



## **Beispiele für den Unterrichtsgebrauch**

7. Klasse AHS mit dem TI-89/92/92+

Gerhard Pachler

Ein Unterrichtsbehelf zum Einsatz moderner Technologien  
im Mathematikunterricht

## Abstract

Die vorgestellten Beispiele aus den Gebieten Differentialrechnung und Analytische Geometrie eignen sich zum Unterrichtsgebrauch in der 7. Klasse an Allgemeinbildenden Höheren Schulen (11. Schulstufe).

Bei den Aufgaben handelt es sich zumeist um traditionelle Aufgaben, deren Lösungen ausführlich beschrieben und mit Hilfe zahlreicher Bildschirmbilder dokumentiert sind.

Einleitend werden einige sehr nützliche Werkzeuge kurz vorgestellt.

Anfragen und Kommentare sind willkommen.

Gerhard Pachler

email: [g\\_pachler@pgv](mailto:g_pachler@pgv)

St. Pölten, Herbst 2001

## Inhalt

Entwicklung von Werkzeugen .....	3
Berührungsaufgabe.....	5
Umkehraufgabe .....	6
Ermitteln von Polynomfunktionen – Seilbahnbeispiel.....	7
Glatte Kurve .....	8
Straßenbau.....	9
Berührung zweier Kurven .....	11
Steckbriefaufgaben.....	12
Tangente von einem Punkt an eine Kurve .....	14
Steigungswinkel der Tangente im Punkt eines Kreises – Implizit Differenzieren .....	15
Gleichung der Tangente im Punkt einer Ellipse.....	16
Ellipse und Parabel.....	17
Tangenten aus einem Punkt an eine Ellipse .....	18
Schmiegunskreis im Punkt einer Kurve .....	19
Schmiegekreise einer Ellipse .....	20
Der größte Sehwinkel.....	21

## Entwicklung von Werkzeugen (Modulen, Bausteinen)

Immer wieder werden im „mathematischen Alltag“ die gleichen Handgriffe getätigt. Sehr oft wiederkehrende Aufgaben können durch selbstdefinierte Werkzeuge automatisiert werden.

**ACHTUNG:** Vor der Anwendung der Werkzeuge `msek(a,b)`, `sekante(a,b,x)`, `tangente(a,x)` und `normale(a,x)` muss eine Funktion `f` definiert werden.

**msek(a,b)** berechnet die Sekantensteigung einer Funktion `f` in einem Intervall `[a ; b]`.

Die Sekantensteigung (= mittlere Änderungsrate = Differenzenquotient) ist das Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente (x-Werte) im betrachteten Intervall.

▪ Define `msek(a,b) = (f(b) - f(a)) / (b - a)` Done

Für eine Gerade durch einen festen Punkt  $(x_a | y_a)$  mit vorgegebener Steigung `k` gilt

$$y(x) = y_a + k \cdot (x - x_a).$$

**gerapk(p, k)** liefert die rechte Seite der Gleichung der Geraden durch den Punkt  $(x_p | y_p)$  und der Steigung `k`. Der Punkt wird in Vektorform `[xp; yp]` eingegeben!

▪ Define `gerapk(p, k) = p[2, 1] + k * (x - p[1, 1])` Done

**sekante(a,b,x)** liefert die rechte Seite der Gleichung der Sekante von `f` im Intervall `[a ; b]`.

▪ Define `sekante(a, b, x) = f(a) + msek(a, b) * (x - a)` Done

**tangente(a,x)** liefert die rechte Seite der Tangentengleichung im Punkt  $(x | f(x))$  der Funktion `f`.

Die Tangente im Punkt  $(a|f(a))$  der Funktion hat an der Stelle `x = a` die Steigung `f'(a)`.

▪ Define `tangente(a, x) = f(a) + (d/dx(f(x)) | x = a) * (x - a)` Done

**normale(a,x)** liefert die rechte Seite der Gleichung der Normalen im Punkt  $(x | f(x))$  der Funktion

`f`. Die Normale im Punkt  $(a|f(a))$  der Funktion hat an der Stelle `x = a` die Steigung  $-\frac{1}{f'(a)}$ .

▪ Define `normale(a, x) = f(a) - (1 / (d/dx(f(x)) | x = a)) * (x - a)` Done

**impldiff(gleich)** liefert die Steigung im Punkt einer Kurve durch implizites Differenzieren.

▪ Define `impldiff(gleich) = right(solve(d/dx(gleich) | d/dx(y(x)) = u, u))` Done

Für den **Winkel  $\alpha$  zwischen zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$**  gilt:  $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

▪ Define `wink(va, vb) = cos^-1(dotP(va, vb) / (norm(va) * norm(vb)))` Done

## Gerade durch zwei Punkte P und Q in der Ebene

Diese Aufgabe kann mit Hilfe der Normalvektorgleichung  $\vec{n} \cdot (X - P) = 0$  automatisiert werden.

Die TI-Eingabe `[3;-4][STO▶] va` liefert einen Vektor  $va = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

Einen Normalvektor finden wir durch Vertauschen der Koordinaten und Ändern eines Vorzeichens.

z.B.:  $nv = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

Wie ermittelt der TI-92 die einzelnen Koordinaten des Vektors  $va$ ?

Mit  $va[1,1]$  (erste Zeile, erste Spalte) wird die x-Koordinate (3), mit  $va[2,1]$  (zweite Zeile, erste Spalte) wird die y-Koordinate (-4) ermittelt.

Ein Normalvektor zu  $va$  ist somit der Vektor  $[-va[2,1];va[1,1]]$ .

Wir definieren eine Funktion  $gerapp(p,q)$ . Die beiden Parameter  $p$  und  $q$  sind die beiden Punkte, durch die die Gerade verlaufen soll. Die Gerade soll in der Form  $y = k \cdot x + d$  ausgegeben werden.

Wir brauchen einen Normalvektor  $\vec{n}$  zum Vektor  $\vec{pq} = q - p$ .

Für den TI ergibt sich  $\vec{n}$  wie folgt:  $\begin{bmatrix} -(q-p)[2,1] \\ (q-p)[1,1] \end{bmatrix}$

Das skalare Produkt  $\vec{n} \cdot (X - P)$  berechnet der TI mit `dotP`.

Für die Definition der Funktion ergibt sich somit:

```
define gerapp(p,q) = solve(dotP([- (q-p)[2,1];(q-p)[1,1]],[x;y]-p) = 0, y)
```

und der TI zeigt folgende Bestätigung.

```
Define gerapp(p,q) = solve(dotP([[-(q-p)[2,1]],[x]-p],[(q-p)[1,1]],[y]-p] = 0, y)
Done
```

Test:

```
gerapp([8;16],[12;8])      y = -2*(x - 16)
gerapp([8;16],[12;8])
MAIN      DEG AUTO      FUNC 1/50
```

Soll die rechte Seite der Geradengleichung nun auch noch ausmultipliziert werden, so ist noch der Befehl `expand` einzubauen.

```
define gerapp(p,q) = expand(solve(dotP([- (q-p)[2,1];(q-p)[1,1]],[x;y]-p) = 0, y))
```

```
F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
gerapp([8;16],[12;8])      y = 32 - 2*x
gerapp([2;3],[0;-1])      y = 2*x - 1
gerapp([1;3],[0;0])       y = 3*x
gerapp([-1;3],[0;0])
MAIN      DEG AUTO      PAR 3/50
```

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{2}{(1+2x)^2}$

- a) Bestimme die maximale Definitionsmenge  $D_f$  und zeichne den Funktionsgraphen.  
 b) Der Funktionsgraph schneidet die y-Achse im Punkt P. Eine Gerade durch P soll den Funktionsgraphen im Punkt  $Q(u | f(u))$  mit  $u < -\frac{1}{2}$  berühren.

a) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen ohne  $x = -\frac{1}{2}$  definiert. Somit ist  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$ .

Funktionsgraph:

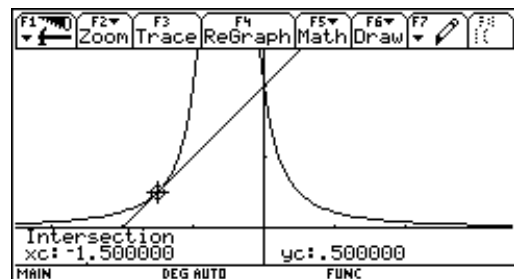
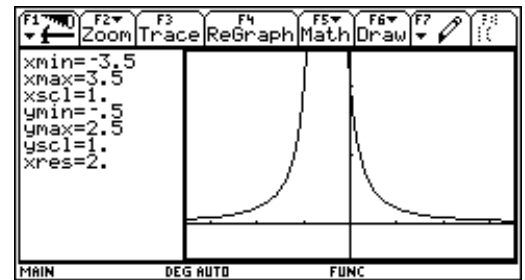
b) Schnittpunkt mit der y-Achse ( $x = 0$ ):  $f(0) = 2$ ;  $P(0|2)$

Die Gerade durch  $P(0|2)$  soll f im Punkt  $Q(u | f(u))$  berühren, soll also Tangente in Q sein.

Wir bilden  $f'(u)$  und damit die Tangente in Q gemäß der Formel  $y = f(u) + f'(u) \cdot (x - u)$ . Im Funktionsterm, den wir in  $y_2(x)$  speichern, kommt die unbekannte Größe u vor, die wir dadurch bestimmen können, wenn wir den Punkt  $P(0 | 2)$  in die Geradengleichung einsetzen. Wir lösen also die Gleichung  $y_2(0) = 2$  nach u auf.

Die Lösung  $u = 0$  entfällt wegen  $u < -\frac{1}{2}$ .

Mit der Lösung  $u = -\frac{3}{2}$  ergibt sich die Geradengleichung g:  $y = x + 2$ .



```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
Define f(x) = 2 / (1 + 2 * x)^2 Done
f(0) 2
d/dx(f(x)) | x = u -8 / (2 * u + 1)^3
f(u) + (d/dx(f(x)) | x = u) * (x - u)
-2 * (4 * x - 6 * u - 1) / (2 * u + 1)^3
-2 * (4 * x - 6 * u - 1) / (2 * u + 1)^3 -> y2(x) Done
y2(0) = 2 2 * (6 * u + 1) / (2 * u + 1)^3 = 2
solve(2 * (6 * u + 1) / (2 * u + 1)^3 = 2, u)
u = 0 or u = -3/2
d/dx(f(x)) | x = -3/2 1
f(-3/2) + (d/dx(f(x)) | x = -3/2) * (x + 3/2)
x + 2 -> y2(x) Done
f(-3/2) 1/2
f(-3/2)
  
```

Ergebnis: Die Gerade g:  $y = x + 2$  verläuft durch P und berührt den Funktionsgraph im

Punkt  $Q\left(-\frac{3}{2} \mid \frac{1}{2}\right)$



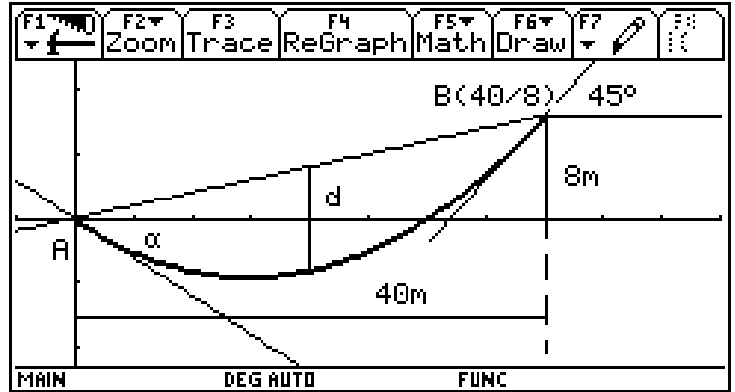
### Ermitteln von Polynomfunktionen

Eine Funktion der Art  $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$  heißt Polynomfunktion n-ten Grades.

#### Die Seilbahn:

Zwischen den Punkten A und B verläuft das Drahtseil einer Seilbahn. Die Seilform wird durch eine Polynomfunktion zweiten Grades beschrieben. Im oberen Aufhängepunkt B ist das Seil unter  $45^\circ$  geneigt.

Berechne den Winkel  $\alpha$ , den das Seil im unteren Aufhängepunkt A mit der Horizontalen einschließt. An welcher Stelle  $x$  ist das Seil am tiefsten? An welcher Stelle ist der „Durchhang“  $d$  am größten?



Eine Polynomfunktion 2. Grades lautet:  $f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$  bzw.  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ .

Es gilt,  $a$ ,  $b$  und  $c$  zu bestimmen. Dazu benötigen wir drei Gleichungen.

$$A(0 | 0) \in f \Rightarrow f(0) = 0 \quad a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$B(40 | 8) \in f \Rightarrow f(40) = 8 \quad a \cdot 40^2 + b \cdot 40 = 8$$

$$f'(40) = \tan(45) = 1$$

$$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b \quad 2 \cdot a \cdot 40 + b = 1$$

Es ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} I: & 1600 \cdot a + 40 \cdot b = 8 \\ II: & 80 \cdot a + b = 1 \end{aligned}$$

Mit dem TI lösen wir das Gleichungssystem einfach mit

dem rref-Befehl und erhalten  $a = \frac{1}{50}$   $b = -\frac{3}{5}$

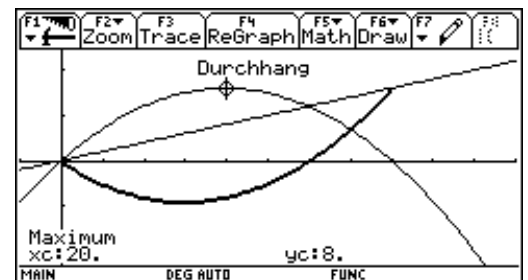
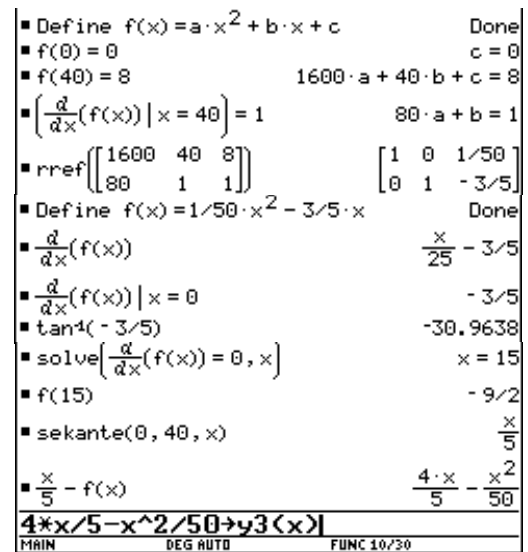
Die gesuchte Polynomfunktion lautet:  $f(x) = \frac{1}{50}x^2 - \frac{3}{5}x$

Mit  $f'(x) = \frac{2}{50}x - \frac{3}{5} = \frac{x}{25} - \frac{3}{5}$  können wir den Winkel  $\alpha$  bei  $A(0|0)$  berechnen.

$$f'(0) = -\frac{3}{5} = \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) \approx -30,96^\circ$$

An der tiefsten Stelle des Seiles ist die Steigung der Tangente Null. Wir lösen die Gleichung  $f'(x) = 0$  im HOME-Fenster.

Der Durchhang  $d$  an einer Stelle  $x$  ist die Differenz zwischen dem Sekantenwert und dem Funktionswert an dieser Stelle. Wir stellen den Durchhang grafisch dar und bestimmen das Maximum über das Math-Menü.



Ergebnis: Das Seil ist im unteren Aufhängepunkt unter rund  $30,96^\circ$  nach unten geneigt; an der Stelle  $x=15$  ist das Seil  $4,5\text{m}$  unter A; der Durchhang  $d$  an der Stelle  $x=20$  beträgt  $8\text{m}$ .

### Glatte Kurve

Bestimme ein Polynom  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  von möglichst kleinem Grad  $n$  so, dass die

$$\text{Funktion } f: x \mapsto \begin{cases} -x^3 + 4x & \text{für } x \leq 1 \\ p(x) & \text{für } 1 < x < 2 \\ 2x - 2 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

an den Stellen 1 und 2 differenzierbar ist, d.h. dort eine Ableitung besitzt.

Von der abschnittsweise definierten Funktion  $f$  können wir uns am TI-92 sofort ein Bild machen.

Der Term  $-x^3 + 4x$  mit  $x \leq 1$  wurde in  $y1$  gespeichert, der Term  $2x - 2$  mit  $x \geq 2$  in  $y2$ .

Von der gesuchten Polynomfunktion müssen wir erwarten, dass sie einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt besitzt und somit den Grad  $n = 3$  hat. Diese Funktion werden wir anschließend in  $y3$  speichern.

Zuerst berechnen wir die Funktionswerte an den Randstellen und die Ableitungen an den Randstellen. Die gesuchte Funktion muss in den Funktionswerten und in den Ableitungen mit den gegebenen Funktionen übereinstimmen. Es ergeben sich somit 4 Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten  $a, b, c$  und  $d$ .

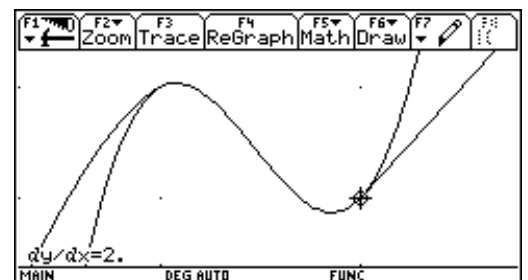
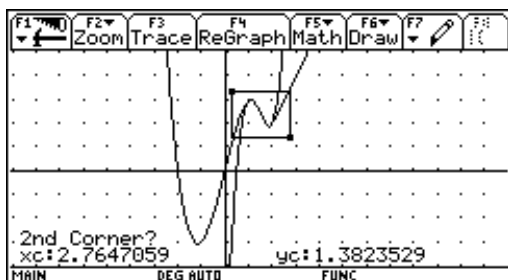
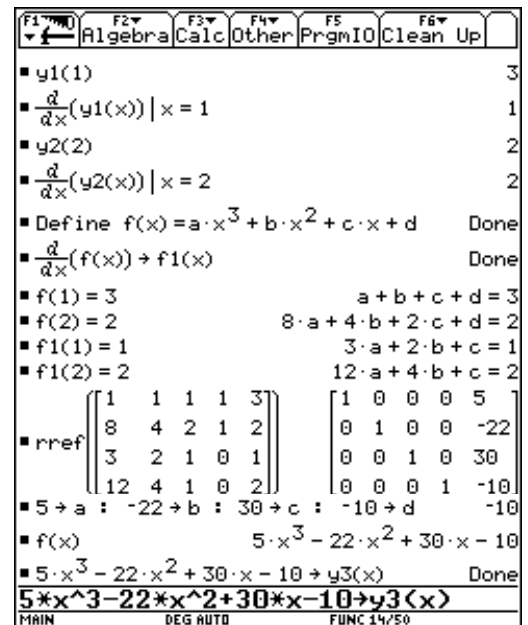
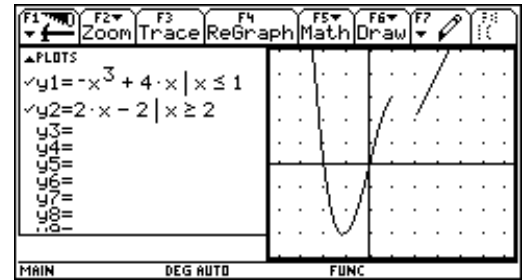
Die gesuchte Funktion lautet:

$$p(x) = 5x^3 - 22x^2 + 30x - 10$$

Abschließend stellen wir die ermittelte Polynomfunktion grafisch dar.

Das rechte Bild wurde mit ZoomBox erstellt.

Genaugenommen gehört  $p(x)$  noch auf das Intervall  $[1;2]$  eingeschränkt.





Weiteres Beispiel:

Bestimme eine Polynomfunktion

$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots$  von möglichst kleinem

Grad  $n$  so, dass deren Graph die beiden Kurvenstücke

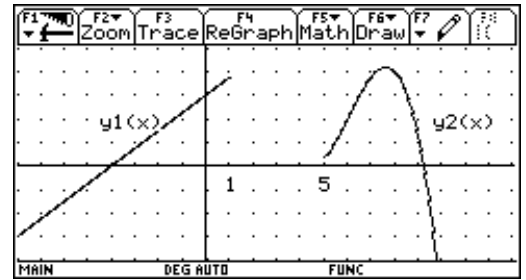
„glatt“ miteinander verbindet.

Beschreibe, welche mathematischen Begriffe hinter dieser umgangssprachlichen Formulierung stehen.

$$y_1(x) = \frac{3}{4}x + 3 \quad (x \leq 1)$$

$$y_2(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 25x + 44 \quad (x \geq 5)$$

Zur Kontrolle:  $p(x) = \frac{15 \cdot x^3}{64} - \frac{131 \cdot x^2}{64} + \frac{265 \cdot x}{64} + 91/64$



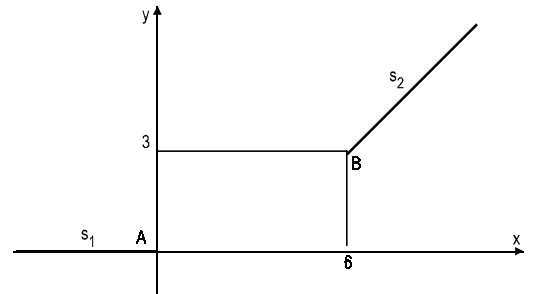
### Straßenbau

Beispiel 1:

Die beiden Straßenstücke  $s_1$  und  $s_2$  sollen durch ein möglichst optimales Zwischenstück miteinander verbunden werden.

$s_1: y = 0, x \leq 0$        $s_2: y = x - 3, x \geq 6$

$A(0 | 0), B(6 | 3)$



Wir wollen A und B durch den Graphen einer

Polynomfunktion  $p(x)$  verbinden und fordern „glatte“ und „ruckfreie“ Übergänge.

Dabei bedeutet „glatt“, dass die Tangenten an den Übergangsstellen zusammenfallen und unter

„ruckfrei“ versteht man die Forderung, dass die Krümmungen – die durch die zweiten Ableitungen beschrieben werden – der Kurventeile und den Übergangsstellen übereinstimmen.

Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein.

Anschluss bei A:  $p(0) = 0$

Kein Knick bei A:  $p'(0) = 0$

Keine abrupte Bewegung des Lenkrades bei A:

Keine abrupte Bewegung des Lenkrades bei B:

$p''(0) = 0$

$p''(6) = 0$

Anschluss bei B:  $p(6) = 3$

Kein Knick bei B:  $p'(6) = 1$

(Die Krümmungen der beiden geraden Straßenstücke  $s_1$  und  $s_2$  sind jeweils Null)

Es sind 6 Parameter nötig, weshalb wir mit einer Polynomfunktion 5. Grades arbeiten:

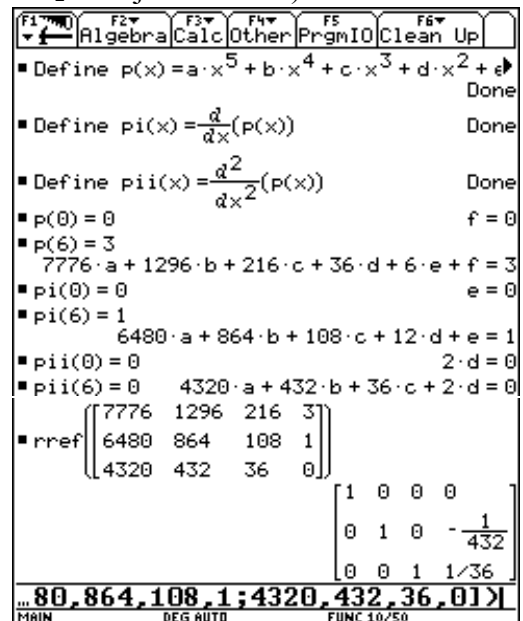
Mit den folgenden Eingaben definieren wir die Polynomfunktion  $p(x)$ , die erste Ableitung  $p'(x)$  und die zweite Ableitung  $p''(x)$ .

`define p(x) = a*x^5+b*x^4+c*x^3+d*x^2+e*x+f`

`define pi(x) = d(p(x),x)`

`define pii(x) = d(pi(x),x,2)`

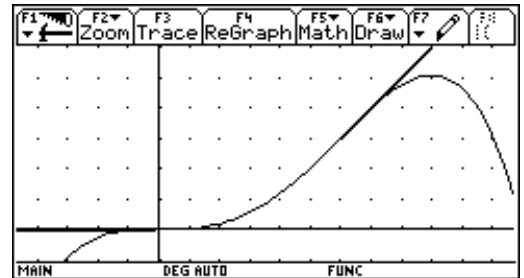
Da die Variablen e, f und d den Wert Null haben verbleibt ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit den Variablen a, b und c, das wie üblich mit dem rref-Befehl gelöst werden kann.



Als Ergebnis erhalten wir:  $a = 0$      $b = -\frac{1}{432}$      $c = \frac{1}{36}$ ;

also 
$$p(x) = -\frac{1}{432}x^4 + \frac{1}{36}x^3$$

Ein kurzer Wechsel in das GRAPH-Fenster bestätigt die Richtigkeit der gefundenen Polynomfunktion.



### Beispiel 2:

Die Autobahnen  $g : y = x$  und  $h : y = -x$  sollen durch ein möglichst sicheres Straßenstück miteinander verbunden werden. Das Straßenstück führt von  $A(1|1)$  nach  $B(-1|1)$ .

Der Übergang kann durch eine Polynomfunktion  $p(x)$  beschrieben werden:

Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

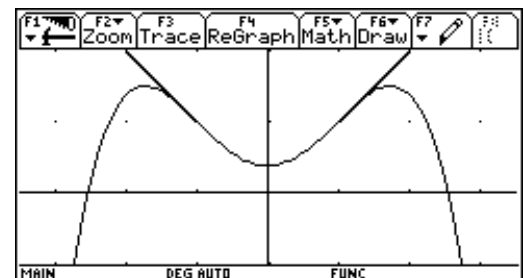
$$\begin{aligned} p(-1) &= 1 & p(1) &= 1 \\ p'(-1) &= -1 & p'(1) &= 1 \\ p''(-1) &= 0 & p''(1) &= 0 \end{aligned}$$

Da 6 Bedingungen vorliegen, benötigen wir eine Polynomfunktion fünften Grades, also

$$p(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$$

Eine Vorgangsweise analog zum Beispiel 1 führt zum

Ergebnis: 
$$p(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$



### Beispiel 3:

Die Straßen  $s_1 : y = -2, x \leq -2$  und  $s_2 : y = 2, x \geq 2$  sollen durch ein s-förmiges Stück miteinander verbunden werden. An den Übergangsstellen soll es zu keiner Veränderung des Krümmungsverhaltens kommen. Bestimme die Funktionsgleichung dieses Verbindungsstückes.

Der Übergang kann durch eine Polynomfunktion  $p(x)$  beschrieben werden:

Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

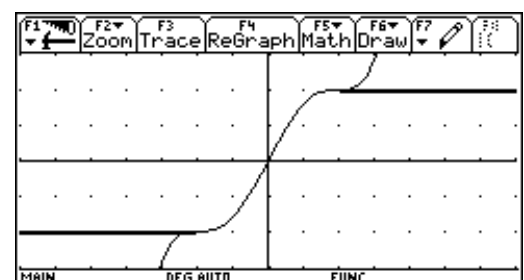
$$p(-2) = 2 \quad p(2) = 2 \quad p'(-2) = 0 \quad p'(2) = 0 \quad p''(-2) = 0 \quad p''(2) = 0$$

Da wieder 6 Bedingungen vorliegen, benötigen wir eine Polynomfunktion fünften Grades, also

$$p(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$$

Eine Vorgangsweise analog zum Beispiel 1 führt zum

Ergebnis: 
$$p(x) = \frac{3}{128}x^5 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{15}{8}x$$



### Berührung zweier Kurven

„Die Neilsche Parabel“ hat die Gleichung  $y^2 = a^2 \cdot x^3$ .

Zeige, dass eine Neilsche Parabel den Graphen der Polynomfunktion  $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 3$  berührt.

#### Graphische Annäherung an die Lösung:

Wir stellen  $p(x)$  und einige Neilsche Parabeln grafisch dar, wobei wir für  $a$  spezielle Werte einsetzen. Aus der Gleichung  $y^2 = a^2 \cdot x^3$  ergeben sich die beiden

Funktionsterme  $y = a \cdot \sqrt{x^3}$  und  $y = -a \cdot \sqrt{x^3}$ . Die grafische Darstellung von  $p(x)$  lässt erkennen, dass wir den Kurventeil mit der Gleichung  $y = a \cdot \sqrt{x^3}$  benötigen.

Mit kleiner werdendem  $a$  verläuft die Neilsche Parabel immer flacher. Aus der Grafik erkennen wir, dass  $a = 0,3$  zu klein ist. Der Wert von  $a = 0,35$  scheint schon recht gut zu passen.

#### Rechnerische Lösung:

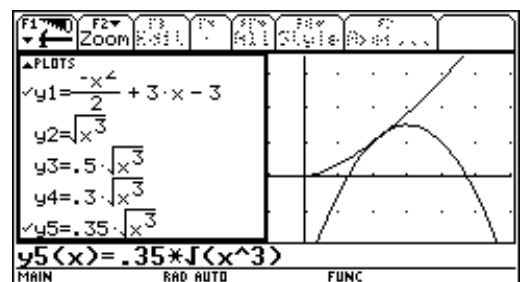
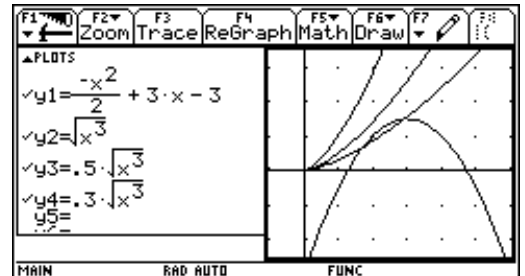
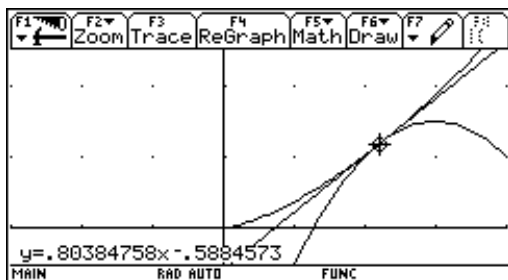
Wir definieren die Polynomfunktion als  $p(x)$  und die Neilsche Parabel als  $f(x)$ .

An der Berührungsstelle zweier Kurven muss gelten: Übereinstimmung in den Funktionswerten und Übereinstimmung in den Tangentensteigungen. Wenn wir die unbekannte Berührungsstelle  $x$  mit  $u$  bezeichnen, so müssen die beiden Gleichungen  $f(u) = p(u)$  und  $f'(u) = p'(u)$  erfüllt sein.

Wir erhalten somit zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden unbekanntenen Größen  $a$  und  $u$ . Die Lösung dieses Gleichungssystems dokumentiert die nebenstehende Abbildung.

**Ergebnis:** Die Neilsche Parabel mit  $a \approx 0.36$  berührt den Graphen der Polynomfunktion

$$p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 3 \text{ im Punkt } (\approx 2,2 \mid \approx 1,2)$$



F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up		
Define f(x) = a*sqrt(x^3)	Done					
Define p(x) = -x^2/2 + 3x - 3	Done					
f(u) = p(u) + g11	a*sqrt(u^3) = -u^2/2 + 3u - 3					
d/dx(f(x))   x = u	= d/dx(p(x))   x = u	→ g12				
	3*a*u^2 / (2*sqrt(u^3)) = 3 - u					
solve(g11, a)	a =	-(u^2 - 6*u + 6) / (2*sqrt(u^3))				
g12   a =	-(u^2 - 6*u + 6) / (2*sqrt(u^3))					
	-3*(u^2 - 6*u + 6) / (4*u) = 3 - u					
solve(-3*(u^2 - 6*u + 6) / (4*u) = 3 - u, u)	u =	-3*(sqrt(3) + 1) or u = 3*(sqrt(3) - 1)				
-(u^2 - 6*u + 6) / (2*sqrt(u^3))   u = 3*(sqrt(3) - 1)	→ a					
		.361618973236				
approx(3*(sqrt(3) - 1))	→ u	2.19615242271				
f(u)		1.17691453624				
p(u)		1.17691453624				
p(u)						
MAIN	RAD AUTO	FUNC	11/50			

### Steckbriefaufgaben – wie seh' ich aus?

#### Beispiel 1:

Es ist die Funktion  $f$  zu bestimmen, deren Graph durch den Punkt  $P$  geht und den Wendepunkt  $W$  mit der Wendetangente  $t$  hat.

Aus nebenstehenden Abbildung können wir ablesen:

$$f(-2) = 0 \quad f(1) = 2$$

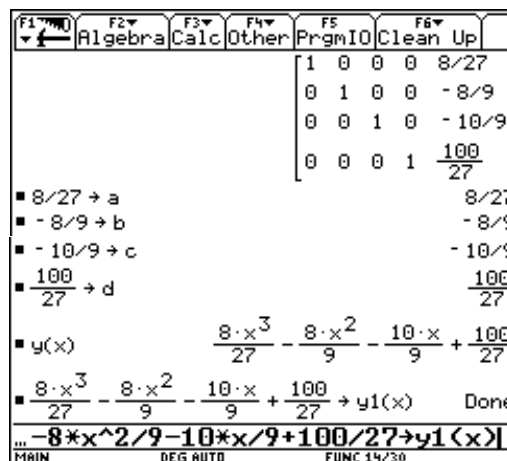
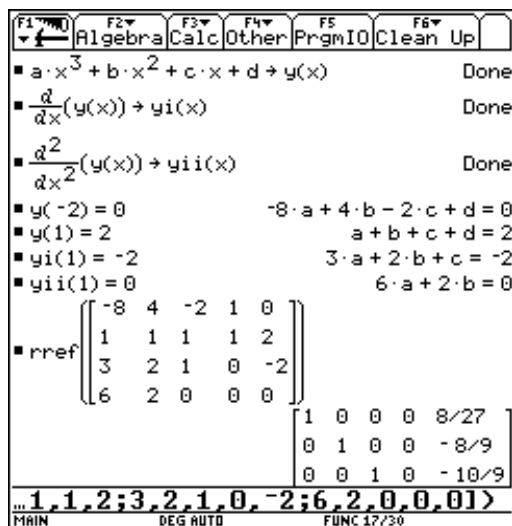
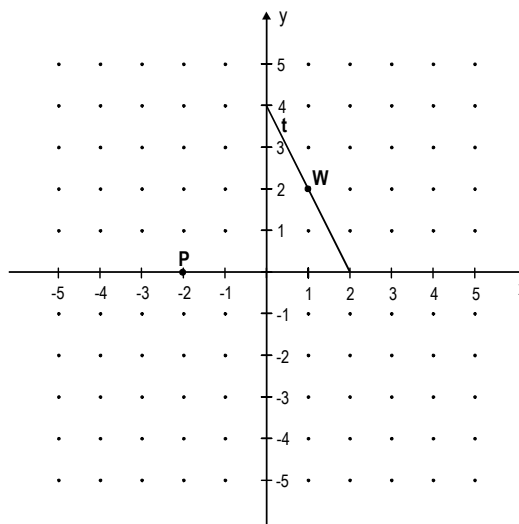
$$f'(1) = -2 \quad f''(1) = 0$$

Für die Funktion schreiben wir den Ansatz

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \text{ und speichern den}$$

Funktionsterm in  $y(x)$  ab. Die erste Ableitung speichern wir in  $y_i(x)$ , die zweite Ableitung in  $y_{ii}(x)$ .

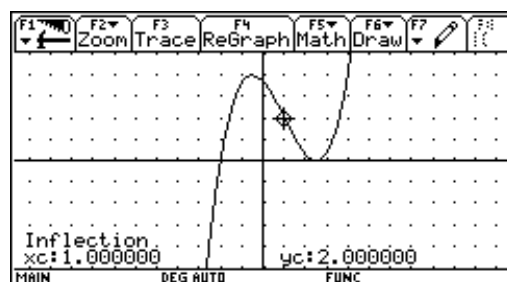
Anschließend setzen wir unsere vier Bedingungen ein und lösen das Gleichungssystem mit dem Befehl `rref` (Achtung: alle Koeffizienten eingeben, auch die, die Null sind).



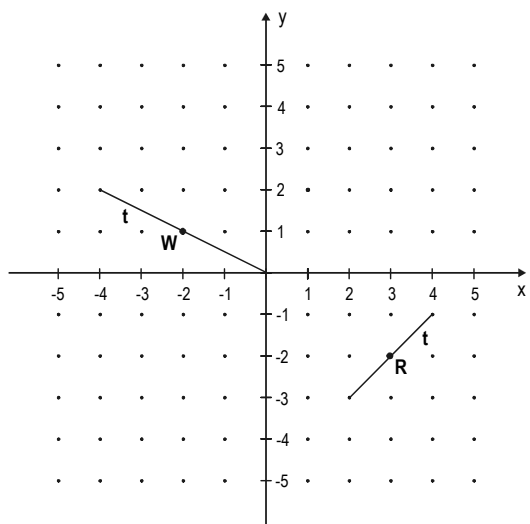
Ergebnis: Die Funktion

$$f(x) = \frac{8}{27}x^3 - \frac{8}{9}x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{100}{27} \text{ geht durch } P(-2 | 0)$$

und hat in  $W(1 | 2)$  den Wendepunkt, wobei die Steigung der Wendetangente  $-2$  ist.



#### Beispiel 2:



Bestimme die Funktion  $f$ , von der man die Tangenten im Wendepunkt  $W$  sowie im Punkt  $R$  kennt.

$$f(-2) = 1 \quad f(3) = -2$$

$$f'(-2) = -0,5 \quad f'(3) = 1$$

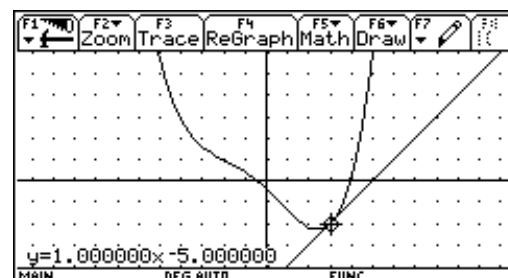
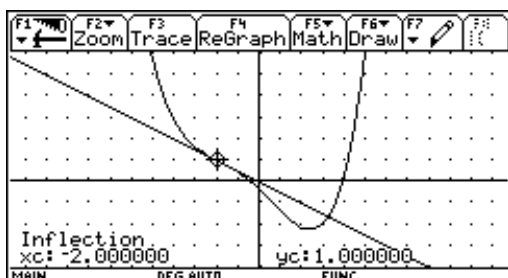
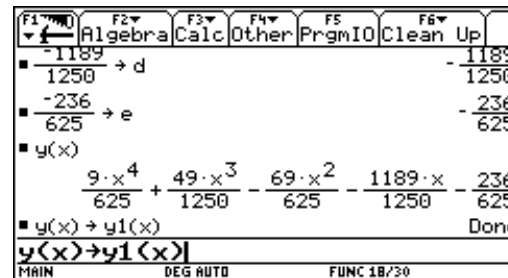
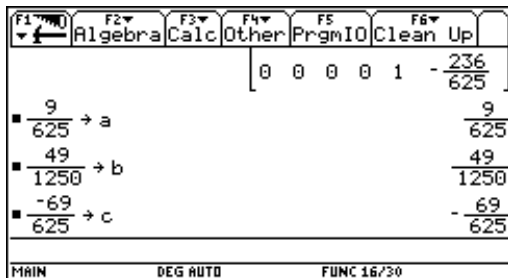
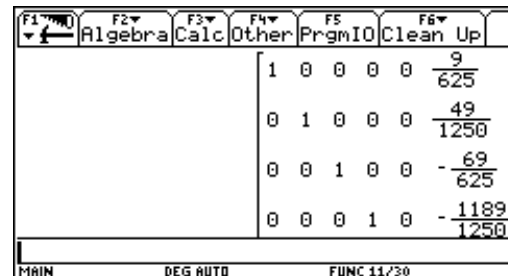
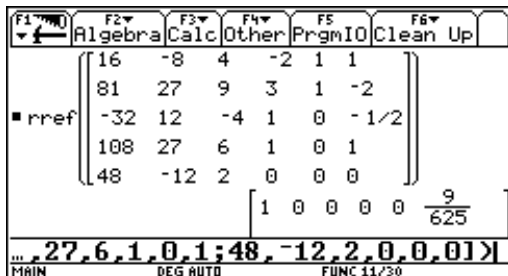
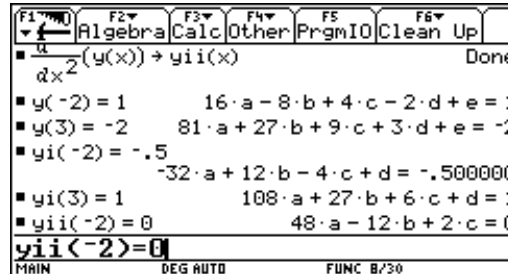
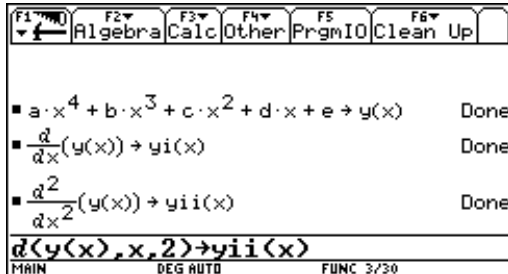
$$f''(-2) = 0$$

Wir haben 5 Bedingungen, deshalb lautet der Ansatz für die Funktion:

$$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

Die Serie der folgenden Abbildungen (jeweils von links nach rechts betrachtet) verdeutlicht die Lösungsstrategie.

- Funktionsansatz speichern
- Ableitungen bilden
- Bedingungen einsetzen
- Gleichungssystem lösen



Ergebnis: Die Funktion  $f(x) = \frac{9}{625}x^4 + \frac{49}{1250}x^3 - \frac{69}{625}x^2 - \frac{1189}{1250}x - \frac{236}{625}$  hat in  $W(-2 | 1)$  den Wendepunkt und die Steigung der Wendetangente ist  $-\frac{1}{2}$ . Die Tangente in  $R(3 | -2)$  hat die Steigung 1.

## Tangente von einem Punkt an eine Kurve

Vom Punkt  $P(-6 | -1)$  soll die Tangente an den Graphen der Funktion  $f(x) = \sqrt{8x}$  gelegt werden. Bestimme die Gleichung der Tangente und den Berührungspunkt T.

Bevor wir diese Aufgabe zunächst im GRAPH-Fenster untersuchen, definieren wir die Funktion, weisen den Funktionsterm  $y1(x)$  zu und stellen geeignete WINDOW-Werte ein. (z.B:  $x_{\min} = -14$ ,  $x_{\max} = 21$ ,  $y_{\min} = -4$ ,  $y_{\max} = 11$ ).

Wir stellen die Funktion graphisch dar und zeichnen einige Geraden durch den Punkt  $P(-6 | -1)$ . Dazu verwenden wir den Befehl **DrawSlp** aus dem Draw-Menü F6. DrawSlp braucht die drei Eingaben  $x1$ ,  $y1$ , *Steigung* und zeichnet eine Gerade durch den Punkt  $(x1 | y1)$  mit der angegebenen Steigung mit der Formel  $y - y1 = \text{Steigung} \cdot (x - x1)$ .

(Slp steht als Abkürzung für das engl. Wort slope; slope bedeutet Neigung, Gefälle)

Durch systematisches Probieren wollen wir nun versuchen, die Tangente zu ermitteln.

1. Versuch: DrawSlp  $-6, -1, 1$  ..... diese Gerade ist zu steil und geht an der Kurve vorbei
2. Versuch: DrawSlp  $-6, -1, 1/2$  .... diese Gerade ist zu flach und schneidet die Kurve in 2 Punkten
3. Versuch: DrawSlp  $-6, -1, 3/4$  .... diese Gerade ist wieder zu steil
4. Versuch: DrawSlp  $-6, -1, 2/3$  .... diese Gerade scheint zu „passen“.

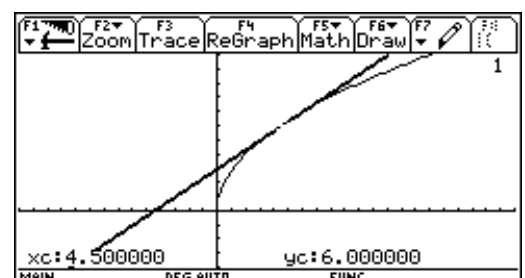
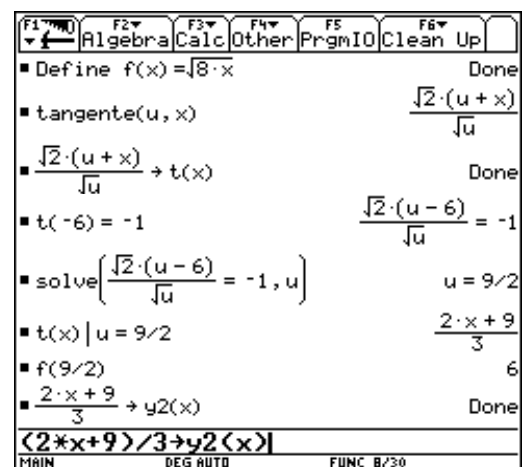
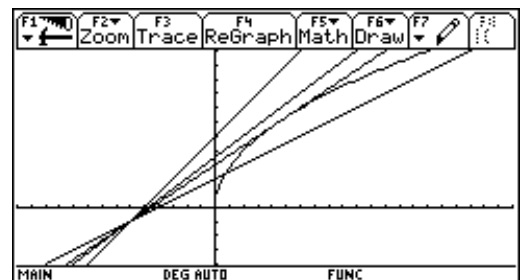
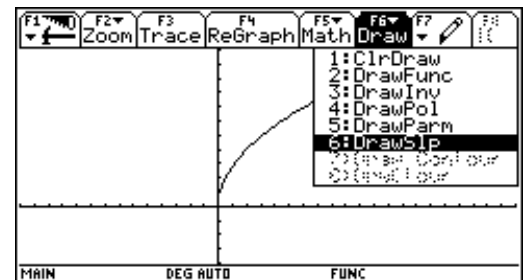
Nun wollen wir rechnerisch zeigen, dass die gesuchte Gerade exakt die Steigung  $k = 2/3$  haben muss.

Lösungsstrategie:

- Für den **Berührungspunkt** am Funktionsgraphen (den wir noch nicht kennen) setzen wir  $T(u | f(u))$  und unsere Aufgabe ist es, die unbekannte x-Koordinate  $u$  zu bestimmen.
- **Tangentengleichung in T** aufstellen; den Term in  $t(x)$  speichern.
- Die Tangente muss durch  $P(-6 | -1)$  verlaufen, d.h.  $t(-6) = -1$ . Dies ist die **Bedingungsgleichung für u**.
- **Gleichung nach u lösen**; wir erhalten  $u = 9/2$ .
- Mit der Eingabe  $t(x) | u = 9/2$  erhalten wir den Term der Tangentengleichung, den wir in  $y2(x)$  abspeichern.
- Die x-Koordinate des Berührungspunktes ermitteln wir mit  $f(u) = f(9/2) = 6$

Ergebnis: Die Tangente von  $P(-6 | -1)$  an den Graphen der Funktion  $f(x) = \sqrt{8x}$  lautet

$$t: y = \frac{2}{3}x + 3. \text{ Der Berührungspunkt ist } T(4,5 | 6).$$



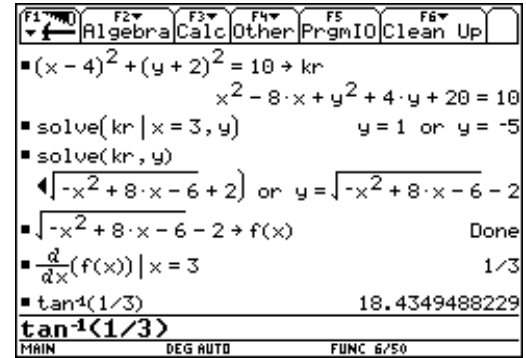
### Steigungswinkel der Tangente im Punkt eines Kreises – Implizit Differenzieren

Beispiel: Im Punkt P(3 | y>0) des Kreises k:  $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 10$  soll die Tangentensteigung und daraus der Steigungswinkel berechnet werden.

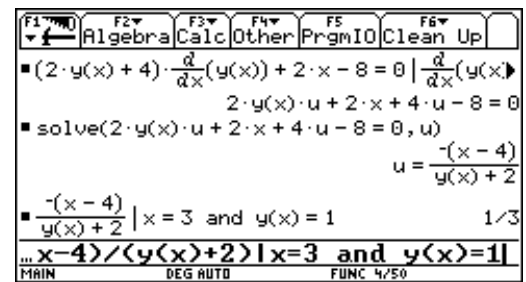
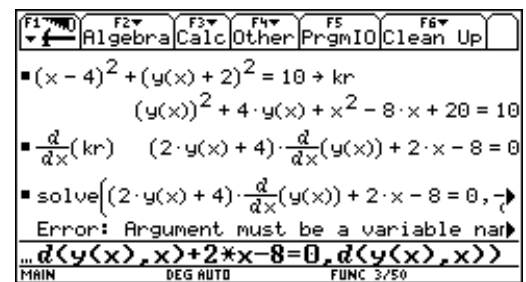
Diese Aufgabe kann auf zwei Arten gelöst werden:

- a) Der Kreis wird in eine obere und eine untere Hälfte aufgeteilt. Indem die Kreisgleichung nach y gelöst wird, wird die richtige Hälfte durch eine eigene Funktionsgleichung in expliziter Form beschrieben.
- b) Die Kreisgleichung wird implizit differenziert.

- a) Zuerst speichern wir die Kreisgleichung in einer Variablen ab und ermitteln die fehlende y-Koordinate des Punktes P. Anschließend lösen wir die Kreisgleichung nach y auf. Die richtige Kreishälfte speichern wir z.B. in f(x). Danach berechnen wir  $f'(3)$ . Den Steigungswinkel  $\alpha$  ermitteln wir aus der Beziehung  $f'(3) = \tan(\alpha)$ . Der Steigungswinkel beträgt rund  $18,4^\circ$ .



- b) Beim impliziten Differenzieren braucht y nicht explizit dargestellt werden. Wir müssen darauf achten, y in der Form y(x) dem TI als Funktion von x zu übergeben. Die Kreisgleichung kann direkt differenziert werden. Der TI liefert eine Gleichung, die nach  $y' = \frac{d}{dx}(y(x))$  gelöst werden muss. Wenn wir den solve-Befehl anwenden und als Variable für die Lösung  $\frac{d}{dx}(y(x))$  eingeben, so reagiert der TI mit einer Fehlermeldung. Ein kleiner Trick kann hier Abhilfe schaffen. Wir ersetzen  $\frac{d}{dx}(y(x))$  durch eine Hilfsvariable u. Damit kann die Gleichung nach u gelöst werden. Mit  $x = 3$  und  $y(x) = 1$  erhalten wir die gesuchte Steigung.

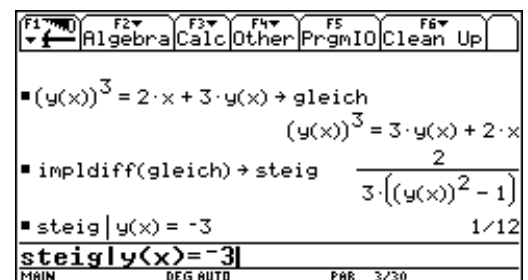


Zur Automatisierung des impliziten Differenzierens können wir eine Funktion definieren.

define impledif(gleich) = right(solve(d(gleich,x) | d(y(x),x) = u, u))

Beispiel: Von der durch  $y^3 = 2x + 3y$  gegebenen Kurve soll die Tangentensteigung im Punkten Q(-9 | -3) berechnet werden.

Hier wäre es außerordentlich aufwendig, die Gleichung  $y^3 = 2x + 3y$  nach y zu lösen.



## Gleichung der Tangente im Punkt einer Ellipse

Ermittle die Gleichung der Tangente im Punkt  $P(-2 \mid y_p > 0)$  im Punkt der Ellipse

$$\text{ell} : 3x^2 + 5y^2 = 32$$

Vorgangsweise:

Zuerst ermitteln wir die fehlende Koordinate des Punktes P.

Anschließend ermitteln wir die Steigung der Ellipse im Punkt P durch implizites Differenzieren.

Beim impliziten Differenzieren müssen wir darauf achten, dass in der Ellipsengleichung  $y$  durch  $y(x)$  ersetzt wird.

Die Gleichung der Tangente im Punkt P ermitteln wir mit dem Modul **gerapk**.

Die Ellipse stellen wir im Modus PARAMETRIC dar.

Dazu müssen wir zuerst noch  $a$  und  $b$  ermitteln.

Wir dividieren die Ellipsengleichung

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \text{ durch } a^2 \cdot b^2 \text{ und erhalten}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ Die Nenner von } x^2 \text{ bzw. } y^2 \text{ stimmen dann}$$

mit  $a^2$  bzw.  $b^2$  überein.

$$3x^2 + 5y^2 = 32 \Rightarrow \frac{3x^2}{32} + \frac{5y^2}{32} = 1 \Rightarrow$$

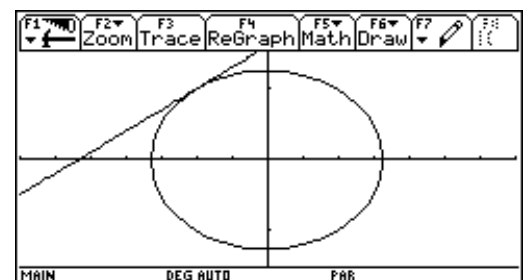
$$\frac{x^2}{32/3} + \frac{y^2}{32/5} = 1, \text{ d.h. } a = \sqrt{\frac{32}{3}}; \quad b = \sqrt{\frac{32}{5}}$$

Abschließend benützen wir im HOME-Fenster den Befehl

**DrawFunc** zur grafischen Darstellung der Tangente. Nach **DrawFunc** muss der Term einer Funktion eingegeben werden.

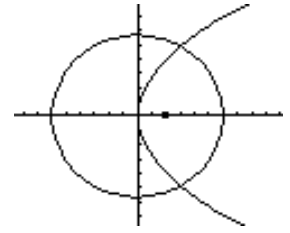
$3 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 = 32 \rightarrow \text{ell}$       $3 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 = 32$   
 $\text{ell} \mid x = -2$       $5 \cdot y^2 + 12 = 32$   
 $\text{solve}(5 \cdot y^2 + 12 = 32, y)$       $y = 2 \text{ or } y = -2$   
 $\text{ell} \mid y = y(x) \rightarrow \text{ell}$       $5 \cdot (y(x))^2 + 3 \cdot x^2 = 32$   
 $\text{impldiff}(\text{ell})$       $\frac{-3 \cdot x}{5 \cdot y(x)}$   
**impldiff(ell)**  
 MAIN     DEG AUTO     PAR 5/30

$\text{ell} \mid y = y(x) \rightarrow \text{ell}$       $5 \cdot (y(x))^2 + 3 \cdot x^2 = 32$   
 $\text{impldiff}(\text{ell})$       $\frac{-3 \cdot x}{5 \cdot y(x)}$   
 $\frac{-3 \cdot x}{5 \cdot y(x)} \mid x = -2 \text{ and } y(x) = 2$       $3/5$   
 $\text{gerapk}([[-2], 3/5])$       $\frac{3 \cdot x}{5} + 16/5$   
**DrawFunc 3\*x/5+16/5**  
 MAIN     DEG AUTO     PAR 7/30





Eine Parabel und eine Ellipse (jeweils in 1. Hauptlage) haben einen gemeinsamen Brennpunkt und gehen durch den Punkt  $P(3 | 2 \cdot \sqrt{6})$ . Bestimme den Schnittwinkel der beiden Kurven!



Wir beginnen mit der Parabel und machen den Ansatz  $par: y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ . Durch Einsetzen des Punktes  $P(3 | 2 \cdot \sqrt{6})$  können wir p bestimmen. Wir erhalten so die Parabelgleichung  $y^2 = 8x$  und den Brennpunkt  $F(2 | 0)$  der Parabel. Dieser Punkt ist auch ein Brennpunkt der Ellipse, die durch P geht.

Ansatz für die Ellipse  $ell: b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

Wir brauchen für die Bestimmung von a und b zwei Gleichungen. Eine bekommen wir, indem wir P in die Ellipse einsetzen.

Der Brennpunkt F der Ellipse ist  $F(2 | 0)$  und es gilt:  $e^2 = a^2 - b^2$ , d.h.  $2^2 = a^2 - b^2$ . Dies ist die zweite Gleichung.

Wir erhalten so die Ellipsengleichung

$$ell: 32x^2 + 36y^2 = 1152 \text{ bzw. vereinfacht}$$

$$ell: 8x^2 + 9y^2 = 288$$

Durch implizites Differenzieren berechnen wir von jeder Kurve jeweils die Steigung k im gemeinsamen Punkt  $P(3 | 2 \cdot \sqrt{6})$ .

Wir bilden die Richtungsvektoren der Tangenten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ k_{par} \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 \\ k_{ell} \end{pmatrix}$$

Mit dem Modul  $wink(v1, v2)$  berechnen wir abschließend den Winkel zwischen diesen beiden Vektoren.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$y^2 = 2 \cdot p \cdot x \rightarrow par$ $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$					
$par   x = 3 \text{ and } y = 2 \cdot \sqrt{6}$ $24 = 6 \cdot p$					
$y^2 = 8 \cdot x \rightarrow par$ $y^2 = 8 \cdot x$					
<b><math>y^2 = 8 \cdot x \rightarrow par</math></b>					
MAIN			DEG AUTO FUNC 3/30		

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \rightarrow ell$ $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$					
$ell   x = 3 \text{ and } y = 2 \cdot \sqrt{6}$ $24 \cdot a^2 + 9 \cdot b^2 = a^2 \cdot b^2$					
$24 \cdot a^2 + 9 \cdot b^2 = a^2 \cdot b^2   a^2 = 4 + b^2$ $33 \cdot b^2 + 96 = b^2 \cdot (b^2 + 4)$					
<b><math>33 \cdot b^2 + 96 = b^2 \cdot (b^2 + 4)</math></b>					
MAIN			DEG AUTO FUNC 6/30		

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$33 \cdot b^2 + 96 = b^2 \cdot (b^2 + 4)$					
$solve(33 \cdot b^2 + 96 = b^2 \cdot (b^2 + 4), b)$ $b = 4 \cdot \sqrt{2} \text{ or } b = -4 \cdot \sqrt{2}$					
$4 \cdot \sqrt{2} \rightarrow b$ $4 \cdot \sqrt{2}$					
$4 + b^2$ $36$					
$6 \rightarrow a$ $6$					
<b><math>6 \rightarrow a</math></b>					
MAIN			DEG AUTO FUNC 10/30		

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$6 \rightarrow a$ $6$					
$ell$ $32 \cdot x^2 + 36 \cdot y^2 = 1152$					
$ell \rightarrow ell$ $8 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 = 288$					
$ell   y = y(x)$ $9 \cdot (y(x))^2 + 8 \cdot x^2 = 288$					
$ell   y = y(x) \rightarrow ell$ $9 \cdot (y(x))^2 + 8 \cdot x^2 = 288$					
<b><math>ell   y = y(x) \rightarrow ell</math></b>					
MAIN			DEG AUTO FUNC 14/30		

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$impldiff(ell)$ $\frac{-8 \cdot x}{9 \cdot y(x)}$					
$\frac{-8 \cdot x}{9 \cdot y(x)}   x = 3 \text{ and } y(x) = 2 \cdot \sqrt{6}$ $\frac{-2 \cdot \sqrt{6}}{9}$					
$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \cdot \sqrt{6} / 9 \end{bmatrix} \rightarrow v1$ $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \cdot \sqrt{6} / 9 \end{bmatrix}$					
<b><math>impldiff(ell)</math></b>					
MAIN			DEG AUTO FUNC 18/30		

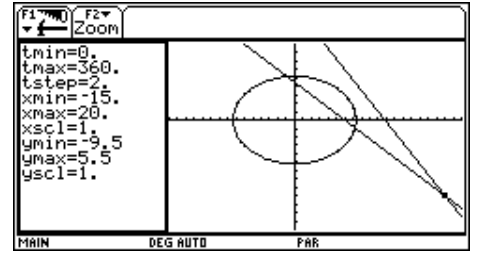
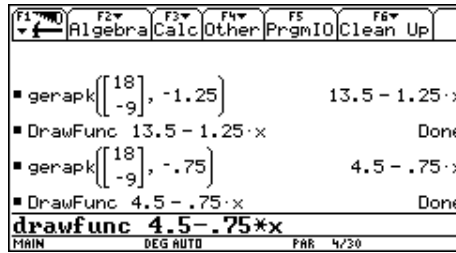
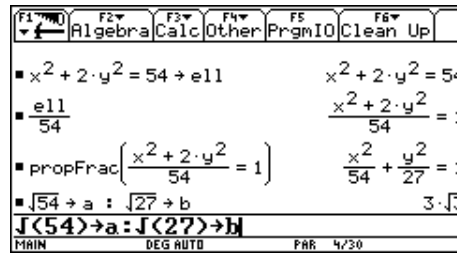
F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$impldiff(par)$ $y(x)$					
$\frac{4}{y(x)}   y(x) = 2 \cdot \sqrt{6}$ $\frac{\sqrt{6}}{3}$					
$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{6} / 3 \end{bmatrix} \rightarrow v2$ $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{6} / 3 \end{bmatrix}$					
$wink(v1, v2)$ $67.7923457014$					
<b><math>wink(v1, v2)</math></b>					
MAIN			DEG AUTO FUNC 22/30		

Der Schnittwinkel der beiden Kurven beträgt 67,79°

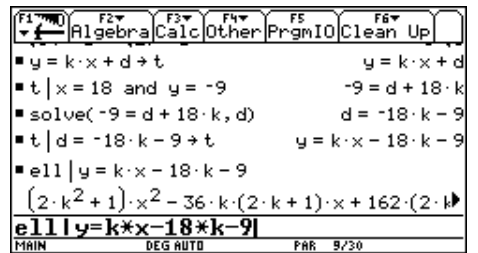
### Tangenten aus einem Punkt an eine Ellipse

Aus dem Punkt P(18 | -9) sollen die Tangenten an die Ellipse  $x^2 + 2y^2 = 54$  gelegt werden.

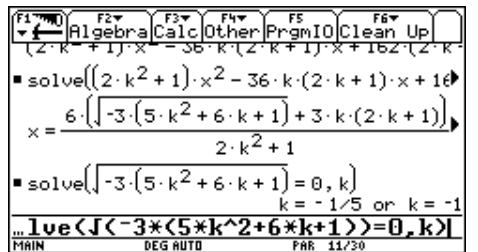
Wir ermitteln die Parameterdarstellung der Ellipse und stellen diese grafisch dar. Anschließend probieren wir zwei Gerade durch den Punkt P mit den Steigungen  $k = -1,25$  bzw.  $k = -0,75$  (gerap<sub>k</sub>, DrawFunc). Keine der beiden Geraden passt. Eine Gerade hat gar keinen Schnittpunkt mit der Ellipse, die andere zwei. Die gesuchte Tangente darf aber nur einen Punkt mit der Ellipse gemeinsam haben.



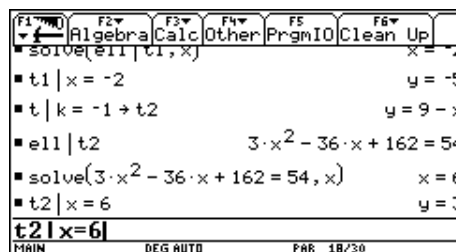
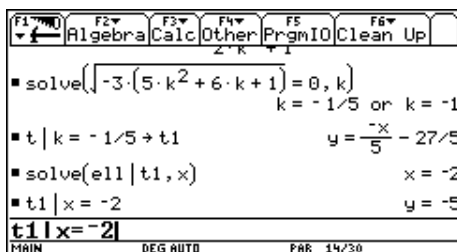
In der Form  $y = k \cdot x + d$  machen wir einen unbestimmten Ansatz für die Tangente  $t$  und es gilt  $k$  und  $d$  zu bestimmen. Wir können den Punkt P(18 | -9) in die Geradengleichung von  $t$  einsetzen und die entstehende Gleichung nach  $d$  lösen. Den Ausdruck für  $d$  setzen wir in  $t$  ein, den neuen Ausdruck speichern wir wieder in  $t$  ab.



Danach setzen wir die Tangentengleichung in die Ellipse ein und erhalten eine quadratische Gleichung in der Variablen  $x$ , die wir nach  $x$  lösen. Es gibt nur dann genau eine Lösung für  $x$ , wenn der Wurzelausdruck in den Lösungen verschwindet. Aus dieser Bedingung kann das fehlende  $k$  ermittelt werden. Damit sind die beiden Tangentengleichungen gefunden.



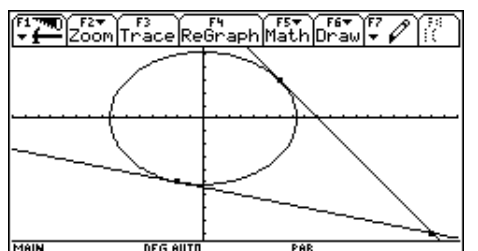
Die Berührungspunkte ermitteln wir, indem wir die Tangenten mit der Ellipse schneiden.



Mit den Befehlen DrawFunc right(t1) bzw. DrawFunc right(t2) überzeugen wir uns von der Richtigkeit unserer Lösung.

Ergebnis:

$$t_1 : y = -\frac{x}{5} - \frac{27}{5}; \quad T_1(-2|-5) \quad t_2 : y = -x + 9; \quad T_2(6|3)$$



### Schmiegunskreis im Punkt einer Kurve

Unter dem Schmiegekreis verstehen wir einen Kreis, der eine Kurve in einem Kurvenpunkt nicht nur berührt, sondern sich auch möglichst gut „anschmiegt“.

Es soll ein Kreis gefunden werden, der den Funktionsgraphen von  $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + x + 5$  im Hochpunkt H berührt.

Wir wollen den Mittelpunkt dieses Kreises durch Schnittpunkte von Kurvennormalen berechnen. Wir definieren zuerst  $f(x)$ , speichern den Funktionsterm in  $y1(x)$  ab und zeigen, dass der Hochpunkt H die Koordinaten  $(4 | 7)$  hat. Die Kurvennormale im Hochpunkt ist parallel zur  $y$ -Achse und hat die Gleichung  $x = 4$ . Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises muss auf dieser Geraden liegen.

In einem ersten Versuch probieren wir Normale an den Stellen  $x = 8$  bzw.  $x = 7$  und schneiden diese mit den Normalen im Punkt H. Die Abbildung rechts zeigt die Ergebnisse. Man erkennt deutlich, dass diese Kreise die gegebene Kurve schneiden und dass der Kreis besser passt, der zur Normalen an der Stelle  $x = 6$  gehört. Vermutung: Die Näherung wird umso besser sein, je dichter die Normalen an die feste Normale im Punkt H heranrücken.

Nun wählen wir im HOME-Fenster eine Variable  $h$  ( $h > 0$ ) und ermitteln die Kurvennormale an der Stelle  $x = 4 + h$ . Diese Gerade schneiden wir mit der Kurvennormalen an der Stelle  $x = 4$ . Im Schnittpunkt kommt die Variable  $h$  vor. Nun lassen wir die Stelle, an der wir die Kurvennormale errichten, immer näher an die Stelle  $x = 4$  heranrücken. Dies geschieht, indem wir  $h$

immer kleiner werden lassen. Wir können zunächst direkt für  $h$  immer kleinere Werte einsetzen und so erkennen, dass der Mittelpunkt des Kreises die Koordinaten  $(4 | 3)$  haben wird.

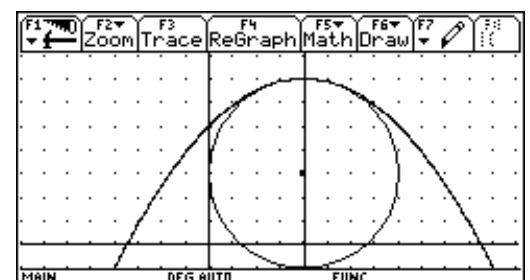
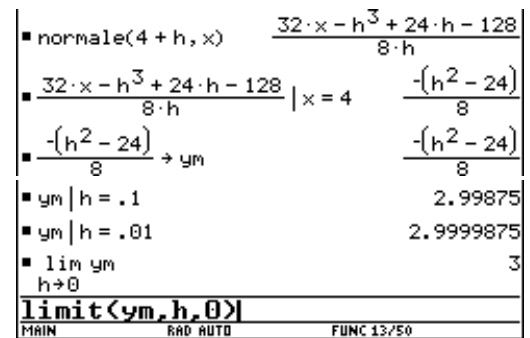
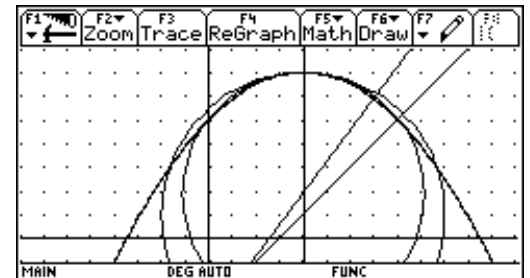
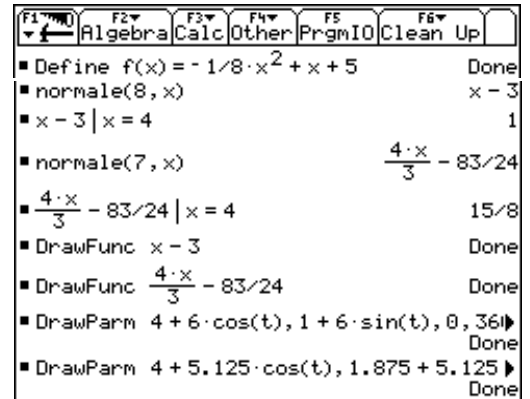
Wir führen nun den Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  mit dem TI durch. Die Eingabe  $\text{limit}(y_m, h, 0)$  liefert tatsächlich für  $y_m$  den Wert 3. Der Radius des Kreises ergibt sich aus  $|\overline{MH}| = 4$ . Die Gleichung des

Kreises lautet somit  $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$  bzw. in Parameterdarstellung

$$x = 4 + 4 \cdot \cos(t) \quad y = 3 + 4 \cdot \sin(t) \quad (0 \leq t < 360)$$

Mit Hilfe des Befehles **DrawParm**, den wir im HOME-Fenster eingeben, bekommen wir die Parameterdarstellung des Kreises gezeichnet. Die korrekte Eingabe lautet:

**DrawParm**  $4 + 4 \cdot \cos(t), 3 + 4 \cdot \sin(t), 0, 360, 4$



### Schmiegekreise einer Ellipse

Wir wollen die Schmiegekreise in den Hauptscheitelpunkten A und C durch Schnittpunkte von Kurvennormalen berechnen.

Wir betrachten die obere Hälfte der Ellipse als Graph der

$$f(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

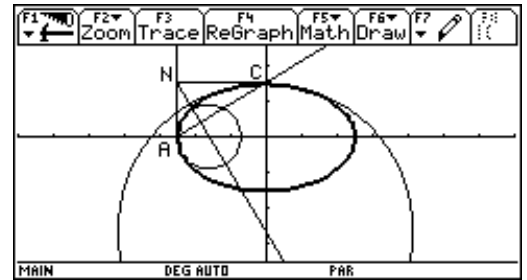
Schmiegekreis im Hauptscheitel A(-a | 0):

Wir ermitteln die Gleichungen der Normalen an den Stellen  $x = -a$  und  $x = -a + h$  und bestimmen deren Schnittpunkt. Anschließend bestimmen wir den Grenzwert für  $h \rightarrow 0$ .

Da die Normale im Punkt A die Gleichung  $y = 0$  hat, brauchen wir nur die Nullstelle der Normalen an der Stelle  $x = -a + h$  ermitteln.

Für den Schmiegekreis im Hauptscheitel A(-a | 0) gilt:

$$M\left(-a + \frac{b^2}{a} \mid 0\right) \Rightarrow r = \frac{b^2}{a}$$



```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
Define f(x) = b/a * sqrt(a^2 - x^2) Done
normale(-a + h, x)
-(2*a - h) * h * (a^2 * x + (a - h) * (a^2 - b^2))
a * (a - h) * b
zeros(
-(2*a - h) * h * (a^2 * x + (a - h) * (a^2 - b^2))
a * (a - h) * b
-(a - h) * (a^2 - b^2)
a^2
)
lim(h -> 0) (-(a - h) * (a^2 - b^2) / a^2) - (a^2 - b^2) / a
expand(-(a^2 - b^2) / a) b^2 / a - a
expand(-(a^2 - b^2) / a)
MAIN DEG AUTO FUNC 5/50
    
```

Schmiegekreis im Hauptscheitel C(0 | b):

Die Kurvennormale im Punkt C hat die Gleichung  $x = 0$ . Diese Normale schneiden wir mit der Kurvennormalen an der Stelle  $x = 0 + h$ .

Für den Schmiegekreis im Hauptscheitel C(0 | b) gilt:

$$M\left(0 \mid b - \frac{a^2}{b}\right) \Rightarrow r = \frac{a^2}{b}$$

Die Mittelpunkte der Schmiegekreise kann man auch konstruktiv bestimmen:

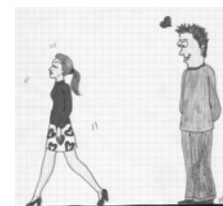
- A mit C verbinden
- durch den Punkt N(-a | b) die Normale n auf AC
- Normale n mit den Koordinatenachsen schneiden

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
normale(0 + h, x)
sqrt(a^2 - h^2) * (a^2 * x - (a^2 - b^2) * h)
a * b * h
sqrt(a^2 - h^2) * (a^2 * x - (a^2 - b^2) * h) | x = 0
-(a^2 - h^2) * (a^2 - b^2)
a * b
lim(h -> 0) (-sqrt(a^2 - h^2) * (a^2 - b^2) / a * b)
-(a^2 - b^2) * sign(a)
b
-(a^2 - b^2) * sign(a) | a > 0 - (a^2 - b^2) / b
expand(-(a^2 - b^2) / b) b - a^2 / b
expand(-(a^2 - b^2) / b)
MAIN DEG AUTO FUNC 5/50
    
```

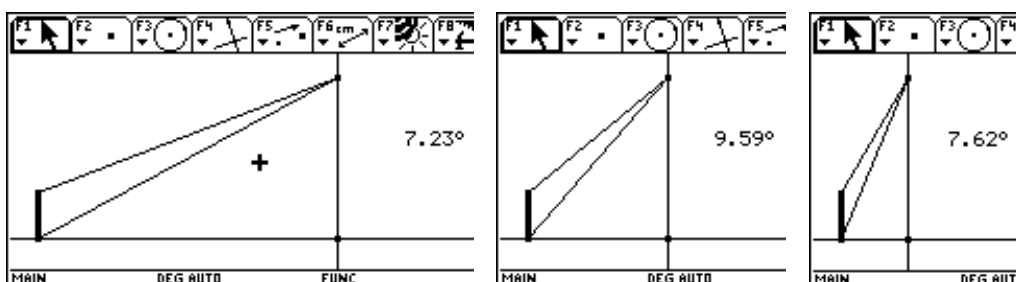
### Der größte Sehwinkel

Eine vielfach gestellte Extremwertaufgabe lautet: Auf einem Sockel (Höhe  $s$ ) steht eine Statue (Höhe  $h$ ). Bei welchem Abstand  $x$  erscheint einem Betrachter (Augenhöhe  $a$  mit  $a < s$ ) die Statue unter dem größten Sehwinkel?  
 Im Internet fand ich folgende Variante des Problems (Idee von Hans-Jürgen Kayser):



Ein Student folgt einer Studentin und bewundert ihre Beine. In welcher Entfernung  $x$  muss er hinter ihr hergehen, um die Beine, soweit sie unter dem Rock hervorschauen, unter größtmöglichem Blickwinkel zu sehen?  
 Die Höhe des Rocksauumes betrage  $l = 48\text{cm}$ , die Augenhöhe des Studenten sei  $a = 169\text{cm}$ .

Mit der Cabri-Geometrie des TI-92 lässt sich das Problem leicht veranschaulichen.



Analytische Lösung:

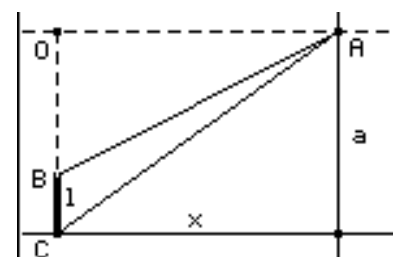
Mit den Bezeichnungen der nebenstehenden Abbildung ergibt sich für den gesuchten Sehwinkel:

$$\angle(BAC) = \angle(OAC) - \angle(OAB)$$

$$\angle(OAC) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) \quad \angle(OAB) = \tan^{-1}\left(\frac{a-l}{x}\right)$$

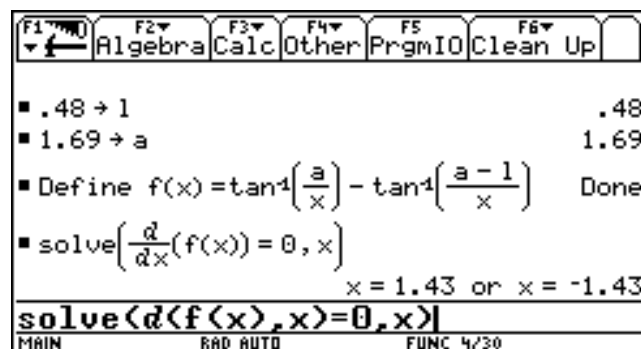
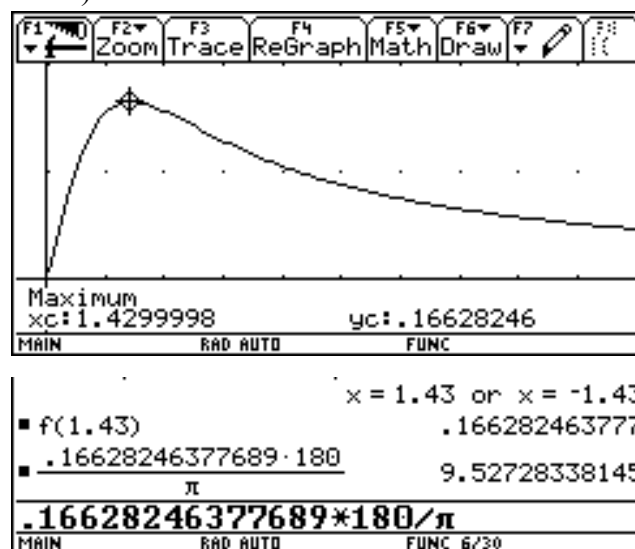
Für den Sehwinkel in Abhängigkeit von der Entfernung  $x$  ergibt sich

$$\text{somit } f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{a-l}{x}\right).$$



Wir stellen die Funktion grafisch dar (MODE RADIAN) und können direkt im GRAPH-Modus über F5 Math das Maximum ermitteln.

Bei der Lösung im HOME-Fenster werden die Nullstellen der ersten Ableitung der definierten Funktion bestimmt.



Ergebnis: Der größte Sehwinkel ergibt sich bei einer Entfernung von 1,43 m und beträgt rund 9,5°.