T^3 EUROPE

Beispiele zum Einsatz des TI-83 und TI-83+ im Unterricht

Don´t Drink and Drive — Ingrid Schirmer-Saneff

Spiel – Satz – Sieg — Heidi Pötzi

Exponential- und Logarithmusfunktion — Ulrike Fiedler

Übergangskurven in Bahn- und Straßenbau — Hubert Voigt

Quadratische Gleichungen — Richard Fiedler

Kleine Aufgabensammlung — Helga Tripes-Apath

Ein Unterrichtsbehelf zum Einsatz moderner Technologien
im Mathematikunterricht

T^3 Österreich / ACDCA am PI-Niederösterreich, Hollabrunn

DON'T DRINK AND DRIVE! DIFFERENZIALRECHNUNG

Ingrid Schirmer-Saneff

Don't drink and drive!

Ein betrunkener Radfahrer fährt auf einer 12m breiten Straße Schlangenlinie (betrachte zur vereinfachten Rechnung die Bewegung des Massenmittelpunktes), wobei er zuerst den rechten Fahrbahnrand berührt, nach 200 m über die Mittellinie auf die andere Fahrbahnseite kommt und in einem Bogen nach weiteren 100 m wieder auf seinen Fahrstreifen zurückkehrt.

a) Ermittle eine Funktion, die diese Bewegung beschreibt und skizziere die Funktion. (Maßstab angeben!)
b) Wie weit kommt der Radfahrer auf die Gegenfahrbahn?
c) Gibt es einen "Punkt", wo er die Richtung des Lenkradeinschlags ändert? Wenn ja, in welcher Entfernung vom Fahrbahnrand und wo ist er?
d) Ist es möglich, mittels Regression am TI eine Funktion zu ermitteln? Wenn ja, welche?
e) Vergleiche die in a) und d) ermittelten Funktionen in Bezug auf Wirklichkeitsnähe!

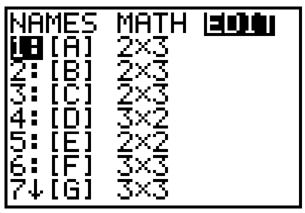
Lösung:

A) Funktionsgleichung und Graph:

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
$f(0)=0$
$f'(0)=0$
$f(200)=6$
$f(300)=6$
$f(0)=0 \rightarrow d=0$
$f'(0)=0 \rightarrow c=0$

$f(200) = a*200^3+b*200^2=6$
$f(300) = a*300^3+b*300^2=6$

Berechnen Sie die Koeffizienten a und b des Gleichungssystems durch Eingabe der erweiterten Matrix im Matrixeditor des TI-83 Plus.

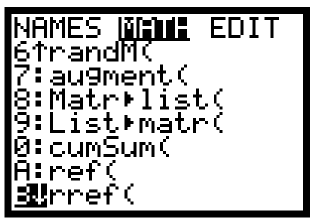


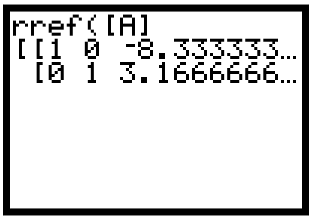
2nd **MATRIX** **EDIT** **2** **ENTER** **3** **ENTER**

200^3 **ENTER** **200^2** **ENTER** **6** **ENTER**

300^3 **ENTER** **300^2** **ENTER** **6** **ENTER**

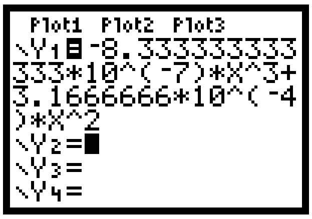
2nd **MATRIX** **MATH** **rref**



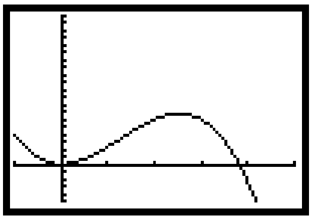


Geben Sie den Namen der Matrix mit **2nd** **MATRIX** **ENTER** ein.

Die Koeffizienten lauten also $a = 8,\dot{3}*10^{-7}$ und $b = 3,1\dot{6}*10^{-4}$.

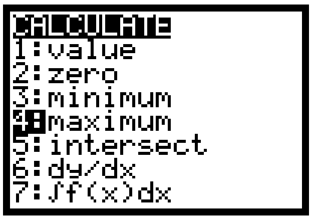


Wählen Sie den y-Editor mit **Y=** und geben sie die Funktion unter y_1 ein.

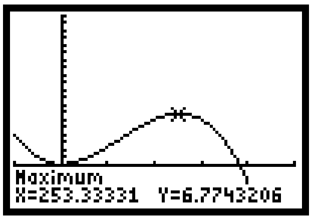


Zeichnen Sie die Funktion mit **GRAPH** und den entsprechenden Window-parametern.

B) Gegenfahrbahn, Funktionsmaximum:



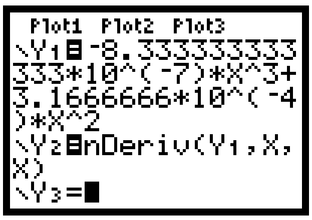
Den maximalen Abstand, den das Fahrzeug auf der Gegenfahrbahn von der Mittellinie einnimmt, berechnen Sie mit **2nd** **CALC** **maximum**. Geben Sie eine linke und rechte Grenze für die Berechnung mit left bound und right bound ein und Sie erhalten das Maximum: x = 253,33 und y = 6,77



Der Radfahrer kommt also ca. einen dreiviertel Meter auf die Gegenfahrbahn.

C) Änderung des Lenkradeinschlags, Wendepunkt:

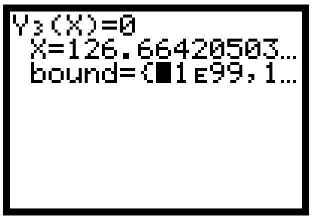
Um den Wendepunkt zu berechnen, geben sie für y_2 die 1. Ableitung von y_1 im Funktionseditor ein.



nDeriv erhalten Sie mit **MATH** **8**

Den Funktionsnamen y_1 erhalten Sie mit **VARS** **Y-VARS** **ENTER** **FUNCTION** **1.**

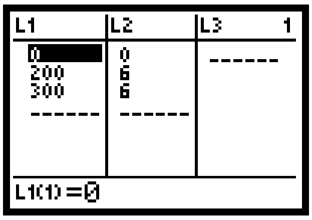
Ebenso geben Sie für y_3 die 2. Ableitung von y_1 ein und setzen Sie diese 0, indem Sie den Solver des TI-83 Plus verwenden.



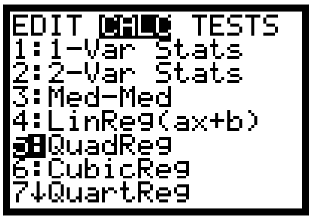
MATH **0** **ENTER**

$y_3(x) = 0$ Geben Sie als Startwert zum Beispiel 100 ein und als Grenzen –10 und 200 und Sie erhalten als x-Koordinate für den Wendepunkt x = 126,66. Den y-Wert des Wendepunktes berechnen Sie mit y_1 (126,66) und erhalten 3,39.

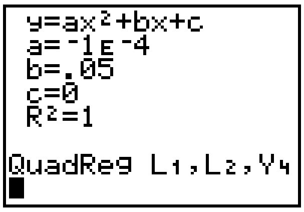
D) und E) Regression, Wirklichkeitsnähe:



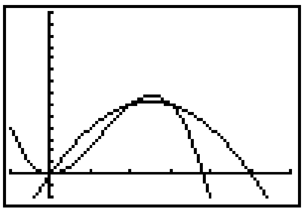
Mit den gegebenen Funktionswerten kann nur eine Funktion 2ten Grades berechnet werden. Die Funktionswerte geben Sie mit **STAT** **EDIT** **1** in L_1 und L_2 ein.



Die quadratische Regression bestimmen Sie mit **STAT** **CALC** **5**: Quad Reg und mit **2nd** **LIST** **1** bzw. **2** geben Sie anschließend die Namen der Listen ein und den Namen der Funktion (z.B.: y_1), wo die quadratische Funktion gespeichert werden soll.



Beide Funktionen geben nur einem kurzen Stück den tatsächlichen Verlauf wieder, da beide Kurven sehr bald über den rechten Fahrbahnrand hinausführen (Könnte vor einem endgültigen Sturz annähernd so sein!). Die quadratische Funktion stellt das Berühren des Fahrbahnrandes nicht dar (f'(0)=0 liefert keine Koordinaten).



SPIEL - SATZ – SIEG

HEIDI PÖTZI

In den folgenden Beispielen (mit möglichen Fragestellungen) wird versucht die Fächer Mathematik und Sport im Unterricht zu verbinden (fächerübergreifender Unterricht ist im Neuen Lehrplan 2000 verpflichtend vorgesehen!), wobei der Ausgangspunkt das Fach Mathematik ist für das passende und interessante Beispiele aus dem Bereich Tennis - Freizeit herangezogen werden. Die Biologie (Atmung) und auch die Physik (Wegdiagramme; Erwärmungsvorgänge,...) können aus einigen Beispielen nicht ausgegrenzt werden.

Der TI 83 wird hier als Hilfsmittel, Darstellungshilfe, zur Kontrolle und zum Experimentieren verwendet.

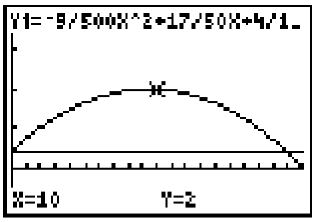
Die im Lehrplan für die 6. Klasse AHS vorgesehen wichtigsten Funktionen eignen sich sehr gut um die vorliegenden Zusammenhänge zu beschreiben. Es sollte den SchülerInnen klar sein, dass diese Funktionen nur Modelle sind, um einen Vorgang oder einen Zusammenhang möglichst gut beschreiben zu können, sie aber in keiner Weise noch die Wirklichkeit exakt darstellen.

POLYNOMFUNKTIONEN- VORHANDSCHLAG

Ein Vorhandschlag wird flach über das Netz gespielt und der Spieler läuft anschließend vor zum Netz. Anhand der Flugkurve (flach und kein rasches Absinken der Flughöhe) kann man erkennen, dass dieser Ball nicht mit Drall geschlagen wurde, das heißt dem Ball wurde weder eine Vorwärtsrotation (Topspin) noch eine Rückwärtsrotation (Slice) mitgegeben. Diesen Schlag nennt man Drive. Ein Vorteil eines geraden Schlages ist, dass bei gleicher Schlägergeschwindigkeit dem Ball eine höhere Fluggeschwindigkeit mitgegeben werden kann. Dieser Schlag eignet sich eben z.B. für einen schnellen Netzangriff:

Beispiel : Flugparabel eines Vorhandschlages
Ein Vorhandschlag wird in einer Höhe von *40 cm* getroffen, die maximale Höhe von *2m* wird nach *10m* erreicht. Nach *170/9m* ist der Ball wieder auf einer Höhe von *40 cm*.

- Skizziere den Graphen und beschrifte die Achsen!
- Berechne die Flugparabel (Polynomfunktion zweiter Ordnung) dieses Vorhandschlages. Zeichne die Funktion mit Hilfe des Rechners und überprüfe deine Rechnung anhand der gegebenen Punkte! Übertrage den Graphen ins Heft!
- Wie weit fliegt der Ball? (Berechnung und Kontrolle anhand der Tabelle oder des Graphen!)

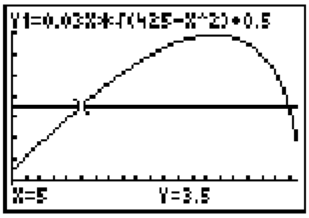


WURZELFUNKTIONEN – TOPSPINLOB

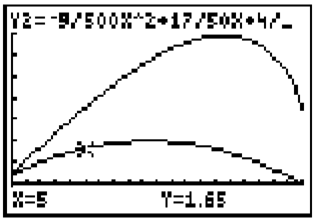
Der Gegner hat nach dem Netzangriff des anderen Spielers mehrere Möglichkeiten darauf zu reagieren. Neben dem Passierschlag oder einem tiefen Slice ist der Topspinlob eine sehr gute Möglichkeit zu punkten, da er z.B. auch gegen die Laufrichtung gerichtet ist. Die eigentliche Gefährlichkeit des Topspinlobs besteht in seiner Flugkurve, da der Ball sehr steil abfällt und dann oft noch unerreichbar ins Feld fällt. Wird der Ball eben zusätzlich zur Translation in Rotation versetzt, hat dies zum einen Einfluss auf die Flugbahn (durch den sog. Magnus Effekt - Physik) und zum anderen wird auch das Absprungverhalten durch den Drall bestimmt. Die Absprunggeschwindigkeit bei Topspinbällen kann sich sogar noch erhöhen, bei mit Rückwärtsdrall geschlagenen Bällen wird die Geschwindigkeit nach dem Aufsprung verringert.

Beispiel : Flugkurve eines Topspinlobs
Beobachtet man den Tennisball bei einem Topspinlob von der Seitentribüne, so beschreibt er zirka eine Kurve der Form $y = a \cdot x\sqrt{b - x^2} + 0.5$. y ist somit die Höhe des Balles bei einer Entfernung von x Meter m. Der Ball hat nach 5 und nach 20 meine Höhe von 3.5 m.

- Skizziere die Flugkurve
- Berechne die Gleichung der Kurve und bestimme die Definitionsmenge!
- In welcher Höhe wurde der Ball getroffen?



-
- Stelle die beiden Flugparabeln in einer Graphik dar und vergleiche diese!

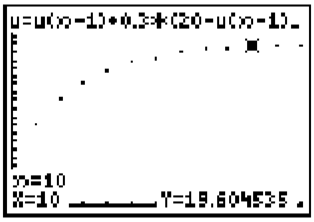


FOLGEN- GETRÄNK

In den Pausen ist es wichtig genügend Flüssigkeit zu sich zu nehmen, da sonst sehr bald Konzentrationsschwächen eintreten können. Zu viel Flüssigkeit darf man jedoch aufgrund der Gefahr von Seitenstechen auch nicht zu sich nehmen. Im folgenden Beispiel wird ein Rekursionsvorgang mit Hilfe einer Folge gezeigt. Um mit diesem speziellen Typ von Funktionen (eingeschränkte Definitionsmenge) im Graphikfenster arbeiten zu können, muss unter MODE von „Function“ auf „Sequence“ umgestellt werden.

Beispiel : Erwärmungsvorgang eines kühlen Getränkes
In der Pause nimmt der Tennisspieler ein kühles Getränk (6°C) aus dem Kühlschrank. Die Umgebungstemperatur beträgt 20°C. Von Minute zu Minute erwärmt sich das Getränk um 30% des Unterschiedes der Umgebungs- und der Flüssigkeitstemperatur.

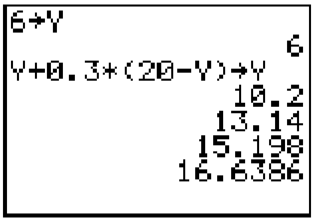
- Welche Temperatur hat das Getränk in der nächsten Pause? (10min später)
- Wann hat das Getränk dieselbe Temperatur wie die Umgebung?



Die rekursive Darstellung der Folge der Temperaturen lautet:

$u(n) = u(n-1) + 0.3(20 - u(n-1))$ mit $u_0 = 6$.

Im HOME-Fenster kann der rekursive Vorgang Schritt für Schritt selber ausgeführt werden. Durch wiederholtes Bestätigen von ENTER erhält man die ersten Werte.



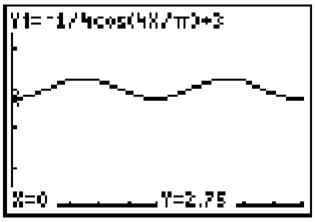
SINUSFUNKTION – ATMUNG

Nach der Getränkepause wird das Tennismatch wieder weitergeführt. Ein Tennisspiel ist körperliche Anstrengung, es wird mehr Energie verbraucht als im Ruhezustand. Dadurch wird mehr Sauerstoff benötigt. Zusammen mit dem Herz-Kreislaufsystem erhält die Atmung den Sauerstoffgehalt im Blut bei körperlicher Anstrengung möglichst konstant bzw. ausreichend groß. Das folgende Beispiel beschäftigt sich mit dem periodischen Vorgang der Atmung und den Anpassungsvorgängen bei körperlicher Anstrengung. Zur Beschreibung wird die Cosinusfunktion verwendet.

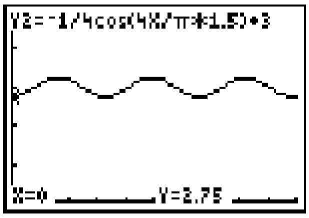
Beispiel: Atmung bei körperlicher Anstrengung eines Tennisspielers

Im Ruhezustand lässt sich das Luftvolumen (absolut) in der Lunge während des Atemvorgangs durch die Funktionsgleichung $y = -\frac{1}{4} \cdot \cos(\frac{4t}{\pi}) + 3$ beschreiben (t...Zeit in Sekunden s, Angabe des Volumens y in Liter l).

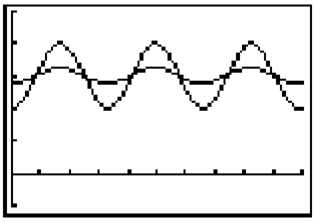
- Zeichne den Graphen für 10 Sekunden (Bogenmaß). Interpretiere den Graphen! Was stellen die Minima und Maxima dar? Wie oft atmet diese Person in einer Minute? Wie groß ist der Unterschied der maximalen und minimalen Volumina in der Lunge?



- Zu Beginn eines Ballwechsels (körperliche Anstrengung) erhöht sich zunächst die Atemfrequenz auf das Eineinhalbfache! Wie kann die Funktion aussehen die diesen Vorgang beschreibt? Zeichne den Graphen und überprüfe deine Vermutung!



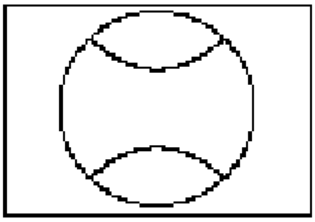
- Dauert die Belastung länger an, erhöht sich nun auch die Atemtiefe. Es wird sowohl mehr Luft ein- als auch ausgeatmet. Die Differenz der Maxima beträgt 2l. Wie muss die Funktion verändert werden um dies darstellen zu können? Wie viel Luft (in Liter) bleibt auch nach dem Ausatmen in der Lunge? Selbst nach maximalem Ausatmen bleiben immer noch 1.5l Luft in der Lunge (Residualvolumen).



KREISGLEICHUNG UND POLYNOMFUNKTION- TENNISBALL

Wie sieht ein Tennisball eigentlich aus? Bei diesem Beispiel wird nur das Bild vorgegeben und die SchülerInnen müssen mit ihren Kenntnissen (Kreisgleichung und Polynomfunktionen, Schnittpunkte berechnen) versuchen die Vorgabe nachzubilden. Das Probieren, Kontrollieren und Korrigieren mit dem TI83 bieten eine Möglichkeit Bekanntes anzuwenden und damit zu experimentieren.

- Versuche den Tennisball nachzubilden!
- Versuche auch den Tennisball aus einer anderen Perspektive zu skizzieren und mit dem Rechner nachzubilden!



EXPONENTIALFUNKTION- NEUIGKEITEN

Beispiel : Verbreitung von Neuigkeiten

Am Ende des Tennismatches ist der Sieger nun natürlich daran interessiert seinen Triumph unter allen Bewohnern des Ortes bekanntzugeben (10000 Einwohner). Nach einer Stunde wissen es alle anwesenden Mitglieder im Tennisclub (300), nach 3 Stunden wissen es schon 800.

- Wann wissen alle Einwohner Bescheid, wenn sich die Neuigkeit exponentiell ausbreitet?
- Zeichne mit Hilfe des Rechners die Funktion und überprüfe deine Rechnung anhand der gegebenen Punkte. Wie viele Personen sind nach 4 Stunden informiert?

EXPONENTIAL- UND LOGARITHMUSFUNKTION

ULRIKE FIEDLER

Der TI-83 Plus bietet im Gegensatz zu den herkömmlichen Taschenrechnern die Möglichkeit, Funktionsgraphen zu zeichnen. So habe ich bei der Einführung des Rechners in einer 6. Klasse Gymnasium damit begonnen, die Graphen der Exponential- und der Logarithmusfunktion zu zeichnen.

EXPONENTIALFUNKTION

DEFINITION: Unter der Exponentialfunktion zur Basis *a* versteht man die Funktion

$$^{a}\exp: R \to R, \quad y = a^x \qquad a \in R^+$$

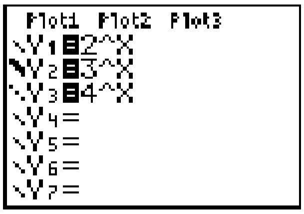
Beispiel:
Zeichne die Graphen der Funktionen 2^x, 3^x und 4^x.
Übertrage dazu die Wertetabelle für das Intervall [–3 ; 3] und achte auf eine geeignete Fenstereinstellung!
Versuche, die wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion für $a > 1$ abzulesen!

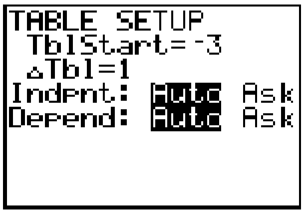
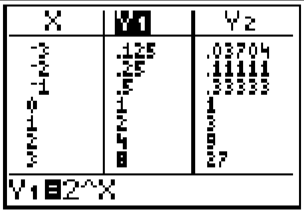
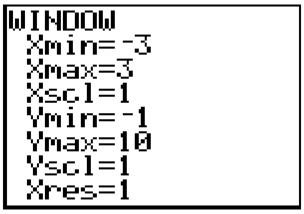
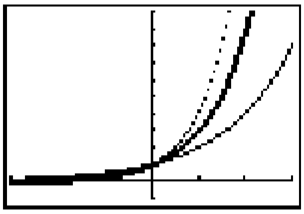
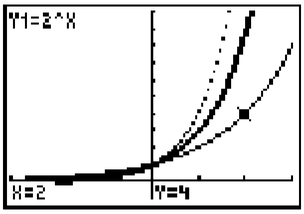
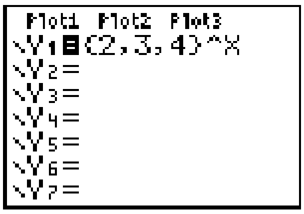
Um die Funktionen darzustellen, wird der **Funktionseditor** [Y=] aufgerufen.

Die Variable x wird mit der Taste [X,T,Θ,n] eingegeben.

Um die Grafen unterschiedlich darzustellen, muss der Cursor auf den Schrägstrich vor der Funktionsgleichung positioniert werden. Durch wiederholtes Drücken der [ENTER]-Taste kann aus verschiedenen Darstellungen für den Funktionsverlauf gewählt werden.

Wird der Cursor auf das „="-Zeichen gestellt, so kann eine Funktion, die nicht gezeichnet werden soll, durch das Drücken der [ENTER]-Taste deaktiviert werden. In unserem Beispiel sind alle drei Gleichheitszeichen dunkel unterlegt, d.h., es werden alle drei Funktionen gezeichnet.



Der **Anfangswert und die Schrittweite der Wertetabelle** können über [2nd][TBLSET] eingegeben werden.	
Die **Wertetabelle** erhält man durch Drücken der Tasten [2nd][TABLE]. In der Tabelle kann man sich mit den Cursorpfeilen ◄►▲▼ nach links, rechts, oben bzw. unten bewegen. Ist der Spaltenkopf dunkel unterlegt, so wird die zugehörige Funktionsgleichung unterhalb der Tabelle angezeigt.	
Wichtig beim Zeichnen von Funktionen ist eine gute **Einstellung des Grafikfensters**. Über die Taste [WINDOW] können wir die Einstellung des Grafikfensters optimieren.	
Durch Drücken der Taste [GRAPH] wird das **Grafikfenster** aktiviert und die Funktionen werden gezeichnet.	
Mit der Taste [TRACE] hat man die Möglichkeit, den Cursor mittels ◄ und ► entlang der Funktionen zu bewegen, wobei sowohl die Funktionsgleichung als auch die Koordinaten der jeweiligen Punkte angezeigt werden. In dieser Einstellung können *x*-Werte auch direkt eingegeben werden. Unter den Funktionen kann man durch Drücken der Tasten ▲ und ▼ wechseln.	
<u>Anmerkung:</u> Durch das Verwenden der geschwungenen Klammern [2nd]{ bzw. [2nd]} kann die Eingabe der Funktionen deutlich verkürzt werden! Natürlich geht so die Möglichkeit verloren, die Funktionen unterschiedlich darzustellen.	

<u>Man erkennt die wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion:</u>

➔ Der Graph der Exponentialfunktion verläuft zur Gänze oberhalb der *x*-Achse.

➔ Die negative *x*-Achse ist einzige Asymptote (wenn $a > 1$).

➔ Die Funktionen sind nach oben unbeschränkt.

➔ Die Funktionen enthalten stets den Punkt P (0 / 1)!

➔ Die Funktionen sind streng monoton wachsend (wenn $a > 1$).

➔ Je größer die Basis a, desto steiler ist der Graph im 1. Quadranten.

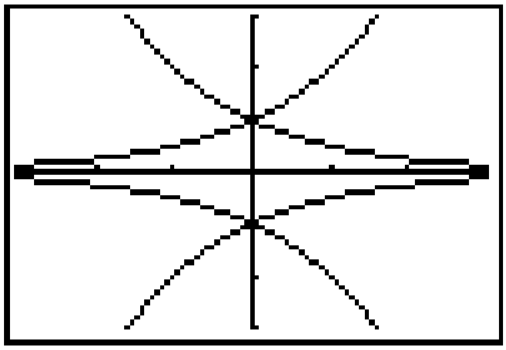
➔ An der Stelle $x = 1$ ($\Rightarrow y = a$) kann man die Basis ablesen.

Übungsbeispiel:

Verfahre analog für die Funktionen $\left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{3}\right)^x, \left(\frac{1}{4}\right)^x$ und formuliere die Eigenschaften der Exponentialfunktion für $0 < a < 1$!

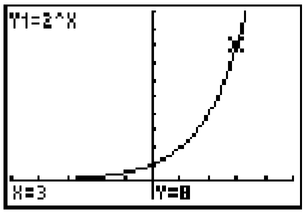
Wie liegen die Graphen der Funktionen $y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ zueinander?

Ordne folgende Funktionen den Graphen zu:

$y_1 = 2^x$ $y_2 = -2^x$ $y_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $y_4 = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$	

LOGARITHMUSFUNKTION

Aus dem Graphen der Exponentialfunktion $y = 2^x$ kann man erkennen, dass die Gleichung $2^x = 8$ genau eine Lösung hat.
Auch der Wertetabelle kann man entnehmen, dass die richtige Lösung $x = 3$ lautet.



Um die Lösung der Gleichung $a^x = b,\ a \in R^+ \setminus \{1\}, b \in R^+$ explizit darstellen zu können, muss neben dem Wurzelziehen eine weitere Umkehroperation des Potenzierens eingeführt werden. Wir nennen die Lösung obiger Gleichung den **Logarithmus von *b* zur Basis *a*** (Schreibweise: $x = {}^a\log b$).

DEFINITION: Unter der Logarithmusfunktion zur Basis a versteht man die Funktion

$${}^a\log : R^+ \to R,\ y = {}^a\log x \qquad a \in R^+ \setminus \{1\}$$

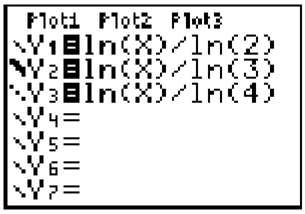
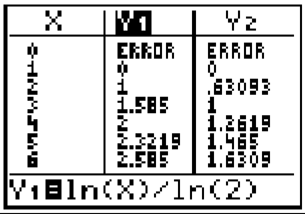
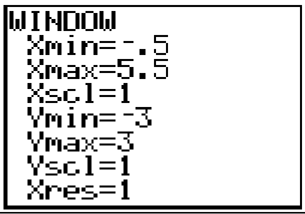
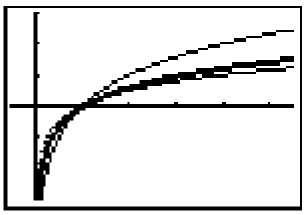
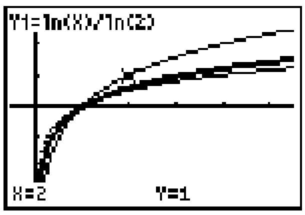
Da Logarithmieren und Potenzieren Umkehroperationen sind, bezeichnen wir die Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Man erhält ihren Graphen also durch Spiegelung der Exponentialfunktion an der 1. Mediane.

Beispiel:
Zeichne die Graphen der Funktionen ${}^2\log x$, ${}^3\log x$ und ${}^4\log x$.
Übertrage dazu die Wertetabelle für das Intervall] 0 ; 5] und achte auf eine geeignete Fenstereinstellung!
Versuche, die wichtigsten Eigenschaften der Logarithmusfunktion für $a > 1$ abzulesen!

Nach dem Erarbeiten der Rechenregeln für Logarithmen lässt sich leicht die Umrechnungsformel für Logarithmen beliebiger Basen herleiten, um diese auf den dekadischen oder den natürlichen Logarithmus (welche am Rechner zur Verfügung stehen) zurückführen zu können:

$$a^{{}^a\log x} = x \Rightarrow \lg a^{{}^a\log x} = \lg x \Rightarrow {}^a\log x \cdot \lg a = \lg x \Rightarrow {}^a\log x = \frac{\lg x}{\lg a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

<table>
<tr><td>Um die Funktionen darzustellen, wird der Funktionseditor [Y=] aufgerufen.

Die Logarithmen werden mit Hilfe der Umrechnungsformel eingegeben:</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Die Wertetabelle erhalten wir wieder durch Drücken der Tasten [2nd][TABLE].</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Eine gute Einstellung des Grafikfensters wäre:</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Durch Drücken der Taste [GRAPH] aktivieren wir wieder das Grafikfenster:</td><td></td></tr>
<tr><td>Mit der Taste [TRACE] bewegen wir uns wieder entlang der einzelnen Funktionsgraphen.</td><td>
</td></tr>
</table>

Man erkennt die wichtigsten Eigenschaften der Logarithmusfunktion:

- ➔ Da die Funktion nur für positive reelle Zahlen definiert ist, verläuft der Graph rechts der y-Achse.
- ➔ Die negative y-Achse ist einzige Asymptote (wenn $a > 1$).
- ➔ Die Funktionen sind nach unten und nach oben unbeschränkt.
- ➔ Die Funktionen enthalten stets den Punkt $P(1/0)$!
- ➔ Die Funktionen sind streng monoton wachsend (wenn $a > 1$).
- ➔ Je kleiner die Basis a, desto steiler ist der Graph im 1. Quadranten.
- ➔ An der Stelle mit $y = 1$ ($\Rightarrow x = a$) kann man die Basis ablesen.

Übungsbeispiel:

Verfahre analog für die Funktionen ${}^{\frac{1}{2}}\log x$, ${}^{\frac{1}{3}}\log x$, ${}^{\frac{1}{4}}\log x$ und formuliere die Eigenschaften der Logarithmusfunktion für $0 < a < 1$!

Wie liegen die Graphen der Funktionen $y = {}^{a}\log x$ und $y = {}^{\frac{1}{a}}\log x$ zueinander?

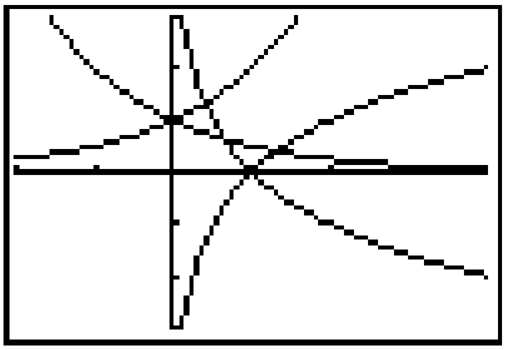
Ordne folgende Funktionen den Graphen zu:

$y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$y_2 = 2^x$

$y_3 = {}^{\frac{1}{2}}\log x$

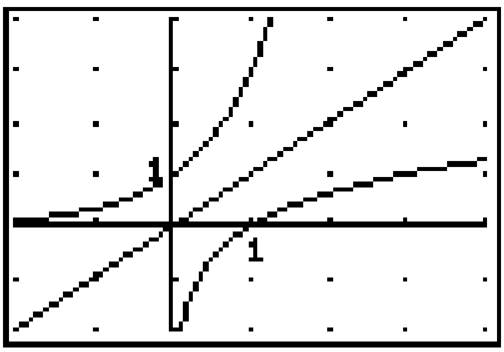
$y_4 = {}^{2}\log x$



Welche drei Funktionen sind hier dargestellt?

Zum leichteren Ablesen ist das **Gitter** eingezeichnet. Dies ist über [2nd][FORMAT] mittels des Befehls GridOn möglich.

Das **Beschriften der Einheiten** erfolgt über [2nd][DRAW] → 0: Text und anschließendes Bewegen des Cursors an die gewünschte Stelle.



ÜBERGANGSKURVEN IN BAHN- UND STRASSENBAU **HUBERT VOIGT**

Im europäischen Übereinkommen über die Hauptstrassen des Internationalen Verkehrs heißt es:

In allen Fällen sind in Kurven Kreisbögen mit kleinem Radius allmählich fortlaufend durch Übergangsbögen mit stetigen Krümmungsänderungen auf eine solche Länge zu verbinden, dass der Verkehrsteilnehmer seine Geschwindigkeit leicht anpassen kann.

Der unmittelbare Anschluss eines Kreisbogens an eine Gerade oder an einen Gegenbogen bewirkt bei der Durchfahrt von Fahrzeugen einen seitlichen Ruck durch die plötzliche Richtungsänderung

Der Überleitungsbogen ist eine Kurve mit stetig sich veränderndem Radius (Krümmung), der sich beim Übergang aus der Geraden von unendlich bis auf den Radius des sich anschließenden Kreisbogens vermindert.

Definition der Krümmung (hier mit kr abgekürzt): $\boxed{kr = \frac{Winkeländerung}{Bogenlänge} = \frac{\Delta w}{\Delta s}}$

Ein Kreis ist eine Kurve mit konstanter Krümmung. Sein Krümmungswert lässt sich leicht herleiten, wenn man den :vollen Kreisumfang betrachtet:

$$\boxed{\frac{Winkeländerung}{Bogenlänge} = \frac{\Delta w}{\Delta s} = \frac{2\pi}{2r\pi} = \frac{1}{r}}$$

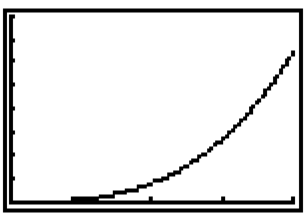
Für die Krümmung einer Funktionskurve an einer Stelle x erhält man die Formel

$$\boxed{kr(x) = \frac{y''(x)}{(1+y'(x)^2)^{1,5}}}$$

In einem Hoch- bzw. Tiefpunkt ist kr(x)=y‘‘(x).

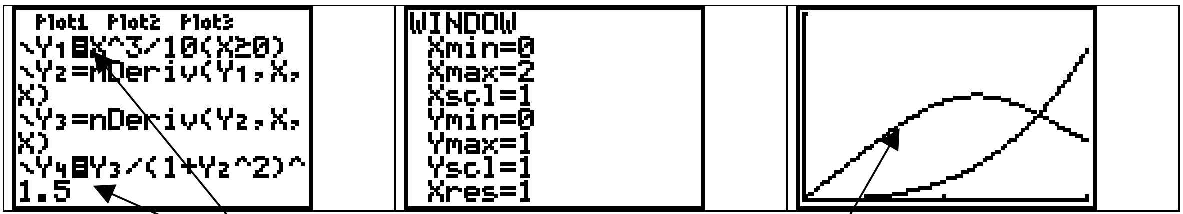
Ist eine Kurve dritten Grades der Form $y = a * x^3$ als Überleitungskurve geeignet?

Eine Überleitungskurve möge in einem Koordinatensystem durch $y = \frac{x^3}{10}$ beschrieben werden.

	WINDOW Xmin=0 Xmax=4 Xscl=1 Ymin=0 Ymax=8 Yscl=1 Xres=1	Die Kurve scheint die gewünschten Eigenschaften zu haben. Sie beginnt mit der Krümmung kr=0 im Ursprung. Im Folgenden wird der Verlauf der Krümmung untersucht.

DER VERLAUF DER KRÜMMUNG

Mit Hilfe der Ableitungsfunktion nDeriv, die man im MATH-Menü findet, lässt sich der Graph der Ableitungen erstellen. Die Funktionsvariablen Y_1 und Y_2 findet man unter VARS-y-VARS.



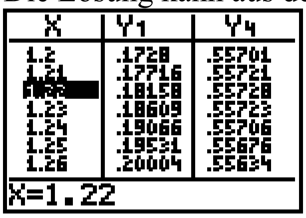
Nur die erste und vierte Zeile sind aktiv. Krümmungskurve

Wie man sieht, nimmt die Krümmung bis zum Maximum fast linear zu. Fahrtechnisch bedeutet das, dass bei gleichbleibender Geschwindigkeit das Lenkrad beinahe gleichmäßig gedreht werden kann.

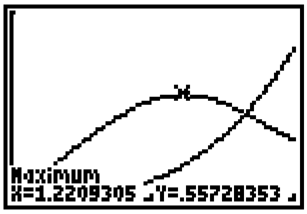
Die angegebene Funktion dritten Grades wäre für eine Überleitungskurve gut geeignet.

Aufgabenstellung: An der Stelle mit der grössten Krümmung soll die Kurve in einen Kreisbogen übergehen.

Die Lösung kann aus der Tabelle (2nd GRAPH) abgelesen werden.



Die Tabelleneinstellung wird mit 2nd WINDOW durchgeführt. Im Grafikfenster (siehe rechts) kann der Maximalpunkt mit 2nd TRACE-4 bestimmt werden.

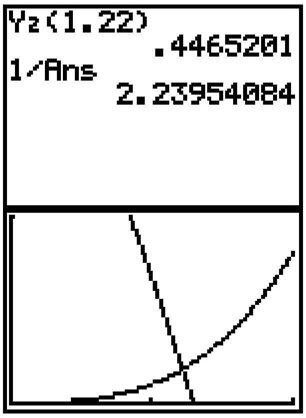


Beachte, dass sich das Fadenkreuz auf der Krümmungsfunktion befinden muss. Ein Wechsel wird mit den Cursor - hoch/tief - Tasten bewirkt.

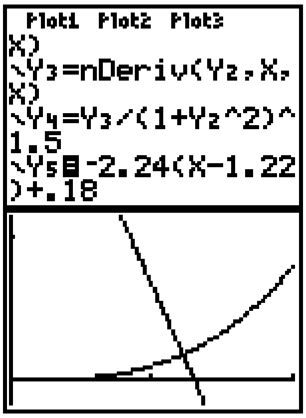
DER KRÜMMUNGSKREIS

Der gesuchte Krümmungskreis wird im weiteren geometrisch ermittelt. Die benötigten Zahlen werden auf 2 Nachkommastellen gerundet.
Der Radius des Krümmungskreises im P(1,22/0,18) ist der Kehrwert von 0,55728, also r=1,79.

Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der Normalen, die durch P geht. Für den gesuchten Wert der ersten Ableitung erhält man mit Y2(1.22) 0,45. (Wechsle in den „Rechenbildschirm“ mit 2nd MODE (QUIT))

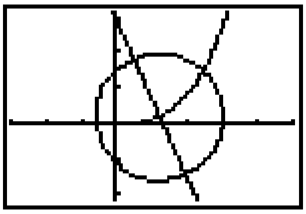


Die Gleichung der Normalen in Punkt-Richtungsform wird der Funktionenliste hinzugefügt:



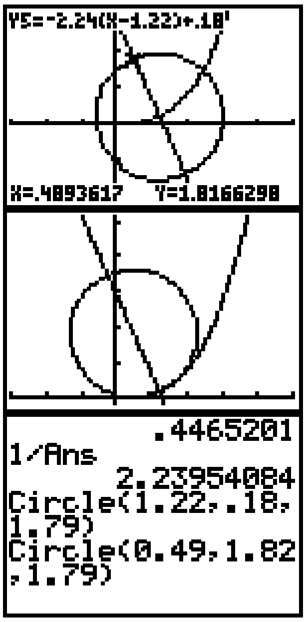
Die gezeichnete Gerade erscheint nicht als Normale auf die Kurve. Mit ZOOM-5 wird eine quadratische Koordinatenskalierung generiert.

Zur näherungweisen Bestimmung des Kreismittelpunktes wird ein Kreis mit M(1,22/0,182) und r=1,79 gezeichnet. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises ist sein Schnittpunkt mit der Normalen.



Wechsle in den Rechenschirm (QUIT) und rufe mit 2nd PRGM das DRAW-Menü auf. An der Position 9 steht der CIRCLE-Befehl. Seine Syntax lautet: CIRCLE(x,y,r).
Im ersten Anlauf ist der Kreis nicht zu sehen, er ist zu groß. Mit ZOOM-3 geht man sozusagen einen Schritt zurück. Die Funktion wird aber erst mit ENTER aktiviert. Um den Kreis zu erhalten, wechsle wieder in den Rechenschirm und drücke ENTER.

Mit dem TRACE-Befehl tasten wir uns an den gesuchten Punkt heran.



Beachte, dass sich das Fadenkreuz auf der Geraden bewegen muss.
Nun ist die Aufgabe beinahe gelöst. Mit den gefundenen Koordinaten und dem bekannten Radius zeichnen wir einen neuen Kreis, indem der CIRCLE-Befehl erneut angewendet wird.

Der vorher gezeichnete Hilfskreis wird zuvor mit 2nd PRGM-1 gelöscht.

QUADRATISCHE GLEICHUNGEN

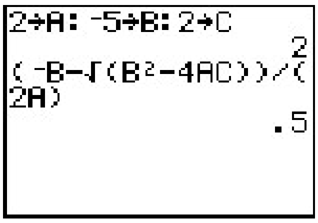
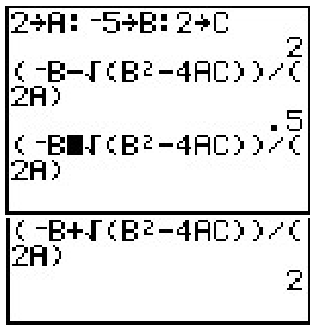
RICHARD FIEDLER

Der TI-83 bietet viele verschiedene Möglichkeiten für das Lösen von quadratischen Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$. Vier Lösungswege wollen wir anhand des folgenden Beispiels vorerst in der Menge der reellen Zahlen $\boldsymbol{R}$ erarbeiten.

Beispiel: Löse die Gleichung $2x^2 - 5x + 2 = 0$!

1. Möglichkeit:

Wir ermitteln die Lösungen durch direkte Eingabe der großen Lösungsformel ${}_1x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

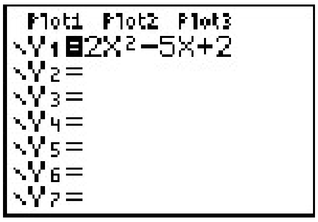
Dazu speichern wir zuerst die Koeffizienten unter *A*, *B* und *C* ab. Dies kann in einem Arbeitsgang geschehen, wenn die einzelnen Speicherbefehle durch einen **:** (zu finden über der [.] - Taste) getrennt werden. [2] [STO▶] [ALPHA] A [ALPHA] **:** [(-)] [5] [STO▶] [ALPHA] B [ALPHA] **:** [2] [STO▶] [ALPHA] C [ALPHA] **:** [ENTER]	
Dann wird die Lösungsformel für die kleinere Lösung (also mit dem [−]) eingegeben. ACHTUNG: Unterscheide zwischen dem Vorzeichenminus [(-)], welches kürzer und leicht erhöht dargestellt wird, und dem Rechenzeichen [−]. Denke auch daran, Zähler und Nenner einzuklammern! Bei der Eingabe der √ wird automatisch eine Klammer (geöffnet, die geschlossen werden muss. Nach Drücken von [ENTER] wird als erste Lösung 0,5 angezeigt.	
Um die zweite Lösung zu erhalten, drücken wir [2nd][ENTRY]. Dies bewirkt, dass die letzte Eingabe wieder angezeigt wird und bearbeitet werden kann. Mittels der Cursorpfeile bewegen wir uns zum [−] und ersetzen es durch ein [+]. So erhalten nach Betätigen der [ENTER]-Taste als zweite Lösung 2. Die Lösungsmenge lautet also **L** = { 0,5 ; 2 }	

2. Möglichkeit:

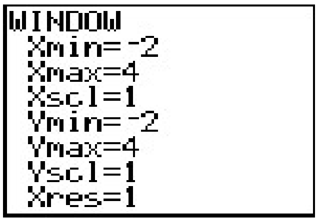
Wir lösen die Gleichung grafisch, indem wir die gemeinsamen Punkte der beiden Funktionen $y_1 = 2x^2 - 5x + 2$ und $y_2 = 0$ (x-Achse) bestimmen.

Um die Funktion $y_1 = 2x^2 - 5x + 2$ darzustellen, wird der **Funktionseditor** [Y=] aufgerufen.

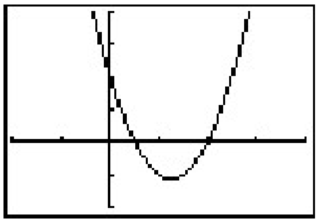
Die Variable x wird mit der Taste [X,T,Θ,n] eingegeben.



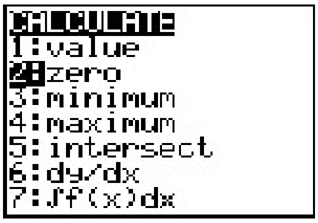
Wichtig beim Zeichnen von Funktionen ist eine gute **Einstellung des Grafikfensters**. Über die Taste [WINDOW] können wir die Einstellung des Grafikfensters optimieren.



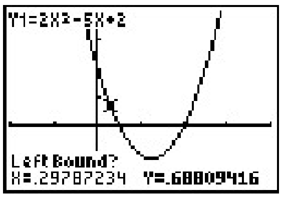
Durch Drücken der Taste [GRAPH] wird das **Grafikfenster** aktiviert und die Funktion wird gezeichnet.

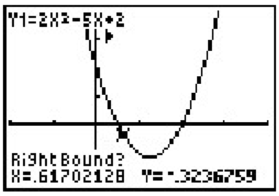


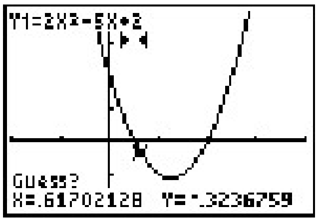
Für das **<u>Bestimmen der Nullstellen</u>** brauchen wir das Calculate-Menü [2nd][CALC], welches die verschiedensten Berechnungen am Funktionsgrafen erlaubt. Der Menüpunkt **2:zero** ermöglicht die Ermittlung der <u>Nullstellen einer Funktion</u>.



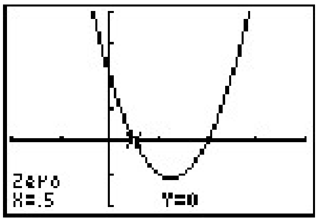
Bei Auswahl von **zero** wird der Graf mit Cursor eingeblendet. Mit den Cursorpfeilen [◄] und [►] bewegt man den Cursor einmal links neben die Nullstelle, bestätigt mit [ENTER] und bestimmt dann analog die rechte Grenze des Intervalls, in welchem die Nullstelle zu finden ist.







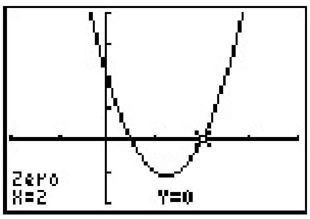
Den mit „Guess?“ gemachten Vorschlag bestätigen wir mit [ENTER], worauf der Rechner die linke Nullstelle mit 0,5 berechnet



Durch neuerliches Aufrufen des Calculate-Menüs [2nd][CALC] und Auswählen des Menüpunktes **2:zero** ermitteln wir analog die rechte Nullstelle der Funktion.

Die beiden Nullstellen liegen also bei $x_1 = 0{,}5$ und $x_2 = 2$.

Somit lautet die Lösungsmenge **L** = { 0,5 ; 2 }

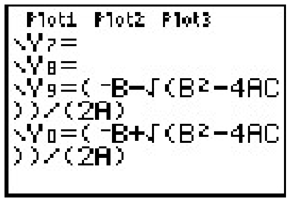


3. Möglichkeit:

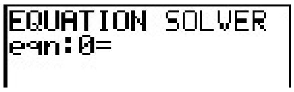
Das Ermitteln der Lösungen der quadratischen Gleichung bietet auch die Möglichkeit, den Gleichungslöser „Solver“ einzusetzen. Dazu müssen wir die Lösungsformel auf die Form „0 =“ bringen:

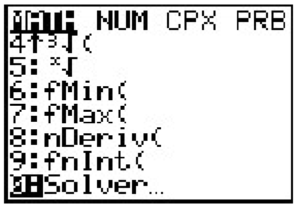
$$0 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - x_1 \qquad \text{bzw.} \qquad 0 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - x_2$$

Um die Lösungsformel nicht jedes Mal aufs Neue eingeben zu müssen, bedienen wir uns eines kleinen Tricks. Wir rufen den **Funktionseditor** [Y=] auf und geben unter Y9 und Y0 die beiden Lösungsformeln ein.

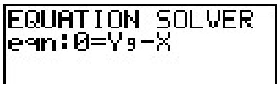


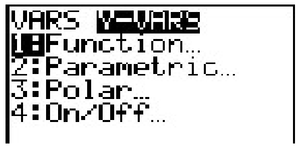
Der Solver befindet sich im [MATH]-Menü als letzter Menüpunkt **0:Solver**. Daher ist es günstig, nach Aufruf des Menüs die Auswahl mittels [▲] zu treffen. Nach Bestätigen mit [ENTER] erscheint der folgende Bildschirm:

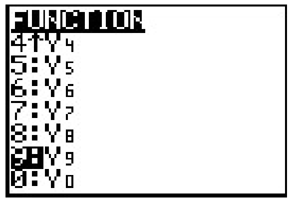




Unsere beiden zu lösenden Gleichungen haben die Form 0 = Y9 – X bzw. 0 = Y0 – X. Um die beiden Terme Y9 bzw. Y0 zu erhalten, müssen wir aus dem Menü [VARS] mittels [▶] auf Y-VARS wechseln und können den Menüpunkt **1:Function...** wählen. Aus der Liste der Funktionen wählen wir Y9. Durch die Bestätigung mit [ENTER] wechseln wir automatisch zurück in den Solver, wo wir die Gleichung mit [–] X ergänzen.



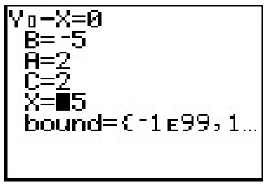


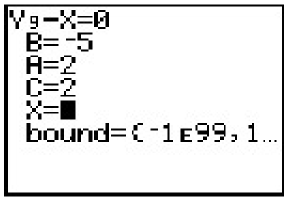


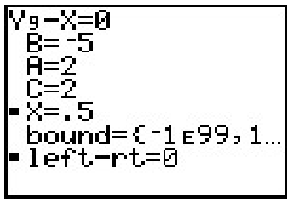
Nach Betätigen der [ENTER]-Taste erhalten wir nebenstehenden Bildschirm.

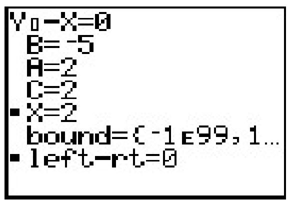
Unter der Gleichung erscheinen die in der Gleichung vorkommenden Variablen. Wir belegen *B* mit – 5, *A* und *C* mit 2 und stellen den Cursor neben die zu berechnende Variable X (die zunächst durch einen beliebigen Startwert belegt ist). Mit der Tastenkombination [ALPHA][SOLVE] erhalten wir die Lösung 0,5 der Gleichung .

Mittels der Cursortaste [▲] bewegen wir uns wieder nach oben zur Gleichung und fügen über [VARS] [▶] Y-VARS **1:Function...** aus der Liste der Funktionen Y0 ein. Wir stellen uns wieder neben die zu berechnende Variable X und erhalten durch die Tastenkombination [ALPHA][SOLVE] die zweite Lösung 2 der Gleichung. Somit lautet die Lösungsmenge **L** = { 0,5 ; 2 }.









4. Möglichkeit:

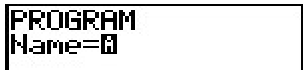
Ein einfaches Programm ermöglicht die Berechnungen der Lösungen nach Eingabe der Koeffizienten.

Über [PRGM] öffnen wir das Menü, welches die Ausführung, Bearbeitung und das Erstellen von Programmen erlaubt.

Wir wollen ein neues Programm schreiben und wählen daher NEW. Nach Bestätigen von **1:Create New** mit [ENTER] wird nach einem Namen für das Programm gefragt. Da dieser mit einem Buchstaben beginnen muss, ist automatisch die [ALPHA]-Taste aktiviert, was am Aussehen des Cursors (▣) erkennbar ist.

Da alle Programme alphabetisch geordnet werden und jenes zum Lösen von quadratischen Gleichungen häufig gebraucht wird, lasse ich den Namen mit A beginnen.

Nach Bestätigen des Namens mit [ENTER] kommen wir in den Programmeditor.



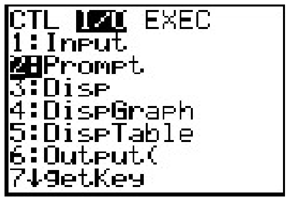
Vor jedem neuen Befehl muss ein Doppelpunkt **:** stehen. (Es muss nicht notwendigerweise eine neue Zeile begonnen werden.)

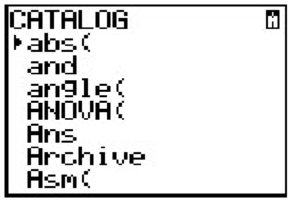
Wenn wir das Programm aufrufen, soll zuerst nach den Werten für die Variablen *A*, *B* und *C* gefragt werden. Dies erreichen wir mittels des Befehls **Prompt**.

Die notwendigen Befehle kann man auf <u>zweierlei Art</u> finden:

Entweder durch Betätigen der Tasten [PRGM][▸], wodurch wir ins Programm **I**nput/**O**utput-Menü gelangen, welches jene Befehle enthält, welche während der Ausführung eines Programms die Eingabe und Ausgabe steuern.
Dort wählen wir **2:Prompt**, wodurch wir wieder in den Programmeditor gelangen.

Oder durch Aufrufen des Katalogs (welcher eine alphabetische Liste aller verfügbaren Befehle und Funktionen enthält) über die Tastenkombination [2nd][CATALOG]. Nach dessen Aufruf ist wieder automatisch die [ALPHA]-Taste aktiviert. (Im rechten oberen Bildschirmeck erscheint das ▣!). Wir wählen P und bewegen uns dann mit [▾] nach unten zum **Prompt**-Befehl. Nach Betätigen der [ENTER]-Taste kommen wir wieder in den Programmeditor.





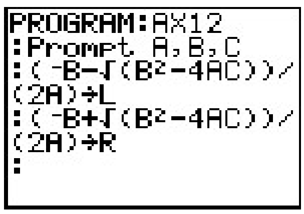
Wir müssen nun die Variablen *A*, *B* und *C* eingeben:

[ALPHA] A [,] [ALPHA] B [,] [ALPHA] C [ENTER]

Dann erfolgt die Eingabe der Lösungsformeln. Nach Berechnen der Lösung muss der Rechner das Ergebnis irgendwo abspeichern. (Ich habe L für die linke Nullstelle und R für die rechte Nullstelle gewählt.)

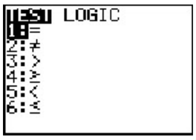
[(] [(-)] [ALPHA] B [−] √ (B [x^2] [−] [4] [ALPHA] A [ALPHA] C [)][)] [÷] [(] [2] [ALPHA] A [)] [STO▸] [ALPHA] L [ENTER]

[(] [(-)] [ALPHA] B [+] √ (B [x^2] [−] [4] [ALPHA] A [ALPHA] C [)][)] [÷] [(] [2] [ALPHA] A [)] [STO▸] [ALPHA] R [ENTER]



Zum Schluss sollen die Ergebnisse in der Form X1 = 0,5 und X2 = 2 am Bildschirm angezeigt werden. Dies geschieht mittels des Befehls **Disp**.

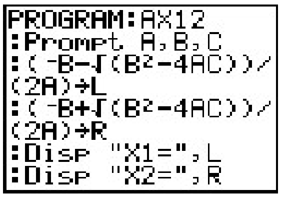
Anzuzeigender Text muss dabei zwischen " eingegeben werden. Durch einen Beistrich getrennt werden die Speicherplätze der beiden Lösungen hinzugefügt.



Die Anführungszeichen " befinden sich über der Taste [+],

das Gleichheitszeichen = finden wir im Menü [2nd][TEST].

Mit [2nd] [QUIT] kann der Programmeditor verlassen werden.

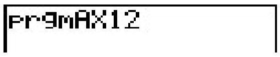


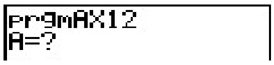
Zum Aufrufen des Programms drücken wir wieder [PRGM] und wählen EXEC.

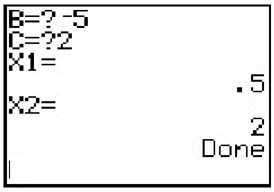
Wir bestätigen die Wahl des Programms AX12 mit [ENTER], worauf wir in den Arbeitsbildschirm wechseln, in welchem der Programmname erscheint. Nach neuerlicher Betätigung der [ENTER]-Taste werden wir nach den Koeffizienten gefragt. Wir geben für A 2, für B – 5 und für C 2 ein und bestätigen jede Eingabe mittels [ENTER].

Nach der letzten Betätigung der [ENTER]-Taste werden die beiden Lösungen berechnet.

Die Lösungsmenge ist **L** = { 0,5 ; 2 }.







Beim **Rechnen in der Menge der komplexen Zahlen *C*** können die zweite und die dritte Möglichkeit nicht angewendet werden. Einfache Schritte verhindern das Erscheinen einer Fehlermeldung beim Lösen durch die direkten Eingabe der Formel, eine kleine Änderung unseres Programms AX12 ermöglicht das Ermitteln der Lösungsmenge in ***C***.

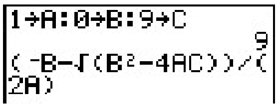
Beispiel: Löse die Gleichung $x^2 + 9 = 0$!

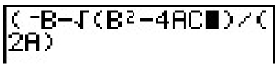
Wir speichern die Koeffizienten $A = 1$, $B = 0$ und $C = 9$.

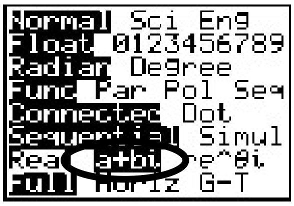
[1] [STO▶] [ALPHA] A [ALPHA] **:** [0] [STO▶] [ALPHA] B [ALPHA] **:** [9] [STO▶] [ALPHA] C [ALPHA] **:** [ENTER]

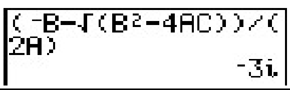
Nach der **Eingabe der Formel** erhalten wir nach Drücken der [ENTER]-Taste die Fehlermeldung „Nonreal Answer". Wenn wir **2:Goto** wählen, so wird an der Cursorposition ersichtlich, dass beim Berechnen der Wurzel Probleme aufgetreten sind.

Wenn wir im [MODE]-Menü den Modus der komplexen Zahlen wählen, so werden durch ein neuerliches Drücken der [ENTER]-Taste die Lösungen problemlos ermittelt.



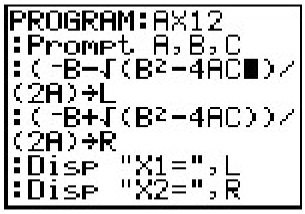






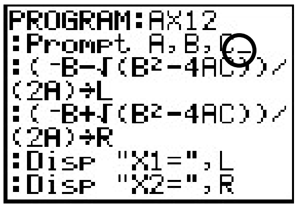
Wenn wir unser Programm AX12 zum Berechnen der Lösungen aufrufen und die Koeffizienten A, B, C mit den Werten 1, 0 und 9 belegen, so erhalten wir auch hier nach Betätigen der [ENTER]-Taste die Fehlermeldung „Nonreal Answer“.

Wenn wir **2:Goto** wählen, so wechseln wir automatisch in den Programmeditor und auch hier wird an der Cursorposition ersichtlich, dass beim Berechnen der Wurzel Probleme aufgetreten sind.

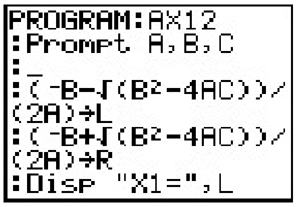


Eine Möglichkeit wäre auch hier, im Modus-Menü auf den Zahlenmodus der komplexen Zahlen umzustellen.

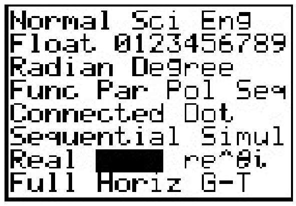
Eine kleine Änderung des Programms führt jedoch zu einer dauerhaften Lösung des Problems.



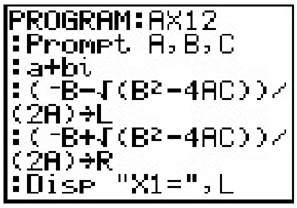
Mit [▲] stellen wir uns neben die Variable C. Wir könnten direkt mit einem **:** den notwendigen Befehl eingeben. Der Übersicht halber ist es jedoch günstig, eine neue Zeile einzufügen. Dazu wählen wir [2nd][INS] (Cursorform _) und drücken [ENTER]. Automatisch wird eine Zeile mit **:** am Beginn eingefügt.



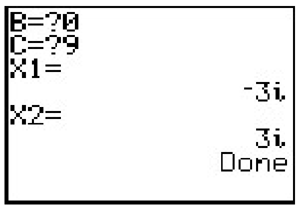
Wir wechseln wieder ins [MODE]-Menü und wählen den Modus der komplexen Zahlen. Nach Bestätigen mittels der [ENTER]-Taste wechseln wir erneut in den Programmeditor. Mittels [2nd][QUIT] verlassen wir den Programmeditor und kommen wieder zurück zum Arbeitsbildschirm.



Anmerkung: Eine irrtümlich eingefügte leere Zeile, die mit einem **:** beginnt, stört den Ablauf des Programms nicht. Sie kann mit [DEL] entfernt werden.



Wir drücken einfach [ENTER] und geben erneut die Werte für die Koeffizienten ein. Jetzt erhalten wir die komplexen Lösungen ± 3i.



AUFGABEN AUS DEM UNTERRICHT FÜR DIE ARBEIT MIT EINEM TI-83+

2. KLASSE HLW, 1. JAHR MATHEMATIK, 2 JAHRESWOCHENSTUNDEN **HELGA TRIPES-APATH**

- Stelle 102,008 als Bruch dar!
  Stelle 93,444 als Bruch dar!
  Stelle 13,064 als Bruch dar!
  Stelle 258,012 als Bruch dar!
  Stelle 45,238 als Bruch dar!

- Stelle den Wahrheitswert von $\frac{80}{127} \geq \frac{47}{225}$ mit dem TR fest und begründe dies!
  Stelle den Wahrheitswert von $-\frac{55}{199} > -\frac{87}{99}$ mit dem TR fest und begründe dies!
  Stelle den Wahrheitswert von $-\frac{145}{77} < -\frac{47}{25}$ mit dem TR fest und begründe dies!
  Stelle den Wahrheitswert von $\frac{155}{299} \geq \frac{87}{99}$ mit dem TR fest und begründe dies!
  Stelle den Wahrheitswert von $-\frac{55}{138} \leq -\frac{87}{99}$ mit dem TR fest und begründe dies!

- Vereinfache zuerst und berechne dann mit dem TR (Ergebnisse in Gleitkommadarstellung):

  $\frac{(a^2b)^3}{c^3b^{-1}}$ für $a = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$; $b = 7 \cdot 10^8$; $c = 2{,}55 \cdot 10^{-8}$!

  $\frac{a^{-1}b^2}{(ac^2)^2}$ für $a = 6 \cdot 10^9$; $b = 3{,}7 \cdot 10^{-9}$; $c = 1{,}44 \cdot 10^7$!

- Berechne mit dem TR und schreibe die Ergebnisse in Gleitkommadarstellung an:

  $\frac{a^{-2}b^3}{c^4}$ für $a = 2{,}3 \cdot 10^{-1}$; $b = 5 \cdot 10^{-3}$; $c = 1{,}7 \cdot 10^6$!

  $\frac{a^5}{b^{-1}c^2}$ für $a = 4{,}9 \cdot 10^7$; $b = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$; $c = 3 \cdot 10^{-6}$

  $\frac{(3^3 \cdot 2^5)^{-2}}{7^{-6}} =$

  $\frac{5^{-5}}{(6^4 \cdot 7^3)^{-3}} =$

- Gegeben ist die Gleichung $\frac{7}{8}-\frac{3}{2x+1}=\frac{3}{8}$ in der Grundmenge R.
  a) Bestimme die Definitionsmenge und
  b) den Pol!
  c) Löse die Gleichung graphisch durch die Nullstelle und mache davon eine Skizze!

- Gegeben ist die Gleichung $\frac{5}{4}-\frac{4}{2-x}=\frac{1}{4}$ in der Grundmenge R.
  a) Bestimme die Definitionsmenge und
  b) den Pol!
  c) Löse die Gleichung graphisch durch die Nullstelle und mache davon eine Skizze!

- Gegeben ist die Gleichung $\frac{5}{x+4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ in der Grundmenge R.
  a) Bestimme die Definitionsmenge und
  b) den Pol!
  c) Löse die Gleichung graphisch durch die Nullstelle und mache davon eine Skizze!

- Gegeben ist die Gleichung $\frac{5}{4x-1}-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ in der Grundmenge R.
  a) Bestimme die Definitionsmenge und
  b) den Pol!
  c) Löse die Gleichung graphisch durch die Nullstelle und mache davon eine Skizze!

- Gegeben ist die Gleichung $\frac{3x^2}{5x-6}+1=\frac{3x}{5}$ in der Grundmenge R.
  a) Bestimme die Definitionsmenge und den Pol!
  b) Löse die Gleichung graphisch durch die Nullstelle und mache davon eine Skizze!

- Die monatliche Grundgebühr für einen Gasanschluß beträgt € 4,20. Jeder verbrauchte m^3 Gas kostet € 0,39. Gesucht ist
  a) die Funktionsgleichung für den Kostenverlauf
  b) die Wertetabelle im Intervall [0;60] mit der Schrittweite 10
  c) der Graph (10 m^3 entsprechen 1 cm, 5 € entsprechen 1 cm, achte auf die richtige Beschriftung)
  d) Wie viel kosten 90 m^3/Monat und 110 m^3/Monat?

- Die monatliche Grundgebühr für einen Telefonanschluß beträgt € 12,90. Pro Gesprächsstunde sind € 9,10 zu bezahlen. Gesucht ist
  a) die Funktionsgleichung für den Kostenverlauf
  b) die Wertetabelle im Intervall [0;12] mit der Schrittweite 2
  c) der Graph (2 h entsprechen 1 cm, 20 € entsprechen 1 cm, achte auf die richtige Beschriftung)
  d) Wie viel kosten 16 h/Monat und 20 h/Monat?

- Die Gesamtkosten eines Betriebes betragen pro Tag € 2788,-, die Fixkosten € 1462,-.
  Es werden täglich 102 Stück hergestellt. Gesucht sind (täglich)
  a) die Produktionskosten pro Stück bei einem linearen Kostenverlauf
  b) die lineare Kostenfunktion W(x)
  c) die Umsatzfunktion U(x) für den Stückpreis p = € 56,-
  d) die Gewinnfunktion G(x) als Funktionsterm und Graph im Intervall [0;90]
  (15 Stück und € 400,- entsprechen je 1 cm, achte auf die richtige Beschriftung)
  e) die Wertetabelle im Intervall [0;90] mit der Schrittweite 15
  f) bis zu welcher Stückzahl erwirtschaftet der Betrieb einen Verlust (was genauer erklärt und auch im Graphen eingezeichnet wird)

- Die Gesamtkosten eines Betriebes betragen im Monat € 2917,-, die Produktionskosten pro Stück € 24,-. Es werden monatlich 75 Stück hergestellt. Gesucht sind
  a) die Fixkosten bei einem linearen Kostenverlauf
  b) die lineare Kostenfunktion W(x)
  c) die Umsatzfunktion U(x) für den Stückpreis p = € 142,-
  d) die Gewinnfunktion G(x) als Funktionsterm und Graph im Intervall [0;30]
  (5 Stück und € 500,- entsprechen je 1 cm, achte auf die richtige Beschriftung)
  e) die Wertetabelle im Intervall [0;30] mit der Schrittweite 5
  f) der Break-Even-Point (der genauer erklärt und auch im Graphen eingezeichnet wird)

- Für das Produkt Bärli gilt die Gesamtkostenfunktion $W_1(x) = 0{,}7x + 5720$. Für das Produkt Katzi gilt die Gesamtkostenfunktion $W_2(x) = 1{,}53x + 4892$. Beide werden jeweils um € 3,06 pro Stück verkauft.
  a) Bei welcher Stückzahl erzielen beide den gleichen Gewinn und wie hoch ist er?
  b) Liegt dann ein Verlust oder ein Gewinn vor oder keines von beiden?
  c) Bei welcher verkauften Stückzahl jedes Produktes läuft die Produktion kostendeckend?
  d) Stelle den Sachverhalt in Intervall [0;5000] graphisch dar (500 Stück entsprechen 1 cm, € 2000,- entsprechen 1 cm).
  (Runde auf 2 Dezimalstellen!)

- Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = y = -\frac{2x}{7} + 1$, die 1. Mediane und den Graphen der Umkehrfunktion (4 Einheiten entsprechen jeweils 1 cm)! Wie lautet diese?

- Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = y = \frac{3x}{4} - 3$, die 1. Mediane und den Graphen der Umkehrfunktion (4 Einheiten entsprechen jeweils 1 cm)! Wie lautet diese?

- Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = y = -3x + 3$, die 1. Mediane und den Graphen der Umkehrfunktion! Wie lautet diese?

- Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = y = \frac{x}{4} - 1$, die 1. Mediane und den Graphen der Umkehrfunktion! Wie lautet diese?

- Löse die Gleichung mit dem Solver und schreibe jeden Schritt an: $5=\frac{3x}{6-x}$

  b) Was bedeutet die Aussage „left – rt“ = 0?

- Löse die Gleichung mit dem Solver und schreibe jeden Schritt an: $\frac{x+1}{x-2}=6$

  b) Woran erkennst du, daß die Gleichung berechnet wurde?

- Gegeben ist die Gleichung $\frac{4x^2-7}{2x+1}-x=x$ in der Menge R.

  a) Gesucht sind die Definitions- und Lösungsmenge.
  b) Löse die Gleichung mit dem Solver und schreibe jeden Schritt an!

- Gegeben ist $\{(x/y)|\ x-4y-8=0\}_{R\times R}$

  a) Gesucht ist die Hauptform der Geradengleichung!
  b) Bestimme *k* und *d*
  c) Bestimme die Wertetabelle im Intervall [-2;12] mit der Schrittweite 2!
  d) Zeichne die Funktion im selben Intervall! (Je eine Einheit auf der *x*-Achse entspricht 1 Kästchen; je eine Einheit auf der *y*-Achse entspricht 1cm)

- Gegeben ist $\{(x/y)|\ x+3y-6=0\}_{R\times R}$

  a) Gesucht ist die Hauptform der Geradengleichung!
  b) Bestimme *k* und *d*
  c) Bestimme die Wertetabelle im Intervall [-4;10] mit der Schrittweite 2
  b) Zeichne die Funktion im selben Intervall! (Je eine Einheit auf der *x*-Achse entspricht 1 Kästchen; je eine Einheit auf der *y*-Achse entspricht 1cm)

- Gegeben ist $\left\{(x/y)|\ -\frac{2x}{3}+\frac{5y}{7}-\frac{1}{9}=0\right\}_{R\times R}$

  a) Forme in die Hauptform um und bestimme *k* und *d*!
  b) Berechne die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$!

- Berechne die gegebenen linearen Gleichungssysteme (gib die Koeffizientenmatrix und die rref-Matrix an):

- 2x		+ 3z	= 27
3x	- y	- z	= - 21
2x	+ 3y		= - 18

-a	+b	+c	= 6
	-3b	+4c	= - 5
2a		-5c	= - 9

$\frac{2d}{4}$	$-\frac{a}{5}$	$= -4$
b	$-\frac{c}{6}$	$= 0$
$\frac{5c}{9}$	$+ 0{,}4a$	$= \frac{1}{3}$
$-\frac{b}{7}$	d	$= \frac{3}{5}$

3. Klasse HLW, 2. Jahr Mathematik, 2 Jahreswochenstunden

- Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = y = 5e^{-(x-1)^2}$, die 1. Mediane und den Graphen der Umkehrfunktion!

- Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = 6^{\frac{x}{3}} - 1$, die 1. Mediane und den Graphen der Umkehrfunktion! Wie lautet diese?

- Zeichne im Intervall [-1;11] den Graphen der Funktion $f(x) = y = \sqrt{2x+3}$, die 1. Mediane und den Graphen der Umkehrfunktion! Wie lautet diese?
  (Nimm für die Einheiten auf der *x*- und *y*-Achse Kästchen, Wertetabelle!)

- Zeichne im Intervall [-2;10] den Graphen der Funktion $f(x) = y = 5^{\frac{x}{3}}$, die 1. Mediane und den Graphen der Umkehrfunktion! Wie lautet diese? (Nimm für die Einheiten auf der *x*- und *y*-Achse Kästchen, Wertetabelle!)

- Löse a) händisch und b) graphisch durch das Auffinden der Nullstelle: $15^{6-7x} = 10$.

- Gesucht ist die Lösung der Gleichung $\sqrt{x+7} = 3\sqrt{x-1}$ durch
  a) händisches Berechnen und
  b) graphisch durch das Auffinden der Nullstelle (Skizze)!

- Gesucht ist die Lösung der Gleichung $6^{x-8} = \sqrt{20}$ durch
  a) händisches Berechnen und
  b) graphisch durch das Auffinden der Nullstelle (Skizze)!

- Die tägliche Durchschnittskostenfunktion einer Firma lautet $K(x)=80 + \frac{150}{x}$
  a) Bestimme beide Asymptoten des Graphen von $K(x)$
  b) Welche Art von Funktion ist $K(x)$?
  c) Berechne die Gesamtkostenfunktion $W(x) = y = a\,x + b$
  d) Welche Art von Funktion ist $W(x)$und
  e) wie hoch sind die täglichen Fixkosten und die täglichen Stückkosten?f) Zeichne den Graph von $W(x)$ im Intervall [0; 7]

- Die täglichen Gesamtkosten einer Firma betragen € 1910,-. In einem Tag werden 22 Stück hergestellt, mit € 80,- an Produktionskosten pro Stück.
  a) Berechne die Gesamtkostenfunktion $W(x) = y = a\,x + b$ und
  b) die Durchschnittskostenfunktion $K(x)$
  c) Bestimme beide Asymptoten des Graphen von $K(x)$ und zeichne sie
  d) Gesucht ist die Wertetabelle mit der Schrittweite 10 des Graphen von $K(x)$ im Intervall [0; 70]
  e) Zeichne den Graph von $K(x)$ im Intervall [0; 70] (1cm auf der x-Achse entspricht 10 Stück, 1cm auf der y-Achse entspricht 20 €)

- Die monatlichen Gesamtkosten eines Betriebes betragen € 11 640,-, die Fixkosten € 840,-. Es werden in einem Monat 120 Stück produziert.
  a) Berechne die Gesamtkostenfunktion $W(x) = y = a\,x + b$ und
  b) die Durchschnittskostenfunktion $K(x)$
  c) Bestimme beide Asymptoten des Graphen von $K(x)$ und zeichne sie
  d) Gesucht ist die Wertetabelle mit der Schrittweite 30 des Graphen von $K(x)$ im Intervall [0; 210]
  e) Zeichne den Graph von $K(x)$ im Intervall [0; 210] (1cm auf der x-Achse entspricht 30 Stück, 1cm auf der y-Achse entspricht 30 €)

- Die monatlichen Gesamtkosten einer Firma betragen € 21 000,-. In einem Monat werden 145 Stück hergestellt, mit € 100,- an Produktionskosten pro Stück.
  a) Berechne die Gesamtkostenfunktion $W(x) = y = a\,x + b$ und
  b) die Durchschnittskostenfunktion $K(x)$
  c) Bestimme beide Asymptoten des Graphen von $K(x)$ und zeichne sie
  d) Gesucht ist die Wertetabelle mit der Schrittweite 50 des Graphen von $K(x)$ im Intervall [0; 350]
  e) Zeichne den Graph von $K(x)$ im Intervall [0; 350] (3 Kästchen für je 50 Stück, 3 Kästchen für je 50 €)

- Die wöchentlichen Gesamtkosten eines Betriebes betragen € 20 000,-, die Fixkosten € 5300,-. Es werden in einer Woche 210 Stück produziert.
  a) Berechne die Gesamtkostenfunktion $W(x) = y = a\,x + b$ und
  b) die Durchschnittskostenfunktion $K(x)$
  c) Bestimme beide Asymptoten des Graphen von $K(x)$ und zeichne sie
  d) Gesucht ist die Wertetabelle mit der Schrittweite 40 des Graphen von $K(x)$ im Intervall [0; 280]
  e) Zeichne den Graph von $K(x)$ im Intervall [0; 280] (3 Kästchen für je 40 Stück, 2 Kästchen für je 40 €)

- Gegeben ist die Nachfragefunktion $N(p) = x = \frac{a}{p} + b + c\,p$
  Es besteht eine tägliche Nachfrage von 16 t bei einem Preis von 1,2 Geldeinheiten / Tonne, 14 t bei p = 1,8 GE / t und 10 t bei p = 2,2 GE / t.
  Gesucht ist die Nachfragefunktion (und die Koeffizienten- und rref-Matrix)!

- Gegeben ist die Gesamtkostenfunktion $W(x) = a\,x^2 + b\,x + c$
  Die tägliche Produktion von 7 l verursacht Gesamtkosten von 163,20 Geldeinheiten, 10 l kosten 338,22 GE und 13 l kosten 580,20 GE.
  a) Bestimme $W(x)$!
  b) Berechne für einen Preis von 12,- GE / l die Gewinnzone und
  c) stelle die Gewinnfunktion und die Gewinnzone graphisch dar!