GTR und CAS verändern den Mathematikunterricht

Arbeitsmaterialien zum Thema „FUNKTIONEN“

aufbereitet für die Werkzeuge TI-83-Plus bzw. Voyage 200

1. Einleitung

Der grafisch-numerische Taschenrechner (GTR) lässt die Speicherung mathematischer Objekte und deren Bearbeitung mit vorgegebenen Operationen zu, kann aber im Gegensatz zu Computer-Algebra-Systemen (CAS) keine symbolischen Operationen ausführen. Die Funktionalität von GTR und CAS kann durch selbst geschriebene Programme erweitert werden.

In diesem Beitrag wird der Versuch unternommen, am ausgewählten Thema Funktionen Anregungen für den Unterricht zu geben und exemplarisch Einsatzmöglichkeiten von GTR und CAS anzubieten. Gerade bei Funktionsuntersuchungen und heuristischen Überlegungen, die durch Daten und deren Darstellung unterstützt werden, bieten GTR und CAS die Möglichkeit zur Veranschaulichung von Sachverhalten, entlasten von zeitaufwändigen Routine–arbeiten und ermöglichen Untersuchungen und Tätigkeiten im Zusammenhang mit praxisbezogenen Problemstellungen.

Beim Einsatz eines CAS können sowohl graphische Darstellungen als auch symbolische Rechnungen, wie z.B. Ableitungen und Lösen von Gleichungen mit Parametern exakt durchgeführt werden. Damit unterstützt dieses Werkzeug die Lösungsfindung in allen Phasen.

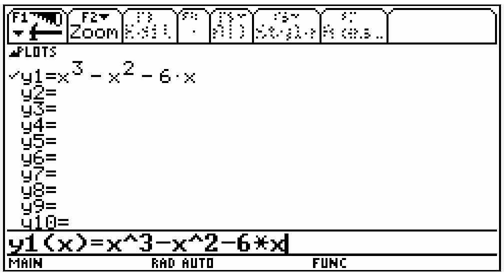
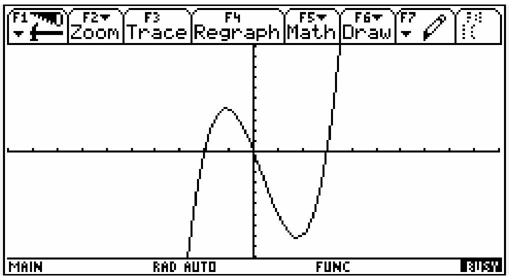
Den Ausführungen liegt ein erweiterter Lernbegriff (vgl. Heugl) zugrunde – weniger Rechnen, mehr Problemlösen, Begründen, Argumentieren, Modellbilden und Interpretieren.

Schülerinnen und Schüler sollten befähigt werden, bei selbstständigen mathematischen Tätigkeiten den Einsatz von GTR und CAS sinnvoll zu nutzen. Bedientechnische Details sollten keinesfalls zum eigentlichen Inhalt des Unterrichts gemacht werden; die Methoden des Rechners sollten im Zusammenhang mit Aufgaben und Problemstellungen bekannt gegeben werden. Im Sinne einer inneren Differenzierung sollen besonders interessierte und motivierte Schülerinnen und Schüler angeregt und angeleitet werden, sich auch intensiver mit der Funktionalität des Gerätes zu beschäftigen.

2. Kurvendiskussion – was wird daraus?

Mit dem Einsatz von GTR und CAS wird die klassische Kurvendiskussion nach einem festgelegten Schema, das abschließend zur Darstellung des Graphen führt, obsolet oder zumindest fragwürdig, da mit Hilfe dieser neuen Technologien eine graphische Darstellung schon zu Beginn der Untersuchung möglich ist. Formale Tätigkeiten zur Gewinnung eines Überblicks über den Graphen entfallen weitgehend und können nur durch andere Fragestellungen sinnvoll und motivierend begründet werden.

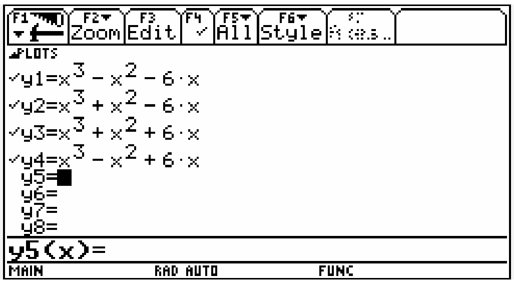
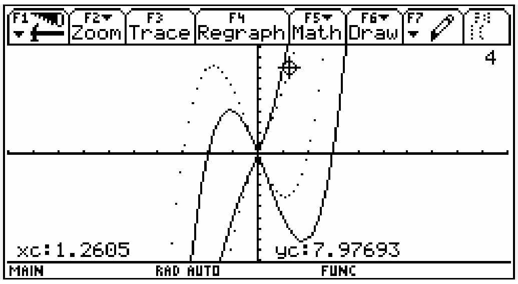
Beispiel:
Untersuchen Sie die folgende Funktion f mit $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$

Lösung ohne GTR	**Lösung mit GTR**
1. Untersuchung auf Nullstellen 2. Bestimmung und Charakterisierung der Extremwerte mit Hilfe der 1. und 2. Ableitung 3. Bestimmung der Wendestellen mit Hilfe der 2. und 3. Ableitung 4. Festlegen des Zeichenbereiches 5. Erstellen einer Wertetabelle 6. Zeichnen des Graphen	 

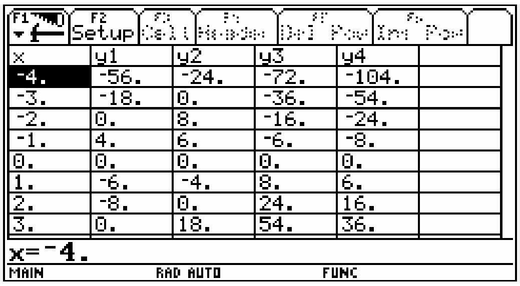
Beim Einsatz von GTR bzw. CAS liefert das Gerät den Graphen sofort nach Eingabe des Funktionsterm im Y=-Editor und Aufrufen des Graphik-Bildschirmes. Das kann aber noch nicht alles sein! Die Schülerinnen und Schüler müssen durch entsprechende Impulse zu eigenen Fragestellungen angeregt werden, die sie dann mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Werkzeuge explorativ bearbeiten. Einige Anregungen sind im Folgenden zusammen gestellt.

2.1 Haben alle Polynomfunktionen dritten Grades drei Nullstellen?

Für Funktionsuntersuchungen stehen bei GTR und CAS die üblichen Darstellungen in Form von Termen, Tabellen und Graphen gleichzeitig zur Verfügung.

Taste (Methode)	Darstellung	mathematische Bedeutung
[Y=] (Y-Editor)		Funktionsterme
[GRAPH] (Grafik-Ansicht)		Graph oder Schaubild

[TABLE]
(Tabellen-Ansicht)



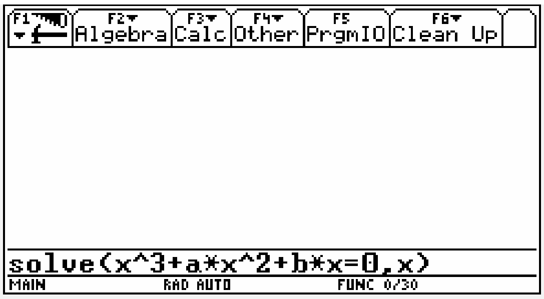
x	y1	y2	y3	y4
-4.	-56.	-24.	-72.	-104.
-3.	-18.	0.	-36.	-54.
-2.	0.	8.	-16.	-24.
-1.	4.	6.	-6.	-8.
0.	0.	0.	0.	0.
1.	-6.	-4.	8.	6.
2.	-8.	0.	24.	16.
3.	0.	18.	54.	36.

x=-4.

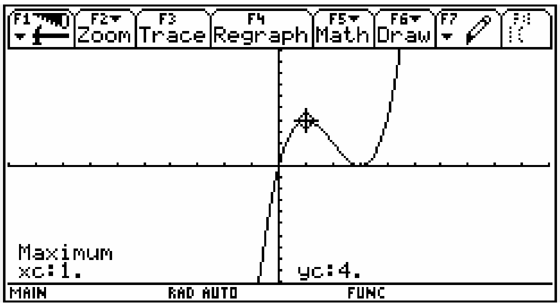
Wertetabelle

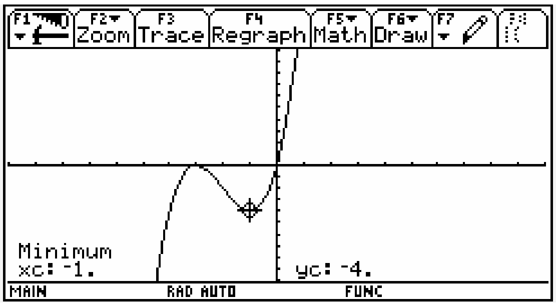
Folgende ***Fragestellungen*** ließen sich anschließen:

- ✓ Welche Gemeinsamkeiten haben die vier Funktionen. Wie ergeben sich diese aus dem jeweiligen Funktionsterm?
- ✓ Warum haben nicht alle Funktionen gleich viele reelle Nullstellen?
- ✓ Für welche Parameterwerte a und b hat die Funktion
  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ zwei reelle Nullstellen?
- ✓ Verwenden Sie den SOLVE - Befehl Ihres CAS - Rechners oder lösen Sie die entsprechende Gleichung händisch!



Auch diese beiden Schaubilder stellen Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades dar. Was fällt dir im Vergleich zu den oben dargestellten Graphen auf?

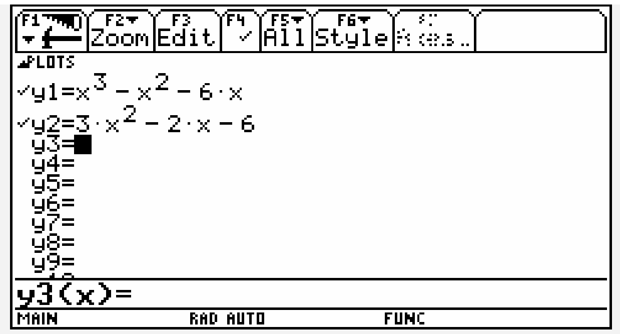


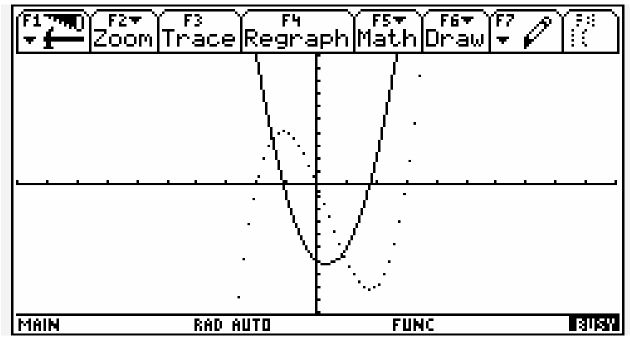


Können Sie die entsprechenden Funktionsterme angeben? Beschreiben Sie möglichst ausführlich, wie Sie vorgegangen ist!

2.2 *Wo hat eine Polynomfunktion ihre Maxima und Minima?*

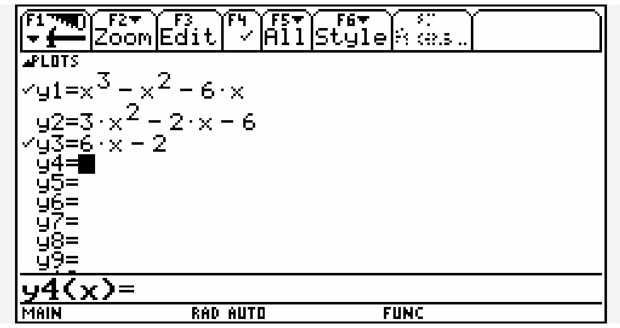
In welchem Zusammenhang stehen die beiden Funktionen? Was können Sie aus der Graphik erkennen? Welche Bedingung gilt für den Hochpunkt, welche für den Tiefpunkt?

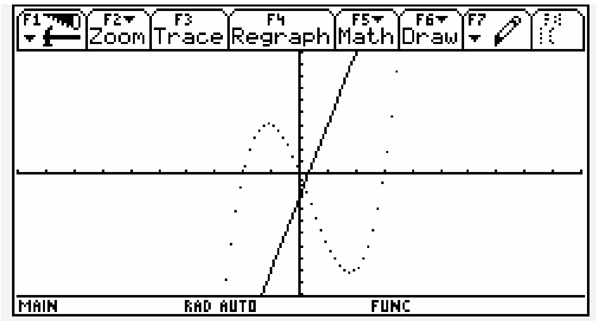




Ändert sich die Lage der Extremstellen, wenn du die Funktion y1(x) mit einer beliebigen reellen Zahl multiplizierst? Was ändert sich? Was folgt daraus?
Formulieren Sie eine allgemeine Aussage über die Anzahl und Lage der Extremstellen einer Polynomfunktion dritten Grades.

In welchem Zusammenhang stehen die beiden Funktionen? Was können Sie aus der Graphik erkennen? Welche Bedingung gilt für den Hochpunkt, welche für den Tiefpunkt?



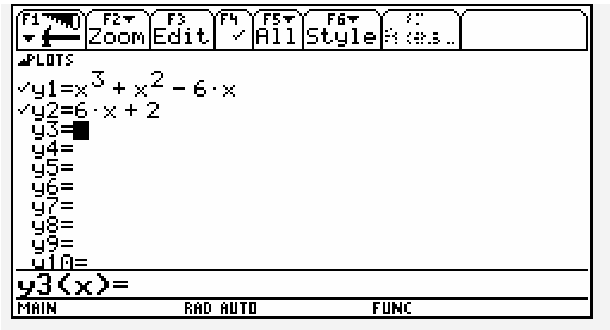


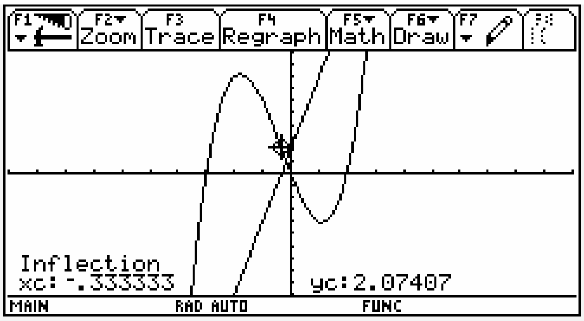
Die Nullstelle x_W der Funktion y3(x) hat eine besondere Bedeutung. Welche? Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen der Ausgangsfunktion y1(x) an dieser Stelle!
Was ändert sich an dieser Stelle? Welches Vorzeichen haben die Funktionswerte von y3(x) für $x<x_W$, welches für $x>x_W$? Wo liegt der Hochpunkt, wo der Tiefpunkt?

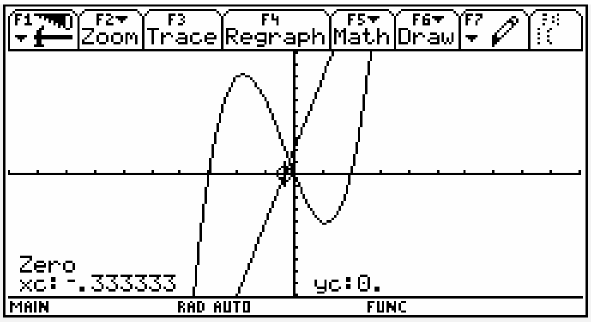
2.3 Was ist ein Wendepunkt?

Hat jede Polynomfunktion dritten Grades einen Wendepunkt?

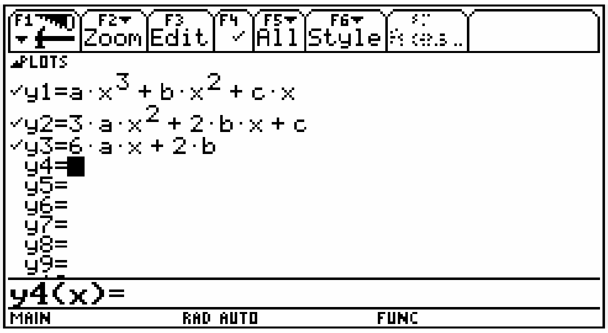
Studieren Sie die folgenden „Screen-Shots“, führen Sie eigene Untersuchungen durch, stellen Sie Hypothesen auf und beweisen Sie Ihre Vermutungen durch eine allgemeine Rechnung.

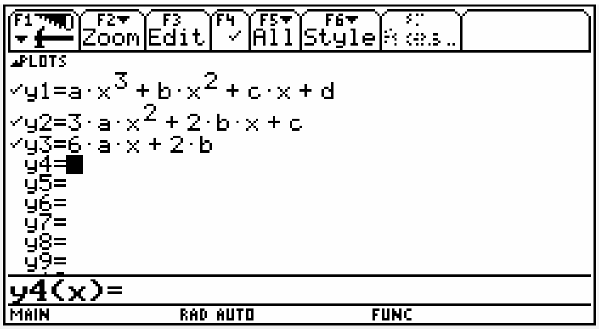






Wie ändern sich die Koordinaten des Wendepunktes, wenn d $\neq$ 0? Wann liegt der Wendepunkt an der Stelle x_W=0? Wann liegt der Wendepunkt im Ursprung?





2.4 Symmetrieeigenschaften von Polynomfunktionen

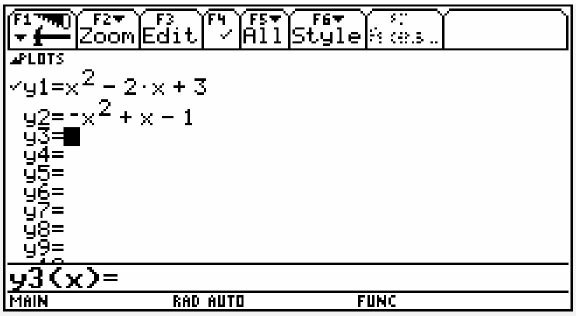
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen mit Hilfe der zugehörigen Graphen auf ihre Symmetrie und stellen Sie - eine allgemeine Vermutung auf! Vielleicht müssen Sie weitere Parameterstudien durchführen?

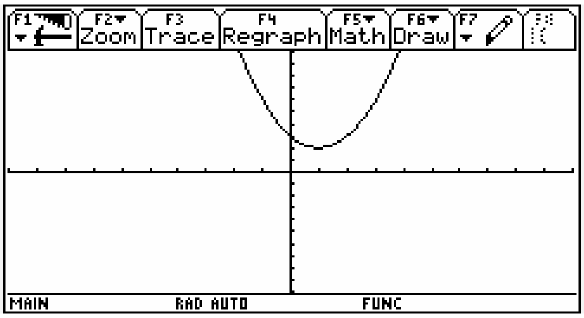
	a	b	c	d
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	1	0	2	4
	1	0	0	0
	1	2	-6	2
	1	-3	8	-1
	a	b	c	d
$f(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d$	0,1	0,2	1	0
	0,5	0	-2	3
	0,5	-0,1	0,3	1
	1	-4	3	2

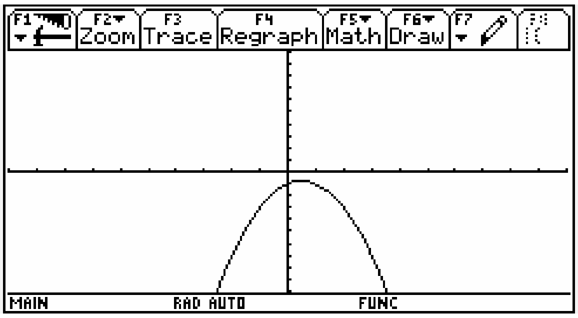
2.5 *Wann bzw. wodurch ist eine Funktion eindeutig bestimmt?*

Die beiden hier definierten Funktionen y1(x) und y2(x) stellen die ersten Ableitungsfunktionen zweier weiterer Polynomfunktionen y3(x) und y4(x) dar.

Sind diese eindeutig bestimmt? Können Sie die Funktionsterme y3(x) und y4(x) angeben? Was können Sie in jedem Fall darüber aussagen?

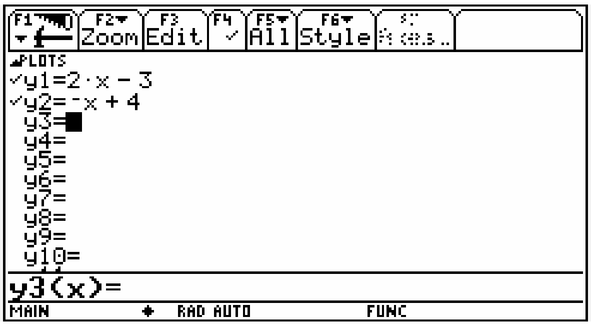


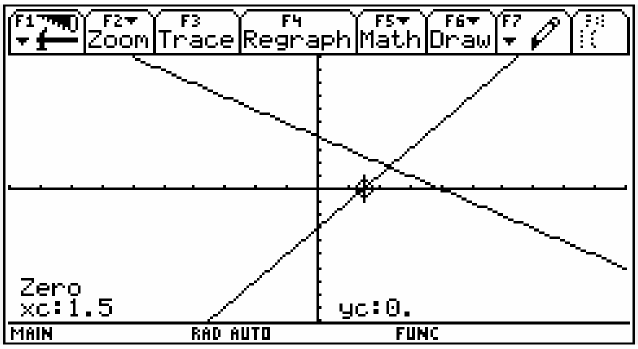




Die beiden hier definierten Funktionen y1(x) und y2(x) stellen die zweiten Ableitungsfunktionen zweier weiterer Polynomfunktionen y3(x) und y4(x) dar.

Sind diese eindeutig bestimmt? Können Sie diese angeben? Was können Sie auf jeden Fall darüber aussagen?



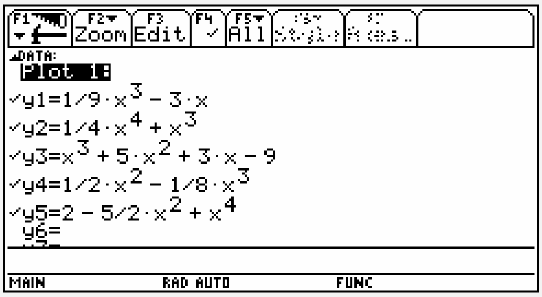


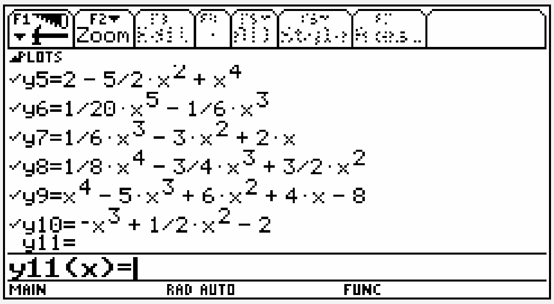
Was können Sie aus den beiden Graphen „heraus finden"?
Haben die Polynomfunktionen y3(x) und y4(x) jeweils einen Wendepunkt? Wenn ja, an welcher Stelle liegt er?
Haben die beiden Polynomfunktionen y3(x) und y4(x) jeweils einen Hoch- bzw. einen Tiefpunkt? Können Sie Aussagen über die Nullstellen machen?

1.5 *Weitere Fragestellungen für den Unterricht*

2.6.1 Ausgezeichnete Punkte von Polynomfuktionen

Beispiel 1: Gegeben sind zehn ganzrationale Funktionen dritten, vierten bzw. fünften Grades.
Es sollen Überlegungen über die Lage ausgezeichneter Punkte des Graphen angestellt werden.

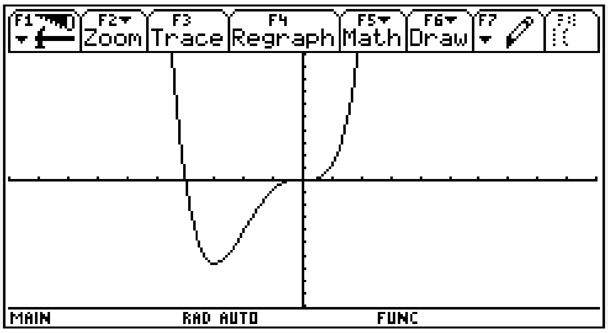


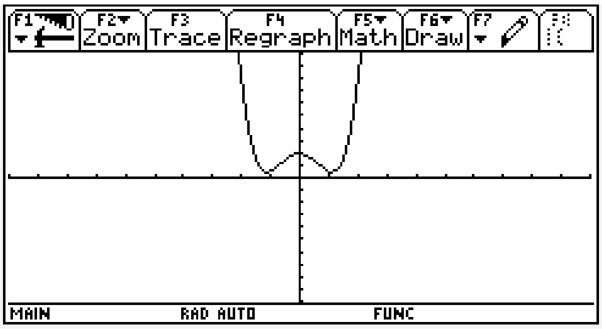


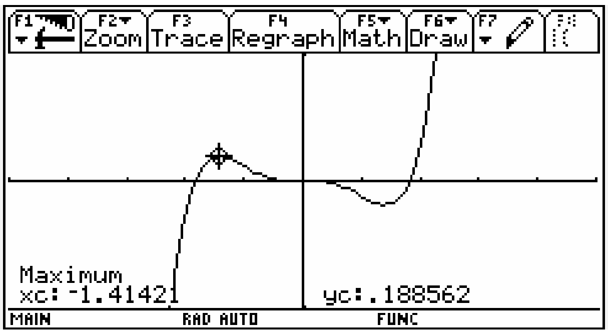
Arbeitsaufträge:

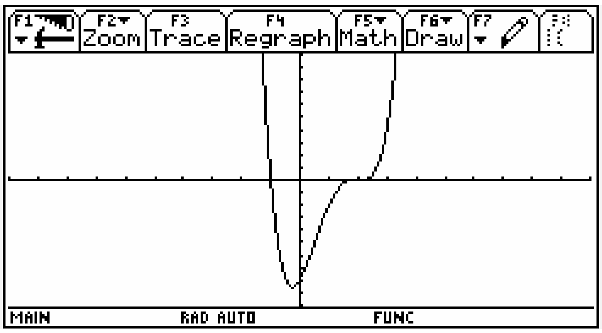
- ✓ Formulieren Sie Vermutungen über die Anzahl der Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen. Begründen Sie Ihre Aussagen!
- ✓ Haben alle Graphen Symmetrieeigenschaften? Begründen Sie Ihre Antwort!
- ✓ Es gibt ganzrationale Funktionen vom Grad 3 ohne Nullstelle (genau eine Extremstelle, ohne Wendestelle). Geben Sie eine solche an, oder widerlegen Sie die Aussage.
- ✓ Geben Sie alle ganzrationalen Funktionen möglichst niedrigen Grades an, welche die Nullstellen 0; 1; 2; 3; 4 haben.

Welche der oben definierten Funktionen gehören zu den vier folgenden Graphen? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!









2.6.2 Mehrfache Nullstellen

Beispiel 2: Gegeben sind zehn ganzrationale Funktionen höheren Grades mit ganz besonderen Eigenschaften – sie haben mehrfache Nullstellen.
Es sollen ohne weitere Rechnung und Visualisierung an Hand der Eigenschaften des Funktionsterms möglichst viele Eigenschaften des Graphen angegeben werden.

Diese Aussagen sollen dann mit einer Darstellung des Graphen geprüft werden.

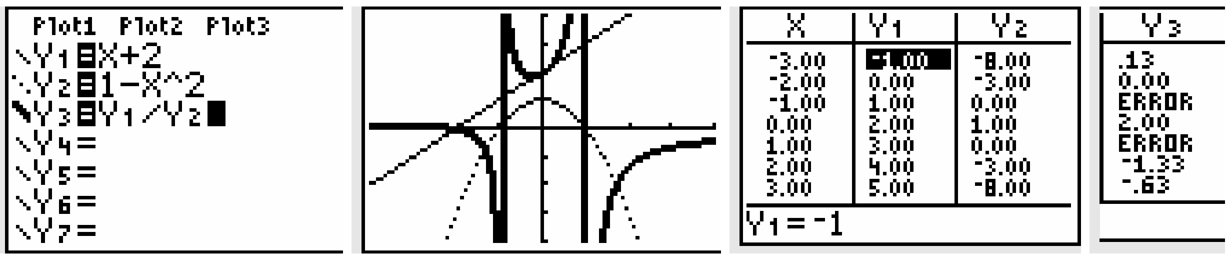
a) $f_1(x) = 1/6 \cdot (x+1)^2 \cdot (x-2)$	f) $f_6(x) = (x^2-1)^3$
b) $f_2(x) = 0,5 \cdot (x^2-1)^2$	g) $f_7(x) = 1/4 \cdot (1+x^2) \cdot (5-x^2)$
c) $f_3(x) = (x-1) \cdot (x+2)^2$	h) $f_8(x) = 0,1 \cdot (x^3+1)^2$
d) $f_4(x) = 1/6 \cdot (1+x)3 \cdot (3-x)$	i) $f_9(x) = 1/10 \cdot (x-2)^2 \cdot (x+3)^2$
e) $f_5(x) = 0,1 \cdot (x^2+1)^2$	j) $f_{10}(x) = 1/6 \cdot (x-1)^{3\cdot} (x-2)^2$

Welche Eigenschaft des Graphen erkennen Sie bei doppelten Nullstellen, welche bei dreifachen Nullstellen?

2.6.3 Gebrochen rationale Funktionen als Quotienten betrachtet

Beispiel 3: Gegeben sind zehn gebrochen rationale Funktionen.
Schreiben Sie jede Funktion als Quotient einer Zähler- und einer Nennerfunktion und erstellen Sie eine Ansicht der Graphen der drei Funktionen. Wählen Sie dabei den Bereich so, dass wesentliche Eigenschaften der Funktionen zu sehen sind. Dokumentieren Sie das Ergebnis im Heft! Begründen Sie die Eigenschaften des Graphen von f mit Eigenschaften der Graphen der Zähler- und Nennerfunktion.

a) $f_1(x) = \frac{x+2}{1-x^2}$	e) $f_5(x) = \frac{x^2+x}{(x+1)^2}$
b) $f_2(x) = \frac{x+1}{2x-4}$	f) $f_6(x) = \frac{x^6+x^2}{2+2x^4}$
c) $f_3(x) = \frac{3x^2-1}{x^3-2x^2+x}$	g) $f_7(x) = \frac{x}{x^2+x-2}$
d) $f_4(x) = \frac{1}{x}+\frac{x}{x-1}$	h) $f_8(x) = \frac{x}{x^4-2x^2+1}$

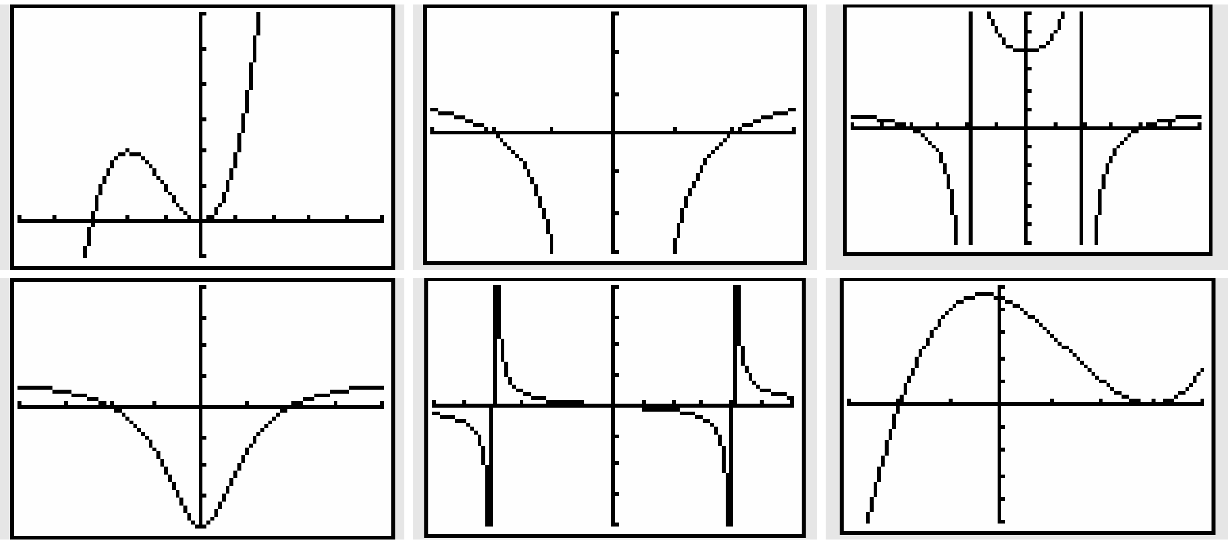


Erstellen Sie eine oder mehrere Ansichten des Graphen der Funktion f so, dass die Definitionsmenge, die Nullstellen, das Verhalten an den Polstellen und das Verhalten für betragsmäßig große Werte von x ersichtlich wird. Begründen Sie die Einstellung im WINDOW-Fenster mit den Eigenschaften des Funktionsterms.

2.6.4 Vom Graphen zum Funktionsterm

Beispiel 4:
Die folgenden sechs Graphen gehören zu ganzrationalen Funktionen vom Grad ≤ 3 bzw. zu gebrochen rationalen Funktionen mit Zähler- bzw. Nennergrad ≤ 2. Jeder Teilstrich der Achsen bezeichnet 1LE. Geben Sie einen möglichst gut passenden

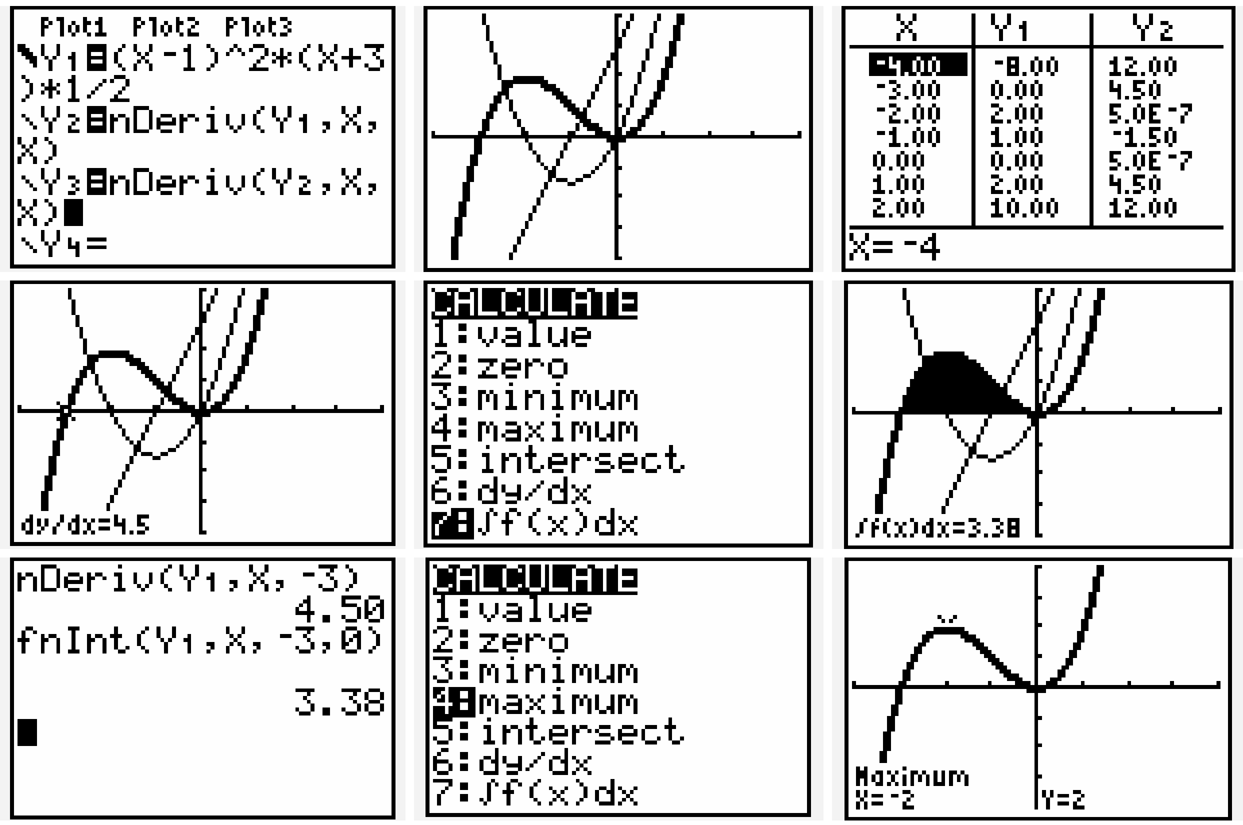
Funktionsterm an und beschreiben Sie möglichst ausführlich Ihren Lösungsweg.



2.7 *Numerische Berechnungen durch vorgegebene Verfahren*

2.7.1 Ableitungs- und Integralfunktion

Auch der GTR stellt unabhängig von der Graphikansicht Verfahren bereit, welche zu einem Funktionsterm und einem gegebenen Argument bzw. einem Intervall die numerische Berechnung von Maximal- und Minimalwerten, Werten der Ableitung an festen Stellen und bestimmter Integrale möglich machen. Diese Methoden können auch zur graphischen Darstellung der Ableitungs- und Integralfunktion verwendet werden.



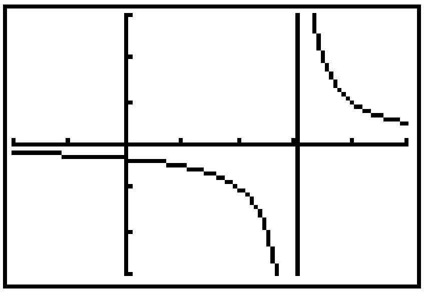
2.7.2 Verfälschungen durch graphische und numerische Effekte

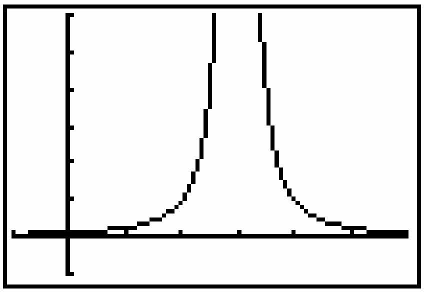
Graphische bzw. numerische Effekte können aber auch Verfälschungen und Fehldeutungen ergeben.

Vergleichen Sie die folgenden Graphen der beiden Funktionen

$f(x) = \frac{1}{x-3}$ und

$g(x)= \frac{1}{(x-3)^2}$.



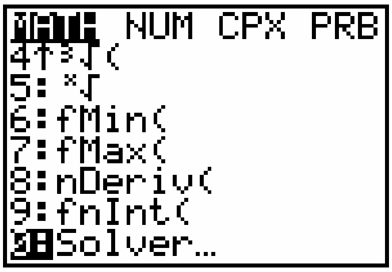


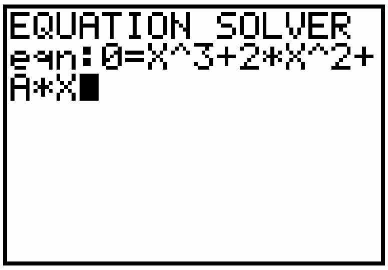
Die für f(x) angezeigte „Asymptote“ entsteht durch eine Verfälschung. In der Graphikansicht werden nämlich diskret berechnete Punkte des Graphen in Bildpunkten (Pixel) dargestellt, wobei die Bildpunkte miteinander linear verbunden werden. Dadurch entsteht bei Polstellen mit Vorzeichenwechsel der Eindruck einer senkrechten Asymptote. Polstellen ohne Vorzeichenwechsel zeigen diesen Effekt nicht.

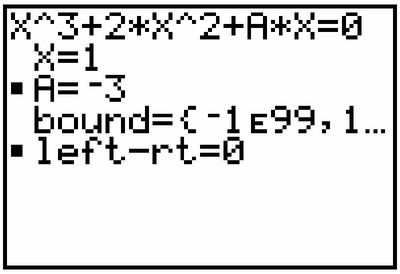
2.7.3 Der Gleichungslöser (Solver) des GTR

Das Lösen von Gleichungen kann mit dem GTR durch geometrisch-numerische Bestimmungen erfolgen, wie z.B. durch Bestimmen der Schnittstelle der Graphen zu den Termen auf den beiden Seiten einer Gleichung.
Der GTR besitzt aber auch ein Verfahren (Gleichungslöser, SOLVER) zur numerischen Lösung von Gleichungen der Form f(x) = 0. Der Gleichungslöser arbeitet mit einer numerischen Variante des Newton-Verfahrens und ermöglicht die Eingabe eines allgemeinen Gleichungstyps mit Koeffizienten. Den Parametern können Werte zugeordnet werden.

Gegeben ist die Gleichung $x^3 - 2x^2 + ax = 0$. Gibt es eine Zahl a, so dass die Gleichung die Lösung x=1 hat?







3. Funktionen mit Parametern

Der GTR ermöglicht heuristisches Arbeiten und eine induktive Vorgehensweise. Durch eine Untersuchung an graphischen Darstellungen können verschiedene Eigenschaften der Funktion selbsttätig vermutet und gefunden werden. Dann erst erfolgt die rechnerische Begründung. Die Methode, Eigenschaften zunächst anschaulich wahrzunehmen, kann auch leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern helfen, die nachfolgenden algebraischen Überlegungen besser einzuordnen und zu verarbeiten. Aus selbst entdeckten Eigenschaften entstehen Fragestellungen für einen aktiven und weitgehend selbstgesteuerten Lernprozess.

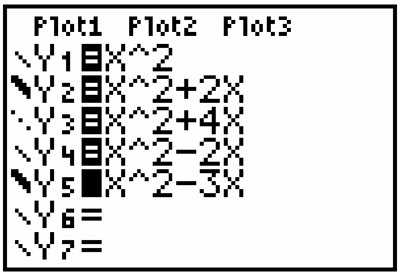
3.1 Methodische Vorgehensweise

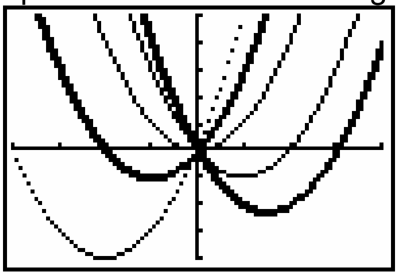
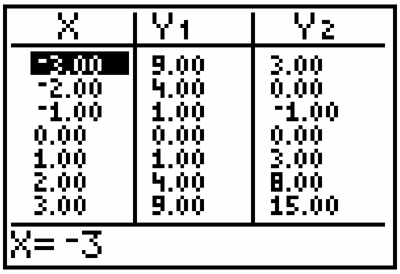
Beispiel: Das Verhalten der Funktionenschar $f_a(x) = x^2 + 2ax$ soll untersucht werden.

Finden Sie gemeinsame Eigenschaften der Graphen der Funktionen der Schar f_a
Untersuchen Sie den Einfluss des Parameters auf den Funktionsgraphen und auf die Lage des Scheitels

3.1.1 Einzelne Funktionen einer Schar werden im Y-Editor eingegeben

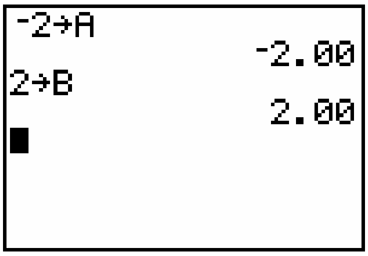
Für fünf bestimmte Parameterwerte a = 0; 1; 2; -1; -2 werden die Funktionen explizit den Variablen Y1 bis Y5 im Y-Editor des Rechners zugeordnet. Zur besseren Übersicht können einzelne Graphen unterschiedlich dargestellt werden. r

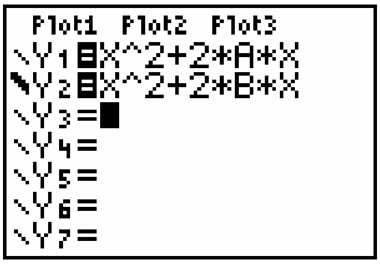


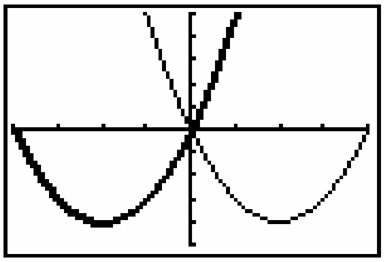



6.0.1 Verwendung von Variablen zur Festlegung der Parameter

Eine (oder mehrere) schon vordefinierte Variable werden als Parameter des Funktionsterms verwendet. Die Funktion wird mit dem Parameter im Y-Editor eingetragen. Nach Belegung der Variablen werden die Graphen gezeichnet. Die Darstellung der Graphen kann wieder unterschiedlich gestaltet werden.

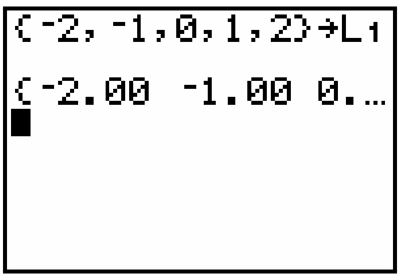


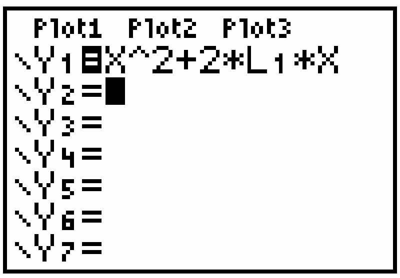


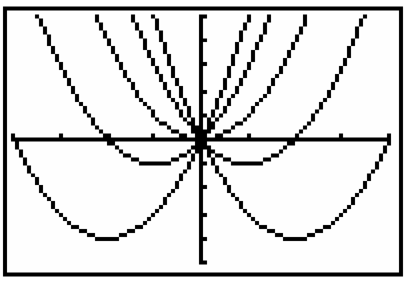


6.0.1 Verwendung von Listen

Die Parameter werden einer Liste L1 zugeordnet, die im Funktionsterm Y1 anstelle des Parameters auftritt. Bei dieser Art der Darstellung lassen sich die Werte für die Parameter am besten verändern. Die Darstellung der Graphen ist allerdings einheitlich.







3.2 Ausgewählte Beispiele

Beispiel A: Durch $y = ax^2+b$; $a, b \in R$; $a \neq 0$ ist eine Parabel gegeben.

a) Wie ändert sich Lage und Gestalt der Parabel, wenn a der Scharparameter und b eine feste Zahl ist?

a) Wie ändert sich Lage und Gestalt der Parabel, wenn b der Scharparameter und a eine feste Zahl ist?

a) Welche Koordinaten hat der Scheitel der Parabel? Wann ist dieser ein Hochpunkt, wann ein Tiefpunkt?

a) Wie hängt die Anzahl und Lage der Nullstellen von a und b ab?

Beispiel B: Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = ax^3 + (1 - 4a)\,x$, $a \in R$.

) Untersuchen Sie, ob es Punkte gibt, durch die alle Kurven der Schar gehen.

) Was können Sie über die Symmetrie der Kurven aussagen?

) Wo liegen die Hoch- du Tiefpunkte?

Beispiel C: Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = -x^2 + 4ax - 5a^2 + 4a$, $a \in R$.

) Für welchen x-Wert nimmt die Funktion f_a ihr Maximum an? Wie groß ist dieses? Welche Funktion f_a hat das größte Maximum?

) Jede Kurve K_a besitzt einen Hochpunkt. Bestimmen Sie die Kurve, die von den Hochpunkten aller Kurven K_a gebildet wird.

) Für welches Zahlenpaar (u;v) wird der Term $-u^2 + 4uv - 5v^2 + 4v$ am größten? Für welches am kleinsten?

2. Funktionen sind mehr als nur Zuordnungen $x \rightarrow y$

Die folgenden Beispiele zeigen, wie sich die verschiedenen Grundfunktionen aus Problemlöseaufgaben erschließen lassen.
Beim Einsatz von CAS ergibt sich der Vorteil, dass die Funktionen mit „sprechenden“ Namen definiert werden können und damit ein besseres Verständnis fördern. Der Umgang mit diesen anwendungsorientierten Funktionen beim ausschließlichen Einsatz von GTR stellt sowohl eine Herausforderung an methodisch-didaktische Überlegungen des Lehrers als auch an die Transferfähigkeit des Schülers dar.

Problemstellung:
Ein Fußgänger will eine Straße vor einem Auto überqueren, das mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h fährt.

- Wie weit muss das Auto mindestens vom Fußgänger entfernt sein, wenn dieser die Überquerung beginnt, und er mindestens die Straßenmitte erreichen soll?
- Zuerst soll der Einfluss der Gehgeschwindigkeit aufgezeigt und bewusst gemacht werden.

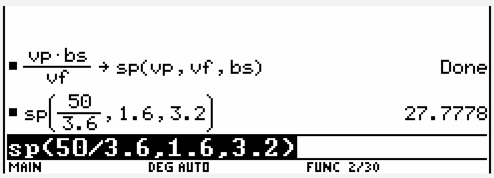
Für unser Beispiel ist eine Gehgeschwindigkeit von 1,6 m/s angenommen und eine halbe Straßenbreite von 3,2 m. Unter der Annahme, dass sich Fußgänger und Autofahrer gleichförmig bewegen, kann man die vorgegebene Situation folgendermaßen physikalisch analysieren:

Die gesuchte Mindestentfernung des PKW ist jene Strecke, die das Auto in der Zeit t_F, die der Fußgänger braucht, um die Straßenmitte zu erreichen, zurücklegt.
Es gilt: Gehzeit des Fußgängers bis zur Straßenmitte t_F gleich halbe Straßenbreite b_S durch Geschwindigkeit des Fußgängers v_F.
Diese Zeit (im vorliegenden Beispiel sind das 2 Sekunden) hat der PKW zum Durchfahren der Entfernung s_P zur Verfügung.

4.1 Funktionen im HOME-Fenster (Voyage 200)

Aus der Grundformel für die gleichförmige Bewegung $s = v \cdot t$ entwickeln wir:

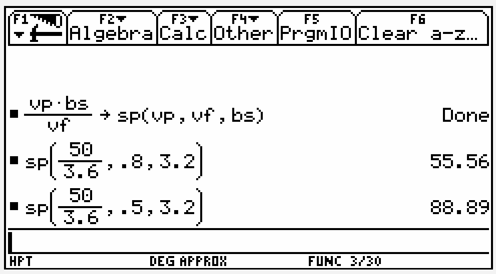
$t_F = b_S/v_F$ und daraus $s_p = v_P \cdot t_F = v_P \cdot b_S/v_F$.
und damit definieren wir im HOME-SCREEN die entsprechende Funktion;

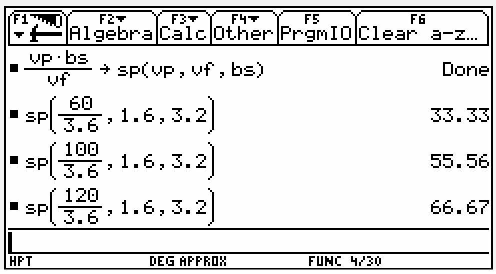


sp ... Weg (in m), den der PKW in bs durch vf Sekunden zurücklegt
vf ... Geschwindigkeit des Fußgängers in m/s
vp ... Geschwindigkeit des PKW in m/s

Dieser errechnete Wert soll nun mit den Schätzwerten verglichen und anschließend auch veranschaulicht werden (z.B. – wie viele Autolängen sind das?, oder – wie oft ist die Länge des Klassenzimmers darin enthalten?

Anschließend könnte man untersuchen lassen, wie sich diese Mindestentfernung ändert, wenn das Auto mit 60km/h, 100km/h oder noch schneller fährt und wie sich eine geringere Geschwindigkeit des Fußgängers (Kleinkind oder ältere Person) auf das Ergebnis auswirkt!



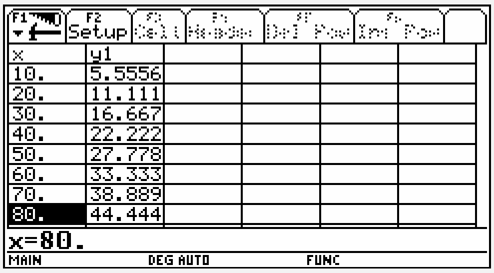


Man kann die Schülerinnen und Schüler auch entsprechende Diagramme anfertigen lassen, mit deren Hilfe sie dann – ohne Rechnung – das Beispiel dann für unterschiedliche Werte der unabhängigen Variable (vp für y1(x) und vf für y2(x)) durcharbeiten und aus daraus erkennen sollen, in welchem Maße die einzelnen Parameter das Endergebnis beeinflussen bzw. welche funktionalen Zusammenhänge bestehen.

Besonders deutlich sieht man die Zusammenhänge, wenn die Funktionen tabellarisch und grafisch dargestellt werden.

Mit den passenden Einstellungen im WINDOW-Fenster erhält man im Grafikfenster den linearen Zusammenhang zwischen notwendiger Mindestentfernung (in m) und Fahrzeuggeschwindigkeit (in km/h) zeichnerisch veranschaulicht, woraus hervorgeht, dass die beiden Größen zueinander direkt proportional sind.

Im Trace-Modus kann man sich auf der Geraden bewegen und zu jeder Geschwindigkeit die Entfernung ablesen.

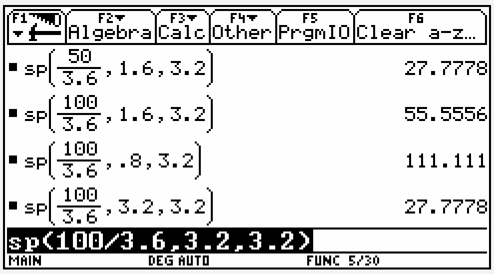


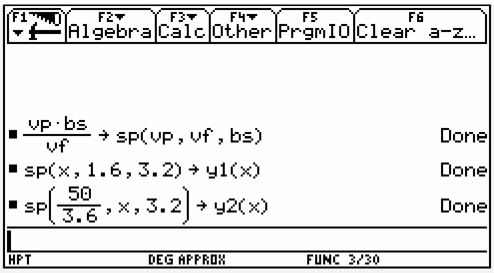
x	y1
10.	5.5556
20.	11.111
30.	16.667
40.	22.222
50.	27.778
60.	33.333
70.	38.889
80.	44.444

x=80.

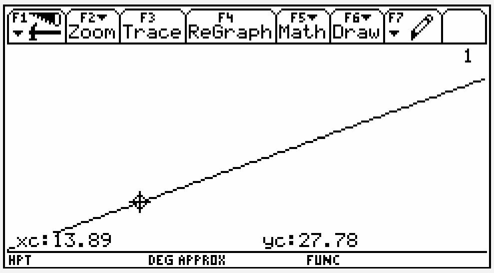
Die Funktion y2(x) ist etwa ein Beispiel für einen indirekt proportionalen Zusammenhang.

Umgekehrt lässt sich an diesem konkreten Beispiel an Hand eines Physikbeispiels erläutern, was es bedeutet, wenn zwei Größen zueinander indirekt proportional sind, und wie eine derartige Abhängigkeit grafisch dargestellt wird.

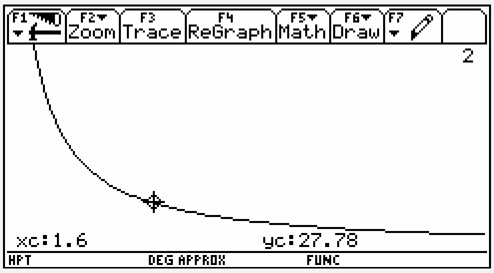


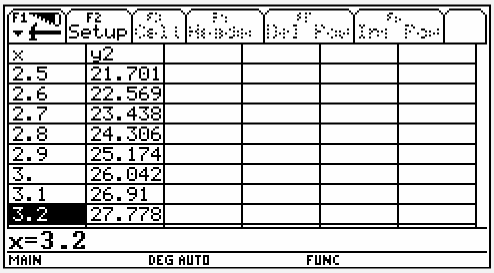


Mindestentfernung des PKW dargestellt als Funktion der Fahrzeuggeschwindigkeit (bei konstanter Straßenbreite und Fußgängergeschwindigkeit)



Mindestentfernung des PKW dargestellt als Funktion der Straßenbreite (bei konstanter Fahrzeug- und Fußgängergeschwindigkeit)





x	y2
2.5	21.701
2.6	22.569
2.7	23.438
2.8	24.306
2.9	25.174
3.	26.042
3.1	26.91
3.2	27.778

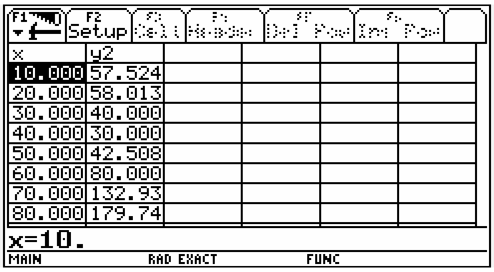
x=3.2

Ohne großen Aufwand können nun die verschiedensten Parameterstudien durchgeführt werden und die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler auf die Resultate und deren Interpretation und nicht ausschließlich auf die Bewältigung der Berechnungen gelegt werden.

4.2 Wir ermitteln Funktionsterme

Bei einem Flug im Heißluftballon liegt der Start in der Höhe 0, die Landung erfolgt (nach 1 Stunde 45 Minuten) auf einer 20 m höher gelegenen Plattform.
Nach sehr genauen Messungen und Berechnungen ergibt sich für h(t) eine Polynomfunktion 4. Grades, welche die Flughöhe in Meter in Abhängigkeit von der Flugzeit in Minuten angibt.

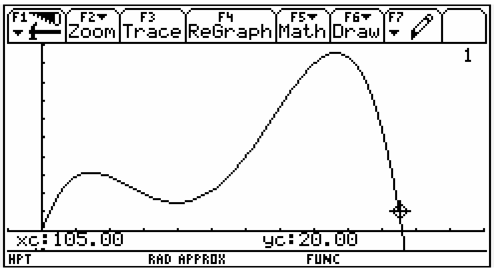
Versuchen Sie mit verschiedenen Lösungsstrategien den Funktionsterm h(t) zu ermitteln!
(*Hinweis:* Verwenden Sie dazu den unten angegebenen Ausschnitt aus der zugehörigen Wertetabelle, sowie die im Folgenden angezeigten drei Screen-Shots.)

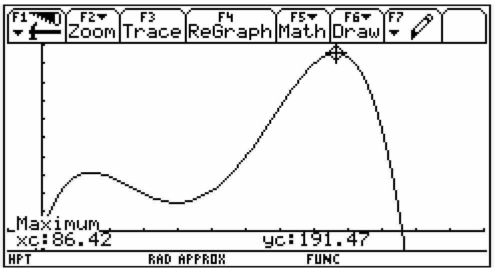


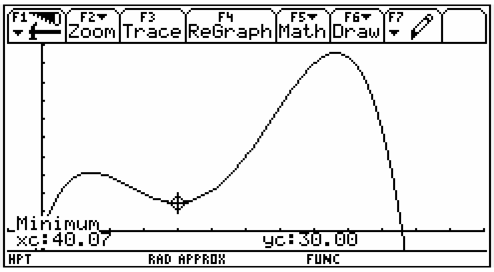
x	y2
10.000	57.524
20.000	58.013
30.000	40.000
40.000	30.000
50.000	42.508
60.000	80.000
70.000	132.93
80.000	179.74

x=10.

MAIN RAD EXACT FUNC







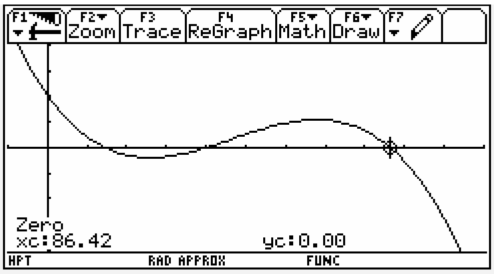
Die Funktion soll dann durch eine qualitative Beschreibung untersucht werden.
Dazu definieren wir im Y-Editor eine entsprechende Funktion und stellen ihr Schaubild im Grafik-Fenster dar.
Die Flugkurve kann dann durch Verwenden u.a. der Wörter „steigen“, „sinken“, „Hochpunkt“, „Tiefpunkt“ beschrieben werden.

- In welchen Zeitintervallen befindet sich der Ballon im Steigflug?
- In welchen Zeitintervallen befindet sich der Ballon im Sinkflug?
- Zu welchem Zeitpunkt ist die Flughöhe maximal bzw. minimal?

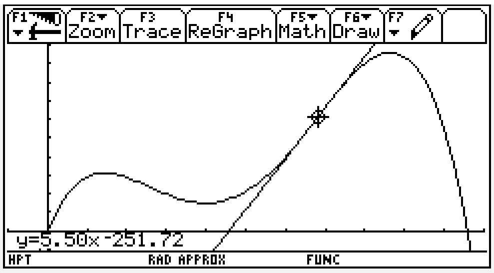
Zum Zeitpunkt t_0 = 40 min ist die Flughöhe minimal, wenn eine hinreichend kleine Zeitspanne betrachtet wird. Lokal, das heißt in der Umgebung von t_0 ist $h(t_0)$ = 30 m der kleinste Funktionswert; außerhalb dieser Umgebung treten auch kleinere Funktionswerte auf; wir sprechen daher von einem *lokalen* Minimum.
Nach etwa 86,4 min erreicht der Ballon seine größte Höhe, hier liegt ein *globales* Maximum vor.

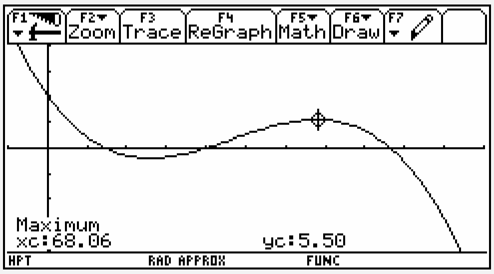
Die nebenstehende Abbildung stellt die Geschwindigkeit des Ballons dar.

- *Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem Hochpunkt bzw. Tiefpunkt und der Geschwindigkeit?*
- *Welches Vorzeichen hat die Geschwindigkeit während des Steig- bzw. Sinkfluges?*
- *Wie drückt sich der Betrag der Geschwindigkeit in der Flugkurve aus?*

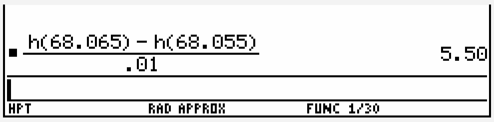


- *Wo sind die Stellen im Schaubild der Flugkurve, wo die Geschwindigkeit minimal bzw. maximal ist und was kann man dort über den Kurvenverlauf aussagen?*

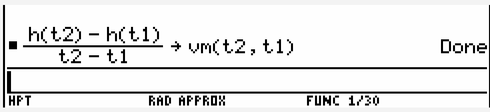


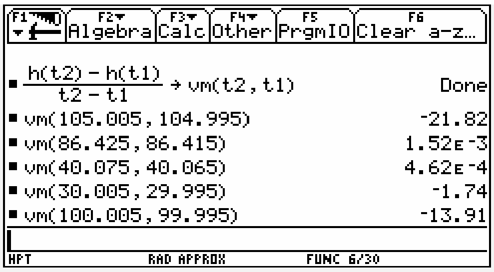


Wir sehen, dass die maximale Geschwindigkeit mit der Steigung der Tangente an der betreffenden Stelle im Zeit-Weg-Diagramm übereinstimmt. An dieser Stelle gibt es einen sogenannten Wendepunkt.
Diese Geschwindigkeit können wir näherungsweise auch berechnen, wenn wir das Zeitintervall sehr klein wählen; für Δt = 0,01 min ergibt sich für v(68,06) = 5,5 m/min



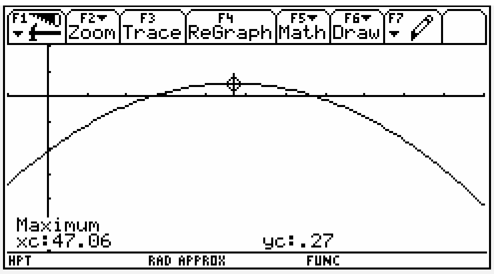
Wir können nach der Definition der mittleren Geschwindigkeit v gleich zurückgelegter Weg durch dafür benötigte Zeit eine allgemeine Funktion vm(t_2, t_1) für unseren Ballonflug festlegen und uns dann durch geeignete Wahl des Zeitintervalls zu jedem beliebigen Zeitpunkt hinreichend genau der Momentangeschwindigkeit nähern.



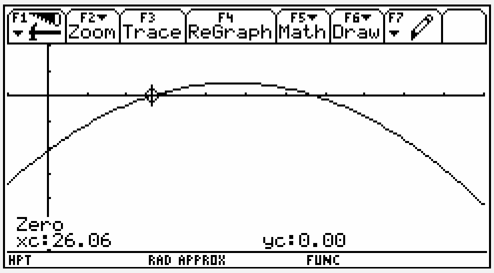


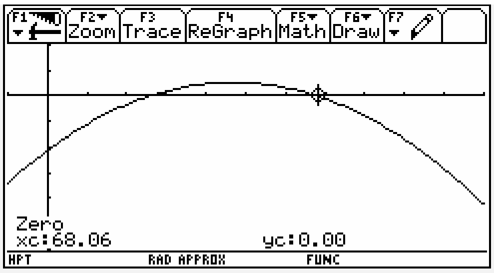
Die berechneten Werte können im Zeit-Weg-Diagramm mit Hilfe der Tangente überprüft werden, denn wir wissen schon, dass die Momentangeschwindigkeit an der Steigung der Tangente an die Zeit-Weg-Kurve abgelesen werden.

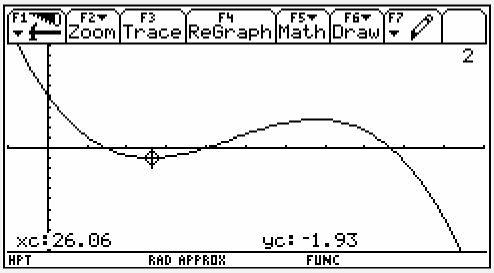
Was können wir über die Geschwindigkeitsänderung aussagen?
Diese wird analog zu den bisherigen Erkenntnissen durch die Steigung der Zeit-Geschwindigkeitskurve definiert.
Die Änderung der Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitintervall wird als Beschleunigung bezeichnet und ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



Was bedeuten positive Beschleunigungswerte, was negative Werte?
Welche Bedeutung haben die Nullstellen der Zeit-Beschleunigungsfunktion? Gibt es an diesen Stellen im Zeit-Weg- bzw. im Zeitgeschwindigkeits-Diagramm Besonderheiten festzustellen?







An den Nullstellen der Beschleunigungsfunktion hat die Geschwindigkeitsfunktion ihre lokalen Extremwerte (Minimum und Maximum); d.h. in einer sehr kleinen Umgebung um diese Stellen ändert sich die Geschwindigkeit nicht bzw. kaum. Im Zeit-Weg-Diagramm sind an diesen Stellen die so genannten Wendepunkte zu finden.

4.3 Wir arbeiten mit Diagrammen

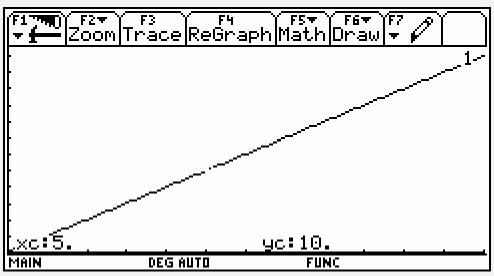
4.3.1 Zusammenhänge verstehen

Ein gleichmäßig beschleunigtes Fahrzeug erreicht aus der Ruhe heraus nach 10s seine Endgeschwindigkeit von 20m/s. Welchen Weg hat das Fahrzeug in dieser Zeit zurückgelegt?
Nach welcher Zeit hätte es bei doppelter Beschleunigung die angegebene Geschwindigkeit erreicht?

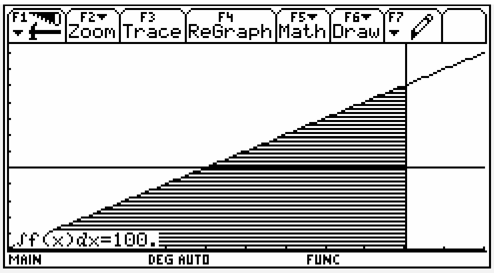
- Der Zusammenhang zwischen der Fahrzeugbeschleunigung und der in 10s erreichten Geschwindigkeit soll zeichnerisch dargestellt werden.
- Es soll ein Diagramm skizziert werden, das bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung den Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Weg und der erreichten Geschwindigkeit wiedergibt.
- Die Lösungen und Lösungswege sind zu begründen !

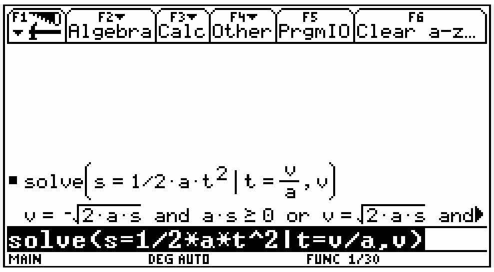
Aus ***a = Δv / Δt*** = 20 m/s / 10s = 2 m/s²
und
v(0s) = 0 m/s erhalten wir mit
y1(x) = 2x das v – t – Diagramm.

Daraus erkennen wir, dass die Geschwindigkeit nach 5s 10m/s beträgt, also halb so groß ist, wie am Ende unseres betrachteten Zeitintervalls.



Das Fahrzeug hat also in den ersten 10s den gleichen Weg zurückgelegt als hätte es sich mit der halben Endgeschwindigkeit die vollen 10s gleichförmig bewegt; dieser Zusammenhang wird aus der Deutung der Fläche unterhalb des v – t –Grafen deutlich.

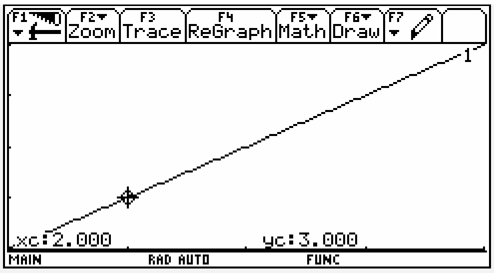




Aus der Formel, die wir im HOME-Fenster erzeugen, wird deutlich, wie der algebraische Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Weg s und der erreichten Geschwindigkeit v gewonnen wird und dass v prop. zur Quadratwurzel aus s ist.

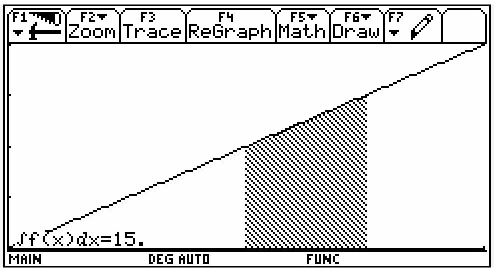
4.3.2 Darstellungen interpretieren

Gegeben ist das folgende v – t – Diagramm
Welche physikalische Bedeutung hat im Diagramm die Geradensteigung und wie groß ist sie?



Es handelt sich um das v – t - Diagramm eines gleichmäßig beschleunigten Massenpunktes.
Die Steigung der Geraden ist konstant und lässt sich aus der Grafik ermitteln. Physikalisch gibt die Steigung der Geraden die Beschleunigung des Massenpunktes an.

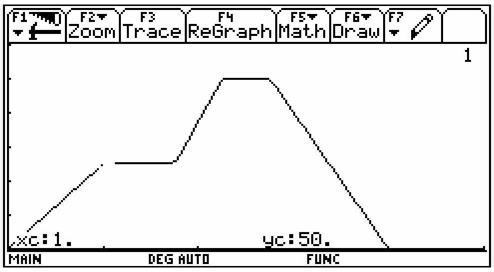
Welche physikalische Bedeutung hat der *schraffierte* Flächeninhalt?

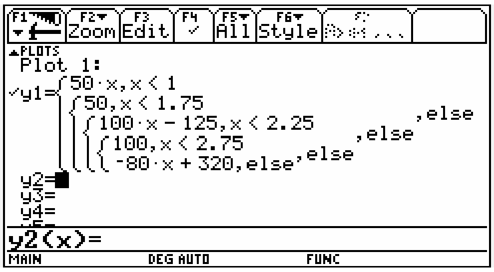


Allgemein ist bekannt, dass die Fläche unter der Kurve im v – t - Diagramm einer Bewegung zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 den in der Zeit t_2-t_1 zurückgelegten Weg repräsentiert.

4.3.3 Selbstständig Zusammenhänge entdecken

Gegeben ist das nachfolgende idealisierte Ort-Zeit-Diagramm der Bewegung eines im Ursprung abfahrenden Autos (Die Zeit ist in Stunden, der Weg in km aufgetragen)





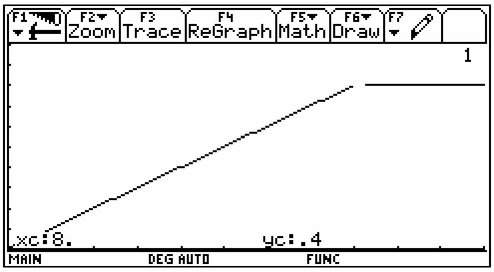
- Beschreibe möglichst genau die Bewegung des Autos!
- Zeichne auf einem Blatt Papier das zugehörige Geschwindigkeit – Zeit – Diagramm!
- Was versteht man unter der Durchschnittsgeschwindigkeit eines Körpers?
- Ermittle die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeugs während der ersten 2 ¼ Stunden. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit während der gesamten Fahrt?

Zum Zeitpunkt t = 1,5 h startet 150 km vom Ursprung entfernt ein zweites Fahrzeug und bewegt sich mit 80 km/h nach 0.

- Ergänze des obige Ort – Zeit - Diagramm im TI92 durch die Kurve für dieses Fahrzeug und lies ab, wann und wo sich beide Fahrzeuge begegnen!
- Kannst du den Zeitpunkt und den Ort der Begegnung auch berechnen?

4.3.4 Graphische Darstellungen verstehen und interpretieren

Das idealisierte Geschwindigkeit – Zeit - Diagramm eines geradlinig bewegten Körpers hat folgendes Aussehen(Zeit in s, v in m/s).

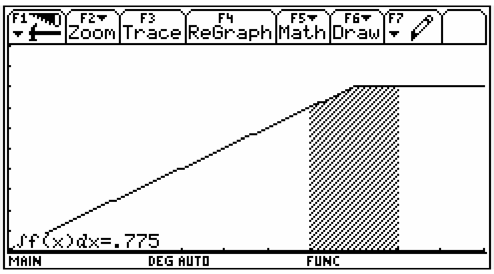


- Welchen Weg hat dieser Körper in den ersten 6 bzw. 10 Sekunden zurückgelegt?
- Wie weit kommt der Körper in der 6. bzw. in der 10. Sekunde?

- Zeichne das zur Bewegung gehörende Weg – Zeit - Diagramm und erläutere, wie man aus diesem Diagramm die Momentangeschwindigkeit zu einem beliebigen Zeitpunkt zeichnerisch ermitteln kann.
- Wie lässt sich aus der s(t) - Funktion die Momentangeschwindigkeit rechnerisch ermitteln?

Welche physikalische Bedeutung hat die im nebenstehenden

v – t - Diagramm schraffierte Fläche?



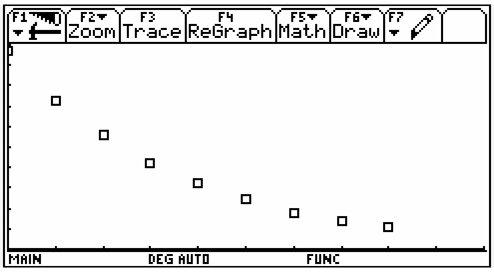
➢ *Veranschauliche dies auch im s – t – Diagramm und überprüfe den angegebenen Zahlenwert!*
➢ *Untersuche die Richtigkeit der folgenden Behauptung:*
Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung eines Körpers aus der Ruhe heraus besteht zwischen der Geschwindigkeit v und der zurückgelegten Wegstrecke s zum Zeitpunkt t die Beziehung $v = 2s/t$.

4.3.5 Daten veranschaulichen

Die Aktivität A eines radioaktiven Präparates Bi(210,83) wird über eine längere Zeit gemessen. Man erhält nach Abzug des Nulleffekts die folgende Tabelle:

t in d	0	2	4	6	8	10	12	14	16
A in Bq	600	452	345	261	199	152	111	85	64

➢ Zeichne das zugehörige Diagramm und entnimm daraus die Halbwertszeit des Präparates.



➢ Kennst du eine Funktion, die den Aktivitätsverlauf beschreibt?

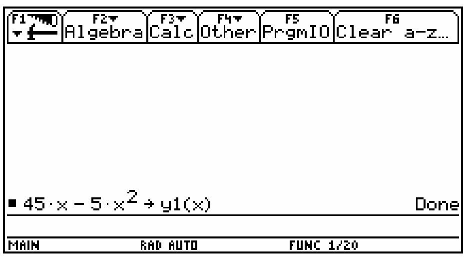
Experimentiere mit deinem Rechner und beantworte die folgenden Fragen!

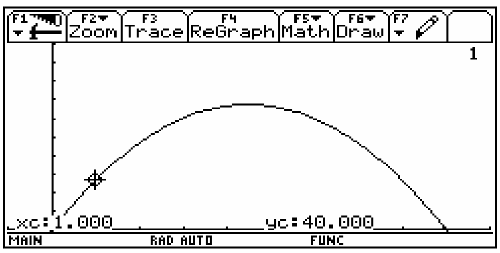
➢ Welcher Prozentsatz der Bi-Kerne ist nach 15 Tagen noch unzerfallen?
➢ Welcher Prozentsatz ist nach 30 Tagen zerfallen?
➢ Zu welchem Zeitpunkt war die Aktivität des Präparates viermal so groß als nach 30 Tagen ?
➢ Wann werden weniger als 0,1% der Bi-Kerne vorhanden sein?

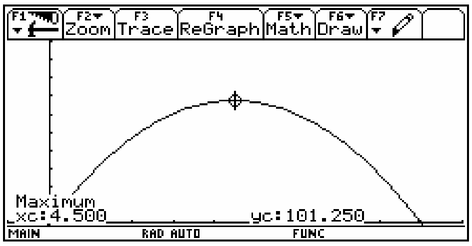
4.3.6 Schülerarbeitsblatt (senkrechter Wurf)

Ein Pfeil wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 45 m/s senkrecht nach oben abgeschossen.

Stelle die Bewegung in einem Zeit-Weg-Diagramm im GRAFIK - Fenster deines Rechners dar!







Beschreibe diese Zeit-Weg-Funktion und gib an, was man alleine aus ihrem Schaubild über die Geschwindigkeit des Pfeils herausfinden kann!

Du kannst die folgenden Fragen mit Hilfe deines Rechners bearbeiten.
Dabei brauchst du keine einzige Rechnung durchzuführen.
Verwende nur das Grafik-Fenster!

→ Wie interpretierst du die Symmetrie des Zeit-Weg-Diagramms?

→ Wie hoch steigt der Pfeil und wann erreicht er seine größte Höhe?

→ Wann trifft er wieder auf dem Boden auf?

→ Zu welchen Zeiten befindet sich der Pfeil in einer Höhe von 10 m über dem Abschusspunkt?

→ Wie lange ist der Pfeil mehr als 5 m vom Abschusspunkt entfernt?

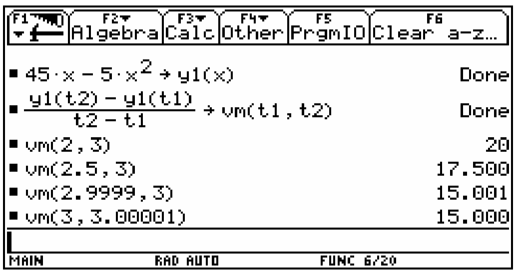
→ Wie hoch steigt der Pfeil in der 1. Sekunde? Wie hoch in der zweiten, dritten, vierten Sekunde?

Zur Beantwortung der letzten Frage, musst du überlegen, welchen Weg der Pfeil in der ersten beziehungsweise in der zweiten, dritten und vierten Sekunde zurücklegt; d.h. du musst feststellen, wie groß die Differenz der Funktionswerte y1(1) – y1(0) beziehungsweise y1(2) – y1(1) usw. ist. Diese Differenzen, die wir mit Δy1 bezeichnen, beziehen sich in unserem Beispiel auf das Zeitintervall 1 Sekunde und heißen auch **mittlere Änderungsrate**.

In unserem Beispiel geben sie die ***mittlere Geschwindigkeit des Pfeils*** in der ersten beziehungsweise in der zweiten Sekunde an.

Erstelle nun im HOME-SCREEN eine Funktion für die mittlere Geschwindigkeit des Pfeils in einem zu bestimmenden Zeitintervall!

→ Überlege, wie du mit der Formel für die mittlere Geschwindigkeit möglichst genau die Momentangeschwindigkeit des Pfeils zum Zeitpunkt t = 3 s ermitteln kannst?



Überprüfe dein Ergebnis dann im GRAFIK-Fenster!

Vervollständige die Tabelle und interpretiere	[t1,t2]	[0;0,5]	[0,5;1]	[1;1,5]	[1,5;2]	[2;2,5]	[2,5;3]
	vm						

die verschiedenen Werte!	[t1,t2]	[3;3,5]	[3,5;4]	[4;4,5]	[4,5;5]	[5;5,5]	[5,5;6]
	vm						
Beachte, wie sich die mittlere Änderungsrate der Höhe ändert, und gib eine Erklärung des physikalischen Zusammenhangs!	[t1,t2]	[6;6,5]	[6,5;7]	[7;7,5]	[7,5;8]	[8;8,5]	[8,5;9]
	vm						

4.4 Welche Bilder erhalten wir mit einer Sammellinse?

In Mathematik-Schulbüchern finden wir bei den anwendungsorientierten Aufgaben zum Arbeiten mit Formeln und Gleichungen unter anderen Fragestellungen der folgenden Art:

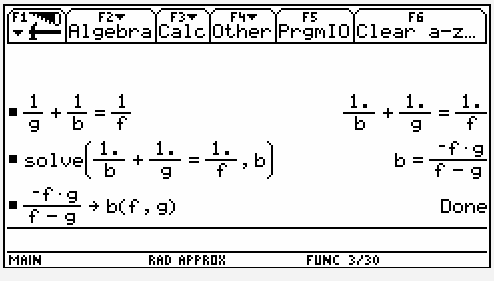
- In welcher Entfernung vom Objektiv eines Diaprojektors werden die Bilder scharf abgebildet? Wo muss also der Schirm aufgestellt werden? Wie groß wird das Bild auf dem Schirm?
- Wie kann die Brennweite einer Linse bestimmt werden?
- Wie weit von der Linse einer „Lochkamera“ entfernt muss sich ein Gegenstand befinden, damit er auf der lichtempfindlichen Platte scharf abgebildet wird?
- Wie groß und in welcher Entfernung von einer Lupe mit 6,5 cm Brennweite erscheint das Bild eines 5 mm großen Gegenstandes, der in einer Entfernung von 5 cm betrachtet wird?

Beim Bearbeiten dieser Problemlöseaufgaben erlebt der Schüler nicht nur einen Bezug zu seiner Lebenswelt, sondern er setzt sich auch sehr allgemein mit den funktionalen Zusammenhängen der einzelnen Variablen in den jeweiligen Formeln auseinander.

Für eine sehr dünne Sammellinse gilt zwischen Brennweite f, Gegenstandsweite g und Bildweite b der folgende Zusammenhang, der als Linsengleichung bekannt ist:

$$\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

Mit Hilfe der Linsengleichung kann die Bildweite b als Funktion der Gegenstandsweite g bei vorgegebener Brennweite f mit Hilfe des TI - 92 definiert werden.



Eigenschaften dieser Funktion **b(f, g)**:

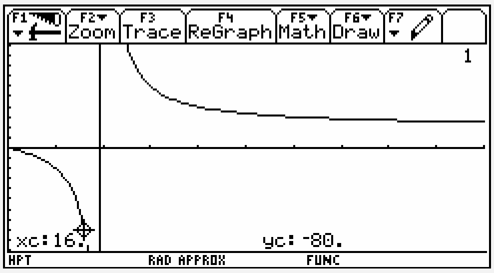
- Die gebrochen rationale Funktion **b(f , g)** ist für f = g nicht definiert; d.h. in diesem Fall gibt es kein Bild.
- Wenn f kleiner als g ist, so wird b negativ; das Bild ist dann virtuell
- Wenn g sehr groß wird, so strebt b gegen die Brennweite f .

Für eine bestimmte Linse (z.B. f = 20 mm) kann die Bildweite b in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite g definiert und grafisch dargestellt werden.

■ b(20, x) $\qquad \dfrac{20.\cdot x}{x-20.}$

■ $\dfrac{20.\cdot x}{x-20.} \to$ y1(x) $\qquad$ Done

HPT RAD APPROX FUNC 2/30



Für g = 16 mm ergibt sich dann eine Bildweite von b = - 80 mm, d.h. ein virtuelles Bild.

Was erhalten wir für g sehr nahe beim Brennpunkt, d.h. g ≅f ?
Für g = 20 ist die Funktion nicht definiert. Nähern wir uns vom Linsenmittelpunkt aus dem Brennpunkt, so wird das Bild immer größer und entfernt sich immer mehr.

F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clear a-z…

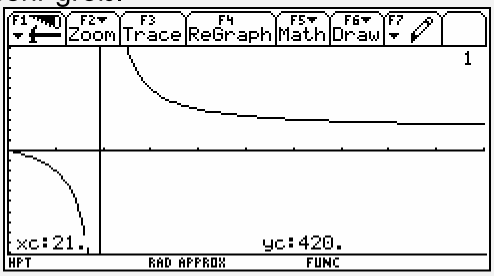
■ $\lim\limits_{g\to 20}\left(\dfrac{-20\cdot g}{20-g}\right)$ $\qquad$ undef

■ $\lim\limits_{g\to 19.9999}\left(\dfrac{-20\cdot g}{20-g}\right)$ $\qquad$ -4.E6

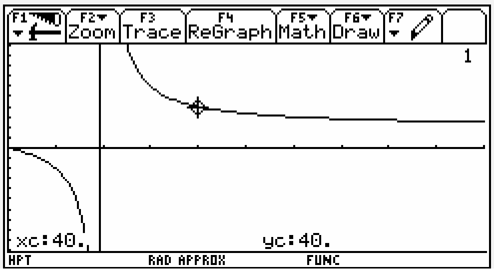
■ $\lim\limits_{g\to 20.00001}\left(\dfrac{-20\cdot g}{20-g}\right)$ $\qquad$ 4.E7

HPT RAD APPROX FUNC 3/30

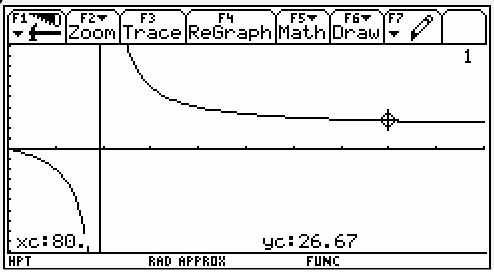
Sobald g>f wird, wird auch die Bildweite positiv und - solange g nicht viel größer ist als f – sehr groß.



Wenn g = 2 f (doppelte Brennweite) so erhalten wir für b = 2f; das Bild ist gleich groß wie der Gegenstand und von der Linse gleich weit entfernt.



Für g > 2f erhalten wir für b immer weniger als g; d.h. das Bild ist immer kleiner als der Gegenstand



und für ein sehr großes g nähert sich die Bildweite immer mehr dem Betrag der Brennweite f

x	y1
1000.	20.41
1500.	20.27
2000.	20.2
2500.	20.16
3000.	20.13
3500.	20.11
4000.	20.1
4500.	20.09

x=1000.

Welchen Einfluss hat die Brennweite auf die Lage und Größe des Bildes?

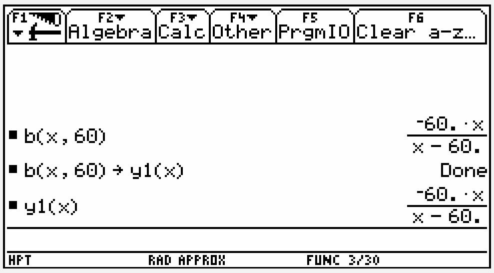
■ b(20, x) → y1(x) $\qquad$ Done
■ b(30, x) → y2(x) $\qquad$ Done
■ b(40, x) → y3(x) $\qquad$ Done

HPT RAD APPROX FUNC 3/30

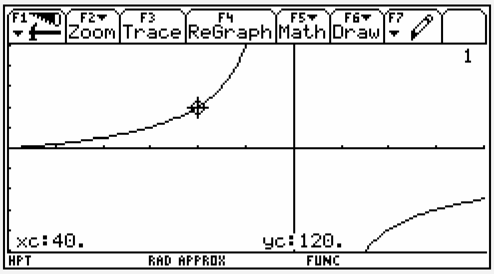
x	y1	y2	y3
10.	-20.	-15.	-13.33
20.	undef	-60.	-40.
30.	60.	undef	-120.
40.	40.	120.	undef
50.	33.33	75.	200.
60.	30.	60.	120.
70.	28.	52.5	93.33
80.	26.67	48.	80.

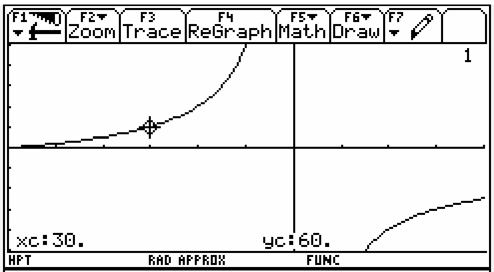
x=60.

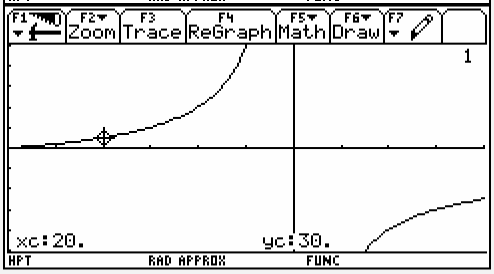
Die Bildweite wird dann als Funktion der Brennweite f einer Linse bei gegebener Gegenstandsweite (hier g = 60 mm) als y1(x) definiert



und graphisch dargestellt







Für f < 60 (d.h. g > f) ist die Funktion b(f,60) streng monoton steigend; eine Linse mit größerer Brennweite erzeugt von einem Gegenstand in gleicher Gegenstandsweite ein größeres Bild, da gilt

$$\frac{Bildgröße}{Gegens\tan dsgröße} = \frac{Bildweite}{Gegens\tan dsweite}$$

4.5 Schwingungen – ein Schülerarbeitblatt

Ein punktförmiger Körper bewegt sich auf einem Kreis mit dem Radius r.
Zum Zeitpunkt t = 0 befindet er sich in P_0 (r/0),
zum Zeitpunkt t in P_t $(r \cdot \cos(\varphi(t)) / r \cdot \sin(\varphi(t)))$,
wobei $\varphi(t)$ das Bogenmaß der bis zum Zeitpunkt t durchgeführten Drehbewegung ist.

Es gilt $\varphi(t) = \omega \cdot t$; die Konstante ω heißt Winkelgeschwindigkeit.

Wird der Körper beleuchtet, so beschreibt der Schattenpunkt S_t auf einem normal zu den Lichtstrahlen aufgestelltem Schirm eine Schwingung um die „Ruhelage", wie bei einer schwingenden Schraubenfeder.

- **$y(t) = r \cdot \sin(\varphi(t))$** heißt ***Elongation*** und gibt den Abstand von der Ruhelage an;
- die maximale Elongation heißt ***Amplitude*** der Schwingung.
- ***T*** ist die ***Umlaufszeit*** der Kreisbewegung bzw. die ***Schwingungsdauer*** der Schwingung.
- Die Zahl der Umläufe pro Sekunde heißt ***Drehzahl***; die Zahl der vollen Schwingungen pro Sekunde heißt ***Frequenz*** der Schwingung.

Es gilt: $f = \frac{1}{T}$ und $\omega = 2\pi f$; die Winkelgeschwindigkeit ist also das 2π-fache der Frequenz und heißt auch Kreisfrequenz der Schwingung.

Eine Schwingung habe die Amplitude r = 2 m und die Frequenz f = 10 s^{-1}.	y(t) =					
➢ Stelle eine Formel für die Elongation auf und berechne die angegebenen Elongationen sowie die Schwingungsdauer!	T = s					
	y(1)	y(0,1)	y(0,05)	y(1,2)	y(1,4)	y(2)
Bestimme mit Hilfe des Rechners die Momentangeschwindigkeiten der oben definierten Schwingung näherungsweise mit Hilfe des Differenzenquotienten!	v(1)	v(0,1)	v(0,05)	v(1,2)	v(1,4)	v(2)
Eine Schwingung habe die Elongation **$y(t) = 5 \cdot \sin(2t)$**. ➢ Gib die Amplitude r, die Kreisfrequenz ω, die Frequenz f und die Schwingungsdauer T an!	r = ω = f = T =					
Für eine Schwingung gilt : $y(t) = \frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2} \cdot t)$.	$t_{y=0}$ = $t_{y=max}$ =					

<table>
<tr><td>➢ Zu welchen Zeiten ist die Elongation Null, zu welchen Zeiten maximal, wann minimal?</td><td>$t_{y=min}$ =</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Ein „punktförmig kleiner“ Körper bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit dem Radius 2 und dem Mittelpunkt O. Er befindet sich zum Zeitpunkt t in $P_t(x_1/x_2)$.

(0) Stelle Formeln für x_1 und x_2 auf, wenn der Körper im Punkt (0/2) startet!

(0) Stelle Formeln für x_1 und x_2 auf, wenn sich der Körper zum Zeitpunkt t = 3 im Punkt (0/2) befindet!</td><td>(1)

$x_1(t)$ =
$x_2(t)$ =</td></tr>
<tr><td>(2)

$x_1(t)$ =
$x_2(t)$ =</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">Stelle eine Formel für die Elongation y(t) einer allgemeinen Sinusschwingung mit der Amplitude r, der Schwingungsdauer T und der Phasenverschiebung α/ω gegenüber der Grundschwingung auf!

(0) $r = 7;\ T = 4;\ \alpha/\omega = 0$
(0) $r = 1;\ T = 10;\ \alpha/\omega = \pi$
(0) $r = 10;\ T = 2;\ \alpha/\omega = -5/4$
(0) $r = 2;\ T = 8;\ \alpha/\omega = 7/2$</td><td>(1)
y(t) =</td></tr>
<tr><td>(2)
y(t) =</td></tr>
<tr><td>(3)
y(t) =</td></tr>
<tr><td>(4)
y(t) =</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="6">Eine Schwingung hat die Elongation
(0) $y(t) = 1/5 \cdot \sin(8t + \pi/6)$
(0) $y(t) = 3 \cdot \sin(60\pi \cdot t - \pi)$

Berechne
➢ die Amplitude,
➢ die Schwingungsdauer und
➢ die Phasenverschiebung α

gegenüber der Grundschwingung!</td><td>r_1</td><td></td></tr>
<tr><td>T_1</td><td></td></tr>
<tr><td>α_1</td><td></td></tr>
<tr><td>r_2</td><td></td></tr>
<tr><td>T_2</td><td></td></tr>
<tr><td>α_2</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">➢ Zu welchen Zeiten ist der Körper in der Ruhelage, zu welchen Zeiten ist er von der Ruhelage am weitesten entfernt?</td><td>(1)</td><td>$t_{y=0}$=</td><td>$t_{y=max}$=</td><td>$t_{y=min}$=</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>$t_{y=0}$=</td><td>$t_{y=max}$=</td><td>$t_{y=min}$=</td></tr>
</table>

4.6 *Abschnittsweise definierte Funktionen*

Ein Holzquader mit quadratischer Grundfläche schwimmt im Wasser, sodass nur sein oberstes Drittel sichtbar ist.

- Welche Dichte ρ_{Holz} hat der Zylinder?
- Welche Arbeit muss beim Herausziehen des Körpers aus dem Wasser verrichtet werden? (a = 10 cm, h = 6 dm)

Ein Körper taucht soweit in eine Flüssigkeit ein, bis der Auftrieb (= Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge) gleich dem Gewicht des Körpers ist.
Es gilt: Auftrieb $F_A = V_E \,.\, \rho_{Fl} \,.\, g$ = *Gewicht* F_G

Das eingetauchte Volumen V_E beträgt 2/3 von $V_{Körper}$; $F_G = \rho_{Holz} \cdot V_{Körper} \,.\, g$
Im Gleichgewichtszustand gilt:
$V_E \,.\, \rho_{Fl} \,.\, g = \rho_{Holz} \cdot V_{Körper} \,.\, g$
und mit $V_E = 2/3\, V_{Körper}$ erhalten wir $\rho_{Holz} = 2/3 \cdot \rho_{Fl}$

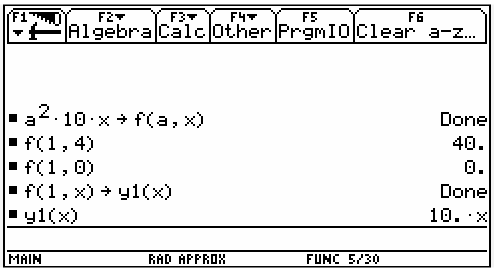
Der Auftrieb F_A hängt nun von dem beim Herausziehen zurückgelegten Weg x bzw. von der sich ändernden Eintauchtiefe 2/3 h - x des Körpers ab; für x = 0 ergibt sich $F_A = F_G$ und damit die resultierende „Gewichtskraft" F = 0 und für x = 2/3 h erhalten wir $F_A = 0$ und $F = F_G$

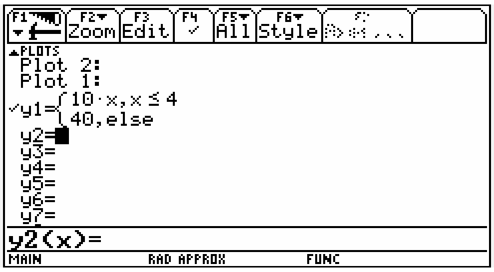
$F(x) = F_G – F_A(x)$

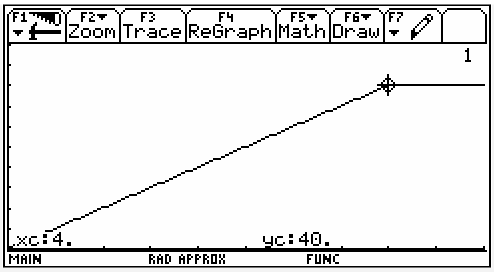
$F(x) = 2/3 \cdot a^2 h \cdot g – a^2(2/3\, h - x) \cdot g$

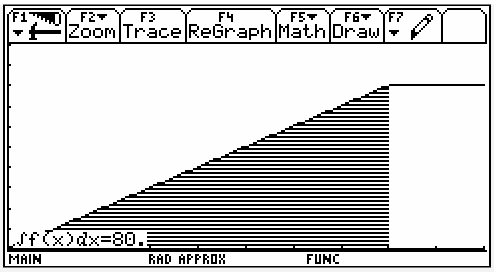
$F(x) = a^2 \cdot g \cdot (2/3\, h – 2/3\, h + x)$

$F(x) = a^2 \cdot g \cdot x$









Die erforderliche Kraft zum Herausziehen des Körpers steigt von 0 auf 40N an; sobald der Körper nicht mehr eintaucht muss beim weiteren Heben gegen die Gewichtskraft (= 40 N) Arbeit verrichtet werden.

Beim Herausziehen des Holzquaders aus dem Wasser muss eine Arbeit von 8 Joule verrichtet werden.

Im Anschluss an diese einfache Aufgabe könnte die Arbeit zum Herausziehen weiterer Körper, z.B. Kegel, Kugel, Pyramide,... untersucht und berechnet werden.

4.7 Elementare Integration (Grundintegral)

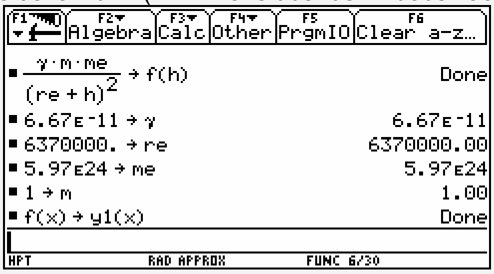
Welche Arbeit W ist aufzuwenden, um eine an der Erdoberfläche befindliche Masse m aus dem Einflussbereich der Erde heraus zu bringen?
Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss daher dieser Körper von der Erdoberfläche abgeschossen werden?
(Erdradius: r_E = 6370 km; Gravitationskonstante $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²; Erdmasse $m_E = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg)

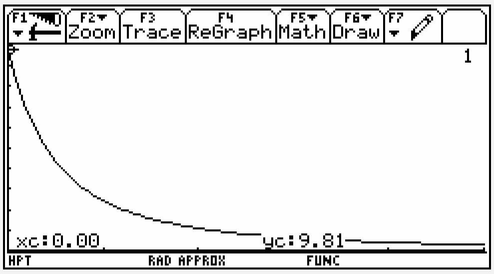
Wir benützen zur Berechnung das Gravitationsgesetz

$$F_G(r) = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Damit ist die Kraft festgelegt mit der der Körper der Masse m von der Erde angezogen wird und gegen diese Arbeit verrichtet werden muss.

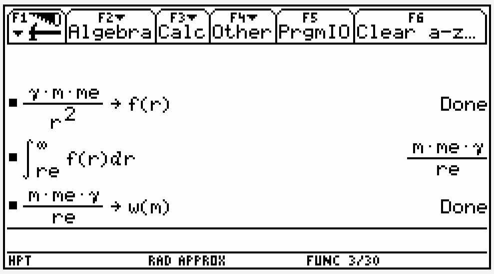
Diese Kraft ist nicht konstant, sondern ist umgekehrt proportional zu h² (h .... Höhe über der Erdoberfläche)



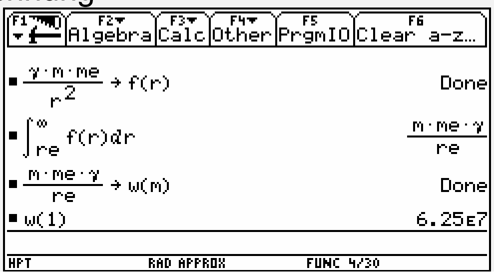


Aus der Definition der Arbeit gleich „Kraft mal Weg" ergibt sich die Notwendigkeit der Flächenberechnung, die der Graph für die Gravitationskraft im 1. Quadranten mit der x-Achse einschließt.
Die Anziehungskraft durch die Erdkugel verschwindet erst in großer Entfernung von der Erdoberfläche ($r \to \infty$). Daher ist die Integration von $r = r_E$ bis hin zu $r = \infty$ zu erstrecken.

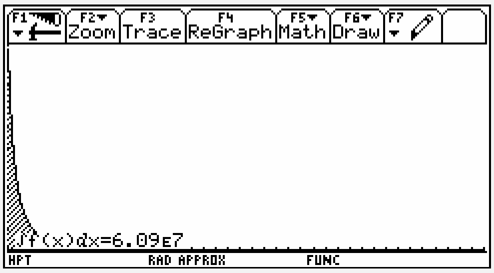
Wir berechnen mit dieser ortsabhängigen Kraft das Arbeitsintegral und erhalten



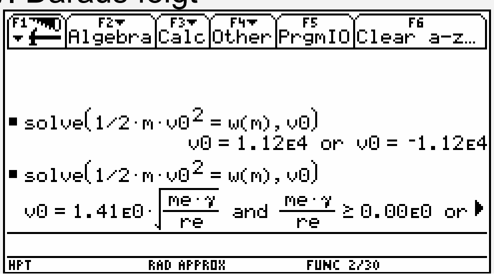
Diese Arbeit muss der Masse m beim Verlassen der Erdoberfläche in Form von kinetischer Energie zugeführt werden. Für m = 1kg erhalten wir sowohl durch Rechnung



als auch aus der Grafik *näherungsweise* (weil wir hier nur innerhalb des Fensters integrieren können)



Soll der Körper nun den Anziehungsbereich der Erde verlassen, so muss seine anfängliche kinetische Energie dazu ausreichen, die Gravitationsarbeit zu verrichten, d.h. $E_{Kin} = W$. Daraus folgt



Die auch als Fluchtgeschwindigkeit bezeichnete Abschussgeschwindigkeit der Masse m beträgt 11,2 km/s und ist (unabhängig von der Masse) für alle Körper gleich.

Sie hängt von der Masse und dem Radius des Zentralkörpers ab; direkt proportional zur Wurzel aus der Masse des Zentralkörpers und umgekehrt proportional zur Wurzel aus seinem Radius. Hat ein Körper bei gleichem Radius wie die Erde die vierfache Erdmasse, so ist seine Fluchtgeschwindigkeit doppelt so groß, wie die der Erde.

4.8 Weitere anwendungsorientierte Aufgabenstellungen

1.) Eine Schraubenfeder ist in unbelastetem Zustand 8,2 cm lang und bei einer Belastung mit 5 N genau 11,7 cm lang. Nach dem HOOKE' schen Gesetz ist die Zuordnungsvorschrift Belastung $x \rightarrow$ Länge y eine lineare Funktion der Form $y = m \cdot x + b$.

- Bestimme m und b und stelle das Schaubild der Funktion im Grafik-Fenster dar.
- Interpretiere die Bedeutung der beiden Parameter m und b physikalisch.
- Beantworte im Grafik-Fenster und mit Hilfe der Tabelle, wie sich die Länge der Feder ändert, wenn die Belastung um 1,8 N vermehrt bzw. um 2,4 N vermindert wird.
- Ermittle ebenfalls mit ausschließlich grafischen Methoden, welche Belastung eine Verlängerung der Feder um 5 cm ergibt!

1.) Franz geht gerne Bergwandern und versucht dabei eine konstante Geschwindigkeit einzuhalten. Angenommen – ein idealer Hang – hat eine Neigung von 17% und Franz legt pro Sekunde 0,6 m zurück. Seinen Aufstieg beginnt er in 1150 Meter.

- Bestimme die Höhe h als Funktion der Wanderzeit t, stelle das Schaubild dieser Funktion dar und beantworte mit Hilfe der Grafik bzw. einer entsprechenden Tabelle die folgenden Fragen:
- Nach welcher Zeit ist Franz am Ziel, das auf 2320 m liegt?
- In welcher Höhe befindet sich Franz nach 40 Minuten Wanderzeit?
- Wie lange braucht Franz bis er sein Ziel erreicht, wenn er mit 0,7 m/s unterwegs ist?
- Braucht er für seine Wanderung länger, wenn er nur mit 0,55 m/s marschiert, dafür aber einen steileren Hang (20%) wählt?
- Braucht er für seine Wanderung weniger lang, wenn er mit 0,65m/s marschiert, dafür aber einen flacheren Hang (15%) wählt?

1.) Bei verschiedenen Belastungen einer Schraubenfeder werden folgende Zahlenpaare (Kraft in N/ Länge in cm) gemessen: [(0/10,0), (0,5/10,9), (1,0/11,6), (2,0/12,9), (3,0/14,6), (4,0/15,8)].

- Stelle die Abhängigkeit der Länge s von der Kraft F grafisch (mit Hilfe des DATA-MATRIX-Editors) und rechnerisch dar und ergänze die folgenden Zahlenpaare (1,5/.....), (....../13,5), (....../20).
- Wo liegt hier physikalisch die Gültigkeitsgrenze des zugehörigen mathematischen Modells? Welche Bedeutung hat der Schnittpunkt der Ausgleichsgeraden mit der y-Achse?
- Was wird durch den Zahlenwert der Steigung der Ausgleichsgeraden ausgedrückt?

4.) Zwischen 0°C und 24°C besteht zwischen dem Volumen V und der Temperatur x des Wassers der Zusammenhang $V(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Gegeben seien folgende Messwertepaare (x/V): (0/1,00013), (6/1,00030), (12/1,00047), (18/1,00137), (24/1,00267).

- Bestimme die Koeffizienten a,b,c und d und stelle die Funktion V(x) im Grafik-Fenster des RECHNERS dar!
- Führe eine elementare Funktionsdiskussion durch!
- Gibt es ein Minimum und wo liegt es? Welche physikalische Eigenschaft des Wassers wird damit zum Ausdruck gebracht?
- Um wieviel VE (Volumseinheiten) ändert sich das Volumen bei einer Erwärmung von 3°C auf 4°C? Welches Vorzeichen hat diese Änderung und welche physikalische Interpretation kannst du geben?
- Um wieviel VE (Volumseinheiten) ändert sich das Volumen bei einer Erwärmung von 4°C auf 5°C? Welches Vorzeichen hat diese Änderung und welche physikalische Interpretation kannst du geben?
- Um wieviel VE (Volumseinheiten) ändert sich das Volumen bei einer Erwärmung von 4°C auf 4,05°C und von 80°C auf 80,05°C? Wie erklärst du die verschiedenen Werte? Wie drücken sich die Resultate in der Grafik aus?

5.) Zwei Autos fahren mit einer Geschwindigkeit von je 90 km/h hintereinander her. Nach drei Sekunden bremst Auto 1 mit der Bremsverzögerung von 6 m/s², nach einer weiteren Sekunde bremst auch Auto 2, und zwar mit der Bremsverzögerung von 8 m/s².

- Stelle die Geschwindigkeit beider Autos grafisch dar!
- Ermittle aus dieser Grafik, welchen Weg beide Fahrzeuge während der angegebenen Zeitdauer bis zu ihrem Stillstand zurücklegen.
- Kommt es zu einem Auffahrunfall? (Nimm an, dass der Abstand der beiden Fahrzeuge ursprünglich 10 m betragen hat)
- Welche Geschwindigkeit haben beide Fahrzeuge 2 Sekunden nachdem Auto 1 zu bremsen begonnen hat?
- Gibt es einen Zeitpunkt während der Bremsphase, wo die Geschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge gleich sind?
- Wie weit sind die beiden Autos beim Bremsbeginn des Autos 2 voneinander entfernt?

6.) Auf gerader Strecke fährt ein Zug mit 90 km/h; er kann mit 0,5 m/s² Verzögerung abgebremst werden.

- Erstelle eine Zeit-Geschwindigkeits-Funktion und ermittle aus ihrem Schaubild im Grafik-Fenster, wieviele Sekunden der Bremsvorgang dauert.
- Wie weit vor dem Bahnhof müssen die Bremsen betätigt werden?
- Wann hat der Zug die halbe Bremsstrecke zurückgelegt?
- Wie groß müsste die Bremsverzögerung sein, wenn der Bremsvorgang um 10 s kürzer dauern soll?
- Wie groß müsste die Bremsverzögerung sein, wenn der Bremsweg um 50 m kürzer sein soll?
- Vergleiche damit die Bremsverzögerung eines IC bzw. eines ICE: Ein IC benötigt 2000 m, um aus einem Tempo von 200 km/h zum Stehen zu kommen; dieselbe Strecke reicht für einen ICE, um von 250 km/h auf Null zu kommen. Wie groß sind jeweils die durchschnittlichen Bremsverzögerungen? Wie lange dauert es, bis ein IC bzw. ICE zum Stehen kommt?

7.) In einem Gefäß befindet sich heißes Wasser mit der Temperatur $T_2 = 85°C$; die Umgebung hat die Temperatur $T_1 = 18°C$. Die Abkühlung auf die Temperatur T erfolgt nach den Newtonschen Abkühlungsgesetz $T = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$ (Zeit t in Minuten).

- ➢ Ermittle das Schaubild der T(t) – Funktion im Grafikfenster!
- ➢ Welche Temperatur hat das Wasser nach 10 min, nach 20 min, nach 40 min, nach 1 h?
- ➢ Stelle eine Vermutung auf, wovon die Abkühlungsgeschwindigkeit abhängt?
- ➢ Du bekommst eine Tasse mit besonders heißem Tee (93°C) serviert. Dazu da ihn gezuckert trinkst, möchtest du zwei Stück Würfelzucker hinein geben. Dadurch wird der Tee – vor allem durch den Lösungsvorgang – um 15°C abgekühlt. Du bevorzugst 38°C als Trinktemperatur. Ist es nun klüger, den Zucker sofort hineinzuwerfen – oder abzuwarten, bis der Tee auf 53°C abgekühlt ist und erst dann zu zuckern? Verwende das Newtonsche Abkühlungsgesetz und stelle beide Vorgänge im Grafik-Fenster dar!

2. Wir arbeiten mit dem Mode PARAMETRIC

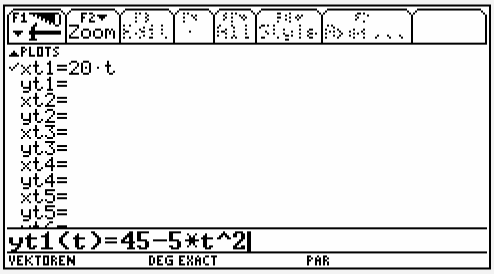
5.1 Der horizontale Wurf

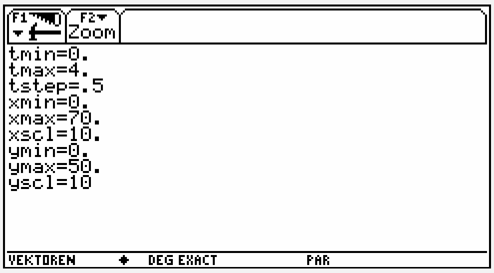
Ein punktförmiger Körper wird aus einer Höhe h = 45 m horizontal mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 20 m/s abgeworfen.

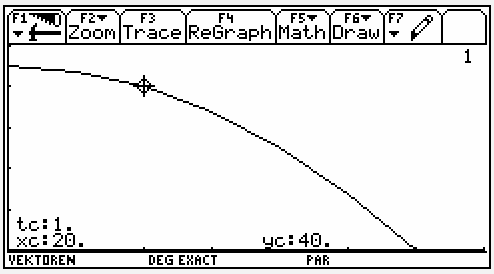
- ➢ **Welche Bahnkurve beschreibt der Körper?**

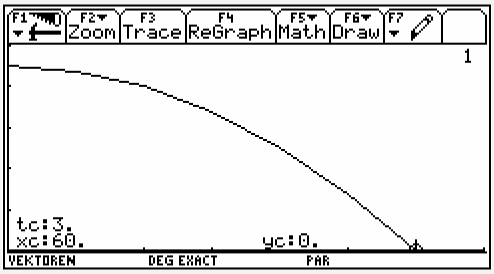
Der Körper bewegt sich in x-Richtung nach dem Bewegungsgesetz der gleichförmigen geradlinigen Bewegung $x = v_0 \cdot t$ und in der y-Richtung nach dem Bewegungsgesetz der geradlinig gleichförmig beschleunigten Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit $y = ½ \cdot g \cdot t$

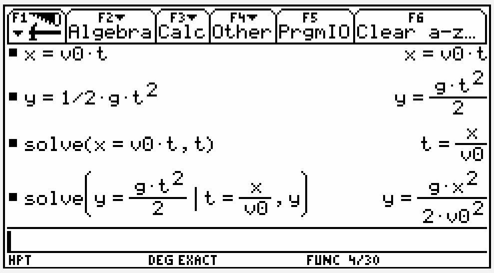
Als Flugbahn dieses horizontal geschleuderten Körpers erhalten wir auf der Erde eine Parabel





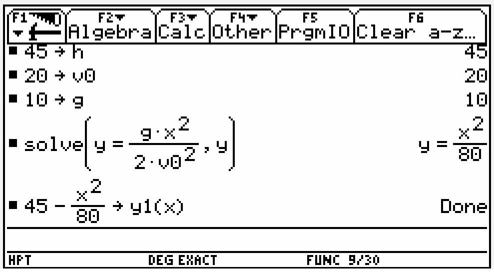


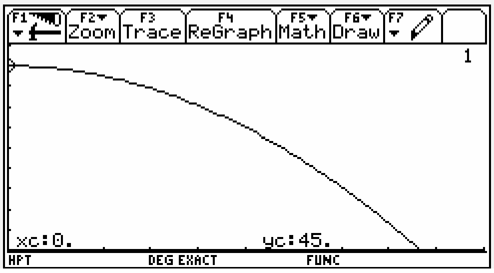




- ➢ Wie kann die Bewegung des Körpers bis zum Aufschlag in einem Diagramm in einem x-y-Koordinatensystem dargestellt

Mit den Einstellungen xmin=0, xmax=70, ymin=0 und ymax=50 erhalten wir das folgende Diagramm werden?



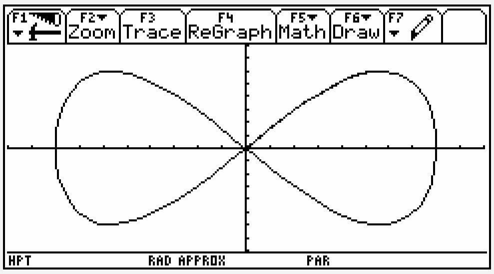


5.2 Lissajous – Figuren

Lissajous-Figuren entstehen durch ungestörte Überlagerung zweier aufeinander senkrecht stehender harmonischer Schwingungen, deren Frequenzen in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen. Es werden zwei Schwingungen in zwei Dimensionen überlagert. Lissajous-Figuren lassen sich beispielsweise auf einem Oszillograph durch Anlegen von sinus- oder kosinusförmigen Wechselspannungen an den beiden Ablenkkondensatoren realisieren.

- **Es ist der Verlauf der von dem Elektronenstrahl auf dem Schirm gezeichneten Lissajous-Figur mit der Parameterdarstellung $x = a \cdot \sin(\omega \cdot t)$, $y = b \cdot \sin(2\,\omega \cdot t)$, $t \geq 0$ für $a = 4$ cm, $b = 3$ cm und $\omega = 1\ s^{-1}$ zu bestimmen.**
- **Durch welche Funktion in expliziter Form lässt sich diese Kurve beschreiben?**

Die Schwingungen in der x- und y – Richtung erfolgen mit den Schwingungsdauern (Perioden) $T_x = 2\pi$s und $T_y = \pi$s. Die kleinste gemeinsame Periode ist somit $T = 2\pi$s, d.h. nach Durchlaufen eines Periodenintervalls dieser Länge ist die Lissajous-Figur geschlossen, der Elektronenstrahl zeichnet die gleiche Figur von neuem.



Im obigen Beispiel waren die Amplituden verschieden, aber es gab keinen Phasenunterschied zwischen den beiden Grundschwingungen.

Mögliche Erweiterungen:

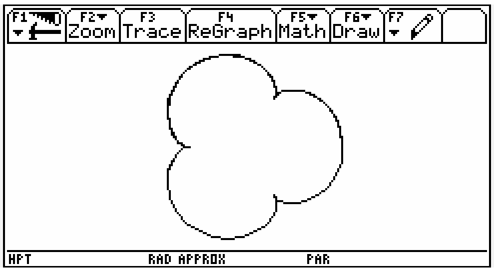
- gleiche Amplituden, verschiedene Frequenzverhältnisse (1:1 , 2:3, 5:6), kein Phasenunterschied zwischen den Grundschwingungen
- gleiche Amplituden, verschiedene Frequenzverhältnisse (1:1 , 2:3, 5:6), Phasendifferenzen von 45° und 90° zwischen den Grundschwingungen
- welche Figuren ergeben sich bei großen Frequenzverhältnissen oder bei nicht rationalen Frequenzverhältnissen?
- verallgemeinerte Lissajous-Figuren können erzeugt werden, wenn die Grundschwingungen schon komplexere Gestalt haben; z.B. $x(t) = A \cdot \cos(t) + B \cdot \cos(k \cdot t)$ und $y(t) = A \cdot \sin(t) + B \cdot \sin(k \cdot t)$

Wir zeichnen die Überlagerung der Schwingungen

$$x(t) = A \cdot \cos(t) + B \cdot \cos(k \cdot t)$$
$$y(t) = A \cdot \sin(t) + B \cdot \sin(k \cdot t)$$

mit

A = 30, B = 8 und k = 4

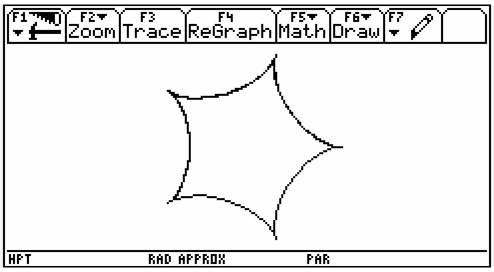


Wir zeichnen die Überlagerung der Schwingungen

$$x(t) = A \cdot \cos(t) + B \cdot \cos(k \cdot t)$$
$$y(t) = A \cdot \sin(t) + B \cdot \sin(k \cdot t)$$

mit

A = 30, B = 8 und k = - 4

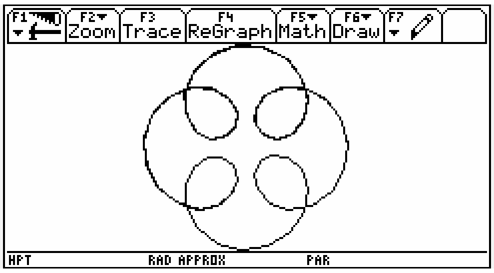


Wir zeichnen die Überlagerung der Schwingungen

$$x(t) = A \cdot \cos(t) + B \cdot \cos(k \cdot t)$$
$$y(t) = A \cdot \sin(t) + B \cdot \sin(k \cdot t)$$

mit

A = 30, B = 20 und k = 5

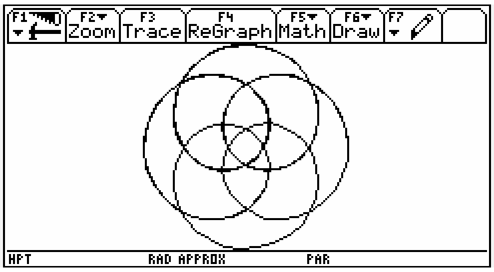


Wir zeichnen die Überlagerung der Schwingungen

$$x(t) = A \cdot \cos(t) + B \cdot \cos(k \cdot t)$$
$$y(t) = A \cdot \sin(t) + B \cdot \sin(k \cdot t)$$

mit

A = 30, B = 40 und k = 5

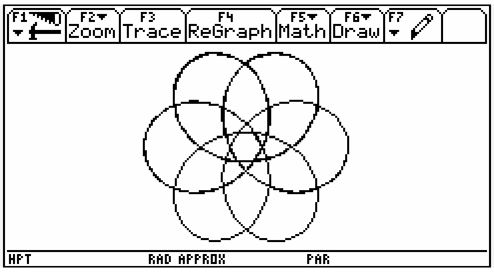


Wir zeichnen die Überlagerung der Schwingungen

$$x(t) = A \cdot \cos(t) + B \cdot \cos(k \cdot t)$$
$$y(t) = A \cdot \sin(t) + B \cdot \sin(k \cdot t)$$

mit

A = 30, B = 40 und k = - 5

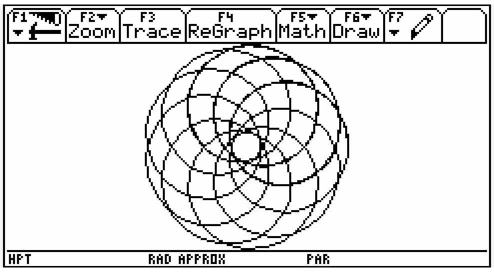


Wir zeichnen die Überlagerung der Schwingungen

$$x(t) = A \cdot \cos(t) + B \cdot \cos(k \cdot t)$$
$$y(t) = A \cdot \sin(t) + B \cdot \sin(k \cdot t)$$

mit

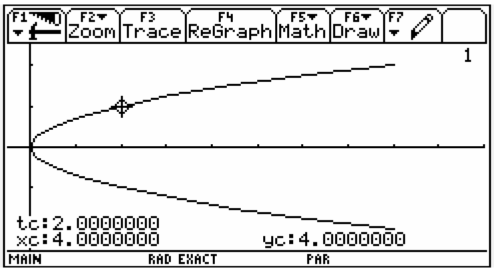
A = 30, B = 40 und k = 10



Schon diese wenigen Parametervariationen zeigen, dass zusätzlichen Erweiterungen keine Grenzen gesetzt sind und hier ein Situationen für Forschungsaufgaben geschaffen werden können und damit die Selbsttätigkeit der Schüler angekurbelt werden kann. Für einfachere Lissajous- Figuren kann ebenso wie in unserer Musteraufgabe die die Figur erzeugende Funktion in expliziter Darstellung gefordert sein. Ob die gesuchten Formeln richtig sind, lässt sich mit dem RECHNERS sehr leicht feststellen. Es wurde dann die richtige Darstellung gefunden, wenn die Schaubilder übereinstimmen.

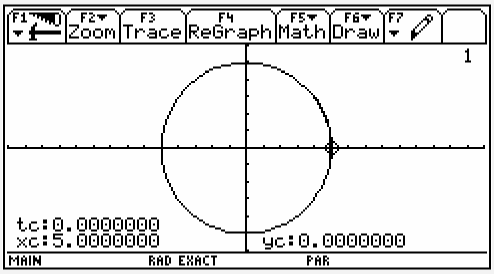
5.3 Parameterdarstellung ausgewählter Funktionen

5.3.1 Die Parabel $y^2 = 2px$



- Kannst du verschiedene Parameterdarstellungen finden und nachweisen, dass sich immer die gleiche Funktionsgleichung ergibt?

5.3.2 Der Kreis



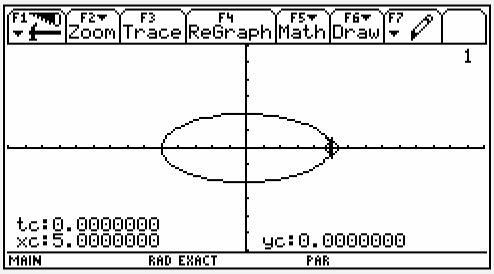
Gib die Parameterdarstellung dieses Kreises an :

xt1 =

yt1 =

Findest du auch bei diesem Beispiel mehrere Lösungsmöglichkeiten?

5.3.3 Die Ellipse



Gib die Parameterdarstellung dieser Ellipse an :

xt1 =
yt1 =

Findest du auch bei diesem Beispiel mehrere Lösungsmöglichkeiten?

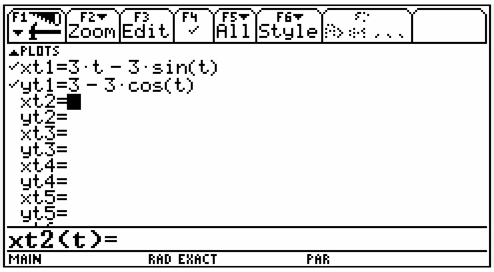
Kannst du aus der Parameterdarstellung die Ellipsengleichung ermitteln?

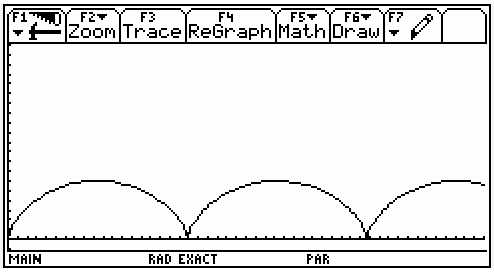
5.3.4 Die Zykloiden

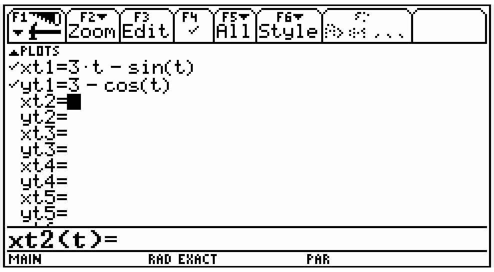
Rollt ein Kreis vom Radius r auf einer Geraden, so beschreibt ein fest mit dem Kreis verbundener Punkt P, dessen Abstand vom Mittelpunkt des Kreises a ist, eine

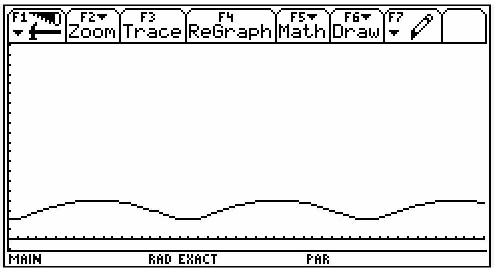
- gewöhnliche Zykloide, wenn $a = r$
- gestreckte Zykloide, wenn $a < r$
- verschlungene Zykloide, wenn $a > r$ ist.

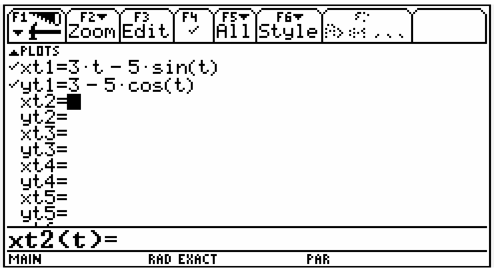
Die allgemeine Parameterdarstellung lautet:
$x(t) = r \cdot t - a \cdot \sin(t)$ und $y(t) = r - a \cdot \cos(t)$

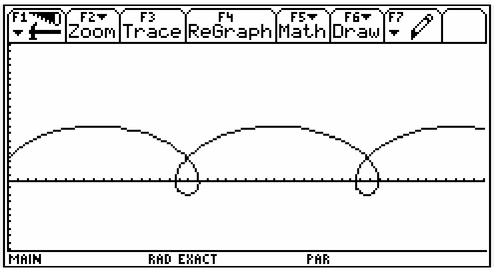












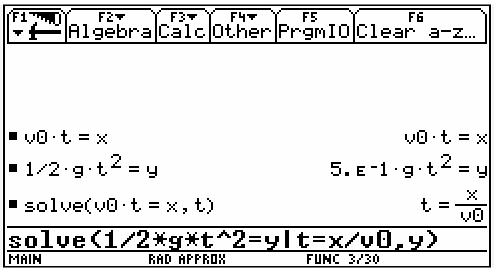
- Was kannst du über die Periodizität der Zykloiden aussagen ?
- Wie ändert sich das Aussehen der Kurven, wenn du die Werte für a und r veränderst?
- Wo liegen die Maxima und wo die Minima der Zykloiden?
- Kannst du die Zykloiden auf einem Blatt Papier konstruieren oder gar im GEOMETRY-Editor animieren?

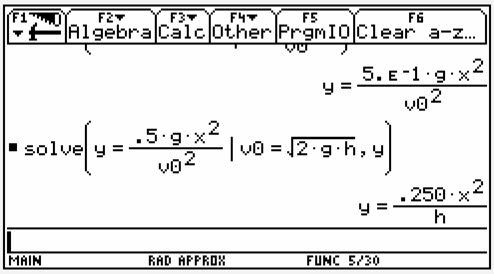
5.4 *Wurfparabel eines Wasserstrahls*

Ein Zylinder ist bis zu einer Höhe h mit Wasser gefüllt. In der Tiefe h (von der als unveränderlich angenommenen Wasseroberfläche aus gerechnet) befindet sich eine seitliche Öffnung, aus der das Wasser in waagrechter Richtung mit der nach der Formel $v_0 = \sqrt{2gh}$ berechneten Geschwindigkeit austritt. An welcher Stelle (in welcher Tiefe h) des Gefäßes muss man diese Öffnung anbringen, damit der seitlich austretende Wasserstrahl den Boden an einer möglichst weit entfernten Stelle B (in horizontaler Richtung gemessen) trifft?

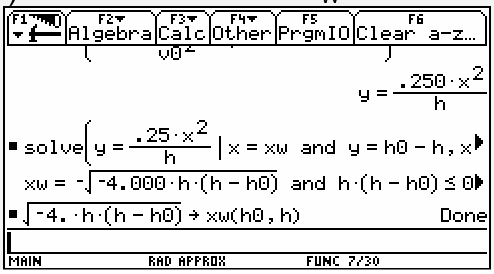
Die Bewegung des Wasserstrahls kann in guter Näherung als ein waagrechter Wurf im luftleeren Raum betrachtet werden; die Bewegung in der x-Richtung erfolgt mit der konstanten Geschwindigkeit v_0, in der y-Richtung gelten die Gesetze des freien Falls.	Die Koordinaten eines Wasserteilchens zur Zeit t lauten: $x = v_0 \cdot t$ und $y = ½ \cdot g \cdot t^2$

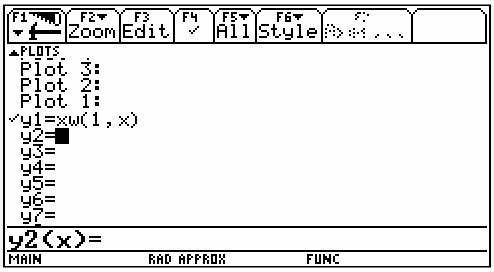
Durch Elimination des Zeitparameters t und Einsetzen der Formel für die Austrittsgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2gh}$ erhalten wir als Gleichung des Wasserstrahls die Wurfparabel

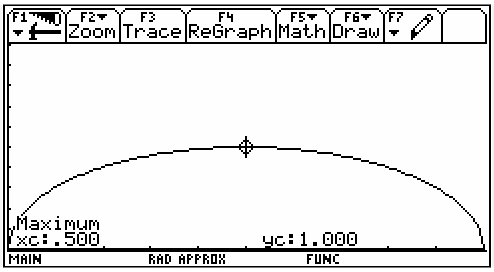


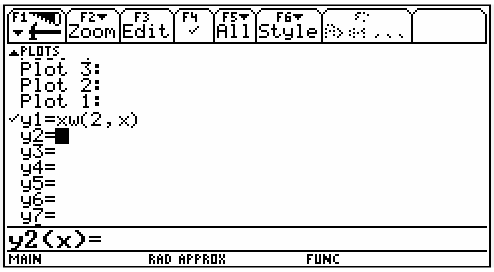


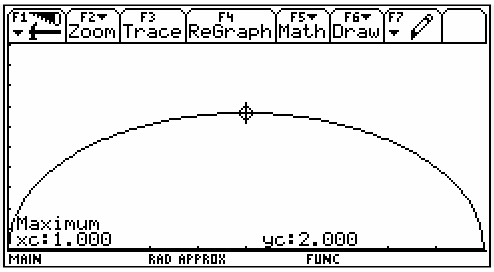
In diese Gleichung setzen wir die Koordinaten des Auftreffpunktes B(x_W / h_0-h) ein und lösen nach x_W auf:

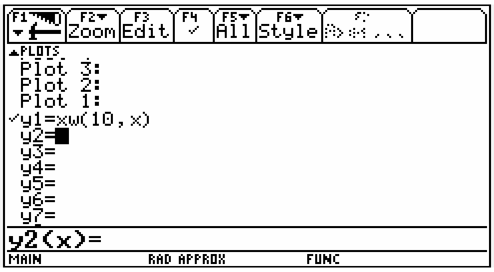


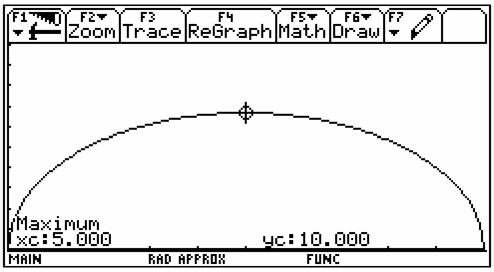






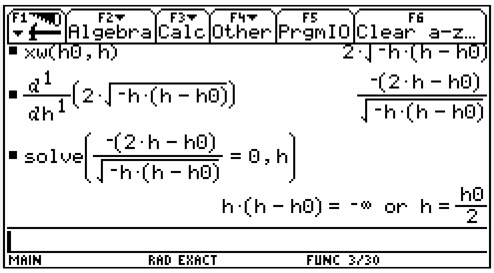




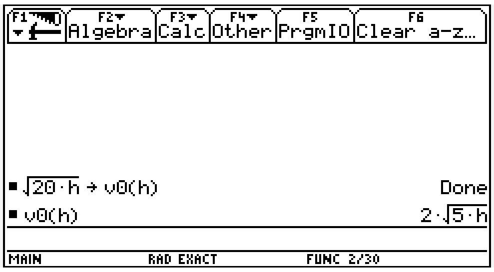


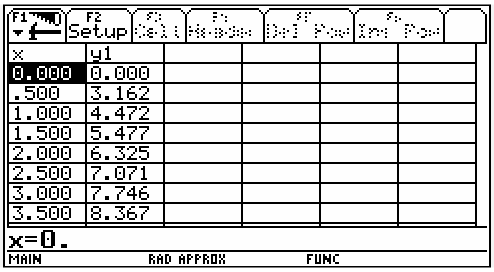
Es liegt die Vermutung nahe, dass die „Wurfweite“ dann ihren maximalen Wert annimmt, wenn die Austrittsöffnung genau in der Mitte des Gefäßes liegt!

Wenn zu dem betreffenden Zeitpunkt, wo das Beispiel bearbeitet wird, schon Kenntnisse der Differentialrechnung bei den Schülerinnen und Schülern zu erwarten sind, kann die Aufgabe auch allgemein gelöst werden; es ergibt sich h = ½ h_0.

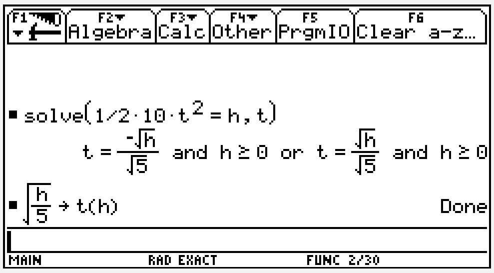


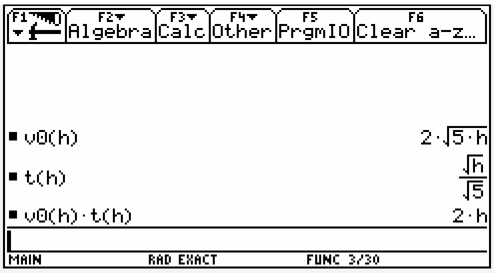
Die Austrittsgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2gh}$ beträgt in Abhängigkeit von h





Zum Durchfallen der Höhe h braucht ein Wasserteilchen die Zeit t





Für die maximale Weite ergibt sich unabhängig von h_0 immer 2h!

6. Kurvenanpassung an Daten

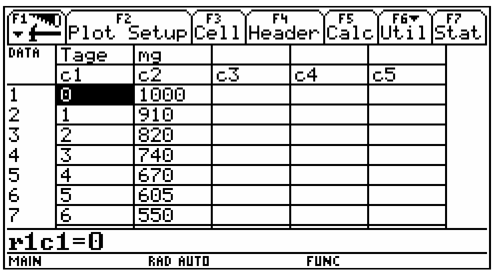
Am 26. April 1986 explodierte der vierte Reaktorblock des Kernkraftwerks Tschernobyl. Das bei der Atomspaltung entstehende radioaktive Isotop Jod-131 wurde in die Luft geschleudert und – vom Wind verweht – in ganz Europa abgelagert. Einer Probe von Waldpilzen aus der Steiermark wurden 1000 mg Jod – 131 entnommen. Folgende Werte hat man in den darauf folgenden 8 Tagen gemessen:

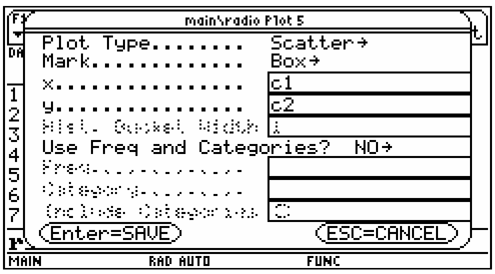
Tage	0	1	2	3	4	5	6	7	8
mg Jod – 131	1000	910	820	740	670	605	550	500	450

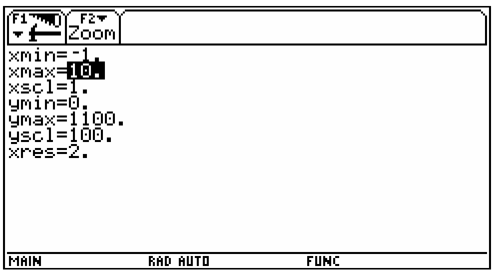
6.1 Die Regressionsfunktionen des Voyage 200

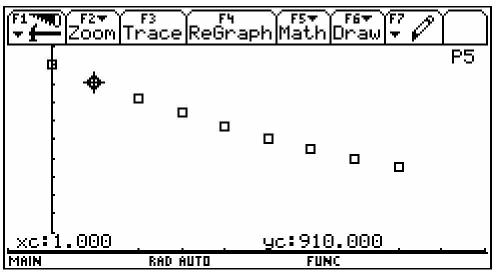
- Stellen Sie ein mathematisches Gesetz zur Beschreibung dieses Zerfallsprozesses auf!

(Arbeiten Sie mit dem DATA – MATRIX - Editor bzw. dem Listen-Editor und versuchen Sie eine Ausgleichskurve zu finden)









- Ermitteln Sie, wie viel Prozent der jeweils vorhandenen Menge in einer Zeiteinheit (= 1 Tag) zerfällt!

Vervollständigen Sie dazu die untenstehende Tabelle und interpretiere Sie das Ergebnis!

Zeitintervall	[0 ; 1]	[1 ; 2]	[2 ; 3]	[3 ; 4]	[4 ; 5]	[5 ; 6]	[6 ; 7]	[7 ; 8]
Abnahme(absolut)	90							
Abnahme (in %)	0,09							

Beim radioaktiven Zerfall zerfällt in einer Zeiteinheit immer .... Bruchteil (Prozentsatz p) der .... vorhandenen Substanz. Diese kontinuierliche Abnahme bzw. die noch vorhandene Menge an radioaktivem Stoff kann ich durch folgende rekursive Darstellung beschreiben:

$$N(t+\Delta t) = N(t) \cdot (1 - \text{..........}).$$

Ich erkenne, dass auf einander folgende Werte für N(t) eine .... Folge bilden und kann daher die zeitliche Entwicklung der Menge an radioaktivem Jod auch explizit durch eine .... funktion beschreiben:

$$N(t) = \text{..............} \cdot \text{..................}^{\text{........}}$$

Bei einer geometrischen Folge ist der Quotient zweier auf einander folgender Glieder immer konstant.
Sie können das Bildungsgesetz der Folge, die diesen radioaktiven Zerfall beschreibt, daher auch dadurch finden, indem Sie die Quotienten je zweier aufeinander folgender Werte berechnen und daraus den Mittelwert des „Wachstumsfaktors“ bestimmen. Dann können Sie den Zerfallsvorgang sowohl rekursiv als auch explizit darstellen!

- Überprüfen Sie diese Aussagen am vorliegenden Beispiel, indem Sie die folgende Tabelle vervollständigen!

Zeit t	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{N_t}{N_{t-\Delta t}}$								

- Welche Bedeutung hat der Zahlenwert des Wachstumsfaktors?

....

- Wie interpretieren Sie einen Wert kleiner 1, gleich 1 bzw. größer 1?

....

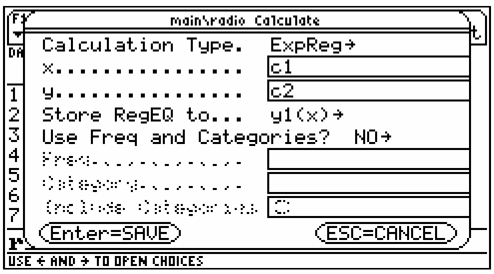
- Warum liegt hier kein linearer Zusammenhang vor?

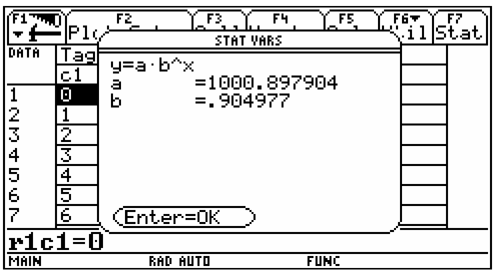
....

- Wozu ist die Änderungsrate (Änderung pro Periode) proportional?

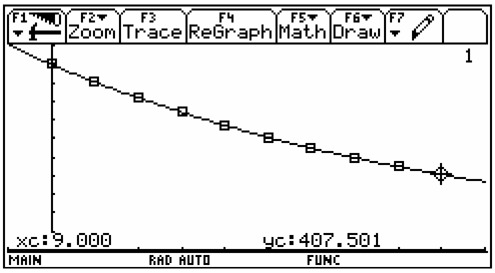
....

Nutzen Sie nun die Regressionsfunktionen ihres Rechners, um eine Funktion zu finden, die Ihnen die Menge an noch vorhandenem radioaktiven Stoff in Abhängigkeit von der Zeit in Tagen angibt.





Wenn wir nun diese Funktion gemeinsam mit den dargestellten Datenpunkten darstellen, sehen wir, dass die gemessenen und berechneten Werte im Wesentlichen übereinstimmen.



➢ Welche Bedeutung haben die beiden vom Rechner ermittelten Parameter a und b?

a ....

b ....

In einem Physikbuch findet man für den radioaktiven Zerfall noch eine weitere Formel:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

mit

- t für die Zeit
- N_0 für die zur Zeit t=0 noch unzerfallenen Atomkerne
- N(t) für die zur Zeit t noch unzerfallenen Atomkerne und
- λ als Zerfallskonstante, die vom radioaktiven Stoff abhängt.

- *Versuchen Sie nun mit Hilfe Ihres Rechners durch zielorientiertes Probieren diese Zerfallskonstante zu bestimmen.*

λ = ... (Einheit?)

- *Beschreiben Sie, welche Bedeutung λ in diesem Beispiel und allgemein für einen Wachstumsprozess hat!*

....

➢ *Wie lange dauert es, bis die Hälfte der zu Beginn vorhandenen Menge an radioaktivem Jod zerfallen ist?*

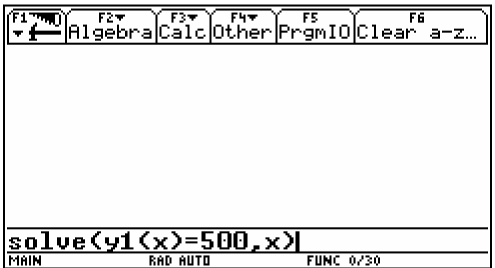
- *Lösen Sie die Aufgabe mit drei verschiedenen Methoden!*

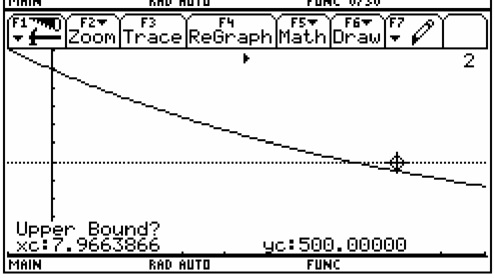
  - Im HOME-SCREEN (durch Berechnung mit SOLVE)
  - im GRAFIK-FENSTER (durch F5/INTERSECTION)

  und

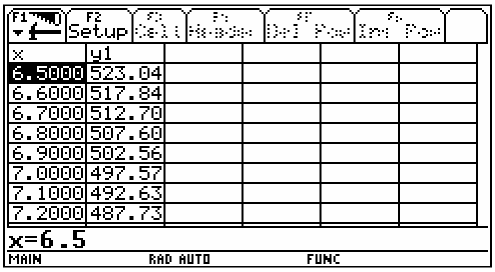
  - im TABLE - Fenster

  (durch Einschränken des Intervalls mit TBLSET und Wahl ein entsprechenden Δtbl)





Die Halbwertszeit τ für J-131 beträgt
.... Tage



x	y1
6.5000	523.04
6.6000	517.84
6.7000	512.70
6.8000	507.60
6.9000	502.56
7.0000	497.57
7.1000	492.63
7.2000	487.73

➢ Wann sind nur mehr 10 mg vorhanden?

- *Lösen Sie auch diese Aufgabe wieder mit allen drei Methoden!*
  - Im HOME-SCREEN
    (durch Berechnung mit SOLVE)
  - im GRAFIK-FENSTER
    (durch F5/INTERSECTION)

und

- im TABLE-Fenster
  (durch Einschränken des Intervalls mit TBLSET und Wahl ein entsprechenden Δtbl)

Nach .... Tagen sind nur mehr 10 mg radioaktives Jod vorhanden.

Welche Menge an radioaktivem J-131 in mg und in % vom Ausgangswert N_0 von 1000 mg ist nach 5 „Halbwertszeiten" noch vorhanden?

➢ *Versuchen Sie eine weitere Formel für den Zerfallsprozess zu finden, in der die Halbwertszeit τ verwendet wird!*

Zeit t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ	10τ	kτ
N(t)	1000								
$N(t)/N_0$									

Nach welcher Zeit t in Tagen sind nur mehr x % der ursprünglich vorhandenen Menge an radioaktivem Jod vorhanden?

➢ *Geben Sie, wenn immer es möglich ist, das Ergebnis mit Hilfe von τ an !*

x	3,125	6,25	12,5	25	50	10	1	0,1	0,01	0,001
t										

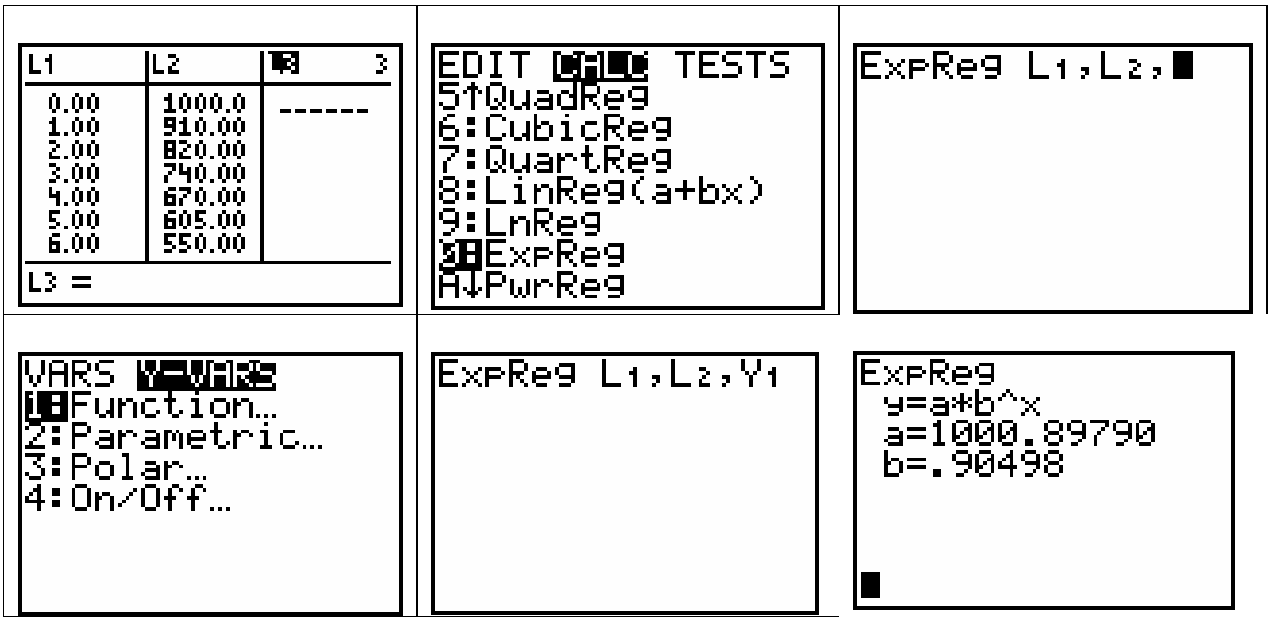
➢ *Was fällt Ihnen auf, wenn Sie Ihre Ergebnisse in den letzten 5 Spalten vergleichen?*

....

➢ *Können Sie eine Erklärung dafür finden?.*

....

6.2 Lösungshinweise zum Arbeiten mit dem TI 83 Plus



Verwendete Literatur

[1] Arzt, K.: 1983. Training Analysis 12./13. Schuljahr. Klett Verlag.

[2] Baumann, R.: 1998. Analysis 1. Ein Arbeitsbuch mit Derive. Klett Verlag.

[3] Brüstle, G. u. a.: 2002. LS Neue Unterrichtsformen. Einsatz eines GTR. Ernst Klett Verlag. Stuttgart.

[4] Dopfer, G.; Reimer, R.: 2003. LS Funktionen mit Parametern, Kurvenscharen. Ernst Klett Verlag. Stuttgart.

[5] Ebenhöh, M.; Weiskirch, W.: Mathematikunterricht mit Graphikrechner. Ein Arbeitsbuch für Schüler. Texas Instruments.

[6] Heugl, H.: November 2002. Anliegen zum Mathematikunterricht. Papier zur Lehrerfortbildung.

[7] Kunze, H.-J.; Tentschert H.: 1990. Projekt Verkehr. Physik-compakt. HPT-Verlag.