Auf den richtigen Dreh kommt es an!

Josef Böhm

Ein Unterrichtsbehelf zum Einsatz moderner Technologien

im Mathematikunterricht

T³ Österreich / ACDCA am PI-Niederösterreich, Hollabrunn

Auf den richtigen Dreh kommt es an!

Josef Böhm, BHAK St.Pölten, T^3 und DUG, Österreich nojo.boehm@pgv.at

Eine der am häufigsten gestellten Fragen nach Workshops oder Vorträgen über den Einsatz von Technologien im Mathematikunterricht, wie symbolischen oder grafischen Taschenrechnern, Computer Algebra Systemen (CAS), Dynamischen Geometrie Systemen (DGS) oder Tabellenkalkulationsprogrammen ist die, wie man nun Aufgaben und Probleme für Übungen und Prüfungen findet. Viele erfahrene Lehrer haben eine große Sammlung von Aufgaben und man kann nur zu gut verstehen, dass sie ihre „Schätze“ nicht gerne wegwerfen und wieder wie zu Beginn ihrer Lehrerlaufbahn ganz von vorne anfangen wollen.

Mir ging und geht es natürlich genau so. Meine Standardantwort ist: "Du musst ja nicht alles ändern. Nimm Deine Beispielsammlung und versuche einen anderen Blickwinkel zu erreichen. Es wird in vielen Fällen möglich sein, der Aufgabe einen ‚Dreh’ in die richtige Richtung zu versetzen, und sie wird eine neue Qualität erhalten, sich auf ein anderes Ziel konzentrieren, neue Sichtweisen eröffnen oder einfach ein wenig anders lauten."

Erwarten Sie bitte nicht Ergebnisse einer tiefschürfenden wissenschaftlichen Untersuchung innerhalb der nächsten kurzen Stunde und erwarten Sie auch nicht irgendeine Klassifizierung, wie ganz spezielle „Drehs“ erreicht werden können. Ich bin Lehrer an der Handelsakademie in St.Pölten, Hauptstadt von Niederösterreich. Daneben bin ich seit langem in der Lehreraus- und -fortbildung tätig und habe unter anderem eine Lehrveranstaltung an der Technischen Universität Wien über den Einsatz von modernen Technologien im Mathematikunterricht. So können Sie sich vorstellen, dass ich viel mit der aufgeworfenen Frage zu tun habe.

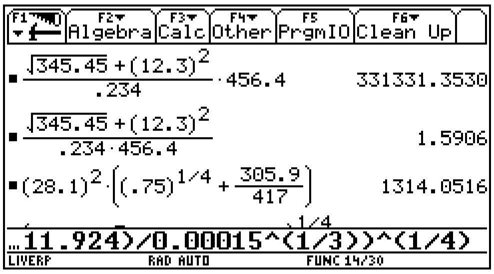
An unserer Schule haben wir 4 Jahre M-Unterricht (Mathematik und Angewandte Mathematik) für die Schüler in der Altersstufe 16 – 19 Jahre. Ich habe mich entschlossen, dem Verlauf dieser vier Mathematikjahre zu folgen und habe Aufgaben aus meinen letzten schriftlichen und mündlichen Überprüfungen – ohne sie für diese Präsentation zu verändern – ausgewählt. Ich hoffe, damit auch ein wenig Einsicht in die alltägliche Arbeit eines Lehrers zu geben, der seit nun schon geraumer Zeit *DERIVE* und den *TI*-92 im Unterricht einsetzt. Die meisten der gezeigten Beispiele sind unabhängig von der eingesetzten Plattform. Der Grund für die Verwendung des *TI* an dieser Stelle ist die Tatsache, dass sich der *TI*-ViewScreen für eine Präsentation ganz besonders gut eignet. DGS wird hier stiefmütterlich behandelt, weil dazu in unserer Schulform die Zeit fehlt.

Wenn wir mit dem Einsatz des PC oder des Taschencomputers im Unterricht beginnen, müssen wir unsere Schüler so rasch wie möglich mit der Maschine vertraut machen. Da gehe ich genauso vor, wie all die Jahre vorher mit dem „gewöhnlichen“ Taschenrechner: berechne kompliziertere numerische Ausdrücke und lerne zwischen der Ausgabe mit einer gewünschten Dezimalstellenangabe und der Angabe in signifikanten Stellen zu unterscheiden. Jetzt werden die Schüler nicht nur die Ergebnisse notieren, sondern sie lernen auch, die Problemstellung mit der Ausgabe am Schirm kritisch zu vergleichen.

$$\frac{\sqrt{345{,}45}\ +\ 12{,}3^2}{0{,}234\ .\ 456{,}4} =$$ (auf 4 signifikante Stellen)

$$28{,}1^2 \cdot \left(\sqrt[4]{0{,}75} + \frac{305{,}9}{417} \right) =$$ (auf 1 Dezimalstelle)

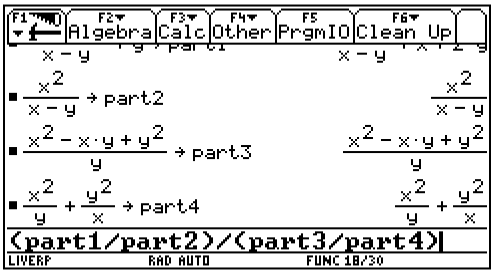
$$\sqrt[4]{\frac{0{,}9842^3 + 5{,}32 \cdot 11{,}924}{\sqrt[3]{0{,}00015}}} =$$ (auf 2 signifikante Stellen)



Bei dieser Gelegenheit üben die Schüler nicht nur das Linearisieren der Ausdrücke, sondern machen auch ihre ersten Erfahrungen mit rationalen Hochzahlen und mit der Gleitkommadarstellung.

Dann arbeiten wir mit den grundlegenden algebraischen Manipulationen, wie Rechnen mit Termen, Rechnen mit Brüchen, Lösen von linearen Gleichungen, usw.
Ich verlange sicher nicht, Bruchungetüme wie das nächste mit Papier und Bleistift in einer Prüfung aufzulösen – obwohl wir das manchmal auch gemeinsam in der Klasse tun – aber die Schüler sollen imstande sein, einen derartigen Term richtig zu editieren. Dazu können sie unterschiedliche Strategien anwenden:

$$\frac{\dfrac{x^2+y^2}{x-y}+y}{\dfrac{x^2}{x-y}} : \frac{\dfrac{x^2-x\,y+y^2}{y}}{\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}}$$



Der/Die eine schafft es auf einmal, der/die andere zerlegt den Ausdruck in Teile und fügt die Bausteine dann wieder geeignet zusammen, um zum Ergebnis zu gelangen.

Hier sind einige Summanden von Binompotenzen. Ergänze die nächsten Zeilen :

$x^4 - 16x^3 + 96x^2 -$ ......

$a^6b^3 + 6a^4b^5$ .... = (..........................)^3

..............$-180x^3z$ .... = (..........................)^2 gib mehr als eine Lösung an!!

$729x^{12} - 5832x^{10}y + 19440x^8y^2$ .... =

(gemeinsam mit meiner Technologie-Mitstreiterin, Tania Koller, von meiner Schule, BHAK St.Pölten)

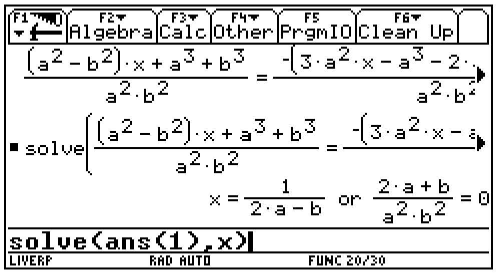
Das CAS kann helfen, Vermutungen zu überprüfen und die größeren Zahlen zu faktorisieren. Wir sehen, dass es Probleme mit keinen eindeutigen Lösungen gibt. Es lassen sich auch Aufgaben hinzufügen, die überhaupt keine Lösung im Sinne der Angabe haben. Schüler und auch Lehrer sind zu oft fixiert auf „die Lösung". Wir müssen aber akzeptieren, dass auch mathematische Modelle, die reale Probleme beschreiben, nicht immer „die Lösung" anbieten können.

Wechseln wir zu einem Dauerthema: Lösen von Gleichungen. Wir können die Überprüfung der Kenntnisse von grundlegenden Fertigkeiten mit der Beantwortung von neuartigen Fragen verknüpfen.

$$\frac{b-x}{a^2} + \frac{a+x}{b^2} = \frac{b}{a^2} - \frac{3x-a}{b^2} + \frac{b+2a}{a^2b^2}$$

a) Gib die Gleichung ein und erkläre die „Vereinfachung“ des *TI*-92.
b) Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung und welche Bedingung(en) ist(sind) notwendig für ihre Existenz?
c) Gib zwei spezielle Lösungen an!
d) Welche Ausgabe für die Lösung zeigt der *TI* an?
e) Erkläre den zweiten Teil der Ausgabe anhand eines selbst gewählten Beispiels.
f) Kannst Du die Herkunft dieses seltsamen zweiten Teils erklären?

Eine Fülle von neuen – sehr mathematischen und oft gar nicht einfach zu beantwortenden - Fragen ergeben sich alleine aus der Ausgabe des CAS. Diese neuen Möglichkeiten sollten noch besser ausgenützt werden.



Auch im nächsten Beispiel versuche ich – unverzichtbare??? – Grundfertigkeiten mit Computer Algebra in Einklang zu bringen:

$$\frac{6}{x^3+4x^2-9x-36} - \frac{2}{2x^3+19x^2+59x+60} = \frac{9}{2x^3+5x^2-18x-45}$$

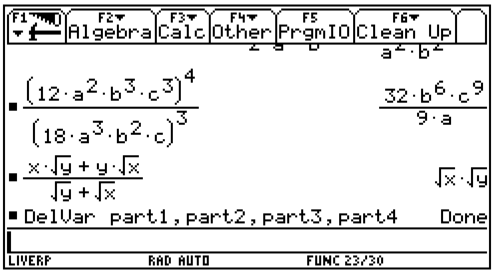
a) Du kannst den *TI* zum Faktorisieren der Nennerterme verwenden. Dann
b) bestimme die Definitionsmenge und
c) löse die Gleichung fertig auf mit der Hand.

Ich weiß nicht, welche Erfahrung Sie gemacht haben, aber in meiner Lehrerlaufbahn fiel den Schülern das Erlernen der Potenzregeln nicht schwer, sehr wohl aber deren konsequente Anwendung.

Auch hier kann man das CAS erfolgreich einsetzen, um sogenannte „Grundfertigkeiten“ einzuüben. Ich zeige Ihnen Beispiele aus einem „Grundwissentest“, den ich in einer ACDCA-Projektklasse gegeben habe, in der zwischen Basistests und „Problemlösearbeiten“ unterschieden wurde.

A2)	Berechne mit dem TR und begründe das Ergebnis:	$\dfrac{(12a^2\,b^3\,c^3)^4}{(18\,a^3\,b^2\,c)^3}$	(4 Pkte)
A3)	$\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} =$	Erkläre das Ergebnis des Rechners.	(5 Pkte)

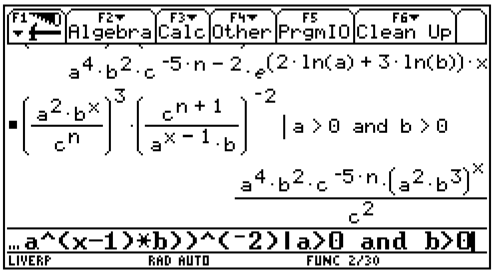
Manchmal bringt das CAS gar merkwürdige Dinge hervor und es ist gar nicht nötig, seinen Gebrauch zu verbieten. Möglicherweise sind die Potenzregeln gar nicht so einfach, wie wir Lehrer immer tun?



Betrachten Sie bitte unter diesem Gesichtspunkt die nächste kleine Aufgabe:

Fasse so weit wie möglich zusammen und schreibe das Ergebnis ohne Nenner:

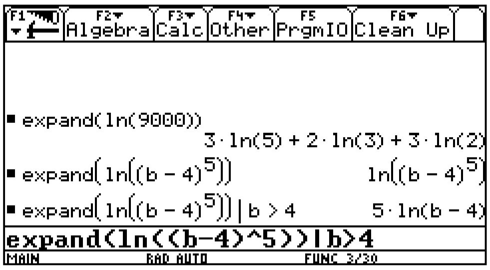
$$\left(\frac{a^2\,b^x}{c^n}\right)^3\left(\frac{c^{n+1}}{a^{x-1}\,b}\right)^{-2} =$$



Ich möchte hier nicht ein weiteres Modell für die Anwendung einer Wachstums- oder Zerfallsfunktion zeigen. Die Arbeit mit Logarithmen alleine kann interessant genug sein:

Verwende den *TI*: `Expand(ln(9000))`
Erkläre das Ergebnis!

Wende die entsprechende logarithmische Rechenregel an, um ln $(b-4)^5$ zu „expandieren".
a) Welches Ergebnis erwartest Du?
b) Wie kannst Du das mit Deinem *TI* erreichen?

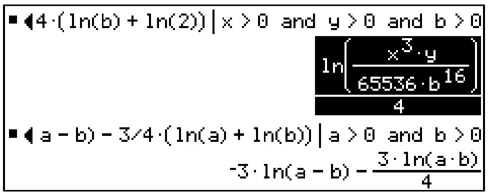


Viele der hier gezeigten „Prüfungsaufgaben" haben natürlich nur einen Sinn, wenn sie nicht „vortrainiert" sind. So soll natürlich der Definitionsbereich der Logarithmusfunktion behandelt worden sein. Die obige Frage testet, ob man damit auch etwas anfangen kann, - außer ihn auswendig zu lernen.

Fasse die logarithmischen Terme händisch zusammen, versuche das auch mit dem *TI*. Vergleiche die Ergebnisse und erkläre die unterschiedliche Form der Ergebnisse.

$$\frac{1}{4}\left(3\log x + \log y\right) \;-\; 4\left(\log b \;+\; \log 2\right) \;=$$

$$-3\log(a-b) \;-\; \frac{3}{4}(\log a + \log b) \;=$$



Wir sollten die Chance nützen, unsere Schüler zu ermutigen, auch zu graphischen und numerischen Methoden zu greifen und dabei diese Methoden zu gleichberechtigten Partnern der analytischen Vorgangsweise zu machen.

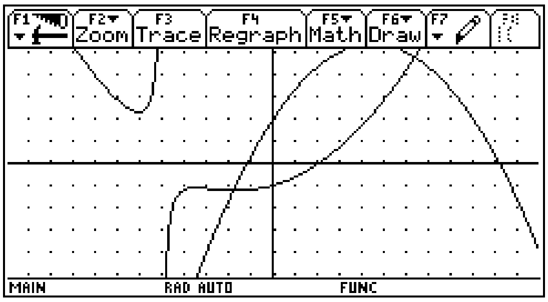
Löse die Ungleichung graphisch:

$g(x) < f(x)$ mit $x \in \mathbb{N}$.

Zu Deiner Information:

$$f(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{3x}{2} + 2$$

$$g(x) = \frac{x}{5x+25} + \frac{x^2}{10} + \frac{x}{4} - 1$$



Anläßlich einer Schularbeit habe ich das folgende kleine lineare Gleichungssystem gegeben und erwartet, dass die Schüler, nachdem sie das System in eine sinnvolle Ordnung gebracht haben, eine der bekannten Lösungsmethoden anwenden oder die Systemdeterminante berechnen würden, um zu einer Antwort zu gelangen. Während der Arbeit erlebte ich eine nette Überraschung.

Löse das Gleichungssystem auf nach *x* und *y*:

$$a\,x \;+\; b\,y \;=\; a \;+\; 2y \;-\; 3x$$
$$2a\,x \;-\; 3b\,y \;=\; b \;-\; 3y \;+\; 2x$$

Finde zumindest zwei Paare (*a*,*b*), die das Paar unlösbar machen!

Eine Schülerin brachte die Variablen in die richtige Ordnung und schrieb sofort (-3,2) und (1,1) als Antwort auf die zweite Frage. Überrascht fragte ich – leise – um eine Erklärung. Und das war sie:

$$(a+3)\,x \;+\; (b-2)\,y \;=\; a$$
$$(2a-2)\,x \;+\; (3-3b)\,y \;=\; b$$

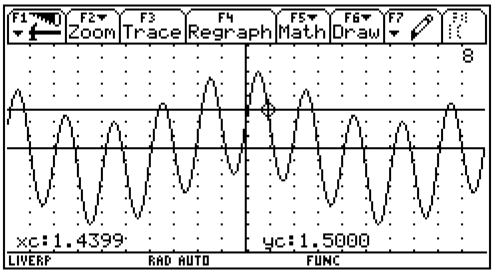
„Nehmen Sie zB Gleichung 1: für a = -3 und b = 2 ergibt sich 0 = -3, und das ist eine falsche Aussage. Die zweite Gleichung liefert für a = 1 und b = 1 den Widerspruch 0 = 1“. Beschämt schlich ich davon, weil ich zu kompliziert gedacht hatte. (Beruhigend für mich war, dass alle anderen Schüler den von mir erwarteten Lösungsweg zumindest begonnen hatten.)

Trigonometrische Gleichungen verlangen oft trickreiche Manipulationen. Warum kann man diese nicht graphisch oder numerisch lösen (lassen)? Bei uns stehen diese Gleichungen nicht im Lehrplan. Ich konnte es aber nicht lassen, den Schülern einmal eine vorzustellen, und das gleich im Rahmen einer Schularbeit.

Eine besondere Gleichungsart, die trigonometrische Funktionen enthält, nennt man „Goniometrische Gleichungen“. Das Auflösen dieser Gleichungen ist oft sehr trickreich und kann mühsam werden. Mit dem *TI* kannst Du Gleichungen dieser Art zumindest näherungsweise auf verschiedene Arten behandeln.
Gib zumindest 4 Lösungen der Gleichung an:

$$2\sin 2x + \cos\frac{x}{3} = \frac{3}{2}$$

Beschreibe Deinen Lösungsweg und kommentiere die Lösungen. Arbeite im Bogenmaß, gib aber zumindest eine Lösung zusätzlich im Gradmaß an.
Wieviele Lösungen gibt es überhaupt?
Kannst Du die allgemeine Lösung in mathematischen Ausdrücken angeben?
Oder wenigstens mit eigenen Worten beschreiben?



Die Arbeit mit Polynomfunktionen ist alltägliche Arbeit in der Mittelschule. Wir wollen wieder eine graphische Annäherung versuchen:

Zeichne den Graph von $y(x) = 0.02x^3 - 0.13x^2 - 0.89x + 3.2$

a) Verschiebe den Graph so, dass er die *x*-Achse berührt. Wie lautet der entsprechende Funktionsterm? (Eine Lösung genügt, für jede zusätzliche gibt es Zusatzpunkte)

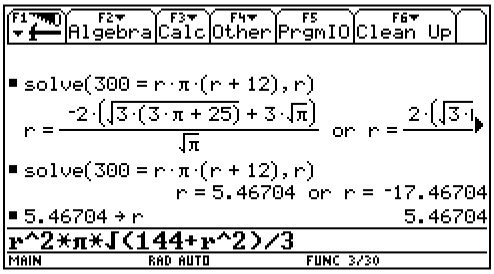
b) Verschiebe den Graph so, dass er durch den Ursprung geht. Wie lautet auch hier der Funktionsterm? (Eine Lösung genügt, für jede zusätzliche gibt es Zusatzpunkte)

Hier ist eine zweite Aufgabe mit Polynomfunktionen, aber in einem ganz anderen Zusammenhang:

> Gib eine Polynomfunktion 4. Grades an, deren Graph
> a) eine doppelte Nullstelle bei x = -3 hat,
> b) eine doppelte Nullstelle bei x = 4.5 ,hat
> c) eine doppelte Nullstelle bei x_1 = -2 und eine andere bei x_2 = 2 hat.
>
> Zeichne ihre Graphen. Kannst Du über den Verlauf des Graphen eine Vermutung aufstellen? Wenn ja, dann überprüfe diese Vermutung an zwei Polynomfunktionen Deiner Wahl – aber mit einem anderen Polynomgrad.

Die Idee für Problemstellungen, wie die nächste, ist mir einmal spät abends eingefallen, als ich eine Schularbeit für meinen 3. Jahrgang (meine erste *TI*-92 Versuchskaninchen) zusammenstellen musste. Wir hatten die Flächen- und Volumsformeln aus der Unterstufe wiederholt und ergänzt, und das war auch Stoff für die Prüfungsarbeit.
Am morgen zeigte ich diese Aufgabe meiner Kollegin und sie bezweifelte sehr, ob die Schüler damit etwas anzufangen wüßten, zumal sie eine derartige Aufgabenstellung noch nie zuvor gesehen hatten.

> Auf dem *TI*-Display Deines Klassenkollegen siehst Du:
>
> a) Welche Aufgabe wollte er/sie lösen?
> b) Hilf ihm/ihr bei der Fertigstellung.



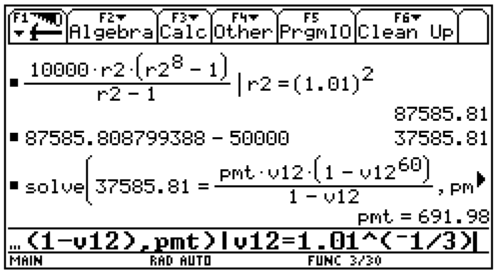
So war ich natürlich schon sehr auf den „Erfolg“ dieser Aufgabe gespannt. Und es lief erfreulich gut. Überraschenderweise war es gerade die sonst schwächste Schülerin, die eine „richtige“ Lösung angeben konnte. Warum „richtige“ unter Anführungszeichen? Schauen Sie bitte genau! Während der Arbeit hob eine Schülerin die Hand und fragte (leise): „Herr Professor, ich glaube, dass da etwas falsch ist. Ich bin sicher, dass die Aufgabe etwas mit einem Kegel zu tun hat, und der Ausdruck unter der Wurzel in der Eingabezeile soll zur Kegelhöhe führen, die man aus dem Radius und der Mantellinie 12 berechnen kann. Aber die Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes ist hier falsch!“

Und wirklich, wie ich vorher sagte, war es sehr spät als ich die Aufgaben zusammengestellt hatte und ich habe einen Fehler gemacht. Drei von achtzehn Schülern haben diesen Fehler herausgefunden .... und dafür einen Zusatzpunkt erhalten. Ich habe es besonders bemerkenswert gefunden, dass diese Schüler – obwohl in der Prüfungssituation – sich nicht damit begnügt haben, den Schirminhalt zu reproduzieren und schließlich mit einem letzten Tastendruck zum „Ergebnis“ zu gelangen, sondern auch den Rechengang reflektiert haben.

Dieses Erlebnis zähle ich zu einer meiner „Sternstunden“ als Lehrer und ich hoffe, dass ich doch einigen Schülern mehr als nur diesen dreien, eine gesunde Kritikfähigkeit und ein gesundes Misstrauen gegenüber „Angaben“ jeder Art einimpfen konnte.

Marialuise Müller, eine Kollegin von einer anderen Schule – HAK Waidhofen/Ybbs sah einmal diese Aufgabe und übertrug die Grundidee erfolgreich in die Finanzmathematik.

Der Auftrag zum nebenstehden Bildschirm lautete sehr klar:



Erzähle die Geschichte dieses Geschäfts!

Kehren wir zurück zur Geometrie!

Nachdem wir die Formeln noch einmal – das letzte Mal? – gelernt hatten, durften die Schüler individuell ihre jederzeit verfügbare elektronische Formelsammlung auf ihrem *TI*-92 erstellen. Es war für mich höchst interessant zu vergleichen, mit welch unterschiedlichen Methoden dann das folgende – sehr einfache – Problem gelöst wurde.

Fünf Kugeln aus Messing (R = 3.17 cm) werden geschmolzen und aus der Masse wird eine Walze mit dem Radius r = 6.34 cm gegossen. Wie lange wird die Walze?

Da gab es Lösungswege, die praktisch nur per Hand ausgeführt wurden, wobei das CAS-Gerät alleine wie ein traditioneller Taschenrechner eingesetzt wurde. Einige verwendeten die Formeln mit dem | - Operator (with-Operator) um für die Variablen zu substituieren. Und - für mich sehr erfreulich - gar nicht wenige setzten ihr Werkzeug in einer optimalen Weise so ein, dass sie mit Funktionen mit mehreren Variablen arbeiteten. Ein „Einzeiler“ brachte das Ergebnis:

```
solve(5*sh_v(3.17)=cyl_v(6.34,l),l)
```

Dazu gab es mehrere Zwischenvarianten. Nach meiner Meinung haben sie nicht nur erfolgreich mit selbst erstellten Hilfsmitteln gearbeitet, wie alle anderen – das ist ein Aspekt – sondern dieser Aufgabe eine ganz neue Qualität gegeben, indem sie den Text in eine Gleichung unter Verwendung von Funktionen mit mehreren Variablen transformiert haben. Ich versuchte dann nach der Schularbeit diesen Gesichtspunkt mit zusätzlichen Aufgaben zu verstärken.

Die Arbeit mit Winkelfunktionen in sehr traditionellen Anwendungen (in den sogenannten Vermessungsaufgaben) können ähnlich wie vorhin eine neue Qualität erreichen, indem man zum Teil gemeinsam mit den Schülern eine „Werkzeugkiste“ zusammenstellt. Nicht mehr die penible Auswertung von Sinus- und Kosinussatz sind dann das Problem, sondern die richtige Auswahl des Werkzeugs und die richtige Strategie.

Das ist das Werkzeug:

```
sss(s1,s2,s3), sws(s1,w3,s2), wsw(w1,s3,w2), ssw(s1,s2,w1)
```

Und jetzt kommt eine Aufgabe:

Fünf Punkte ABCDE bilden ein Fünfeck:
AB = 264, BD = 996, AD = 1128, DC = 444,
∠DEA = 122,48°, ∠DCB = 73,25°, ∠EAD = 33,10°
Wie lange ist die Diagonale EC? Welchen Flächeninhalt hat das Fünfeck?

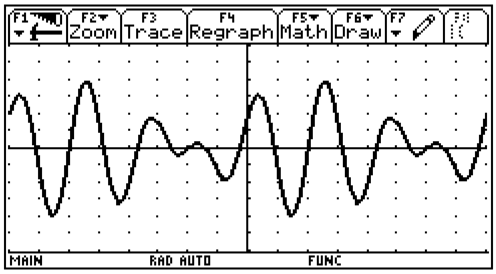
Die Schüler müssen nicht nur die richtige Strategie und den jeweils passenden Kongruenzsatz herausfinden, sondern auch mit einer Überfülle an Daten zurecht kommen. Sie erhalten als Antwort immer alle fehlenden Seiten und Winkel des Dreiecks. Im Zeitalter der Informationsüberflutung kann man nicht oft genug auf die Wichtigkeit des Herausfilterns der problemrelevanten Fakten hinweisen. Sie sind wohl befreit von lästigen Berechnungen und Lösen von Gleichungen, die aus der Anwendung von Sinus- und Kosinussatz entstehen, aber sie müssen sehr sorgfältig und nachvollziehbar ihre Vorgangsweise dokumentieren.

Im Rahmen einer längeren Prüfungszeit habe ich oft noch eine maßstabsgetreue Zeichnung zur Überprüfung der Ergebnisse gefordert. Es wäre natürlich reizvoll, derartige Figuren mit moderner Geometriesoftware konstruieren zu lassen. Damit könnte man noch eine weitere Qualität hinzufügen.

Wir haben immer sehr viel mit Winkelfunktionen modelliert – allerlei periodische Vorgänge von Klimadaten bis zum Blutdruck – und daher wollte ich einmal Folgendes testen.

Der Funktionsterm zum gegebenen Graphen hat die folgende Form

$$y(x) = \sin(a\,x) + \cos(b\,x) \text{ mit } 0 < \{a,b\} < 4.$$



a) Lies die Amplitude und die Periodenlänge ab. (`xscl` = π/2 und `yscl` = 0.5)

b) Versuche, die Parameter *a* und *b* zu finden.

Man darf auch Misserfolge nicht verschweigen. Obwohl ich schon mit einer nur entfernten Ähnlichkeit zum vorgegebenen Funktionsgraphen zufrieden gewesen wäre, erwies sich diese Aufgabe als zu schwierig und sie verschwand wieder in der Versenkung.

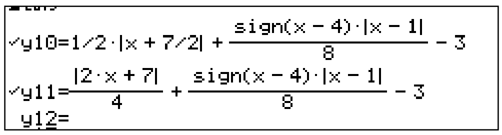
Jetzt werde ich mich, ganz gemäß unseres Lehrplans der Differentialrechung zuwenden.

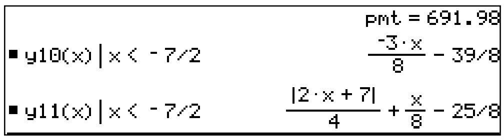
Vier Folgen sind gegeben. Stelle Vermutungen über ihr Monotonieverhalten auf. Begründe Deine Vermutungen und verwende **zumindest zwei verschiedende Vorgangsweisen** um Deine Ideen zu beschreiben. Beweise für eine Folge die Monotonie. (Du kannst sicher sein, dass sich unter den gegebenen Folgen zumindest eine monotone befindet).	$a_n = \dfrac{6n+2}{27-4n}$ $a_n = \dfrac{6+5n^2}{1-3n^2}$ $a_n = \sqrt{5n}\ (10-\sqrt{3n})$ $a_n = \dfrac{6}{3\sqrt{n}\ +\ 5}$

Derartige Untersuchungen können natürlich auf andere Folgeneigenschaften wie Beschränktheit und Konvergenz ausgeweitet werden.

Symbolische und grafikfähige Taschenrechner und CAS Programme wie *DERIVE* u.a. eröffnen ein weites Feld um Kurven zu untersuchen aber nicht nur auf traditionelle Weise mit der Suche nach Nullstellen, Extremwerten, Wendepunkten und eventuell noch Asymptoten.

$$y(x) = \frac{|2x+7|}{4} + \frac{\text{sign}(x-4)\,|x-1|}{8} - 3$$



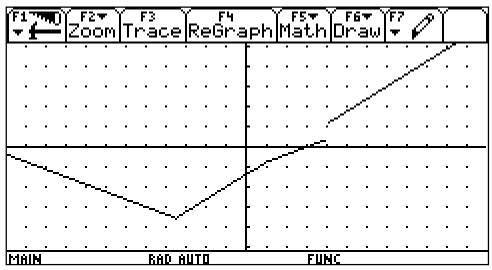


a) Skizziere den Graph der Funktion.

b) Untersuche die Unstetigkeitsstellen.

c) Treten weitere „interessante“ Stellen auf?

d) Definiere *y*(*x*) als stückweise definierte Funktion und überprüfe Deine Definition durch Überlagerung der Graphen.



Ich habe beste Erfahrungen mit sogenannten „Bildbeschreibungen“ gemacht, bei denen die Bilder Graphen von ein wenig „exotischen“ und außergewöhnlichen Funktionen sind. Die Schüler haben diese Aufgaben sehr geschätzt. Dazu verwende ich eine Sammlung von 60 derartigen Funktionen und jeder Schüler bekommt eine Zufallsauswahl von 5 zur „Beschreibung“. Diese Beschreibung enthält eine ordentliche Handskizze des Graphen zusammen mit einer Zusammenfassung aller auftretenden Besonderheiten und Auffälligkeiten. Meist genügt es nicht, nur die graphische Darstellung vom *TI* oder PC-Schirm zu kopieren. Da muss eine ordentliche Skalierung gewählt werden, oft erscheinen Pol- und Sprungstellen nicht als solche, da die Auflösung des Schirms die Bildpunkte unzulässig verbindet. Damit wird eine ehrliche Untersuchung notwendig. Bei vielen Funktionen werden von mir zusätzliche Aufträge erteilt. Zur Schularbeit können die Schüler dann auch so eine Untersuchung (aus dem Geheimkabinett) erwarten.

Hier ist ein Ausschnitt meiner Sammlung von „pathologischen" Funktionen:

13. $y = \dfrac{x^2-1}{|x+1|}$

14. $y = x-1 + \dfrac{x+1}{|x+1|}$

15. $y = x-1 + \dfrac{x^2-1}{[x+1]}$

16. $y = \left|3x - x^2\right|$

17. $y = \dfrac{x-|x|}{2} + \dfrac{7}{2}\operatorname{sign}(x+2)$

32. $y = \operatorname{sign}(4-x^2)$

33. $y = x + \left|\dfrac{x^2}{2} - 2\right|$

34. $y = x|x| - 2(x+|x|) + 2$

35. $y = |x-3|\cdot|x+1|$

36. $y = \dfrac{x}{2}(2 + |x-2|)$

37. $y = \dfrac{|2x|-1}{|x-1|}$

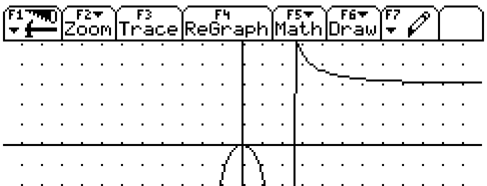
38. $y = \dfrac{x}{2}\left(2 + \left|\dfrac{x}{2}-2\right|\right) - \dfrac{3}{2}$

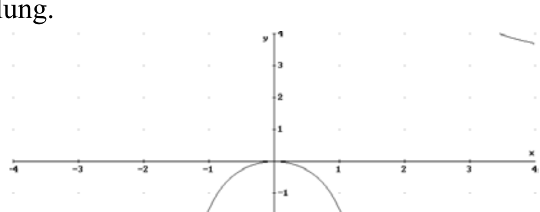
Nach meiner Meinung könnten wir in der Mittelschule durchaus auf spezielle Regeln zur Bestimmung von Grenzwerten verzichten und die Möglichkeiten eines CAS – oder auch eines graphischen Taschenrechners – nützen, um die verschiedenen Arten von Unstetigkeiten auf graphischem und numerischem Weg zu erklären und deutlich zu machen.

$$y(x) = \frac{3x^2}{|x^2-3|}\operatorname{sign}(3x-8)$$

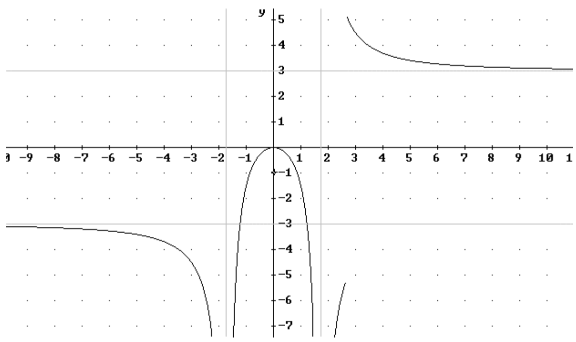
Verwende ein CAS, um die Unstetigkeitsstellen zu untersuchen.
Suche den Grenzwert für $x \to \pm\infty$. Was bedeutet das Ergebnis für die Gestalt des Graphen.
Zeichne den Graphen.

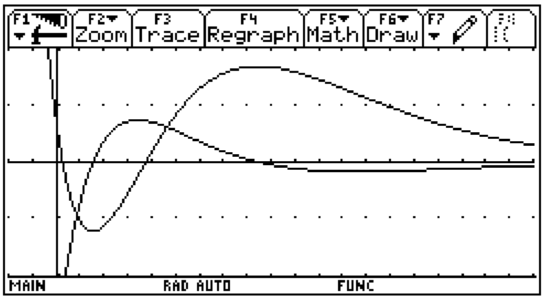
Die beiden Bildschirmkopien zeigen links die Problematik der Darstellung am *TI*-Display und rechts am *DERIVE*-Schirm, beide in ihrer Standardeinstellung.





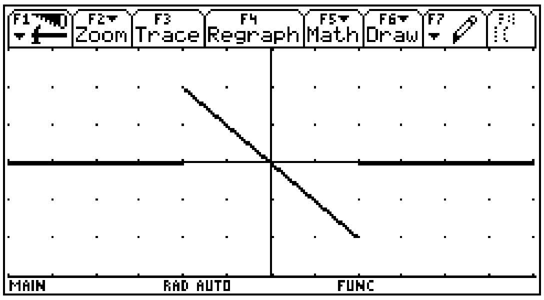
Und so sollte der Graph aussehen:
(mit den zusätzlich eingezeichneten Asymptoten)





Entscheide Dich: Welcher der beiden Graphen gehört zur Funktion und welcher zur ersten Ablei-tung?

Begründe ausreichend Deine Wahl.



Du siehst den Graph einer Funktion *y*(*x*).

Füge den Graph einer stetigen Stammfunktion hinzu, die durch den Punkt P(-3,-2) verläuft.

Und dann gibt´s da noch die unvermeidlichen – unverzichtbaren?? – Kurvendiskussionen. Im Sommersemester 2000 hatte ich aus gesundheitlichen Gründen zu wenig Zeit, dieses „wichtige" Dauerthema der Anwendungen der Differentialrechung im Unterricht abzuhandeln. Wir hatten aber sehr viel Zeit dafür aufgewendet, Begriffe wie durchschnittliche und momentane Änderungsraten und deren Bedeutung zu besprechen. So verlegte ich kurzerhand die Kurvendiskussion in die Schularbeit:

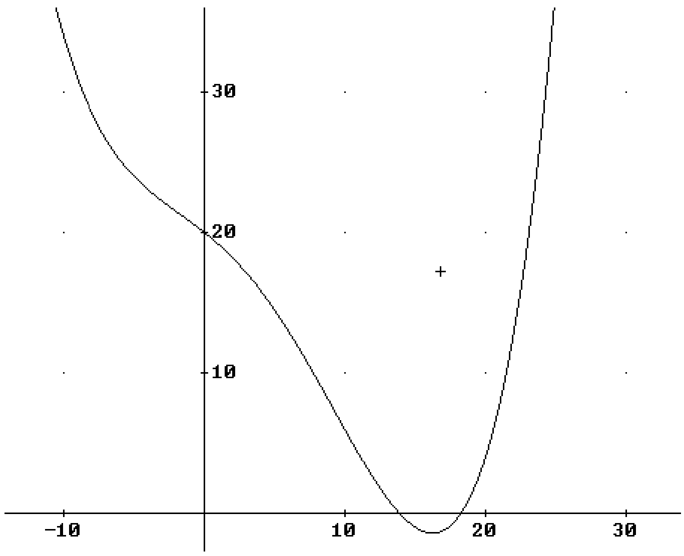
Eine in Vor-*TI*-Zeiten wichtige Anwendung der Differentialrechung in der Schulmathematik waren – und sind noch immer – die sogenannten *Kurvendiskussionen*. Dabei hatten die Schüler – indem sie eine Unzahl von Gleichungen lösen mussten – die folgenden Kurvenpunkte zu ermitteln:

- die Nullstellen,
- die lokalen Extremwerte (Hoch- und Tiefpunkte, das sind i.a. Punkte mit waagrechten Tangenten),
- die „*Wendepunkte*" (das sind Punkte in denen es keine Krümmung gibt; wobei die momentane Änderungsrate des Kurvenanstiegs ein Maß für die Krümmung darstellt,

a) Verwende dieses „Rezept" und führe für die gegebene Funktion die „Kurvendiskussion" durch

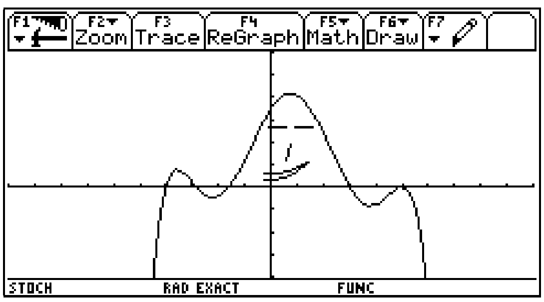
$$y(x) = \frac{x^4 - 8x^2 - 16}{25}$$

b) Kannst Du noch eine Besonderheit am Graphen erkennen?
c) Gib eine Erklärung für diese Besonderheit (im Zusammenhang mit dem Funktionsterm)!
d) Erzeuge eine saubere Skizze des Graphen und markiere alle in a) gefundenen Spezialpunkte.



Oder anders herum: Wie lautet der Term einer Funktion 4. Grades, von deren Graph man einen Wendepunkt in W(-3/4) kennt, die …..
Sie alle kennen diese Aufgaben, die schließlich zu einem mehr oder weniger aufwendigen linearen Gleichungssystem führen, ob sie nun in Deutschland „Steckbriefaufgaben" oder in Österreich „umgekehrte Kurvendiskussionen" heißen.

Ich stelle auch gerne einen Graphen hin und frage nach einer möglichst guten Approximation durch einen Funktionsterm. Da müssen die Schüler zuerst den Funktionstyp erkennen (sie bekommen da nicht nur Polynomfunktionen zu Gesicht). Dann heißt es, passende Daten aus dem Graphen abzulesen, und schließlich die Lösung mit der vorgestellten Figur zu vergleichen. Die Auflösung des Gleichungssystems spielt dabei keine Rolle mehr, das übernimmt der Rechenknecht.



Mit besonderer Freude denke ich dabei an Paul Drijvers´ Hausgeist zurück, dem ich erstmalig 1993 bei der 2. Internationalen *DERIVE*-Konferenz in Krems begegnet bin *).

Zu dieser Aufgabenstellung sind viele Variationen möglich: Geben Sie unterschiedliche Skalierungen auf den Achsen an, oder lassen Sie die Achsen überhaupt weg. Machen Sie es Ihren Schülern nicht zu einfach und lassen Sie nur die Verwendung von zwei oder drei Punkten zu, und erzwingen Sie damit die Berücksichtigung von Anstiegen und auch anderen Eigenschaften. Arbeiten Sie auch mit Kurven, bei denen Polstellen, waagrechte und schiefe Asymptoten auftreten. Legen Sie die Kurve nur durch eine Handskizze fest. Ich kann Ihnen versichern, dass die Schüler derartige Aufgaben zu schätzen wissen. Natürlich ist die Korrektur und die Benotung derartiger Aufgaben wesentlich mühsamer und differenzierter als die von herkömmlichen Beispielen. Es kann, ja es wird Ihnen passieren, dass 10 Schüler 8 verschiedene Lösungen aufweisen (weil 2 bei der Hausübung abgeschrieben haben).
Und dann stellt sich uns allen die Frage, welche Lösung ist die beste? Was ist das Kriterium für die Qualität der Approximierung? Das kann sehr spannend werden, auch für den Lehrer.

---

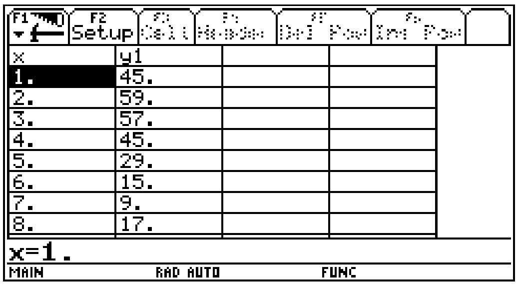
*) *aus DERIVE in Education, H.Heugl & B. Kutzler, Hsg, Chartwell Bratt, 1993*

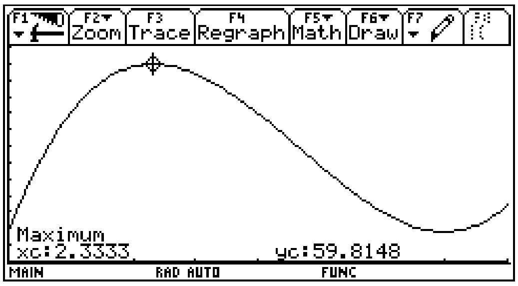
Dieser Funktionsterm gehört zum Graph von vorhin:

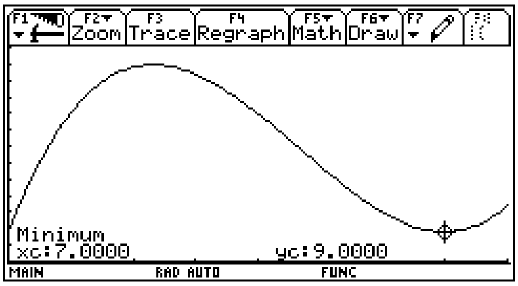
$$\frac{x^4 - 15\cdot x^3 - 100\cdot x^2 - 2000\cdot x + 50000}{2500}$$

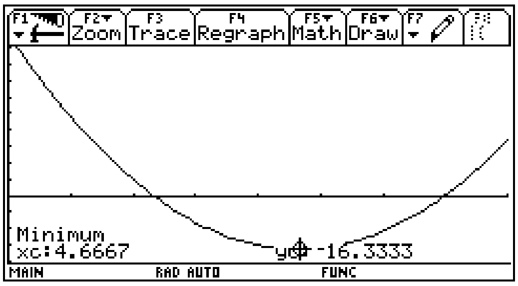
Eleonore Eisler, eine sehr engagierte Kollegin aus Tulln, Niederösterreich, gab die folgende Aufgabe im Rahmen einer „Problemlöseschularbeit“ (und damit folgte sie einer Idee von Kollegin Hildegard Urban-Woldron).

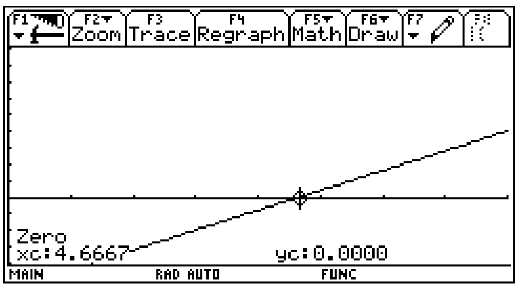
Eine Funktion dritten Grades ist durch die folgenden *TI*-92 Schirme hinreichend beschrieben. Versuche, den zugehörigen Funktionsterm auf drei verschiedene Arten zu ermitteln und verwende dazu mindestens drei der folgenden sechs Abbildungen. Erkläre die Grafiken!

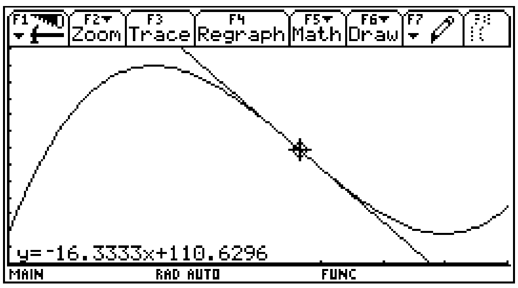












Ich möchte mit einer Aufgabe aus einer Matura (Abitur) schließen, die ich meiner ersten *TI*-92 Klasse gestellt habe. Diese Aufgabe war eine von drei – gleich gewichteten – Aufgaben. Die Gesamtarbeitszeit betrug 4 Stunden (240 Minuten).

Die Konzentration *M* [Gramm/Liter] eines 6-Stunden Allergiemittels im Blutkreislauf eines Patienten läßt sich annähernd beschreiben durch die Formel

$$M(t) = 12 - 4\ln(t^2 - 4t + 6), \quad 0 \le t \le 6,$$

dabei ist *t* die seit der Einnahme des Medikaments verstrichenene Zeit in Stunden.

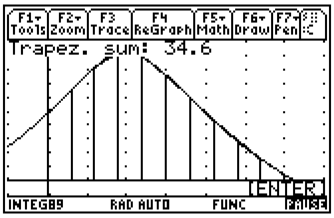
Berechne die durchschnittliche Konzentration des Medikaments im Körper für den Zeitraum der 6 Stunden, in denen es wirksam ist (= Gesamtmenge aufgeteilt auf alle 6 Stunden).

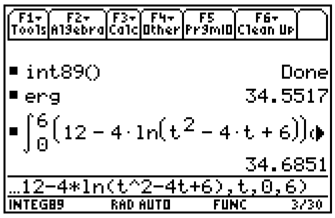
a) Erkläre, warum man für die Beantwortung der Frage die Integralrechung benötigt.
b) Verwende zur Berechnung des Integrals die Trapezregel (6 Streifen händisch)
c) Verwende die Trapezregel (12 Streifen und verwende ein geeignetes Werkzeug)
d) Wie groß ist der Fehler für (a) und (b) im Vergleich mit dem exakten Ergebnis (CAS)? (Fehlerangabe in %).
e) Welche Verbesserung bringt die Verdopplung der Streifenanzahl?
f) In der Fachliteratur findet man eine Formel für die Abschätzung des Fehlers *E*, den man bei Anwendung der Trapezregel für die numerische Integration macht, wie folgt:

$$E \le \frac{(b - a)^3}{12 \ n^2} \cdot \max|f''(x)|.$$

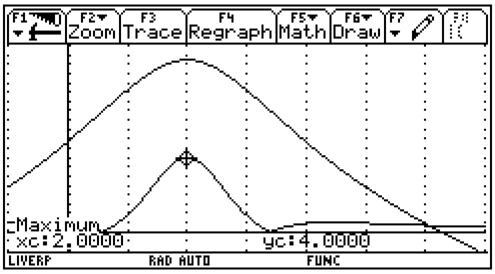
Welche Abschätzung läßt sich in diesem Fall für *n* = 6 machen (*a* und *b* sind Unter-, bw. Obergrenze des Integrals).
g) Bestimme des Extremwert für *M*(*t*). Welche Bedeutung hat dieser Kurvenpunkt bezogen auf das Modell.

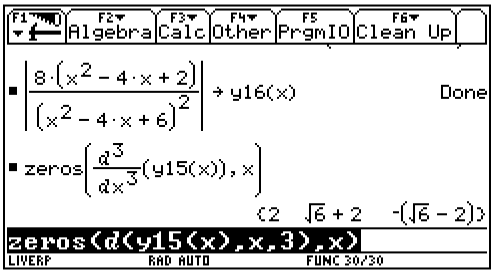
Idee aus (Calculus, Larson & Edwards, Houghton Mifflin 1999, ISBN 0-395-91683-6)





Zwei *TI*-89 Schirme demonstieren, wie die Schüler das Paket `integ()`[1],[2] nützten.





In diesem Fall gab ich der Aufgabe den Drall, indem ich sie durch den Einsatz der Technologie in eine Richtung brachte, wohin ich ohne CAS-Unterstützung nicht gekommen wäre.Wir gaben uns bei dem Kapitel Integralrechnung nicht mit der bloßen Flächenberechung zufrieden, sondern zeigten, wie viele Anwendungen zur Interpretation einer Fläche unter einer Kurve führten. Die Schüler arbeiteten mit dem Programm `integ()` als Blackbox, nachdem sie verstanden hatten, was dieses Programm für sie zu leisten imstande war. Handfertigkeiten waren für Teilaufgabe (b) ebenso notwendig, wie der Nachweis einer gewissen Methodenkompetenz in (f). (a) und (g) fragte das notwendige Verständnis ab und so nebenbei sollten sie auch noch zeigen, dass sie neben der hohen Analysis auch noch mit Prozenten umzugehen wussten.

Zum Abschluss will ich nochmals zusammenfassen, wie man „alten Hüten“ durch einen kleinen Dreh zu neuem Glanz verhelfen könnte – wobei diese Liste keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt:

- Setze die graphischen Möglichkeiten für zusätzliche Aufgabenstellungen ein, verstärke die Visualisierung.
- Ermutige und verlange numerische und graphische Lösungen, frage nach mehr als nur einem Lösungsweg, akzeptiere heuristische Methoden, gib Raum für "Try and Error"-Methoden.
- Lasse die Schüler eigene Werkzeuge entwickeln und gib ihnen Möglichkeiten, diese auch einzusetzen.
- Fordere in Aufgaben das funktionale Denken heraus.
- Lasse die Schüler zu vorgegebenen Lösungen passende Problemstellungen entwickeln.
- Lasse die Schüler selbst Vermutungen aufstellen – aber fordere fallweise auch die Beweise ein.
- Binde die unterschiedlichen CAS-Ausgaben in die Problemstellungen ein, interpretiere die Ausgabe und vergleiche mit traditionell gefundenen Lösungen, thematisiere die implementierten „Vereinfachungs“-regeln des CAS.
- Nütze die Möglichkeiten eines CAS (und fallweise auch eines DGS = Dynamischen Geometrie Systems) für nun mögliche zusätzliche Aufgabenstellungen (aber bleibe damit innerhalb des Lehrplans).
- Beachte bei all diesen verführerischen Möglichkeiten, dass nicht der Computer ins Zentrum der Betrachtungen gerät. Wir sollten unser Tun nach wie vor von der Mathematik und nicht vom Handbuch der Software leiten lassen.

Das ist das Ende meines Vortrags, von dem ich hoffe, dass er nicht zu unorganisiert erschienen ist. Meine Grundidee und Hoffnung war, Sie zu ermutigen, ihre traditionellen Aufgaben dahingehend zu untersuchen, ob sie sich nicht durch einen kleineren oder größeren Dreh dazu eignen, zu neuen und manchmal spannenden Problemen für unsere Schüler zu werden.

Ich wiederhole mich: die Arbeit des Lehrers wird dadurch schwieriger, aber sicherlich auch befriedigender, wenn man beobachtet, wie sich durch den Einsatz von moderner Technologie - ganz unabhängig von der verwendeten Hard- und Software - die Kompetenzen der Schüler, ihr Verständnis, und nicht zuletzt ihre Haltung gegenüber der Mathematik verändern.

[1] Einführung des Integralbegriffs mit dem TI-92, J Böhm & W Pröpper, bk-teachware SR-13
[2] Exploring Integration with the TI-89/92, J Böhm & W Pröpper, bk-teachware SL-12, to appear in 2000