werden mit den entsprechenden Werten belegt. Hier ist das nur der Abzinsungsfaktor v mit 1/1.0275 zu belegen.



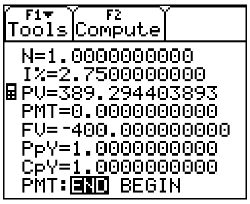
Für die gesuchte Variable kann ein Schätzwert eingegeben werden – das ist bei komplizierten Gleichungen sehr oft hilfreich und sogar notwendig.

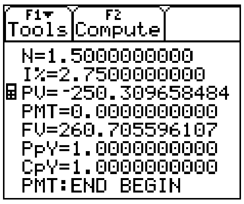
Der Cursor wird zur unbekannten Größe gestellt und mit ALPHA ENTERd er Gleichungslöser aufgerufen.

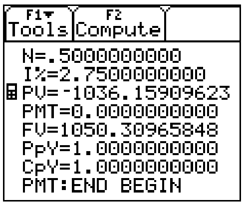


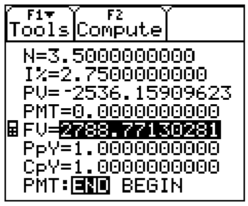
Die Lösung wird dann sofort angezeigt.

Jetzt wird noch der Barwertvergleich mit Hilfe des `TVM-Solvers` auf dem TI-92+ durchgeführt. Dabei sind besonders die Vorzeichen zu beachten.









`fv = -pv+65Ø` `fv = -pv + 8ØØ` `pv = pv-15ØØ`

Die letzten 400 € werden 1 Jahr abgezinst, das Ergebnis wird vorzeichengerecht um die vorletzte Geldbewegung korrigiert und 18 Monate abgezinst. Damit ist der Zeitpunkt ½ Jahr nach dem Bezugspunkt erreicht, 800 € sind zu berücksichtigen und das halbe Jahr wird abgezinst. Dem erreichten Wert sind 1500 € zuzuschlagen. Dies ist der Barwert des in dreieinhalb Jahren fälligen Endwerts.

(In der Übungsaufgabe `zz22` wird dieses Beispiel mit dem `TVMS-Solver` gelöst.)

Zusatzaufgabe: Löse die Aufgabe mit geänderter Verzinsung: a) $j_4 = 3\%$ b) $j_2 = 1{,}5\%$

Dieses kleine Beispiel eignet sich hervorragend, einen Begriff einzuführen, der aus der *Investitionsrechnung* stammt, den *Kapitalwert*.

Unter dem *Kapitalwert* (einer Investition) versteht man die Differenz aus der Summe der Barwerte aller Einzahlungen und der Summe aller Auszahlungen auf Basis eines festgelegten *Kalkulationszinsfußes*.

Wir können die Zahlungen und deren Fälligkeiten in zwei Listen zusammenstellen:

Liste der Zahlungen: `zl={1500,800,650,-400,-x)`

Liste der Fälligkeiten: `fl={0,0.5,2,3,3.5}` (in der Reihenfolge, in der die Zahlungen in `zl` angeführt werden)

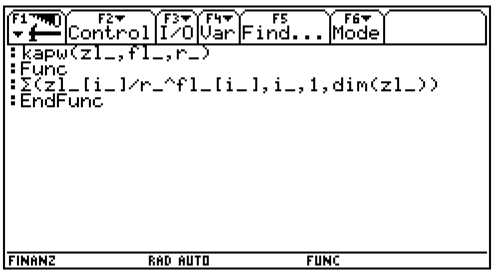
Der Kapitalwert läßt sich dann folgendermaßen als Funktion definieren:

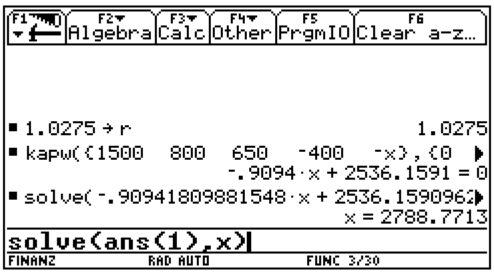
$$kapw(zl, fl, r) = \sum_{i=1}^{\dim(zl)} zl_i \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^{fl_i},$$

dabei ist dim(*zl*) die Anzahl der Elemente von *zl*.

Diese Funktion halten wir gleich im TI-92 fest: Da sich alle Ein- und Auszahlungen ausgleichen müssen, muß der Kapitalwert 0 werden. Die entsprechende Gleichung wird anschließend sofort gelöst und wir erhalten das schon bekannte Ergebnis auf eine sehr bequeme Art und Weise.

`solve(kapw({15ØØ,8ØØ,65Ø,-4ØØ,-x},{Ø,1/2,2,3,3.5},1.Ø275)`





`TI-FINANCE` hält zwar mit `npv(...)` (Net Present Value = Kapitalwert) eine ähnlich arbeitende Funktion bereit, die sich aber leider nur für ganzzahlige Zeitabstände eignet. Wir werden bei Gelegenheit darauf zurückkommen.

zz2 Die folgenden drei Zahlungen .

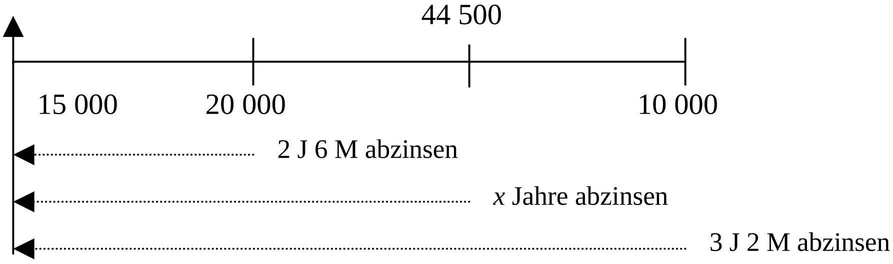
15 000 € sofort,

20 000 € nach 2 Jahren und 6 Monaten und

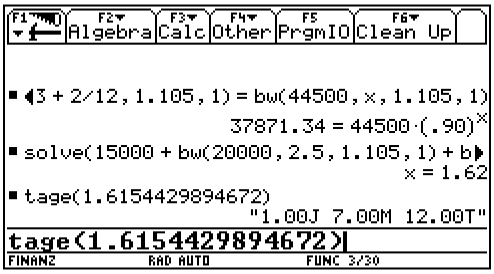
10 000 € nach 3 Jahren und 2 Monaten

sollen durch <u>eine</u> Zahlung in der Höhe von 44 500 € ersetzt werden.
Wann ist diese bei i = 10,5% fällig?

Zeitlinie:



Bei Aufgaben dieser Art ist – theoretische Verzinsung vorausgesetzt – ein *Barwertvergleich* die beste Wahl für den Bezugspunkt.

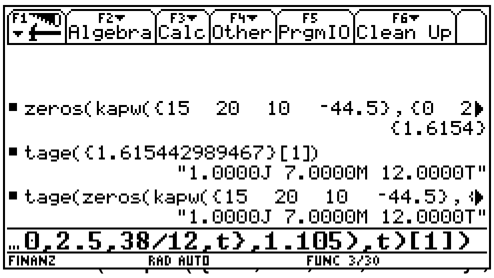


Diese Zahlung wäre – von jetzt an gerechnet – in 1 Jahr 7 Monaten und 12 Tagen fällig.

Die Gleichung lautet:

`15000+bw(20000,2.5,1.105,1)+bw(10000,3+2/12,1.105,1)=`
`bw(44500,x,1.105,1)`

Oder wieder mit dem Kapitalwert:



`{0,2.5,38/12,t},t)`

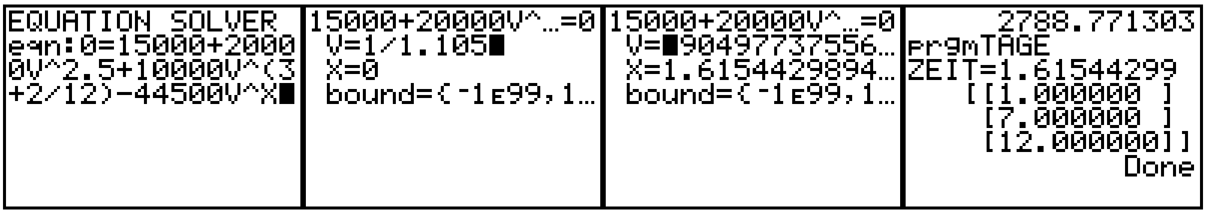
Wobei sich mit etwas Geschick die `tage()`-Funktion sofort integrieren läßt.

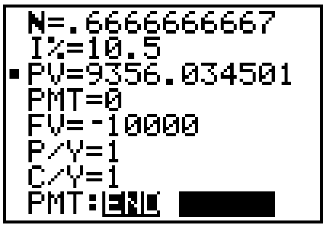
Mit dem TI-83 bleibt der Weg über den `Equation Solver` oder in Zwischenschritten auch über den `TVM-Solver`:

Zwischenfragen:

Welcher Gleichungstyp entsteht bei Problemen, die nach der Zeit fragen?

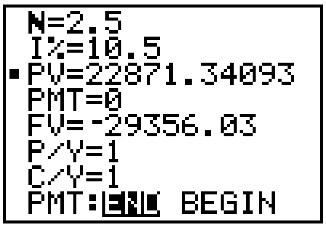
Welches Lösungsverfahren ist bei derartigen Gleichungen anzuwenden?



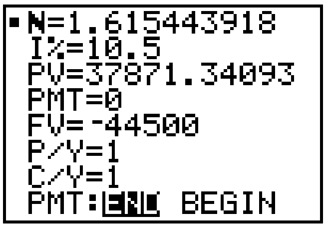


← N = 8/12

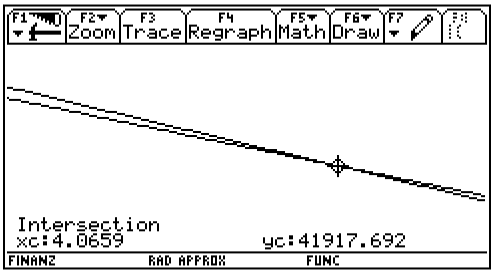
→ FV = -9356.03-10000
= -PV - 10000

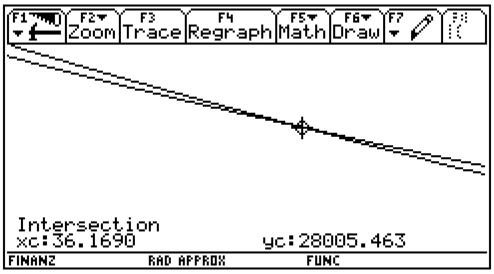


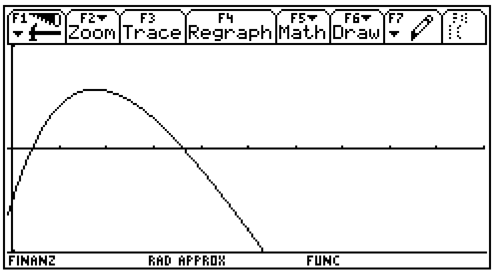
PV = 22871.34093+15000 →

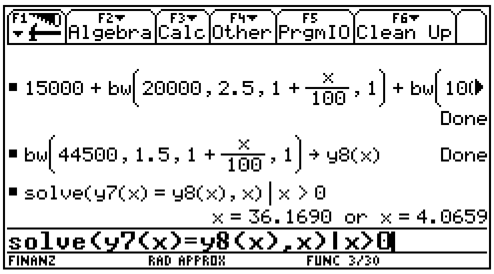


Die Zahlung der 44500 erfolgt in genau 1 1/2 Jahren. Bei welcher Jahresverzinsung ist die Summe der einzelnen Beträge zu dieser Zahlung äquivalent? Löse die Aufgabe erst graphisch, mache dann die numerische Kontrolle.





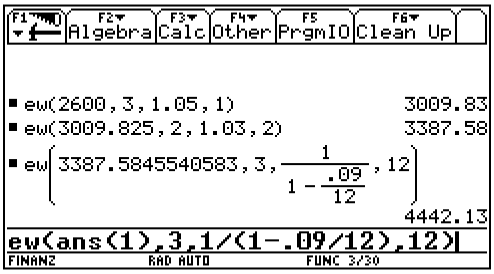


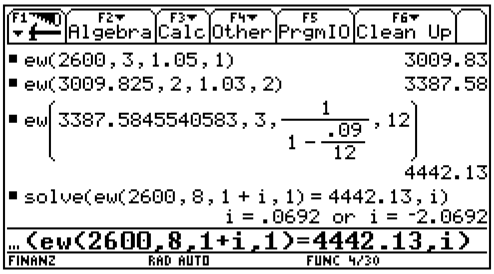


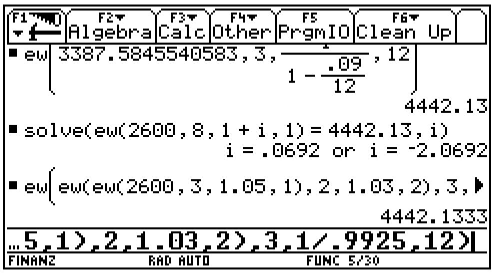
Links sieht man beide Lösungen über eine Nullstellensuche. Diskutiere die beiden Lösungen! Wie sind sie zu interpretieren?

Wieso gibt es zwei derartig unterschiedliche Antworten?

zz3 Auf welchen Wert wachsen 2600 €, wenn sie zuerst 3 Jahre zu i = 5%, dann zwei Jahre zu j_2 = 6% und abschließend nochmals 3 Jahre zu f_{12} = 9% aufgezinst werden? Welcher Rendite (durchschnittlichen Jahresverzinsung) entspricht dies?



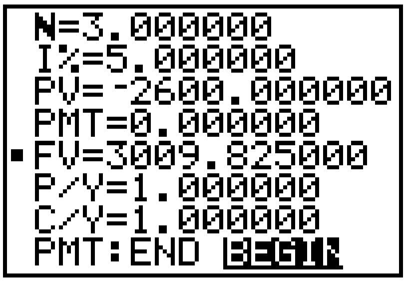




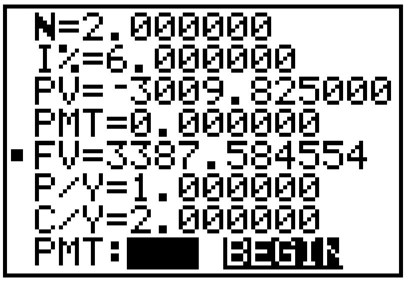
Besonders elegant ist ein „Einzeiler“ mit geschachtelten bw-Funktionen.

Der Endwert ist 4442,13 € und über die acht Jahre wird eine Verzinsung von durchschnittlich i = 6,92% erreicht.

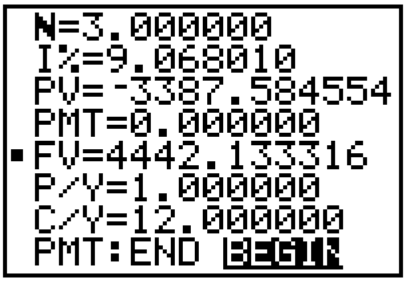
Mit dem TI-83 gehen wir ähnlich vor wie in zz1. Wir verfolgen das Kapital auf seinem Weg, müssen aber in der dritten Etappe die antizipative Verzinsung beachten:

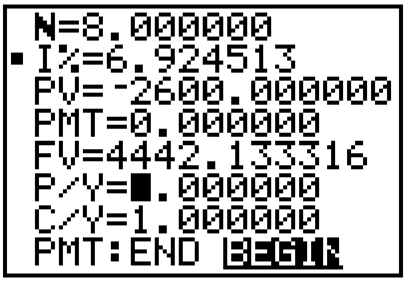


Der Stand nach 3 Jahren



Der Stand nach 5 Jahren

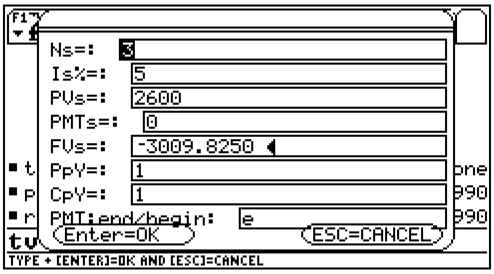


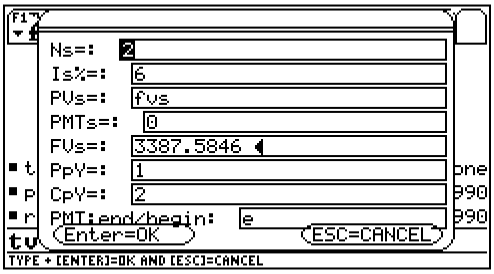


Der Stand nach 8 Jahren
(Eingabe für `I% = (1/0.9925-1)*1200`)

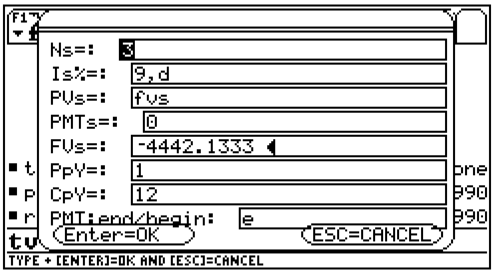
Zusatzaufgabe:
Formuliere die Gleichung und löse sie mit dem `Equation-Solver`.

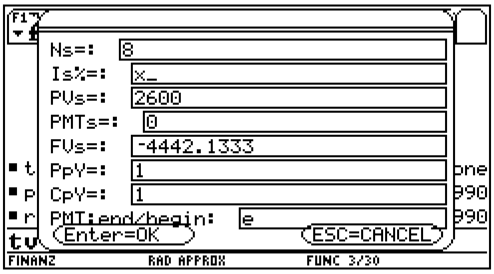
Auf der nächsten Seite findet man die Durchführung mit `tvms()`.



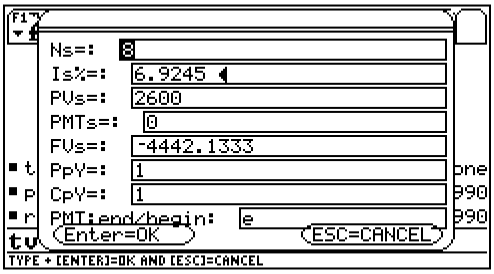


Wo nun die Zwischenergebnisse stehen wird natürlich vorher das `x_` eingegeben.





unmittelbar vor dem letzten ENTER.

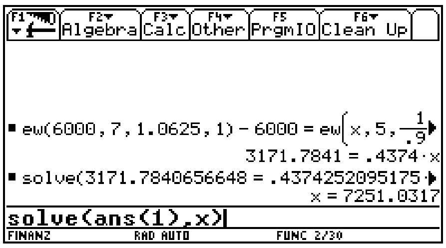


zz4 Welches Kapital liefert 5 Jahre zu d = 7% verzinst genau so viel an Zinsertrag wie 6000 € zu i = 6,25% nach 7 Jahren?

Der Zinsertrag ist die Differenz aus der Einzahlung (Barwert) und dem erreichten Endwert. Daher setzt man die beiden – auf unterschiedliche Weise erzielten – Zinserträge gleich:

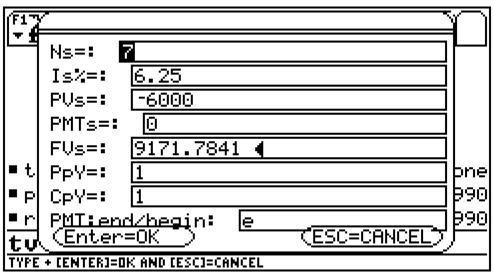
$$6000 \cdot 1{,}0625^7 - 6000 \; = \; x \cdot \left(\frac{1}{0{,}93}\right)^5 - x \quad \text{oder}$$

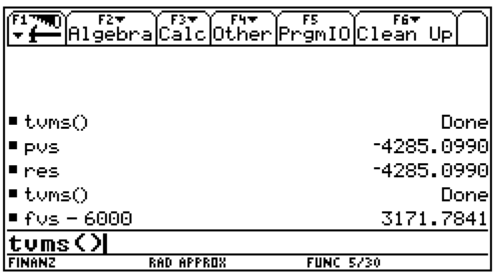
`ew(6ØØØ,7,1.Ø625)-6ØØØ = ew(x,5,1/Ø.93,1)-x`

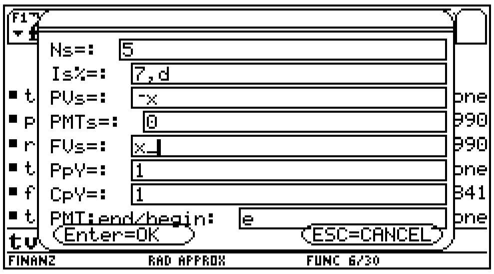


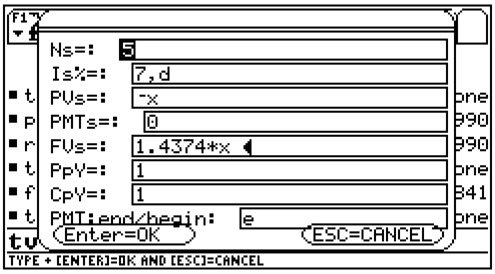
Mit dem TI-83 ist die Gleichung aufzulösen.

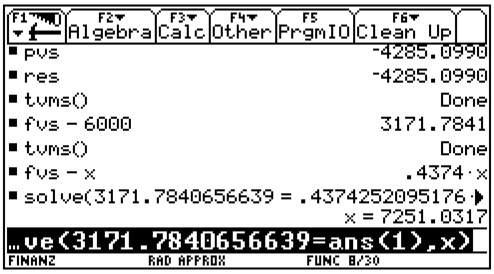
Mit dem `TVMS-Solver` lässt sich auch auf den CAS-TI vorgehen:











Der `tvms`-Solver funktioniert ähnlich wie der implementierte TVM-Solver, nützt aber auf dem TI-89/92+ und TI-92 deren Algebratauglichkeit. Die Resultate sind unter den Variablennamen `ns`, `is`, `pvs`, `pmts` und `fvs` gespeichert und können sowohl im Homescreen als auch im `tvms` verwendet werden.

zz5 Eine Firma muß zu einem fest vereinbarten Termin eine Verbindlichkeit von 75000 € begleichen. Für Zahlung vor Fälligkeit wird ein Diskont f_4 = 6% eingeräumt. Wie lange vor dem ursprünglichen Termin wäre zu bezahlen, wenn man mit 65000 € auskommen will?

a) mit *kaufmännischem Diskont*,

b) mit Zinseszinsen.

Der *kaufmännische oder lineare Diskont* wird ebenso wie der *einfache* oder *lineare Zins* sinnvoll nur für kurze Laufzeiten (<= 1 Zinsperiode) verwendet.

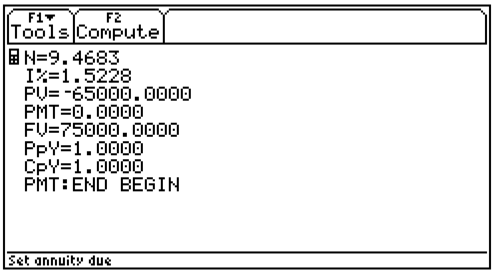
Zur Wiederholung die beiden Formeln:

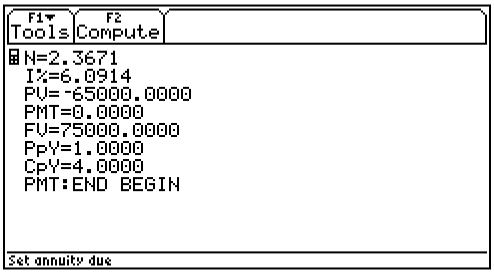
einfache Verzinsung: $K_n = K_0\,(1 + i \cdot n)$ (4)

kaufmännischer Diskont: $K_0 = K_n\,(1 - d \cdot n)$ (5)

a) $65000 = 75000\,(1 - 0{,}06\,n) \;\Rightarrow\; n$ = 2 Jahre 2 Monte und 20 Tage

b)

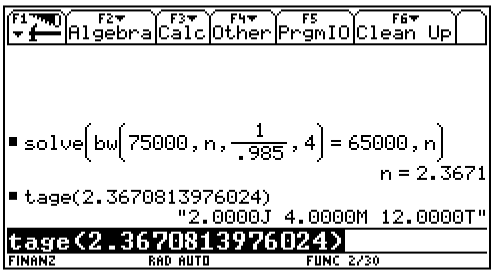




Bei `tvms()` wären die Diskonte als `1.5,d`, bzw. `6,d` einzugeben.

Es wäre 1 Jahr 9 Monate und 7 Tage früher als vereinbart zu bezahlen.

Die Abbildung genau oberhalb gibt auch das richtige Ergebnis wieder. Warum, und wie ist das Resultat zu interpretieren?

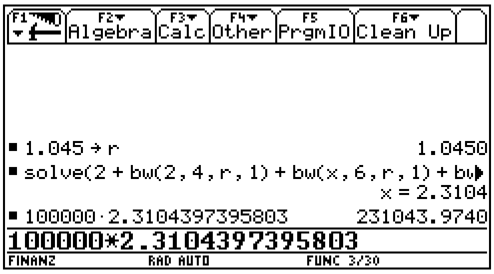


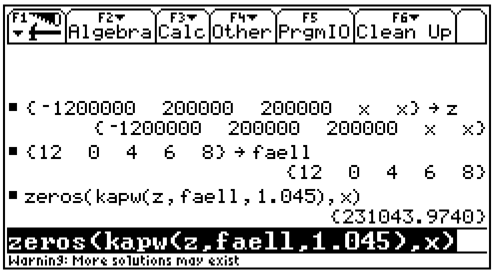
zz6 Ein Unternehmen wird in 12 Jahren ca 1 200 000 USD Eigenmittel für eine Firmenerweiterung benötigen. Für diesen Zweck können sofort 200 000 USD zurückgelegt werden. Nach 4 Jahren wird die gleiche Summe diesem Zweck gewidmet. Der Rest soll in gleichen Raten nach weiteren 2, bzw. 4 Jahren aufgebracht werden. Wie hoch müssen diese Raten sein, wenn die Rücklagen zu i = 4,5% angelegt werden können.

Diese Aufgabe ist einigermaßen kompliziert.

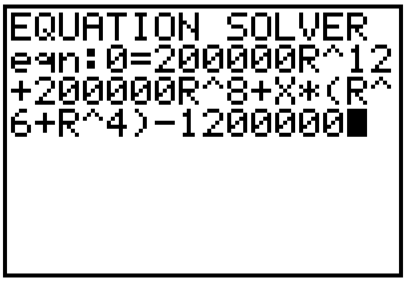
Wie sieht die Zeitlinie aus?

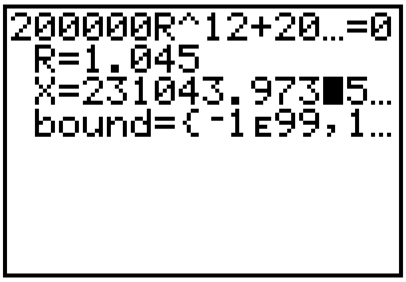
Als Bezugspunkte bieten sich die Termine sofort (Barwertvergleich) oder am Ende des 12. Jahres (Endwertvergleich) an. Wir führen am TI-92 den Barwertvergleich und am TI-83 den Endwertvergleich durch. Es empfiehlt sich, auf jedem Rechner beide Ansätze zu überlegen und auch durchzuführen. Im linken Ansatz wurde die Gleichung vorerst durch 100 000 gekürzt.



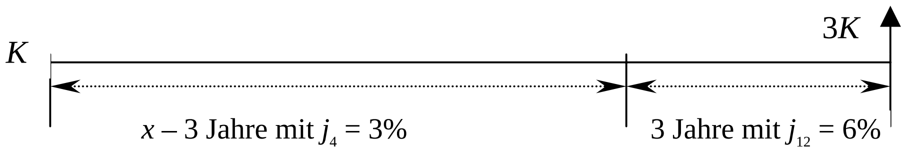


(Hinweis: Auf dem „gewöhnlichen“ TI-92 läßt sich die Gleichung mit kapw nicht in einem Schritt lösen. Man muß zuerst den Kapitalwert kapw bestimmen, und dann die entstehende lineare Gleichung auflösen. Man beachte die Warnung bezüglich allfälliger anderer Lösungen, für die ich keine Erklärung parat habe.)





zz7 In wieviel Jahren wird sich ein Kapital verdreifachen, wenn es zu j_4 = 3%, nur in letzten drei Jahren aber zu j_{12} = 6% verzinst wird.

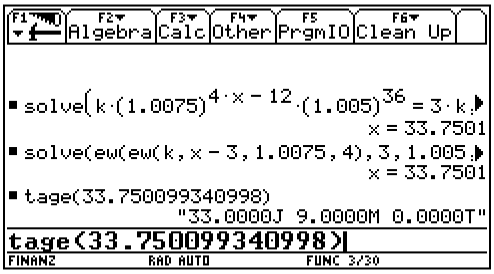


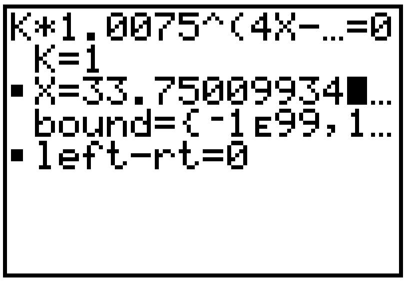
Ein möglicher Ansatz als (Exponential-) Gleichung sieht so aus:

$$K \cdot 1{,}0075^{4(x-3)} \cdot 1{,}005^{12 \cdot 3} = 3K$$

(Beachte die Aufzinsungsfaktoren und die Exponenten – Zeiten immer in Zinsperioden umrechnen!!)

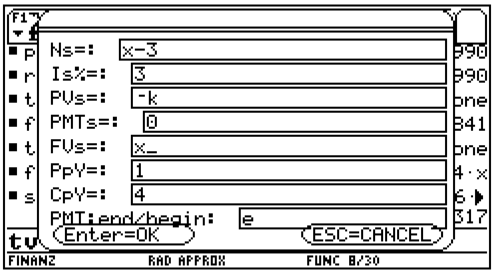
Diese Gleichung kann nun mit dem `Solver` oder mit einer geschachtelten Endwertberechnung gelöst werden.

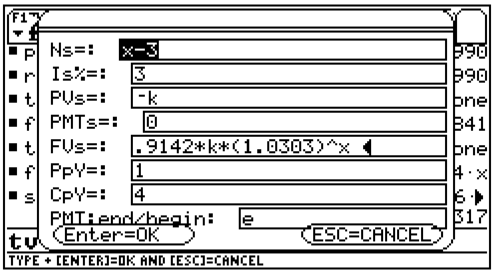




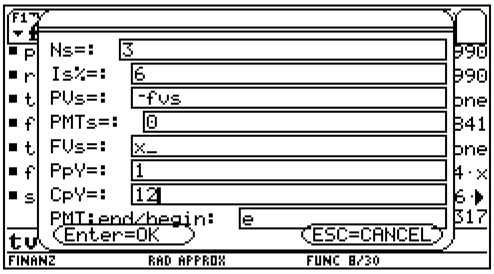
Natürlich kann man die Gleichung durch *K* kürzen oder für *K* einen beliebigen Wert (z.B. $K = 1$) annehmen.

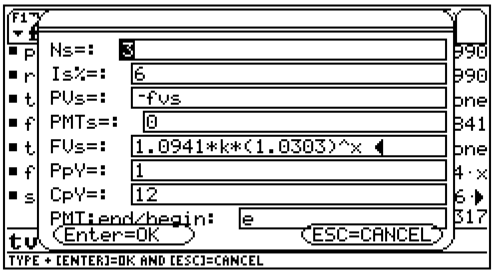
Und wieder mit dem symbolischen TVM-Solver `tvms()`:
Ein möglicher Lösungsweg.

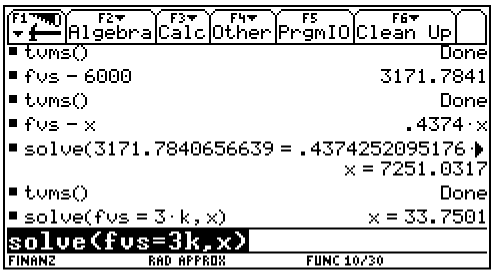




Die erste Eingabe mit dem ersten Zwischenergebnis (Kapital nach *x*-3 Jahren). Wie man deutlich sieht, verträgt `tvms()` zusätzliche Variable (hier *k* für ein fiktives Anfangskapital).







Im nächsten Schritt wird der Endwert zum Barwert und es wird zum neuen Zinsfuß die nächsten 3 Jahre aufgezinst. Der entstandene Endwert muss gleich 3*k* sein.

Aufgabe: Es gibt auch eine Möglichkeit, das Problem bis zum Schluss im Solver zu lösen – man nimmt aber dabei eine – durch die Rundung bedingte – Ungenauigkeit in Kauf. Wie könnte das gehen?

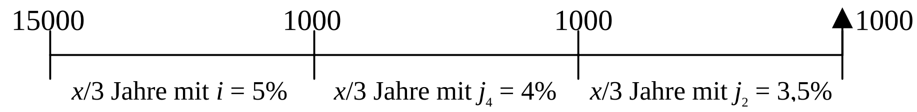
Tipp: Unter welcher Voraussetzung sind Bar- und Endwert gleich?

zz8 In welcher Zeit wird sich das Startkapital von 15 000 € verdoppeln, wenn es ein Drittel der Zeit zu i = 5%, ein Drittel zu j_4 = 4% und ein Drittel zu j_2 = 3,5% verzinst wird. Am Ende eines jeden Drittels wird außerdem eine Prämie von 1000 € gut geschrieben.

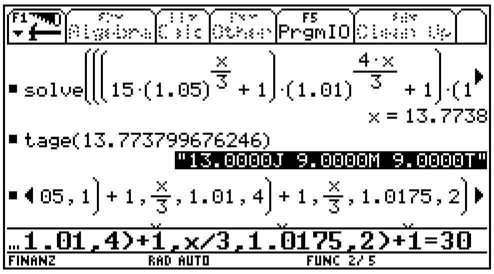
Begründe, warum es oder warum es hier nicht auf die Reihenfolge ankommt, in der die Verzinsungen wirksam werden.

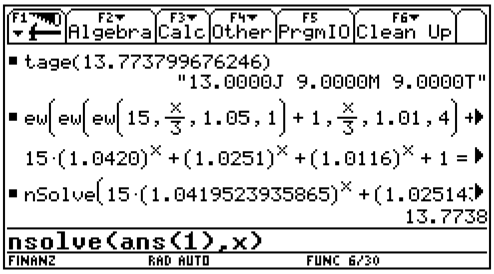
Läßt sich die entstehende Gleichung exakt lösen?

Zeitlinie und Ansatz der Gleichung:



$$\left(\left(15000\cdot 1{,}05^{x/3}+1000\right)\cdot 1{,}01^{4x/3}+1000\right)\cdot 1{,}0175^{2x/3}+1000 = 30000$$



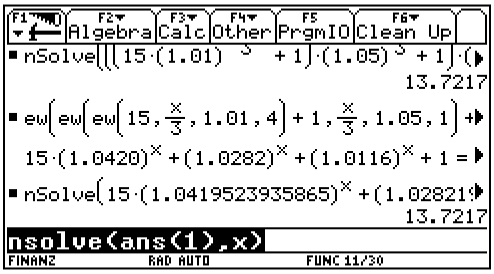


`ew(ew(ew(15,x/3,1.05,1)+1,x/3,1.01,4)+1,x/3,1.0175,2)+1 = 30`
(läßt sich auch schrittweise über `ans(1)` aufbauen!)

Die Gesamtdauer beträgt 13 Jahre 9 Monate und 9 Tage.

Die Exponentialgleichung läßt sich nicht exakt lösen, da sie nicht logarithmiert werden kann. Sie ist nur näherungsweise lösbar. `nsolve` erweist sich als günstiger – dann tritt auch die Warnung wegen allfälliger anderer Lösungen nicht auf.

Die Reihenfolge der Verzinsung ist entscheidend wegen der zusätzlichen 1000 €. Wenn wir nur die ersten beiden Verzinsungen vertauschen, dann wird die erste Prämie höher verzinst, d.h., die Dauer müßte sich insgesamt etwas verkürzen. Das läßt sich leicht überprüfen:



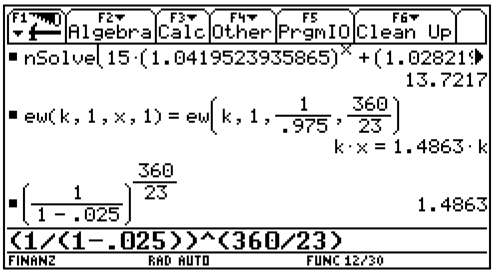
Mit dem TI-83 geht man mit der Gleichung sofort in den `Solver`.

Auf den CAS-TI kann man auch den `tvms()` einsetzen (siehe dazu Aufgabe `zz12`).

zz9 Vielfach findet man auf einer Rechnung den Hinweis, dass man bei Zahlung innerhalb einer Frist von t Tagen nach Warenlieferung d% Skonto vom Rechnungsbetrag abziehen kann, andernfalls wäre der volle Rechnungsbetrag 30 Tage nach Lieferung ohne jeden Abzug fällig. Hier stellt sich die Frage nach der *Effektivverzinsung* des *Lieferantenkredits*.
Spezielle Angabe: 2,5% Skonto bei Zahlung innerhalb von 7 Tagen.

Zeitlinie:

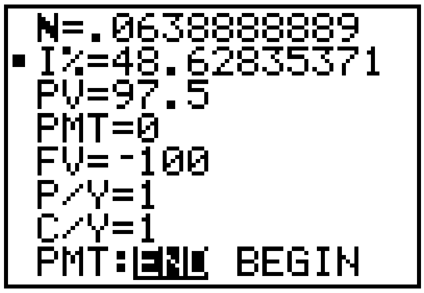
Der Aufzinsungsfaktor für 23 Tage beträgt $r = \dfrac{1}{1-0{,}025}$. Welches ist der äquivalente Jahreszinsfuß i? Eine Zinsperiode dauert 23 Tage, daher hat das Jahr 360/23 Zinsperioden.



Man liest sofort den Aufzinsungsfaktor für das Jahr mit x = 1,4863 ab, daher ergibt sich eine effektive Verzinsung von 48,63%. (Eine bessere Geldanlage wird man nicht finden, daher sollte man Skonti immer ausnützen!!)
Der zweite Term zeigt die direkte Berechnung des Aufzinsungsfaktors.

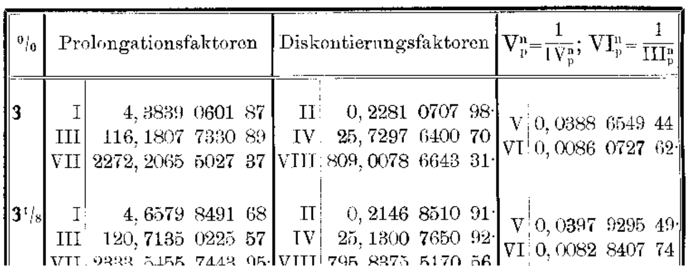
Auf dem TI-83 kann man diesen Ausdruck natürlich auch berechnen oder die Gleichung aus dem Endwertvergleich mit dem `Solver` lösen. Es reizt aber, wieder einmal den `TVM-Solver` zu verwenden.

Für `N` wurde 23/360 eingetragen.



Für eine Nachdenkpause:

In den Zeiten vor Einführung des Computers und Taschenrechners wurde mit den Tabellen gerechnet. Für die gängigen Zinsfüße wurden etwa für n = 1 bis n = 50 Zinsperioden die Werte der Auf- und Abzinsungsfaktoren tabelliert. Mit diesen vielstelligen Dezimalzahlen mußte händisch multipliziert und dividiert werden. (Die Werte I bzw. II in der unten abgebildeten Tabelle.) Wie konnte man vorgehen, wenn man ein Kapital zu j_4 = 4% 35 Jahre lang aufzinsen musste, aber nur eine Tabelle bis n = 50 zur Verfügung hatte?



%/o		Prolongationsfaktoren		Diskontierungsfaktoren		$V_p^n = \frac{1}{IV_p^n}$; $VI_p^n = \frac{1}{III_p^n}$
3	I	4,3839 0601 87	II	0,2281 0707 98·	V	0,0388 6549 44
	III	116,1807 7330 89	IV	25,7297 6400 70	VI	0,0086 0727 62·
	VII	2272,2065 5027 37	VIII	809,0078 6643 31·		
3 1/8	I	4,6579 8491 68	II	0,2146 8510 91·	V	0,0397 9295 49·
	III	120,7135 0225 57	IV	25,1300 7650 92·	VI	0,0082 8407 74
	VII	2333 5155 7443 05·	VIII	795 8375 5170 56		

Das ist die Seite für n = 50 eines Tabellenwerks aus dem Jahre 1902, „*Politische Arithmetik*" von August Schlimbach.

Aber mit derartige Tabellen wurden bis zum Beginn des Taschenrechnerzeitalters verwendet.

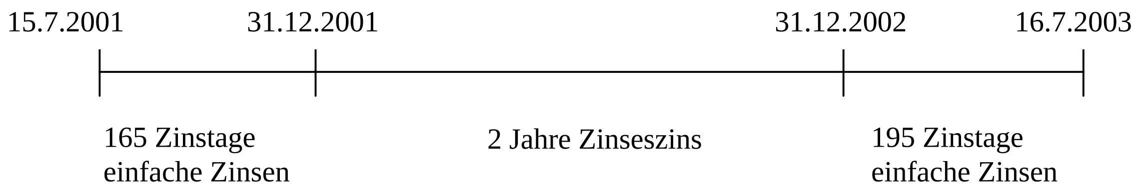
5 Die gemischte oder praktische Verzinsung

Die gemischte Verzinsung ist eigentlich ein Relikt und sollte – auch nach Meinung von Fachleuten [1] – ganz von der theoretischen Verzinsung abgelöst werden. Die Bezeichnung „praktisch“ kann nur von „Praxis“ herrühren, denn „praktisch“ ist sie wirklich nicht, ganz im Gegenteil. Sie ist erstens umständlicher und birgt zweitens viele Inkonsistenzen, wie die folgenden Beispiele belegen werden.

Im Bankgeschehen – z.B. beim Sparbuch – werden die Zinsen jeweils mit dem Ende des Kalenderjahres gut geschrieben. Während des Jahres werden einfache oder lineare Zinsen verrechnet. Daher „mischen“ sich die beiden Verzinsungsarten. Jedes Monat wird mit 30 Tagen, das Jahr mit 360 Tagen angenommen (Usance 30/360).

Beispiel:

Ein Betrag von 1000 € wird am 15. Juli 2001 auf ein Sparbuch eingezahlt (3,25% Zinsen). Das Sparbuch wird am 16. Juli 2003 aufgelöst. Welcher Betrag kann behoben werden (ohne Berücksichtigung der Kapitalertragsteuer)?



$$\text{Endkapital} = 1000\left(1+0{,}0325\,\frac{165}{360}\right)1{,}0325^2\left(1+0{,}0325\,\frac{195}{360}\right) = 1100{,}98$$

Nun verschieben wir Einzahlung und Auszahlung um 4 Monate: Einzahlungstermin ist dann der 15. November und Auszahlungstermin der 16. November. An der Gesamtdauer ändert sich nichts, am Zinsfuß auch nichts, aber:

$$\text{Endkapital} = 1000\left(1+0{,}0325\,\frac{45}{360}\right)1{,}0325^2\left(1+0{,}0325\,\frac{315}{360}\right) = 1100{,}83$$

Und wenn die 1000 € genau vom 1.1.2002 bis zum 1.1.2004 angelegt sind (kann wegen der Feiertage natürlich nur theoretisch überlegt werden, dann gibt´s noch weniger:

$$\text{Endkapital} = 1000 \cdot 1{,}0325^3 = 1100{,}70.$$

Es ist eigentlich nicht einzusehen, dass das gleiche Kapital zum selben Zinsfuß jeweils gleich lange veranlagt unterschiedliche Endwerte ergibt.

> Wichtig: Bei der gemischten Verzinsung muss der Zinstermin bekannt sein. Die Anzahl der Zinstage kann man leicht berechnen, oder man schreibt ein einfaches Programm für seinen Rechner. Die Berechnung der Zinsen beginnt i.a. am Werktag, der der Einzahlung folgt und endet am Kalendertag vor der Auszahlung.
>
> Die gemischte Verzinsung wird auch bei antizipativer Verzinsung angewendet. Aus Gründen der oben genannten Inkonsistenz dieser Methoden ist bei Anwendung der gemischten Verzinsung die Wahl des Bezugspunktes nicht egal.
>
> **Bei dekursiver Verzinsung muss der Termin der letzten vorkommenden Geldbewegung zum Bezugspunkt gemacht werden, bei antizipativer der Termin der ersten auftretenden Zahlung.**

Bei unseren Aufgaben werden wir auf die Wochentage nicht Rücksicht nehmen (d.h., Sonn- und Feiertage bleiben unberücksichtigt.)

Für den dekursiven Endwert, bzw. antizipativen Barwert lassen sich die folgenden Formeln definieren:

$$K_n = K_0\left(1+i\cdot n_1\right)\left(1+i\right)^N\left(1+i\cdot n_2\right) \qquad (6)$$

$$K_0 = K_n\left(1-d\cdot n_1\right)\left(1-d\right)^N\left(1-d\cdot n_2\right) \qquad (7)$$

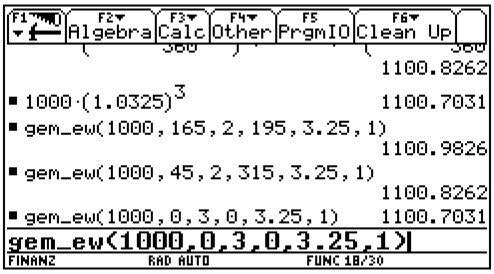
Dabei bedeuten n_1 und n_2 die Teile der Zinsperioden vor- und nach den N ganzen Zinsperioden.

Auftrag:

Definiere eine Funktion für die gemischte Verzinsung, besser gesagt zwei Funktionen, eine für dekursive und eine für antizipative Verzinsung.

Vorschlag für Funktionsnamen und Parameterliste

```
gem_ew(kap,vorher,ganze,nachher,i_,zp)
gem_bw(kap,vorher,ganze,nachher,d_,zp)
```



Es bewährt sich, hier nicht generell die Aufzinsungsfaktoren in die Parameter aufzunehmen, sondern den Zinsfuß (in %, dekursive Verzinsung) und den Diskont (ebenfalls in %, antizipative Verzinsung). `vorher` und `nachher` sind die Zeiten bis zum ersten Zinstermin, bzw. vom letzten Zinstermin bis zum Bezugspunkt (in Tagen).

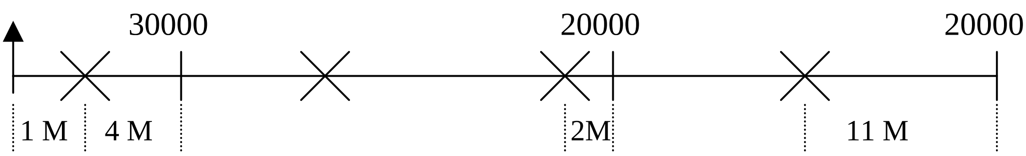
zz10 Berechne die beiden Barwerte mit gemischter Verzinsung:

B_A: 30 000 € in 5 Monaten, 20 000 € in 2 Jahren 3 Monaten, 20 000 € in 4 Jahren bei i = 4%, erster Zinstermin ist in einem Monat.

B_B: 2000 € in 1 Jahr, 2 Monaten, 40 000 € in 4 Jahren, 3 Monaten, 20 000 € in 10 Jahren bei d_2 = 3,5%, die erste Diskontperiode beginnt mit der letzten Zahlung.

Diese Aufgaben sind recht lästig und es bedarf einer genauen Zeitlinie, dass man über die Verzinsungsdauern und die Zinstermine die Übersicht bewahrt.

Zeitlinie für B_A (mit den × sind die Zinstermine markiert):



Wenn B_1, B_2 und B_3 die Barwerte der einzelnen Zahlung sind, dann werden diese nach dem oben Gesagten berechnet wie folgt:

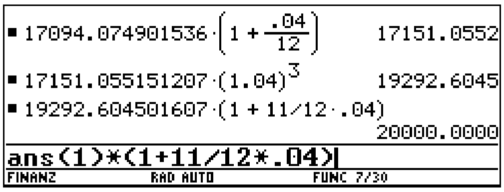
Und daraus lassen sich die Barwerte leicht berechnen und zum Gesamtbarwert addieren.

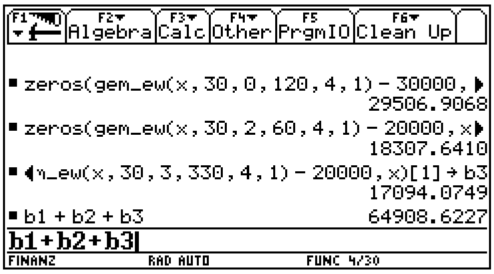
$$B_1\left(1+\frac{30}{360}0{,}04\right)\left(1+\frac{120}{360}0{,}04\right) = 30\,000$$

$$B_2\left(1+\frac{30}{360}0{,}04\right)\cdot 1{,}04^2\cdot\left(1+\frac{60}{360}0{,}04\right) = 20\,000$$

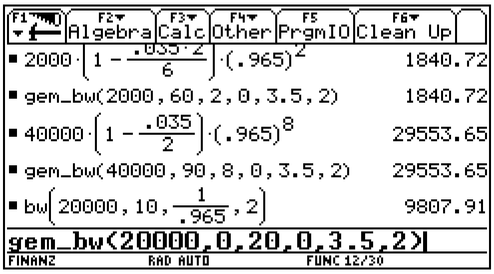
$$B_3\left(1+\frac{30}{360}0{,}04\right)\cdot 1{,}04^3\cdot\left(1+\frac{330}{360}0{,}04\right) = 20\,000$$

Unter Verwendung von `gem_ew` kann das so aussehen:





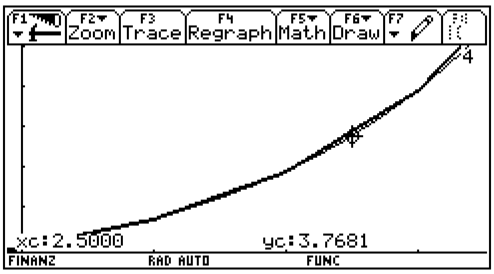
Wie die „Probe“ zeigt, ergibt der Betrag von 17094,07 € unter den gegebenen Bedingungen tatsächlich den Endwert von 30 000 €.
Der Gesamtbarwert B_A beträgt 64908,62 €

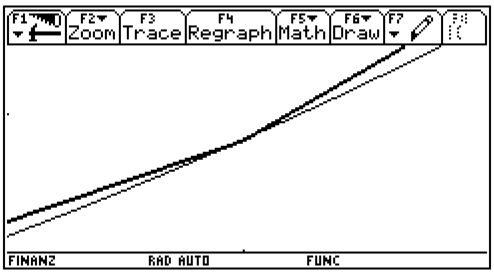


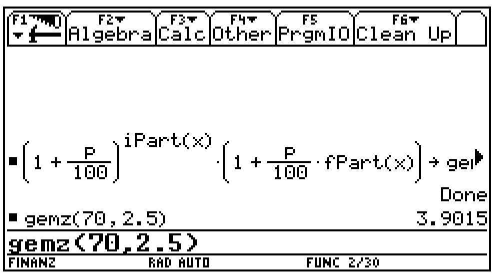
Die drei Beträge 1840,72 €, 29553,65 € und 9807,91 € ergeben den Gesamtbarwert B_B = 41202,28 €.

Die Programme für den TI-83 finden sich im Anhang.

Stelle die gemischte und die theoretische Verzinsung graphisch gegenüber. Verwende dazu einen unrealistisch hohen Zinsfuß (> 50%) sonst kommen die Unterschiede nicht deutlich genug zum Vorschein. Im Handbuch finden sich Funktionen, die den ganzzahligen und nicht ganzzahligen Teil einer Zahl beschreiben.



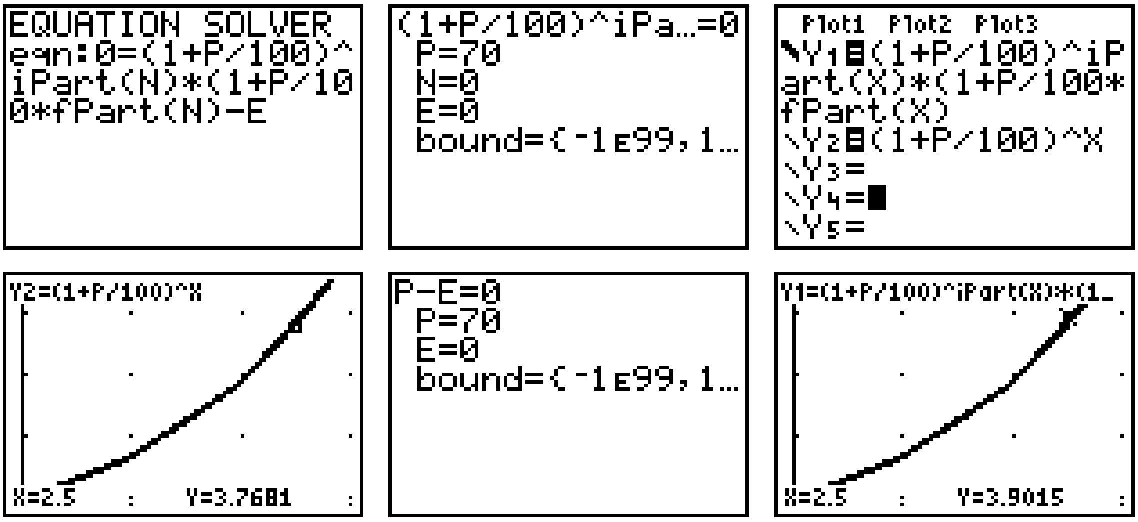




In den Abbildungen wurde als Zinsfuß 70% gewählt. Der Bildausschnitt zeigt den Bereich um den Zeitpunkt x = 2 Jahre. Deutlich sind die Knicke zu erkennen. Außerdem sieht man, dass die gemischte Verzinsung – dargestellt durch die linearen Abschnitte – während des Jahres immer mehr hergibt als die theoretische. Auf dem TI-92 wurden die beiden Funktionen `=gemz(70,x)` bzw `1.7^x` als `y3(x)` und `y4(x)` im Funktioneneditor festgelegt.

Für die graphische Darstellung am TI-83 soll ein „Trick“ angewendet werden, für den ich Fritz Tinhof und Markus Paul sehr dankbar bin. Sie verwenden den Gleichungslöser als Eingabemaske für einen oder mehrere Parameter. Die dort festgelegten Werte werden über das System in den Funktioneneditor übernommen. Dabei muss die Gleichung keinen Sinn ergeben, sie muss nur die Parameter enthalten.

Ich führe das zuerst mit einer „sinnvollen“ Gleichung – für die gemischte Verzinsung mir dem Parameter p durch, der den Wert 70 erhalten soll. Dann probiere ich das nochmals mit einer in diesem Zusammenhang völlig sinnlosen Gleichung `P - E = 0` und setze wieder für `P = 70` ein:

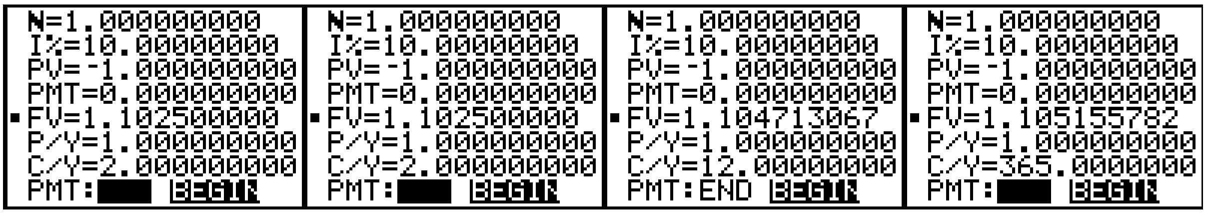


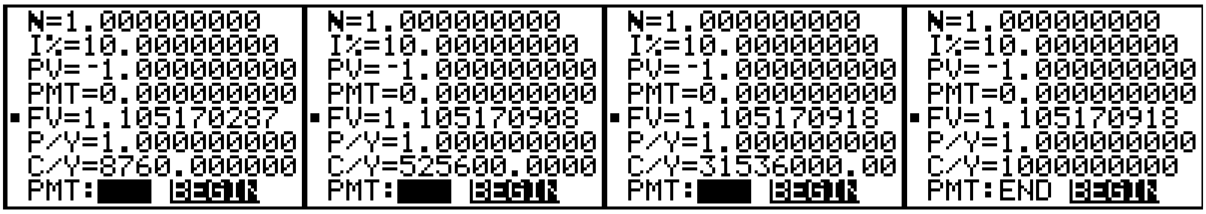
6 Die stetige Verzinsung

Der Zuschlag der Zinsen, bzw. der Abzug des Diskonts erfolgt immer an genau festgelegten Terminen und daher in *diskreten* Schritten. Auch in der Natur „verzinsen“ sich „Kapitalien“, wie z.B. die Biomasse eines Waldes, die Anzahl der Lebewesen in einer Population bei günstigen Bedingungen, usw. Hier erfolgt der Zuwachs aber nicht pünktlich an jedem 1. sondern die Masse nimmt stetig zu. Diese *stetige* Verzinsung ist auch im Rahmen der Finanzmathematik sinnvoll, da man mit ihrer Hilfe die Mittel der Differential- und Integralrechnung zur Modellierung von ökonomischen Vorgängen erfolgreich einsetzen kann.

Wir unterstellen einen nominelle Jahresverzinsung von i = 10% und überlegen, was passiert, wenn wir immer mehr, aber dafür kürzere Zinsperioden einführen. Wie groß wird der Endwert eines Kapitals K_0 = 1 € nach einem Jahr bei

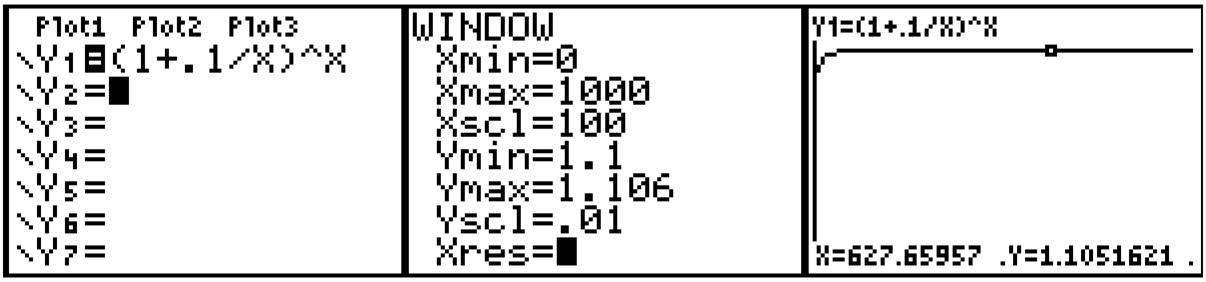
a) zweimaliger,
b) viermaliger,
c) monatlicher,
d) täglicher (365 Tage),
e) stündlicher !!,
f) minütlicher !!
g) sekündlicher Kapitalisierung?
h) Versuche eine Verallgemeinerung auf eine „momentane“ = „augenblickliche“ Kapitalisierung.





Der Endwert scheint sich bei 1,105170918... zu stabilisieren.

Mit dem CAS-Rechner kann man noch einen Schritt weiter gehen, ohne Kenntnisse der Analysis allzusehr strapazieren zu müssen. Aber zuerst soll die Entwicklung graphisch verfolgt werden. Dazu definieren wir im [Y=] -Editor die entsprechende Funktion für den Endwert in Abhängigkeit von den Kapitalisierungsperioden pro Jahr.



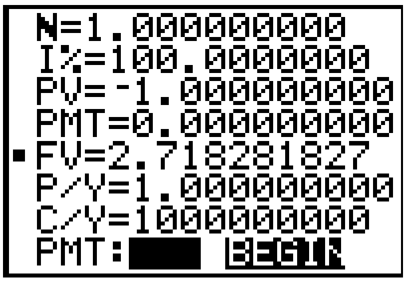
Die stetige Verzinsung mit nomineller Jahresverzinsung von 10% scheint einer effektiven Verzinsung mit 10,51709...% äquivalent zu sein. Vor dem Wechsel zu CAS-Rechner werden noch zwei Experimente durchgeführt. Konsequenterweise müssen wir dann den Zinsfuß mit j_∞ bezeichnen.

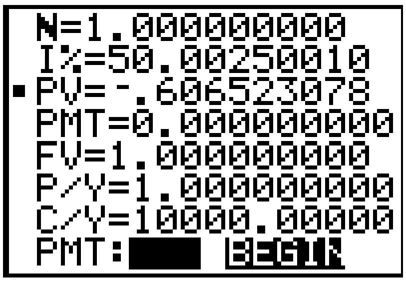
Welchen Wert nimmt dann i_∞ an?

Auftrag:

Angenommen die nominelle Jahresverzinsung sei i = 100%. Wie groß ist der Endwert nach einem Jahr bei stetiger Verzinsung? Kommt das Ergebnis bekannt vor?

Angenommen, der nominelle Jahresdiskont sei d = 50%. Wie groß ist der Barwert von 1 Einheit ein Jahr vor Fälligkeit bei stetiger Diskontierung?



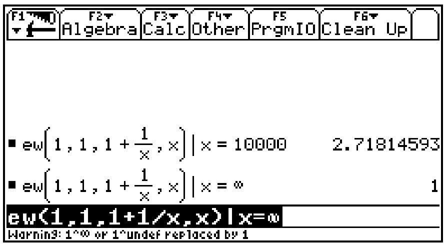


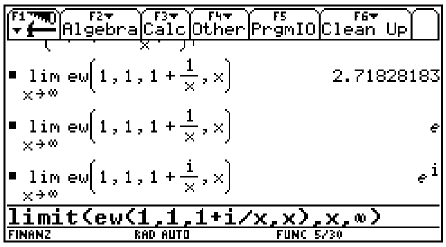
I% ergibt sich nach (3) auf Seite 9 aus:

$$\left(\frac{1}{1-\frac{0,5}{10000}}-1\right)\times 100\times 10000$$

Ist die Zahl unter FV im linken Bild bekannt?

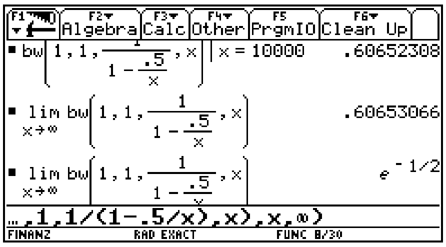
Nun wechseln wir zum CAS-Rechner, der auch mit ∞ hantieren kann und versuchen unser Glück. So ganz funktioniert es auf Anhieb noch nicht.

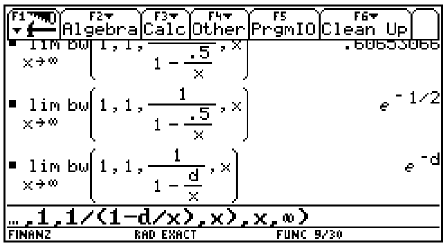




Wir erkennen eine Fehlermeldung: `Warning: 1^∞ or 1^undef replaced by 1`

Wir setzen ein mathematischeres Mittel ein, den *Grenzwert* und rufen über die Funktionstaste [F3] den `limit()` auf, und lassen x gegen ∞ gehen.





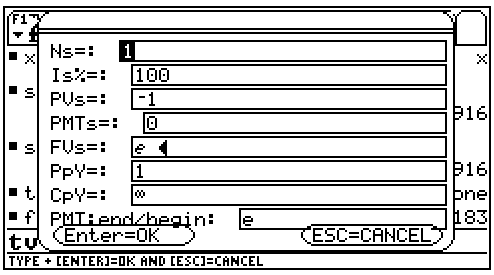
Dabei erhalten wir vorerst numerisch einen zum TI-83 vergleichbaren Wert, dann aber exakt die Eulersche Zahl e. Wenn wir dann auf einen Jahreszinsfuß i verallgemeinern, ergibt sich als Aufzinsungsfaktor der Ausdruck e^i. (mit $i = j$)

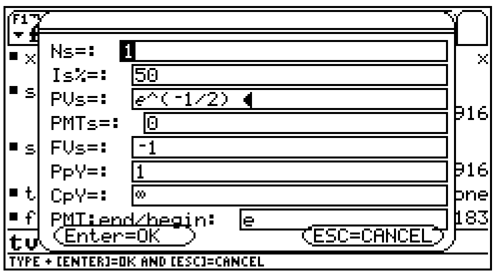
Für n Jahre ergibt sich damit ein Endwert von $K_n = K_0 \; e^{i\,n}$. Damit finden wir hier die bekannte exponentielle Wachstumsfunktion wieder. Analog ergibt sich bei stetiger Abzinsung mit einem nominellen Jahresdiskont d die Zerfallsfunktion: $K_0 = K_n \; e^{-d\,n}$.

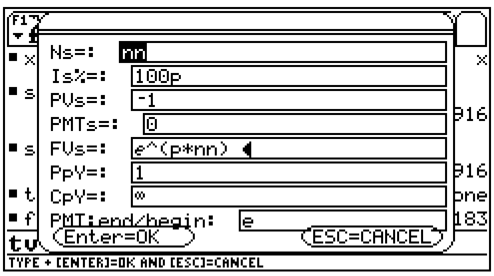
Die Umrechung eines beliebigen nominellen Jahreszinsfußes j_m zum äquivalenten stetigen Zinsfuß j_∞ und umgekehrt ist dann nicht schwierig und erfolgt mit Hilfe der Beziehung:

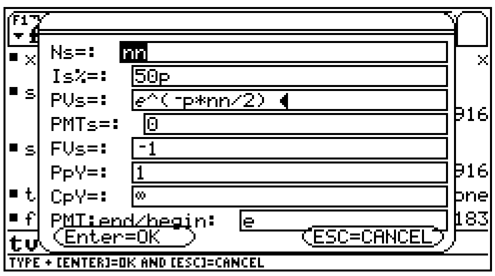
$$\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m = e^{j_\infty} \qquad (8)$$

Der „symbolische“ TVM-Solver nutzt die Fähigkeiten eines CAS und wir erhalten direkt die Antworten auf die Fragen von oben (wenn man den [MODE] auf `EXACT` oder `AUTO` einstellt).









7 Einige weitere Aufgaben zur Zinseszinsrechnung (mit Lösungsvorschlägen)

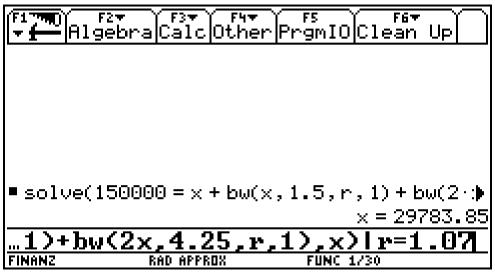
zz11 Ein Gesellschafter eines Unternehmens scheidet aus. Als Abfertigung stünde ihm ein Betrag von 150 000 EURO zu. Er zieht diese Summe nicht sofort aus der Firma, sondern läßt sich seinen Anteil in Form von vier Raten, deren erste sofort, die zweite nach eineinhalb, die dritte nach drei Jahren und die vierte nach vier Jahren und drei Monaten zahlbar sein soll, auszahlen. Außerdem sollen die beiden letzten Raten doppelt so hoch sein wie die beiden ersten.

a) Wie hoch ist die erste Rate bei i = 7% und theoretischer Verzinsung?

b) Wie hoch ist sie bei f_2 = 5,5% und gemischter Verzinsung?

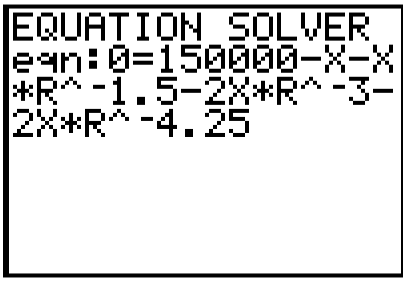
c) Wie hoch ist sie bei i = 7% und gemischter Verzinsung?

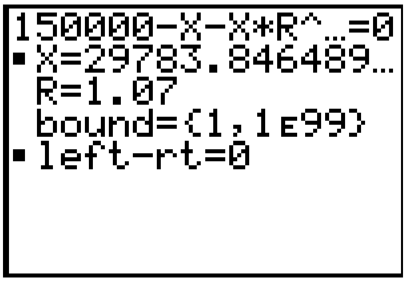
Die Zins-, bzw. Diskontperioden sollen bei b) und c) sofort beginnen.



Der komplette Ansatz ist im letzte Screenshot zu finden.

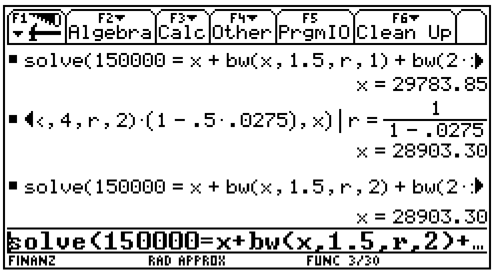
Das Finanzwerkzeug stellt bei derartigen Aufgaben keine wirkliche Hilfe dar. Es bleibt der traditionelle Ansatz und die Lösung der Gleichung im Solver: (Dies gilt erst recht für die Aufgaben b) und c)).

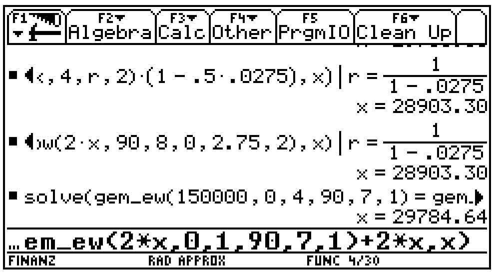


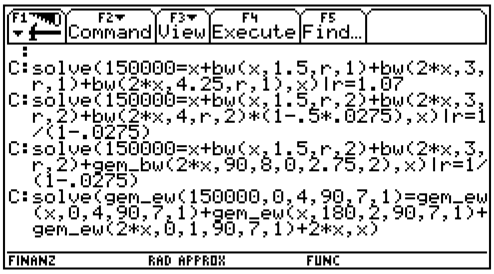


Bei gemischter Verzinsung müssen die Zinstermine bekannt sein. Da in b) ein Diskont vorliegt, **muss** ein Barwertvergleich durchgeführt werden. Nur die 4 ¼ Jahre müssen in 8 Zinsperioden und 90 vorhergehende Tage aufgeteilt werden. Die Funktion gem_bw() kommt zum Einsatz.

In c) **muss** ein Endwertvergleich (Bezugspunkt = nach 4 ¼ Jahren) erfolgen. Eine Zeitlinie zeigt die Aufteilungen in Zinseszins- und einfache Zinszeiten.



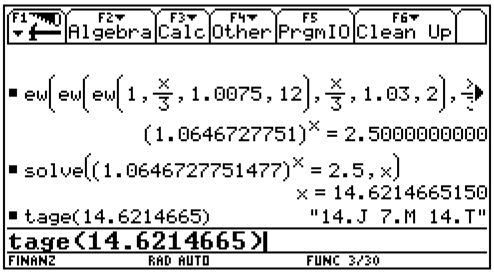




Das nebenstehende Skript gibt die Ansätze zu allen Aufgaben mit zwei Varianten für b).

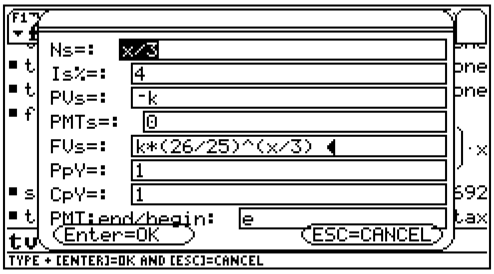
Die Lösungen sind: 29783,85 €, 28903,30 € und 29784,64 €

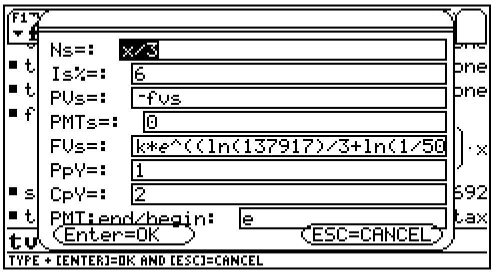
zz12 In wieviel Jahren wird sich ein Kapital um 150% vermehren, wenn es im ersten Drittel der Anlagezeit zu i = 4%, dann ein Drittel lang zu j_2 = 6% und anschließend mit j_{12} = 9% angelegt ist?

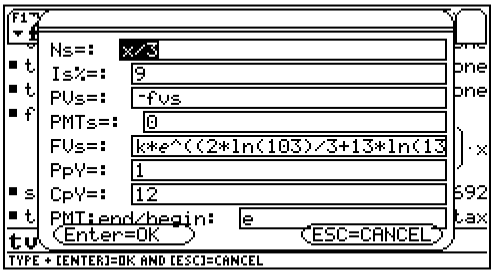


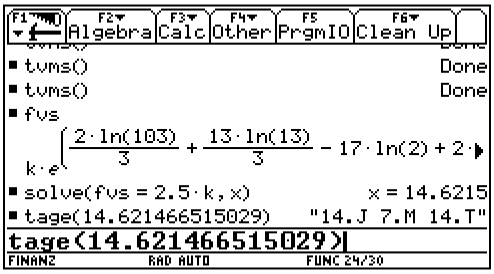
Den elegantesten Ansatz stellt wieder die geschachtelte `ew()`-Funktion dar.

Darunter wird die Durchführung mit `tvms()` gezeigt.

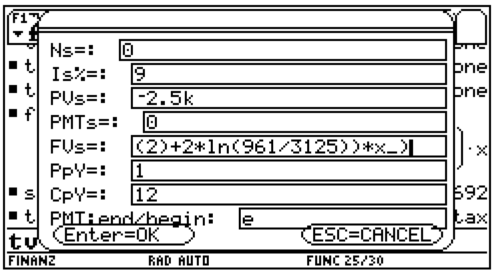


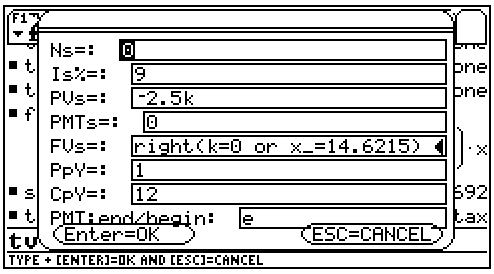




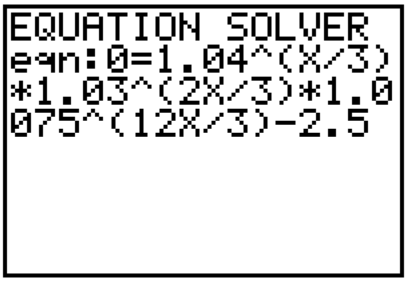


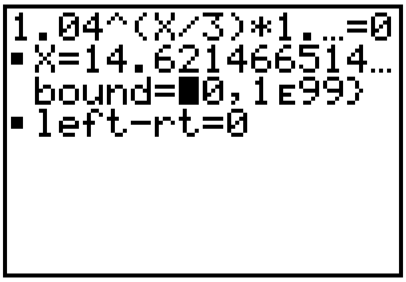
Man kann nun aus dem Solver aussteigen und die Gleichung traditionell fertig lösen. Besonders listige Anwender haben das aber nicht notwendig! Im AUTO-Mode arbeitet man so lange wie möglich exakt und erst im letzten Schritt erzwingt man durch die Eingabe der Dezimalzahl "2.5k" eine dezimale Ausgabe.



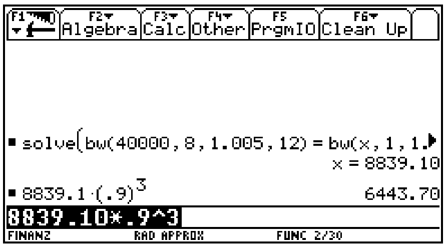


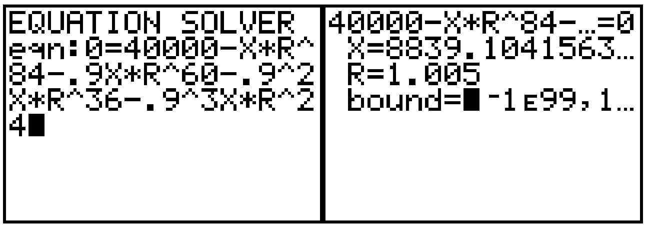
Dem `Solver` des TI-83 läßt sich die entsprechende Gleichung entnehmen.



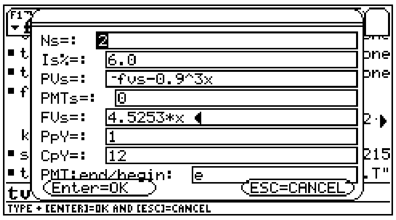


zz13 Für einen Termin in genau 8 Jahren sollen 40 000 € angespart werden. Nach einem, drei, fünf und sechs Jahren werden Raten zu j_{12} = 6% weggelegt, von denen jede jeweils um 10% niedriger sein soll als die vorhergehende. Wie hoch sind erste und letzte Rate? (auf dem TI-92 Barwertvergleich, am TI-83 Endwertvergleich)



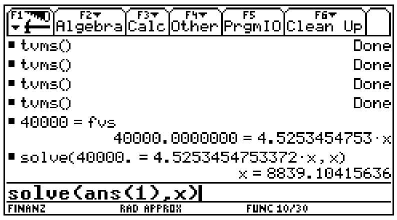


(Tipp: Die einzelnen Raten sind *x*, 0.9*x,* 0.9^2x und 0.9^3x.



Zwischenergebnisse für `fvs`:

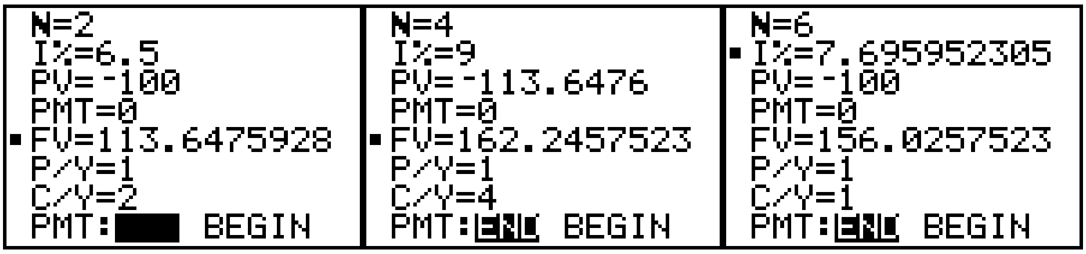
1.1272 *x*
2.2849 *x*
3.2858 *x*

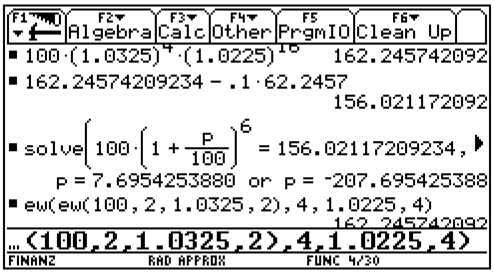


(Wenn´s jemand mit dem `tvms()` probieren will, findet er hier die letzte Eingabemaske, das Protokoll und die endgültige Ausrechnung.) Erste und letzte Rate betragen 8839,10 €, bzw. 6443,70 €.

zz14 Es beteiligt sich jemand an einem Unternehmen mit einem höheren Betrag. Für die ersten beiden Jahre erhält er eine Kapitalverzinsung von 3,25% pro Semester gutgeschrieben, und für die nächsten vier Jahre wegen einer verbesserten Ertragslage 2,25% pro Quartal. Die Zinsgewinne bleiben im Unternehmen. Jetzt zieht er sein Kapital (+ Zinsgewinne) aus dem Geschäft und bezahlt eine vertraglich vereinbarte Konventionalstrafe in der Höhe von 10% des gesamten Zinsertrags. Welche Rendite hat die Beteiligung dennoch erbracht?

Diese Aufgabe lässt sich sehr schön mit der Finanzapplikation lösen:





Es konnte ein Rendite von etwa 7,70% erreicht werden.

zz15 Für einen Zweitwohnsitz am Land bietet jemand sofort und dann in Abständen von eineinhalb Jahren noch weitere drei mal die Beträge von 25 000 €. Ein anderes Angebot liegt bei zwei gleich großen Raten, deren eine in zwei Jahren und die andere noch später erlegt werden soll. Die beiden Raten machen zusammen nominell 100 000 € aus.

Welchen Zahlungstermin muss die zweite Rate haben, dass die beiden Angebote gleichwertig sind?

a) bei d = 9% und theoretischer Verzinsung,

b) bei d_4 = 2% und praktischer Verzinsung (1. Zinstermin sofort),

c) Welcher Variante ist der Vorzug zu geben, wenn der zweite Anbieter bereit ist, vor dem jetzt errechneten Zeitpunkt zu bezahlen?

a) Der klassische Ansatz würde lauten:

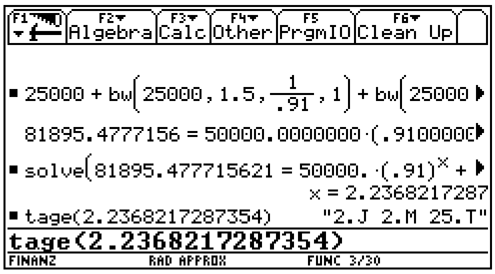
$$25000\,(1 + v^{1,5} + v^3 + v^{4,5}) = 50000\,(v^2 + v^x) \quad \text{mit } v = 0{,}91.$$

Diese Gleichung wird – auf allen Plattformen - im `Equation Solver` gelöst.

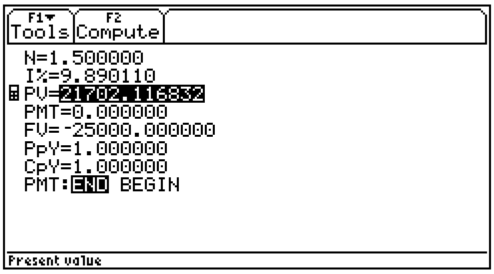
Mit der `bw()`-Funktion auf dem TI-92 sieht das dann so aus:

(Natürlich könnte – sollte – man vorher noch durch 25000 kürzen.)

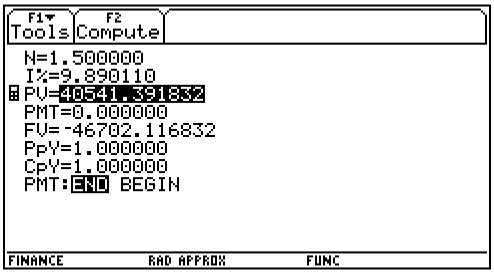
Die Zahlung sollte nach 2 Jahren 2 Monaten und 25 Tagen erfolgen



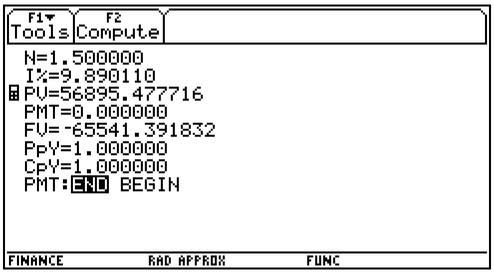
Die Verwendung der Finanz-Applikation erfordert ein wenig Geschick und genaues Verständnis der zeitlichen Abfolge. Als Bezugspunkt wird der Termin „heute“ gewählt und wir suchen zuerst schrittweise den Gesamtbarwert aller 4 Zahlungen à 25000 auf. Für `I%` wird der Term `(1/0.91-1)*100` eingegeben. (Das kann man sich mit der Eingabe von "`9,`d" unter Verwendung von `tvms()` ersparen.)



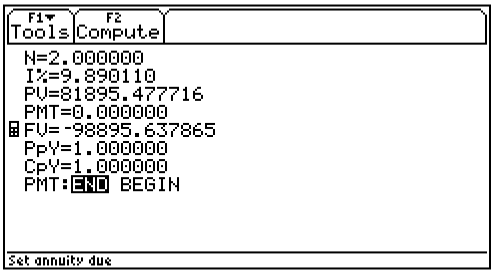
die ersten 25000 1,5 Jahre abzinsen, dann



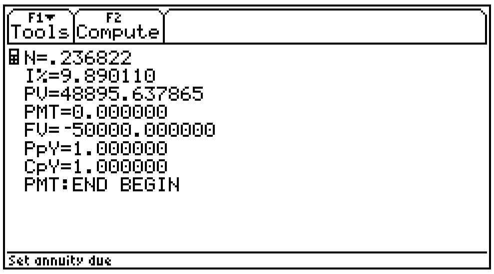
FV=-PV-25000, wieder 1,5 Jahre abzinsen,



FV=-PV-25000, das dritte mal



PV=PV+25000, nun aber 2 Jahre aufzinsen



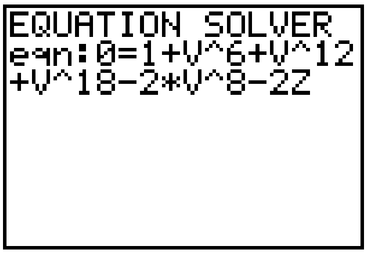
Daher kommen zu den 2 Jahren noch 0,236822 Jahre dazu (= 2 M 25 T).

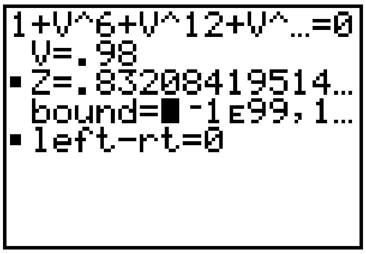
PV=-FV-50000; wie lange dauert es, dass dieser Rest genau 50 000 beträgt?

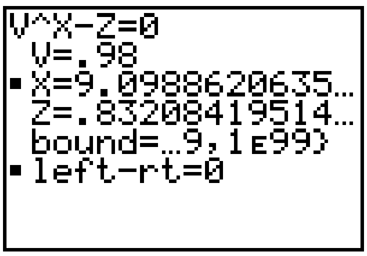
b) bei praktischer Verzinsung wird die Sachlage – in der letzten Phase der Rechnung - kompli-zierter. Alle vorliegenden Zeiten sind ja ganze Diskontperioden, daher gibt´s kein Problem. Ich zeige nur die Vorgangsweise mit dem Gleichungslöser:

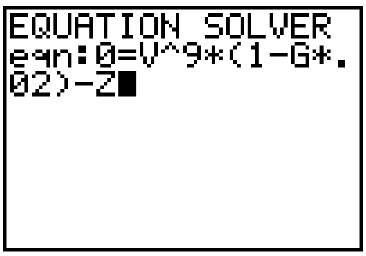
$$25000\,(1 + v^6 + v^{12} + v^{18}) = 50000(v^8 + v^x) \qquad \text{mit} \quad v = 0.98$$

Allerdings darf die Gleichung nicht sofort nach x aufgelöst werden, da die gemischte Verzi-nung eine umständlicher Rechnung bedarf. Die Gleichung wird nach v^x aufgelöst – hier wurde durch 25000 gekürzt - :

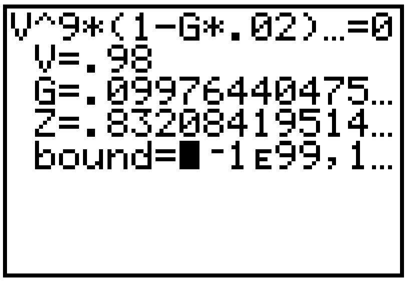


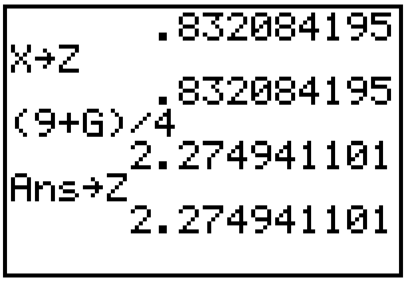


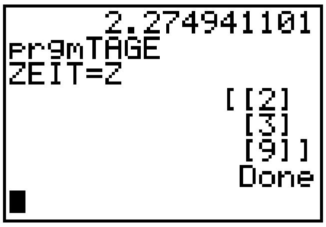


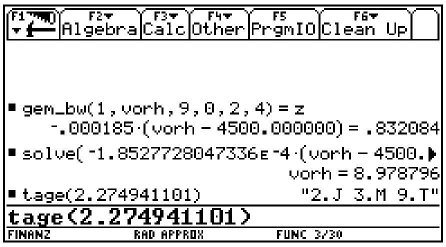


Damit gibt es 9 ganze Zinsperioden. Für den Bruchteil der Periode müssen wir auf dem TI-83 die Gleichung (7) von Seite 21 nach dem „`vorher`“ (= G) auflösen. Die Quartale werden dann in Jahre und anschließend die Zeit in Jahre, Monate und Tage umgewandelt.









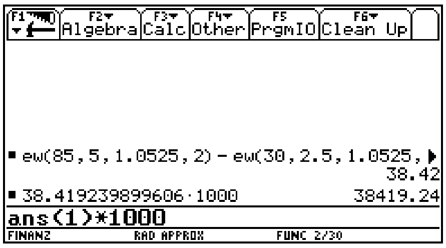
Auf dem TI-92 können wir mit Erfolg unsere Funktion für den Barwert bei gemischter Verzinsung anwenden. Die Antwort lautet in jedem Fall: 2 Jahre 3 Monate und 9 Tage.

c) Wenn er bereit wäre, früher zu bezahlen, dann ist natürlich dem zweiten Anbieter der Vorzug zu geben, weil er auf einen Zahlungsnachlass freiwillig verzichtet.

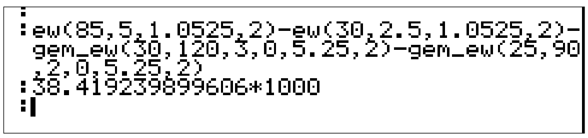
zz16 Von einer Schuld von 85 000 €, die mit j_2 = 10,5% verzinst wird, werden nach 2 1/2 Jahren 30 000 €, nach weiteren 8 Monaten nochmals 30 000 € und nach wiederum 7 Monaten 25 000 € bezahlt.
Der Schuldrest ist 5 Jahre nach Kreditaufnahme fällig. Wie groß ist dieser bei gemischter Verzinsung, wenn der erste Zinstermin in einem halben Jahr ist?

Da gemischte Verzinsung gefordert ist, **muss** bei gegebener dekursiver Verzinsung (i_2 = 5,25%) ein Endwertvergleich (Bezugspunkt in 5 Jahren) durchgeführt werden. Eine genaue Zeitlinie läßt die folgenden Verzinsungsdauern ablesen:

- 85 000 €	10 Semester
- 30 000 €	5 Semester
- 30 000 €	4 Monate vorher, dann 3 Semester
- 25 000 €	3 Monate vorher, dann 2 Semester



Unter Ausnützung aller verfügbaren Funktionen ergibt sich der Zahlungsrest sofort mit 38419,24 €



Auf dem TI-83 rechnen wir den Restbetrag direkt über die im Hintergrund wirkende Gleichung aus:

```
1.0525→R
                1
(85*R^10-30*R^5-
30*(1+.0525*2/3)
*R^3-25*(1+.0525
/2)*R^2)*1000
```

```
(85*R^10-30*R^5-
30*(1+.0525*2/3)
*R^3-25*(1+.0525
/2)*R^2)*1000
            38419
Ans
      38419.23990
```

zz17 Ein Forstbestand hat eine jährliche Zuwachsrate von ca 9% an Biomasse. Wieviel Prozent des Bestandes können im Jahr ca geschlägert werden, wenn sich die Biomasse innerhalb der nächsten 10 Jahre um etwa 50% vermehren soll?

```
 N=10.00000000
▪I%=4.137974399
 PV=1.000000000
 PMT=0.000000000
 FV=-1.500000000
 P/Y=█.000000000
 C/Y=1.000000000
 PMT:END BEGIN
```

Anstelle der 9% Wachstum genügen schon 4,13%, d.h., dass die Differenz (= 5,86% von jeweiligen Jahresanfangsbestand) geschlägert werden kann.

zz18 Die Erfüllung einer finanziellen Verpflichtung wird unter Berücksichtigung einer Verzinsung von j_4 = 6% folgendermaßen vereinbart: in drei Jahren erstmalig, und dann noch zweimal in Abständen von je drei Jahren sind jeweils 3000 USD zu bezahlen.

a) Zu welchem Termin könnte der Betrag von 9000 USD auf einmal beglichen werden?

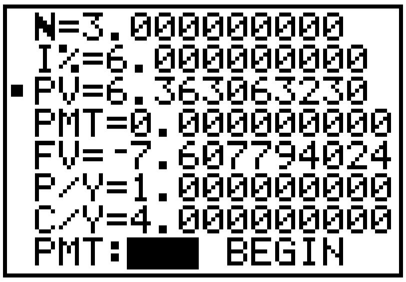
b) Bei Zahlung in einem würde der Zinsfuß auf j_4 = 4% gesenkt werden. Wann wäre nun die Fälligkeit der 9000 USD? Überlege zuerst, ob es früher oder später sein müßte.

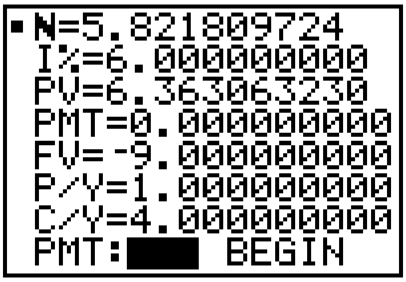
Rechne in beiden Fällen nur mit theoretischer Verzinsung.

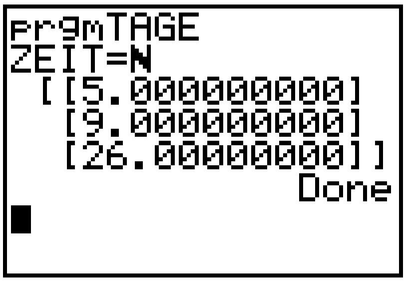
a) In diesem Lösungsvorschlag ist die – trickreiche - Eingabe besonders zu beachten. Den notwendigen Wechsel eines errechneten Endwerts zum Barwert für den nächsten Zeitabschnitt (verbunden mit einem Vorzeichenwechsel) erreicht man auch damit, indem man die Verzinsungsdauer negativ eingibt. Damit wechseln PV und FV ihre Bedeutung.

```
 N=3.000000000
 I%=6.000000000
▪PV=2.509162266
 PMT=0.000000000
 FV=-3.000000000
 P/Y=1.000000000
 C/Y=4.000000000
 PMT:END BEGIN
```

```
 N=-3.000000000
 I%=6.000000000
 PV=5.509162266
 PMT=0.000000000
▪FV=-4.607794024
 P/Y=1.000000000
 C/Y=4.000000000
 PMT:END BEGIN
```

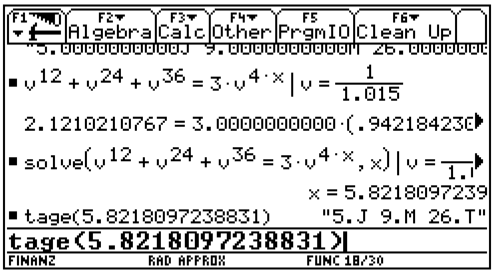


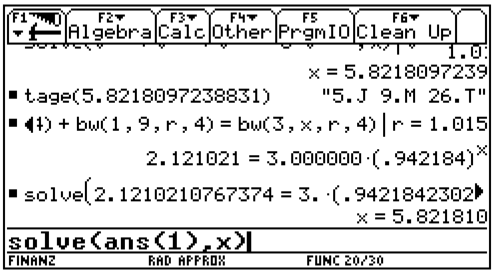




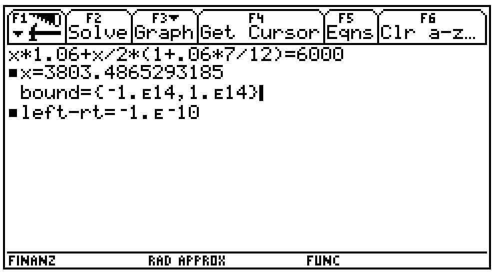
Es dauert 5 Jahre 9 Monate und 26 Tage

nach Variante b) würde es 5 J 10 M 17 T dauern (ohne Rechnung).





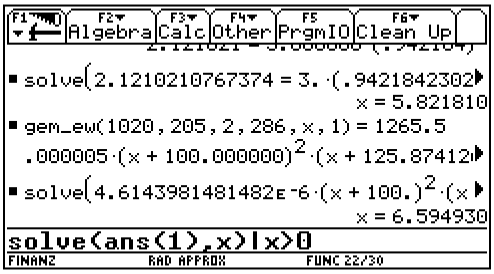
zz19 Durch eine Zahlung sofort und eine halb so große Zahlung nach 5 Monaten soll soviel Kapital angesammelt werden, dass zusammen mit den Zinsen am Jahresende 6000 € beisammen sind. Wie groß sind die beiden Zahlungen, wenn mit 6% **einfachen** Zinsen gerechnet wird?

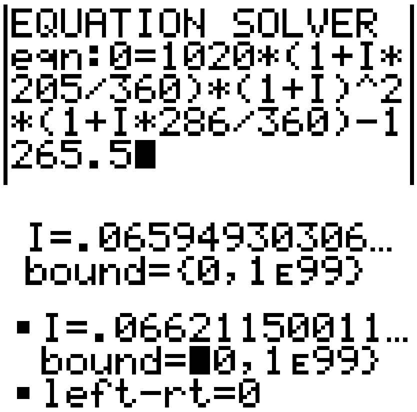


Für die einfache Zinsrechung wird nur die Formel (4) von Seite 16 benötigt.

Die beiden Zahlungen sind 3803,49 € und 1901,74 €.

zz20 Für den, ab dem 5. Juni 2002 zur Verfügung gestellten Betrag von 1020 € wird am 17. Oktober 2005 die Summe von 1265,50 € zurückverlangt. Welcher Verzinsung entspricht dies, wenn gemischt verzinst wird? Zinstermin ist jeweils das Jahresende.
Wie hoch wäre der Zinsfuß bei theoretischer Verzinsung? Warum ist er nun höher?

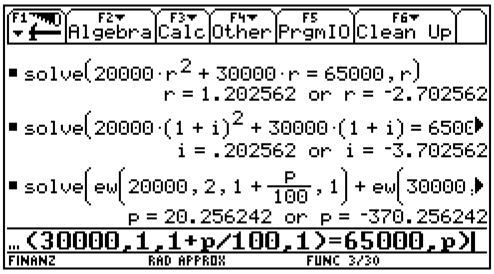


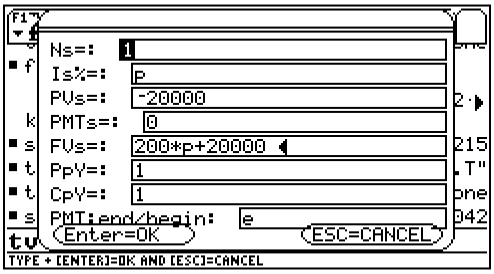


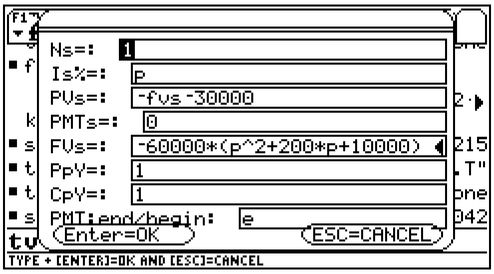
6,59 % bei gemischter Verzinsung stehen 6,62% bei theoretischer gegenüber.

zz21 Ein Unternehmen unterstützt eine Entwicklungsarbeit mit 20 000 €. Nach einem Jahr werden nochmals 30 000 € zugeschossen.
Die Arbeit wird ein Erfolg und so kann das Unternehmen seine Rechte an dem Produkt nach einem weiteren Jahr um 65 000 € abgeben.
Welche Rendite hatte die Beteiligung?

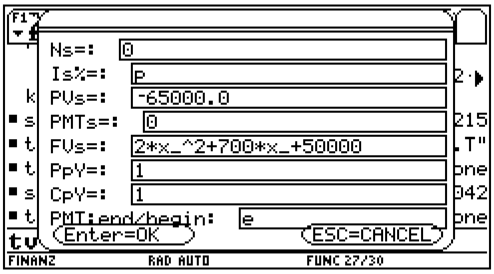
Dahinter steckt eine einfache quadratische Gleichung:

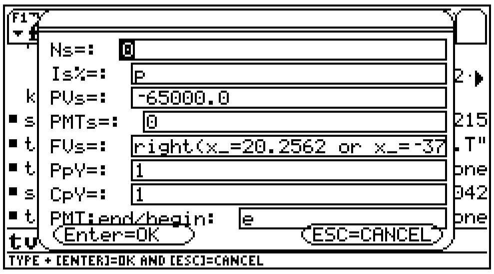


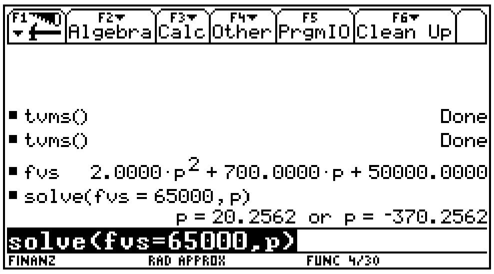




Wenn man wieder den einfachen Trick zum Lösen der Gleichung anwendet (*Ns* = 0), kann man direkt die Gleichung lösen. Oder man steigt, wie auf der nächsten Seite gezeigt in den Homescreen um.





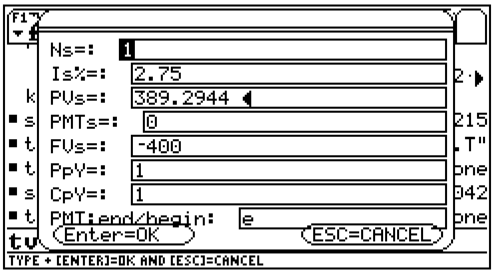


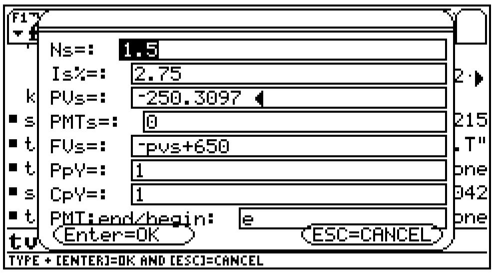
Mit dem `tvms()` läßt sich auch arbeiten, aber die quadratische Gleichung erweist sich als am wenigsten umständich.

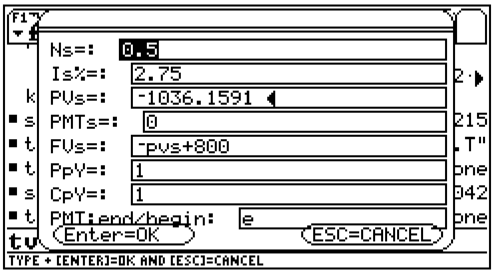
Die Rendite beträgt 20,26%.

zz22 Führe den Barwertvergleich aus zz1 mit dem `tvms()` durch.

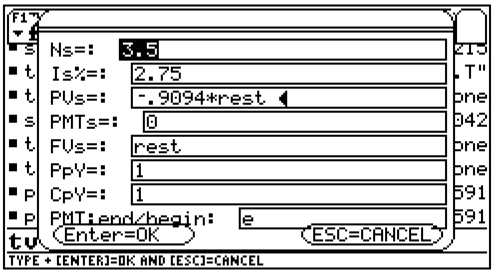
Die Rechnung beginnt wie mit dem gewöhnlichen TVM-Solver.

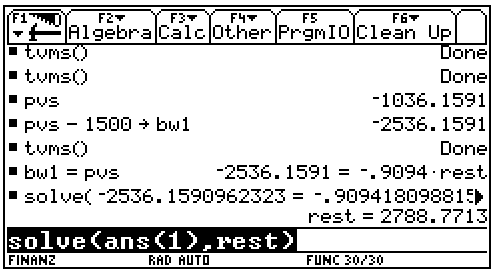






Der komplette Barwert wird im Homescreen durch Addition der noch fehlenden 1500 € bestimmt und er wird unter einem geeigneten Namen (zB bw1) zwischengespeichert. Mit dem `tvms()` lässt sich nun ein „echter“ Barwertvergleich durchführen, indem man auch den Barwert des noch unbekannten Betrags berechnet, der wieder unter `pvs` abgelegt wird.





Die Gleichung wird dann im Homescreen nach `rest` aufgelöst. Vergleiche mit den Zahlen in zz1.

zz23 Zwei Investitionspläne stehen zur engeren Auswahl.

Plan A sieht Anschaffungskosten in der Höhe von 10000 € vor, die in den nächsten drei Jahren Gewinne in der Höhe 5000 €, 2500 € und wieder 5000 € versprechen.

Plan B würde Anschaffungskosten von 20 000 € verursachen, die geschätzten Gewinne für die nächsten 4 Jahre sind der Reihe nach 10000 €, 6000 €, 3000 € und 6000 €.

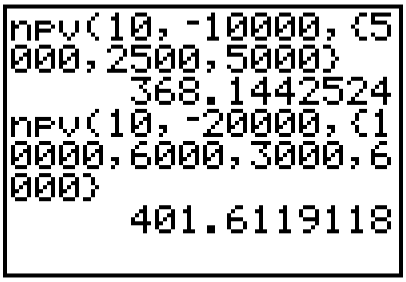
a) Bewerte die beiden Pläne nach ihrem Kapitalwert bei einem *Kalkulationszinsfuß* von i = 10% (siehe Seite 12). Überlege ob der Kapitalwert in diesem Fall eine gute Entscheidungsgrundlage bildet. (Die Antwort darauf gibt es im 2.Teil dieses Skriptums im Abschnitt über die Investitionsrechung).

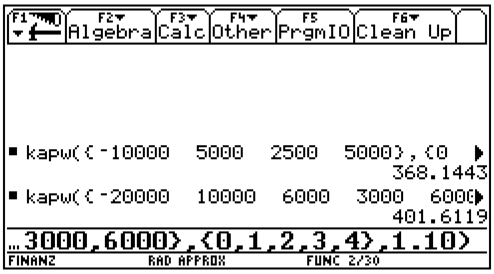
b) Löse grafisch: Bei welchem Kalkulationszinsfuß wären beide Kapitalwerte gleich?

c) Löse grafisch: Wie hoch müßte bei i = 10% der für beide Pläne gleich hohe Gewinn im jeweils letzten Jahr des Planungshorizonts sein, dass die Kapitalwerte übereinstimmen?

d) Löse grafisch: Bei welchem Zinsfuß nehmen beide Kapitalwerte jeweils den Wert 0 an? Diesen Zinsfuß nennt man den *internen Zinsfuß* der Investition.

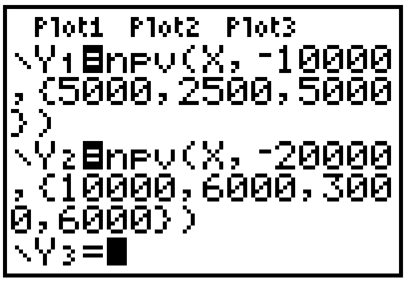
a)

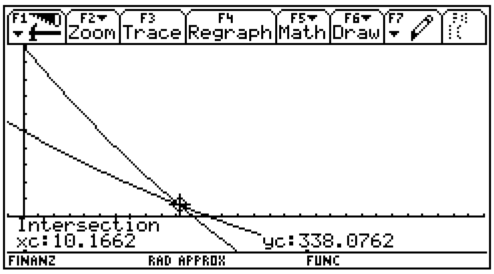




Die Kapitalwerte beider Anlagen sind positiv, dh., dass die gewünschte Mindestverzinsung des Kapitaleinsatzes von 10% erreicht wird.

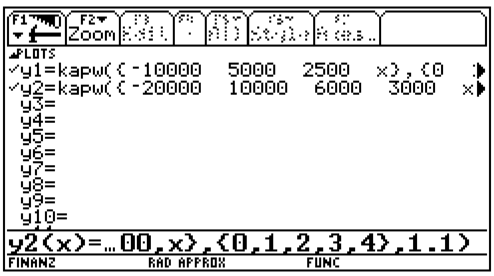
b) Wir definieren im Funktioneneditor die beiden Kapitalwerte als Funktionen des Zinsfußes und suchen den Schnittpunkt der Graphen. Am TI-83 verwende ich `npv( )` und am TI-92 die eigene `kapw( )`-Funktion

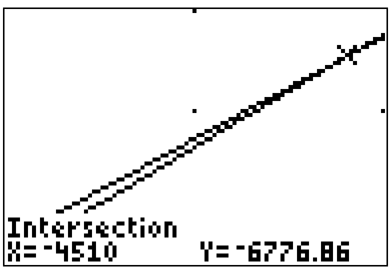




Bei 10,62% stimmen die Kapitalwerte mit ca 338 überein.

c) Nun übernimmt die letzte Zahlung in den Zahlungslisten die Rolle der Variablen:

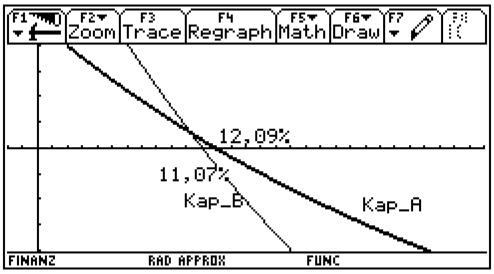




Eine ordentliche Darstellung verlangt einen Blick in die zugehörige Funktionentabelle. Sind die Funktionsgraphen wirklich zwei Gerade?
Nur wenn beide Investitionen in ihrem letzten Jahr einen Verlust von 4510 bringen, dann hätten sie gleiche Kapitalwerte.

d) Das ist eine einfache Nullstellensuche für den Zinsfuß x und wir können die Grafik aus b) nochmals verwenden.

Investition A verspricht eine Verzinsung von 12,09% und Investition B 11,07%.



Anhang – Die Programme und Funktionen

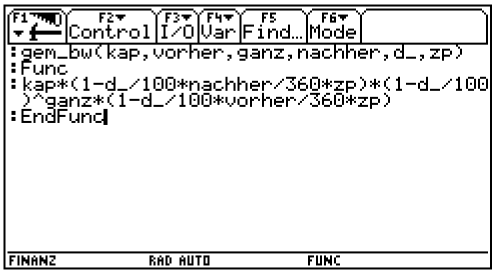
TI-83

```
prgmTAGE
Input "ZEIT=",Z
iPart(Z)üA
fPart(Z)*12üM
fPart(M)*30üD
iPart(M)üM
iPart(D+.5)üD
Disp [[A,M,D]]ö
```

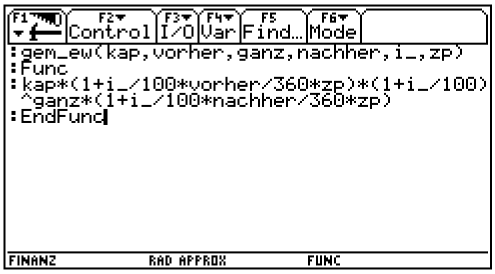
TI-92

```
tage(z_)
Func
Local a_,m_,d_
iPart(z_)→a_
fPart(z_)*12→m_
fPart(m_)*3Ø→d_
iPart(m_)→m_
iPart(d_+.5)→d_
If d_=3Ø Then
  m_+1→m_
  Ø→d_
EndIf
string(a_)&"J "&string(m_)&"M
"&string(d_)&"T"
EndFunc
```

```
prgm gemew
Input "KAP=",K
Input "VORHER:",V
Input "GANZE:",G
Input "NACHHER:",N
Input "ZINS:",I
Input "ZP/JAHR:",Z
K*(1+I/1ØØ*V/36Ø*Z)*(1+I/1ØØ)^G*(1+I/1ØØ*N/36Ø*Z)üE
```




```
prgm gembw
Input "KAP=",K
Input "VORHER:",V
Input "GANZE:",G
Input "NACHHER:",N
Input "DISKONT:",I
Input "ZP/JAHR:",Z
K*(1+I/1ØØ*V/36Ø*Z)*(1+I/1ØØ)^G*(1+I/1ØØ*N
/36Ø*Z)üE
```



```
tvms()
Prgm
Local  s1,s2,s3,aux,ii_,gl,ant,bd
Local  tempfunc
setMode("Display Digits","FIX 4")
Dialog
Request  "Ns=",n_
Request  "Is%=",i_
Request  "PVs=",pv_
Request  "PMTs=",pmt_
Request  "FVs=",fv_
Request  "PpY=",s1_
Request  "CpY=",s2_
Request  "PMT:end/begin",s3_
EndDlog
If  ok=Ø:Goto  ende
expr(n_)→n
If inString(i_,"d")=Ø Then
      expr(i_)→i
    Else
      expr(left(i_,dim(i_)-2))→i
EndIf
expr(pv_)→pv
expr(pmt_)→pmt
expr(fv_)→fv
If inString(n_,"x_")>Ø Then
       1→ant:1ØØØ→bd
EndIf
If inString(i_,"x_")>Ø Then
       2→ant:5Ø→bd
EndIf
If inString(pv_,"x_")>Ø Then
       3→ant:1Ø^8→bd
EndIf
If inString(pmt_,"x_")>Ø Then
       4→ant:1Ø^8→bd
EndIf
If inString(fv_,"x_")>Ø Then
       5→ant:1Ø^8→bd
EndIf
expr(s1_)→s1
If  pmt_="Ø":1→s1
expr(s2_)→s2
If  s3_="e":Ø→s3
If  s3_="b":1→s3
```

```
If inString(i_,"d")=0 Then
    1+i/(100*ss2)→ii_
   Else
    1/(1-i/(100*ss2))→ii_
EndIf

limit(ii_^(ss2/s1),ss2,s2)→aux
limit(pv+pmt*aux^s3*(1-aux^(⁻nn))/(aux-1)+fv/aux^nn,nn,n)→tempfunc
If  ant<3: nSolve(tempfunc=0,x_)|x_≥0 and x_≤bd→res
If  ant>2: right(solve(tempfunc=0,x_)|x_≥⁻bd and x_≤bd)→res
If ant=1 Then
   res→ns:string(res)&" "&char(25)→n_
EndIf
If ant=2 Then
   res→is:string(res)&" "&char(25)→i_
EndIf
If ant=3 Then
   res→pvs:string(res)&" "&char(25)→pv_
EndIf
If ant=4 Then
   res→pmts:string(res)&" "&char(25)→pmt_
EndIf
If ant=5 Then
   res→fvs:string(res)&" "&char(25)→fv_
EndIf
tvms()
Lbl  ende
EndPrgm
```

Referenzen

[1] Jürgen Tietze, Einführung in die Finanzmathematik, Vieweg 2000

[2] Jürgen Tietze, Einführung in die Wirtschaftsmathematik, Vieweg 1990

[3] Josef Böhm, Mathematik Aufgabensammlung, Manz 1995

[4] Handbücher des TI-83/83+/89/92/92+

[5] Handbuch der TI-FINANCE Applikation (für alle Rechner von der TI-Seite als pdf-file kostenlos beziehbar)