



Mathematik mit dem TI-83 und TI-83+

Funktionen

Ausgewählte Beispiele
mit didaktischen Kommentaren

Dr. Hildegrad Urban-Woldron

Ein Unterrichtsbehelf zum Einsatz moderner Technologien
im Mathematikunterricht



Mathematik

mit

dem TI-83

und

dem TI-83 PLUS

FUNKTIONEN

Ausgewählte Beispiele
mit
didaktischen Kommentaren

Inhaltsverzeichnis

EINLEITUNG	2
1 DEFINITION VON FUNKTIONEN.....	4
2 ARBEITEN MIT GRAPHEN UND TABELLEN.....	9
3 INTERPRETIEREN VON DIAGRAMMEN UND ERMITTELN VON FUNKTIONSTERMEN	16
4 ARBEITEN MIT DEM MODE PARAMETRIC	21
5 ÜBUNGSAUFGABEN ZUM THEMA FUNKTIONEN.....	25

Einleitung

Wenn wir als Lehrer Neue Medien, und dazu zähle ich den TI83 als graphischen Taschenrechner, im Unterricht einsetzen, sollten wir die vielfältigen Möglichkeiten, die sich durch den Einsatz des GTR als Unterrichtstechnologie ergeben, nicht nur aus technischer sondern vielmehr noch von pädagogischer Seite her stärker berücksichtigen.

Ich habe daher in meinen Ausführungen den Fokus auf die methodisch-didaktische Komponente im Umgang mit der neuen Technologie gelenkt, da ich mir laufend die Frage stelle, wie ich den Einsatz des GTR didaktisch begründen kann, welche Lernziele ich besser erreichen kann als mit herkömmlichen Medien. Sind es nur die alten Ziele, die jetzt mit neuen Werkzeugen besser oder mit weniger Aufwand zu erlangen sind, oder müssen wir auch über neue Ziele nachdenken? Was soll oder muss der Schüler auch ohne Technologie noch können, was sind die so genannten „Grundkompetenzen“?

Neben diesen bildungstheoretischen Überlegungen erschließen sich dem Lehrer auf der Planungsebene des konkreten Unterrichtsthemas unter Berücksichtigung lerntheoretischer Modelle gerade im Zusammenhang mit dem Einsatz Neuer Medien vielfältige Möglichkeiten. Der Lehrer kann dem Schüler reichhaltige und differenzierte Lernumgebungen zur Verfügung stellen, wo der Schüler dann explorierend tätig werden kann. Unter Lernumgebung verstehe ich aus meiner Unterrichtspraxis heraus nicht nur den GTR, sondern das gesamte Set an Medien, die dem Schüler zur Verfügung stehen. Dazu gehört natürlich neben den vorbereiteten Lernaufgaben, die methodisch-didaktisierte und mit zahlreichen und zielführenden Impulsfragen angereicherte Lernmaterialien darstellen, als ganz wichtiger Faktor der Lehrer selbst. Der Lehrer wird gerade bei leistungsschwächeren Schülern immer wieder auf deren individuellen Lernprozess reagieren und helfend eingreifen müssen. Die Herausforderung ergibt sich für mich in der Bereitstellung einer Lernumgebung, die leistungsstarke Schüler herausfordert, auf ihre Lernfortschritte, aber auch Irrwege selbst zu reagieren und damit ihr Wissen weitgehend selbstständig zu konstruieren, und die dem leistungsschwächeren Schüler moderat angeleitete Lernwege eröffnen, so dass er die Motivation und Freude beim Lernen nicht verliert.

Ich verstehe diese Handreichung weder als technische Einführung in die Bedienung des TI83 noch als bildungs- und lerntheoretisch begründete und didaktisch optimierte Anleitung zur direkten Umsetzung im Unterricht. Sie sollen hier zum Thema „Funktionen“ Beispiele und Anregungen für Ihren eigenen Unterricht finden. Die ausgewiesenen didaktischen Kommentare

entspringen meiner immer wieder selbst reflektierten Unterrichtspraxis. Wenn Sie sich auf neue und innovative Wege begeben, können natürlich auch Fehler passieren. Ich persönlich habe diese Fehler immer als Lernchancen gesehen, habe aber bei meinen Ausführungen darauf verzichtet, meinen eigenen Lernweg im Detail anzuführen, da ich der Meinung bin, dass jeder nur selbst aus seinen eigenen Fehlern lernen kann, möchte aber nur anmerken, dass ich bei jedem Einsatz Neuer Medien immer noch Neues dazulerne.

Im Kapitel 1 beschreibe ich an Hand eines einzigen Beispiels, welche verschiedenen Zugänge und damit Lernchancen für den Schüler ich beim Einsatz des TI83 umgesetzt habe.

Im Kapitel 2 biete ich drei zunehmend komplexer werdende Beispiele mit einem fächerübergreifenden Anwendungs-Aspekt an, wo der Schüler nicht nur innermathematische Aufgaben zu lösen hat, sondern wo dem Transfer besondere Bedeutung zugeschrieben wird.

Die Beispiele 5 und 6 im Kapitel 3 stellen dem Schüler Lernherausforderungen bereit, wo er sein Wissen über Funktionen anwenden muss. Er muss Diagramme interpretieren und/oder aus anderen Angaben jene relevanten Informationen herausfiltern, die es ihm ermöglichen, die entsprechenden Funktionsgleichungen anzugeben. Die Funktionen soll er dann untersuchen und ihre Bewährung im Alltagsbezug abklären.

Im Kapitel 4 werden drei Beispiele zum Thema Parameterdarstellung von Funktionen mit einer kurzen Anleitung für die technische Umsetzung angeboten.

Meine Ausführungen schließe ich mit fünf Übungsaufgaben, die zahlreiche Impulse für die Umsetzung enthalten, im Kapitel 5 ab.

Für Anregungen, aber vor allem auch für kritische Anmerkungen bin ich Ihnen dankbar:

Hildegard Urban-Woldron

E-Mail: hildegard.urban@chello.at

1 Definition von Funktionen

Lernvoraussetzungen

Technische Vorkenntnisse

Der Schüler¹ hat bereits technische Kenntnisse im Umgang mit dem GTR. Er kann verschiedene Graphikmodi festlegen, Funktionen im Funktionen-Editor $\boxed{Y=}$ definieren und dort Funktionen auswählen oder deaktivieren.

Weiter ist er in der Lage den Graphikstil von Funktionen festzulegen oder zu ändern, die Variablen für das Anzeigefenster und das Anzeigeformat von Graphen zu definieren und einen Graphen anzuzeigen.

Der Schüler weiß, dass er mit $\boxed{\text{TRACE}}$ und $\boxed{\text{ZOOM}}$ einen Graphen untersuchen kann und ist in der Lage mit CALC Berechnungsoperationen durchzuführen.

Fachliche Vorkenntnisse

Der Schüler kann Texte aus der Alltagssprache in die Fachsprache der Mathematik umsetzen und auch den Transfer in die andere Richtung durchführen.

Weiter ist er in der Lage Gleichungen umzuformen und weiß, wie eine gleichförmige Bewegung formelmäßig beschrieben wird.

Er hat bereits eine Vorstellung vom Funktionsbegriff und weiß, dass eine homogene lineare Funktion ein direkt proportionales und eine gebrochene rationale Funktion ein indirektes proportionales Verhältnis zwischen zwei Größen beschreibt.

Lernziele:

Die Fragestellungen aus der Lebenswelt des Schülers sollen eine anregende Lernumgebung für den Schüler bereitstellen und ihn dazu motivieren explorierend an die Lösung der Aufgaben heranzugehen, aber auch selbst weitere interessante Fragestellungen zu finden und zu analysieren.

Der Schüler soll eine Problemstellung aus einer alltäglichen Anwendungssituation in die mathematische Formelsprache übersetzen – diese innermathematisch mit verschiedenen Darstellungsformen und aus verschiedenen Perspektiven lösen und dann die Ergebnisse im Anwendungszusammenhang diskutieren und interpretieren.

Die konkreten inhaltlichen Fragestellungen mit ihren doch unerwarteten und teilweise überraschenden Ergebnissen sollen beim Schüler verkehrserzieherische Einsichten bewirken.

Der Schüler soll erfahren, dass ein und dieselbe Aufgabe auf unterschiedliche Weise und mit verschiedenen Ansätzen gelöst werden kann.

¹ Aus Gründen der besseren Lesbarkeit verwende ich überall dort, wo eine geschlechtsindifferente Ausdrucksweise nicht möglich ist, nur die männliche Form, verstehe aber darunter das Ansprechen beider Geschlechter.

Beispiel 1:

Ein Schüler legt seinen Schulweg von 8 km mit dem Moped normalerweise mit einer mittleren Geschwindigkeit von 20 km/h zurück. Heute hat er verschlafen und fährt um 10 Minuten später von zu Hause weg.

- 1.1 Kann er diese Verspätung wettmachen, wenn er mit einer mittleren Geschwindigkeit von 30 km/h fährt?
- 1.2 Wie schnell müsste er fahren, um zur gewohnten Zeit in der Schule zu sein?
- 1.3 Wie schnell müsste er fahren, um auf dem Nachhause-Weg noch weitere 5 Minuten - bezogen auf die Fahrzeit bei 20 km/h- einzubringen?

- ☐ Diese einfachen Fragestellungen lassen sich bereits mit dem quantitativen Geschwindigkeitsbegriff lösen, sollen aber Anlässe für weitere Explorations durch die Schüler liefern. Die Schüler sollen diese Aufgabe einerseits rein rechnerisch („per Hand“) und andererseits durch sinnvolles Verwenden entsprechender Gleichungen, Funktion und deren tabellarischer und graphischer Darstellungen am TI83 lösen.

Didaktischer Kommentar:

Bei diesem Beispiel können die Schüler erfahren, dass ein und dieselbe Aufgabe auf unterschiedliche Weise und mit verschiedenen Ansätzen gelöst werden kann.

Vorher der Berechnung sollen Abschätzungen und im Anschluss an die Bearbeitung des Beispiels Veranschaulichungen und Interpretationen der Ergebnisse vorgenommen werden.

Bei diesem Beispiel können durch Einsatz des elektronischen Mediums der schöpferisch-kreative und der erkenntnistheoretische Aspekt des Mathematikunterrichts umgesetzt werden.

Im darstellend-interpretierenden Arbeiten setzt der Schüler beim Lernen in anwendungsorientierten Kontexten und mit technologischer Unterstützung im innermathematischen Wechsel von Darstellungsformen Situationen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik und zurück um. Adressatengerecht wird der Lehrer den Lernprozess entsprechend strukturieren und anleiten müssen.

Die folgende Sequenz kann daher nur einen möglichen Zugang zu einer methodisch-didaktischen Planungsweise skizzieren, soll aber einen Eindruck geben, wie pluralistisch die möglichen Zugänge und Lernerfahrungen sein können.

Vorher sollen Abschätzungen und im Anschluss an die Bearbeitung des Beispiels Veranschaulichungen und Interpretationen der Ergebnisse vorgenommen werden und in einem Perspektivenwechsel wieder der Alltagsbezug hergestellt werden.

- *Wie groß ist die „normale“ Fahrzeit des Schülers?*

Algebraischer Zugang:

Die „normale“ Fahrzeit beträgt nach Auflösung der Formel $s = v \cdot t$ nach t {mit s = zurückgelegter Weg in km und v = Geschwindigkeit in km/h}, durch Einsetzen für $s = 8$ km und $v = 20$ km/h eine Fahrzeit von $t = 0,4$ h = 24 min.

```

NUM CPX PRB
4: J(
5: *J
6: fMin(
7: fMax(
8: nDeriv(
9: fnInt(
20: Solver...

```

☐ *Lösen der Aufgabe mit dem Gleichungslöser (SOLVER)*

Im Gleichungslöser können Sie eine Gleichung nach jeder Variablen auflösen. Der Gleichungsterm muss dabei gleich Null gesetzt werden.

```
EQUATION SOLVER
eqn: 0=V*T-S
```

☐ *Eingabe eines Ausdrucks in den SOLVER*

Wählen Sie im **MATH** – Menü die Option 0:[SOLVER], um den Gleichungseditor anzuzeigen und geben Sie den Ausdruck direkt ein.

```
V*T-S=0
V=20
T=
S=8
bound=(-1e99,1...
```

☐ *Nach einer Variable im Gleichungslöser auflösen*

Geben Sie für jede bekannte Variable einen Wert ein –alle Variablen außer der Unbekannten müssen einen Wert besitzen. Setzen Sie dann den Cursor auf die Variable, nach der die Gleichung aufgelöst werden soll und drücken Sie dann **ALPHA** [SOLVE].

```
V*T-S=0
V=20
T=4
S=8
bound=...9,1e99)
left-rt=0
```

Didaktischer Kommentar:

Durch experimentell-heuristisches Arbeiten könnten alle Fragestellungen bereits im Gleichungslöser bearbeitet werden.

Im Wechsel der Darstellungsformen und durch Metakognition eröffnet sich dem Schüler ein weit differenzierteres Erfahrungspotenzial sich Wissen durch eigene Konstruktion anzueignen.

Zugang über Funktionen

Der Schüler erkennt beim Umformen der Formel $s = v \cdot t$ nach t bereits, dass die Größe t von zwei unabhängigen Variablen abhängt, nämlich v und s .

Er erinnert auch, dass es sich bei der Abhängigkeit der Fahrzeit t vom Weg s um eine direkte Proportionalität und bei der Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v um ein indirekt proportionales Verhältnis handelt.

In der Sekundarstufe 1 hat der Schüler im Regelfall nur Funktionen mit einer unabhängigen Veränderlichen kennen gelernt. Jetzt wird er entdecken, dass er für t zwei sehr verschiedene Funktionen definieren kann, wenn er die jeweils andere unabhängige Veränderliche als konstanten Parameter festlegt. Es eröffnet sich ihm damit ein weites Feld für Untersuchungen, eigene Fragestellungen und Lernmöglichkeiten.

```
Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
Full Horiz G-T
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1 =
\Y2 =
\Y3 =
\Y4 =
\Y5 =
\Y6 =
\Y7 =
```

Die methodisch-didaktische Herausforderung besteht bei der technologischen Umsetzung mit dem TI83 darin, dass dieser GTR nur eine Funktionsdefinition $y(x)$ zulässt. Der Schüler muss daher sowohl bei der Definition der Funktion, als auch bei der Analyse und Interpretation jeweils einen Transfer durchführen.

☐ Wählen und Prüfen der Modus-Einstellungen

Die Modus-Einstellungen legen fest, wie der TI83 Zahlen und Graphen anzeigt und interpretiert. Diese Einstellungen werden auch beim Ausschalten über die Constant-Memory-Funktion beibehalten.

Die Moduseinstellungen werden mit **MODE** aufgerufen. Die aktuellen Einstellungen sind markiert und können durch Bewegungen des Cursors auf die gewünschte Option verändert werden.

[FUNC] zeichnet Funktionen, bei denen **Y** eine Funktion von **X** ist.

[PAR] zeichnet Relationen, bei denen **X** und **Y** Funktionen von **T** sind.

☐ Definition und Anzeige von Funktionen im **Y=** Editor

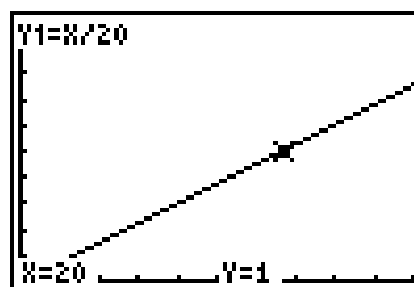
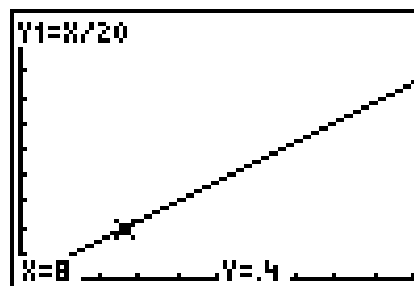
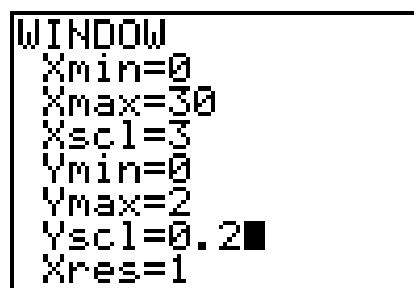
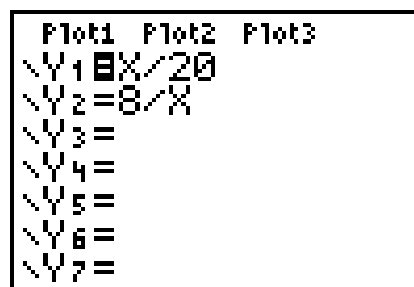
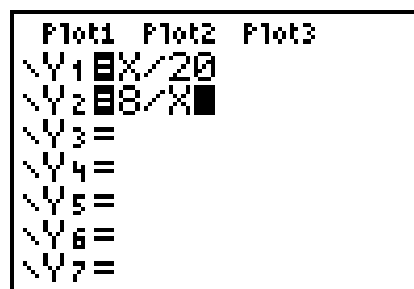
Rufen Sie den Y= Editor mit **Y=** auf und setzen Sie den Cursor auf die Funktion, die Sie definieren oder bearbeiten möchten.

$Y1=x/20$ und $Y2=8/x$ sind die beiden Funktionen, die in diesem Beispielkontext definiert werden können.

Die Funktionen können nach ihrer Eingabe im Funktionen-Editor aktiviert bzw. deaktiviert werden. Weiter können sie mit einem spezifischen Graphikstil versehen werden.

Im WINDOW-Fenster, zu dem Sie über den Button **WINDOW** gelangen, können Sie die Variablen des Anzeigefensters anzeigen lassen bzw. entsprechend ändern. Über den Button **GRAPH** werden die aktivierten Funktionen angezeigt.

Über den Button **TRACE** schalten Sie den TRACE-Cursor ein – Sie können dann den Cursor auf dem entsprechenden Funktionsgraphen von einem Punkt zum nächsten bewegen. Die Cursorkoordinaten werden unten auf dem Display angezeigt. In der linken oberen Ecke sehen Sie den entsprechenden Y-Ausdruck für die aktivierte und gerade untersuchte Funktion.



Didaktischer Kommentar:

Im Funktionen-Modus lässt sich nicht nur die Lösung mit Hilfe der beiden Graphen sofort ermitteln. Die graphischen Darstellungen regen den Schüler für weitere eigene Explorations an, wobei ihn die TRACE-Option unterstützt. So können alle weiteren Fragestellungen dieser Aufgabe auf experimentellem Weg bearbeitet werden und durch Metakognition und Variation von Parametern über den Weg des Aufstellens induktiv gewonnener Vermutungen zu Verallgemeinerungen übergeleitet werden.

Zugang über Tabellen

Die Wertetabellen aller im Y=Editor definierten Funktionen stehen im Tabelleneditor zur Verfügung.

- ☐ Es kann der Startwert der unabhängigen Variable sowie die Schrittweite über 2^{nd} **WINDOW** (= [TBLSET]) beliebig gewählt werden.
- ☐ Mit 2^{nd} **GRAPH** (= [TABLE]) können die Tabellen angezeigt werden.

TABLE SETUP		
TblStart=	0	
ΔTbl=	1	
Indent:	Auto	Ask
Depend:	Auto	Ask

Didaktischer Kommentar:

Dem Schüler wird damit ein weiterer Zugang zur Auseinandersetzung mit der Lernaufgabe geboten. Es stehen ihm durch die große Menge an Wertepaaren viel mehr Informationen zur Verfügung als er für die Beantwortung der Ausgangsfrage braucht. Durch das eigenständige Schaffen von „Was-Wäre-Wenn-Szenarios“ wird er selbsttätig. Die Aufgabe des Lehrers besteht im Schaffen einer förderlichen und motivierenden Lernumgebung mit entsprechenden Impulsen.

X	Y ₁	Y ₂
0	.05	8
1	.1	4
.15	.15	2.6667
2	.2	2
.25	.25	1.6
3	.3	1.3333
.35	.35	1.1429

X=1

2 Arbeiten mit Graphen und Tabellen

Lernvoraussetzungen

Technische Vorkenntnisse

Der Schüler hat bereits technische Kenntnisse im Umgang mit dem GTR. Er kann verschiedene Graphikmodi festlegen, Funktionen im Funktionen-Editor $\boxed{Y=}$ definieren und dort Funktionen auswählen oder deaktivieren.

Weiter ist der Schüler in der Lage den Graphikstil von Funktionen festzulegen oder zu ändern, die Variablen für das Anzeigefenster und das Anzeigeformat von Graphen zu definieren und einen Graphen anzuzeigen.

Der Schüler weiß, dass er mit $\boxed{\text{TRACE}}$ und $\boxed{\text{ZOOM}}$ einen Graphen untersuchen kann und ist in der Lage mit $\boxed{\text{CALC}}$ Berechnungsoperationen durchzuführen.

Der Schüler kann mit den Berechnungs-Operationen im Graphik-Modus, die er über $\boxed{2nd}$ $\boxed{\text{TRACE}}$ ($\boxed{=}$ $\boxed{\text{CALC}}$) aufrufen kann, umgehen. Insbesondere weiß er, dass mit der Option 7 eine Fläche berechnet wird.

Fachliche Vorkenntnisse

Der Schüler kann Texte aus der Alltagssprache in die Fachsprache der Mathematik umsetzen und auch den Transfer in die andere Richtung durchführen.

Der Schüler kennt die Kriterien für eine gleichförmige und eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung und kann die beiden Bewegungen durch eindeutige Begriffsbildung beschreiben.

Weiter weiß der Schüler, dass den verschiedenen Bewegungstypen entsprechende graphische Schaubilder zugeordnet werden können, bzw. dass jede Bewegung durch unterschiedliche Diagramme beschrieben werden kann.

Der Schüler weiß, dass eine homogene lineare Funktion ein direkt proportionales und eine gebrochene rationale Funktion ein indirektes proportionales Verhältnis zwischen zwei Größen beschreibt.

Der Schüler kann die Formel $s = v \cdot t$ graphisch als Formel für die Fläche eines Rechtecks interpretieren und versteht den Zusammenhang zwischen dem Zahlenwert und seiner graphischen Entsprechung.

Lernziele:

Die Fragestellungen aus der Lebenswelt des Schülers sollen eine anregende Lernumgebung für den Schüler bereitstellen und ihn dazu motivieren explorierend an die Lösung der Aufgaben heranzugehen, aber auch selbst weitere interessante Fragestellungen zu finden und zu analysieren.

Der Schüler soll eine Problemstellung aus einer alltäglichen Anwendungssituation in die mathematische Formelsprache übersetzen – diese innermathematisch mit verschiedenen Darstellungsformen und aus verschiedenen Perspektiven lösen und dann die Ergebnisse im Anwendungszusammenhang diskutieren und interpretieren.

Der Schüler soll erfahren, dass ein und dieselbe Aufgabe auf unterschiedliche Weise und mit verschiedenen Ansätzen und Zugängen gelöst werden kann.

Der Schüler soll mit Hilfe dieses fächerübergreifenden Beispiels innermathematische Zusammenhänge (z. B. die Bedeutung der Steigung einer Geraden, die Bedeutung der Fläche unter einer Kurve) reflektieren, internalisieren und verstehen und weiter erkennen, welche Bedeutung die Anwendung mathematischer Kenntnisse im Alltag hat.

Weiters soll der Schüler erfahren, dass er selbst dazu in der Lage ist auf induktivem Weg zu für ihn neuen Erkenntnissen zu gelangen und soll Freude daran bekommen, selbsttätig zu werden und sich Wissen selbstständig zu konstruieren.

Didaktischer Kommentar:

Im Beispiel 1 ergeben sich für den Schüler durchaus überraschende Ergebnisse:

- Der Fahrer kann eine Verspätung von 10 min nicht wettmachen, wenn er mit 30 km/h fährt - er müsste mit fast 35 km/h fahren.
- Um noch weitere 5 min einzusparen, müsste er mit mehr als 53 km/h fahren. Das würde mehr als die 2,5fache Normalgeschwindigkeit bedeuten!

Aus meiner Beobachtung bei der wiederholten Bearbeitung dieser und ähnlicher Aufgaben habe ich mittlerweile eine Hypothese abgeleitet: Schüler „vertrauen“ Graphen und Tabellen mehr als ihren Berechnungen.

Daher soll in diesem Kapitel der Fokus auf die Beschäftigung mit graphischen und tabellarischen Darstellungen gelegt werden. Die Graphen und Tabellen sollen im Hinblick auf die Fragestellungen erforscht werden; die Schüler sollen dazu angeleitet werden, selbst Fragen zu stellen und bestimmte Szenarios zu analysieren.

Beispiel 2:

Ein gleichmäßig beschleunigtes Fahrzeug erreicht aus der Ruhe heraus nach 10s seine Endgeschwindigkeit von 20m/s.

- 2.1 Wie groß ist seine Beschleunigung?
- 2.2 Wie kann der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit mit Hilfe einer Funktion dargestellt werden?
- 2.3 Welchen Weg hat das Fahrzeug nach 10s zurück gelegt?
- 2.4 Welchen Weg hat das Fahrzeug in der ersten, in der zweiten, in der dritten, Sekunde zurück gelegt und wie hängen die berechneten Wegstrecken mit den Anfangs- und Endgeschwindigkeiten des jeweiligen Zeitintervalls zusammen?
- 2.5 Welchen Weg hat das Fahrzeug in der ersten, in den ersten zwei, in den ersten drei, in den ersten vier Sekunden zurück gelegt und wie hängen die berechneten Wegstrecken mit den Anfangs- und Endgeschwindigkeiten des jeweiligen Zeitintervalls zusammen?
- 2.6 Mit welcher Geschwindigkeit hätte sich ein gleichförmig bewegtes Fahrzeug bewegen müssen, um in der gleichen Zeit den gleichen Weg zurückzulegen?
- 2.7 Nach welcher Zeit hätte es bei doppelter Beschleunigung die angegebene Geschwindigkeit erreicht?
- 2.8 Nach welcher Zeit hätte es bei doppelter Beschleunigung den gleichen Weg zurückgelegt?
- 2.9 Wie kann der funktionale Zusammenhang zwischen Weg, Zeit und Beschleunigung beschrieben werden? Bestätigen Sie die erarbeitete allgemeine Formel durch entsprechende Zahlenbeispiele!

Didaktischer Kommentar:

Der Zusammenhang zwischen der Fahrzeuggeschwindigkeit und der Zeit t soll graphisch dargestellt werden. Dabei könnte auch von einer Wertetabelle ausgegangen werden.

Der Begriff Beschleunigung als Änderung der Geschwindigkeit pro Zeitintervall ist dem Schüler aus dem Physikunterricht bekannt.

Weiter kann er für die gleichförmige Bewegung die Formel $s = v \cdot t$ geometrisch dahingehend interpretieren, dass die Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen t und v im v - t -Diagramm den zurückgelegten Weg angibt.

Mit diesen Lernvoraussetzungen soll der Schüler die gleichmäßig beschleunigte Bewegung in unterschiedlichen Diagrammen graphisch umsetzen und Zusammenhänge ableiten und verstehen.

Der Schüler kann weiter dazu angeleitet werden auf induktivem Weg zu entdecken, wie das Diagramm, das den Zusammenhang zwischen Zeit und Weg bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung beschreibt, aussehen wird und wie es formelmäßig erzeugt werden kann.

☐ Aus $a = \Delta v / \Delta t = 20 \text{ m/s} / 10 \text{ s} = 2 \text{ m/s}^2$ und $v(0 \text{ s}) = 0 \text{ m/s}$ erhalten wir mit $y1(x) = 2x$ das $v - t$ -Diagramm.

☐ Nach Einstellung der passenden Fenster-Variablen über WINDOW erhalten wir mit GRAPH das Diagramm. Aus diesem Diagramm liest der Schüler z.B. mit Hilfe von TRACE ab, dass die Geschwindigkeit nach 5s 10m/s beträgt, also halb so groß ist, wie am Ende unseres betrachteten Zeitintervalls und nach 2,5s nur ein Viertel der Endgeschwindigkeit beträgt.

☐ Alternativ kann der Schüler auch die entsprechende Tabelle betrachten, die Wertepaare interpretieren und erkennen, dass es sich um eine homogene lineare Funktion handelt, was in diesem Anwendungskontext bedeutet, dass die Zeit und die Geschwindigkeit bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung direkt proportional zueinander sind.

☐ Mit $\boxed{2\text{nd}} \boxed{\text{CALC}}$ und Option 7 kann der Schüler verschiedene Flächeninhalte berechnen lassen. Er muss dazu die Zahlenwerte für [Lower] und [Upper Limit] eingeben und sieht dann auf dem Display das Ergebnis nicht nur als Zahlenwert sondern auch durch eine Schraffur visualisiert.

Didaktischer Kommentar:

```

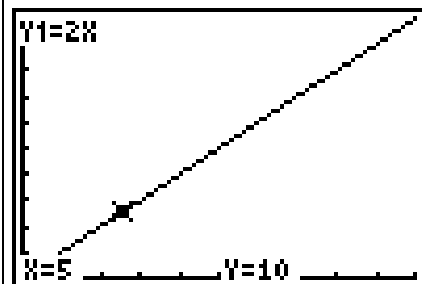
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=2X
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=

```

```

WINDOW
Xmin=0
Xmax=20
Xscl=2
Ymin=0
Ymax=40
Yscl=4
Xres=1

```



```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=2X
\Y2=10
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=

```

An dieser Stelle eröffnet sich durch die Möglichkeiten, die der GTR bietet in Verbindung mit entsprechenden Impulsfragestellungen (wie z.B. 2.4 bis 2.8), die der Lehrer adressatengerecht anpassen und einsetzen wird, ein weites Feld für experimentelle und explorative Schülertätigkeiten, die es dem Schüler ermöglichen bereits Bekanntes zu festigen, aber auch neues Wissen selbst zu konstruieren, dieses Wissen in seine Wissensbasis einzuordnen und diese damit zu erweitern.

Der Lehrer entscheidet dabei durch angemessene Maßnahmen der Differenzierung, wie er diesen Lernprozess bei jedem einzelnen Schüler durch das Anbieten von adressatengerechten Hilfen und Anknüpfen optimieren kann.

Diese besonderen didaktischen und methodischen Zugangsmöglichkeiten sind ein wichtiges Qualitätsmerkmal des neuen Mediums.

Der Lehrer erzeugt eine motivierende Lernumgebung für den Schüler und motiviert damit eigenständige Lerntätigkeit des Schülers.

Ergebnis:

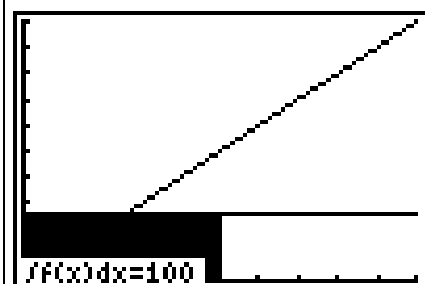
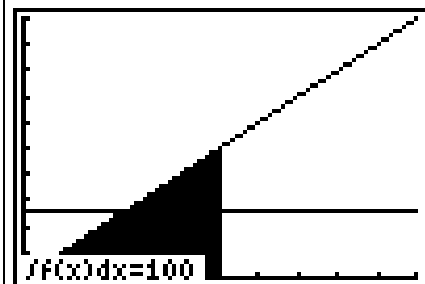
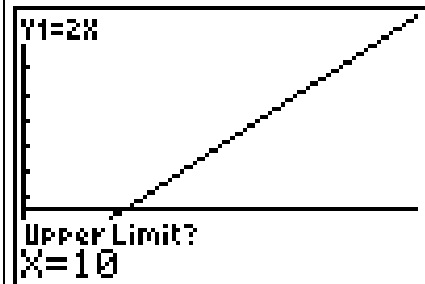
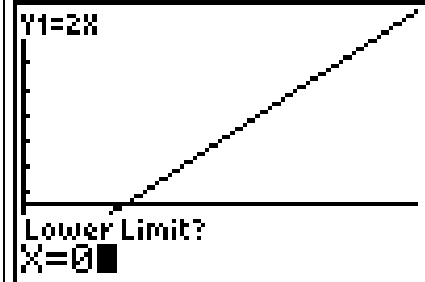
Das Fahrzeug hat also in den ersten 10s den gleichen Weg zurück gelegt als hätte es sich mit der halben Endgeschwindigkeit die vollen 10s gleichförmig bewegt; dieser Zusammenhang wird aus der Deutung der Fläche unterhalb des v – t –Graphen deutlich.

Didaktischer Kommentar:

Die Aufgabe des Lehrers besteht nun darin, den Schüler zu der Frage zu führen, ob sich bei dieser Feststellung um einen allgemein gültigen Sachverhalt handelt, ob und wie sich dieser Zusammenhang formelmäßig erfassen lässt, welche Funktion die graphische Darstellung im Erklärungs- und Lernprozess hat und vor allem, wie der dem einzelnen Schüler mit Hilfe des Einsatzes eines neuen Mediums mit allen seinen Möglichkeiten ein optimal gestaltetes Lernszenario eröffnen kann und ihn beim eigenständigen Wissensaneignungsprozess bestmöglich unterstützen kann.

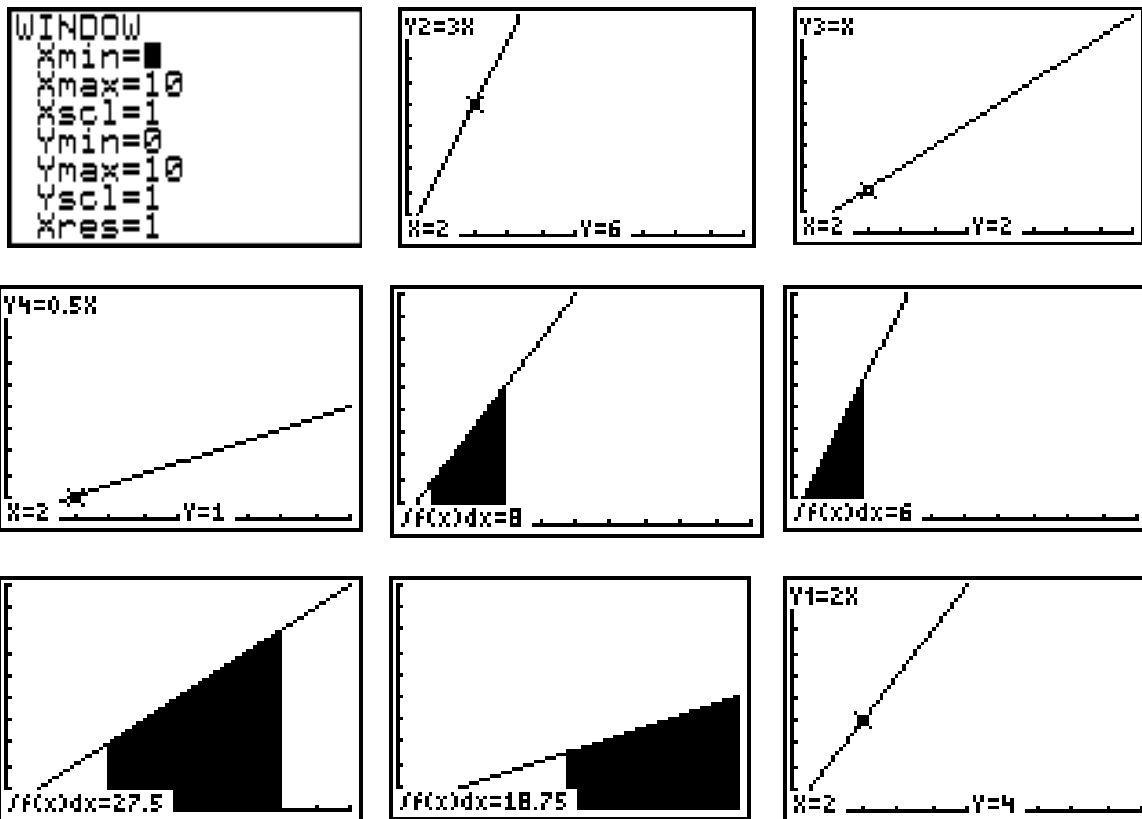
```

>MODE>
1:value
2:zero
3:minimum
4:maximum
5:intersect
6:dy/dx
7:∫f(x)dx
    
```



Beispiel 3:

Gegeben sind die folgenden v-t-Diagramme. Der Unterteilung auf den Achsen entspricht jeweils die Schrittweite 1, d. h. Sie sehen ein Zeitintervall von 10 Sekunden und ein Geschwindigkeitsintervall von 10 Meter pro Sekunde.



- 3.1 Welche physikalische Bedeutung haben in den Diagrammen die Geradensteigungen und wie groß sind sie?
- 3.2 Welche physikalische Bedeutung haben die schraffierten Flächen?
- 3.3 Welche Vermutung können Sie aus der Analyse der Zahlenwerte für die Flächeninhalte aus 3.2 gewinnen?
- 3.4 Bestätigen Sie Ihre Vermutung an weiteren Beispielen mit anderen Beschleunigungen und anderen Zeitintervallen!

Beispiel 4: Projektarbeit – Der Bremsvorgang

Reaktionsweg – Bremsweg – Anhalteweg

- (1) Nehmen wir eine verkehrsberuhigte Zone mit 30 km/h-Beschränkung
- (2) 70 km/h statt 50 km/h zu fahren ist eine durchaus übliche Übertretung im Ortsgebiet
- (3) Wetter, was macht das schon?
- (4) "Gleiten statt Hetzen"
- (5) Vorsicht – Ampel

- 4.1.1 Was schätzen Sie, wie viel Meter mehr Anhalteweg 15 km/h Geschwindigkeitsunterschied eigentlich ausmachen? Wie viel Autolängen sind das?
- 4.1.2 Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das schnellere Fahrzeug noch, wenn das langsamere schon zum Stillstand gekommen ist? Ist das noch die unveränderte Geschwindigkeit?
- 4.1.3 Um wie viel mehr Zeit braucht man, um das Fahrzeug zum Stillstand zu bringen?
- 4.1.4 Was bedeutet dieser größere Anhalteweg in einer Situation, wo plötzlich ein spielendes Kind hinter einem geparkten Auto hervorspringt oder ein schwerer LKW aus einer Seitenstraße kommt?
- 4.2.1 Mit welcher Restgeschwindigkeit bewegt sich das schnellere Fahrzeug noch, wenn das langsamere Fahrzeug bereits zur Ruhe gekommen ist? (etwa 50 km/h)
- 4.2.2 Um wie viele Autolängen mehr würde das langsamere Fahrzeug brauchen, um anzuhalten?
- 4.2.3 Wie viele Meter mehr Anhalteweg ergeben sich (für $a=6\text{m/s}^2$) und welche Auswirkungen in verschiedenen Unfallsituationen können wir uns vorstellen?
- 4.3.1 Was schätzen Sie: Wie sehr müssen Sie das Tempo reduzieren, um bei unterschiedlichen Bedingungen den gleichen Bremsweg zu haben?
- 4.3.2 Berechnen Sie den Bremsweg für die folgenden Situationen:
 - 100 km/h auf trockener Fahrbahn ($a = 8 \text{ m/s}^2$)
 - 75 km/h auf nasser Fahrbahn ($a = 4 \text{ m/s}^2$)
 - 50 km/h auf Schneefahrbahn ($a = 2 \text{ m/s}^2$)
 - 35 km/h auf Glatteis ($a = 1 \text{ m/s}^2$)
- 4.4.1 Kann bessere Reaktion eine höhere Geschwindigkeit ausgleichen?

Betrachten wir zwei Fahrzeuge auf der Autobahn!
 Fahrer 1 mit 100 km/h und durchschnittlich konzentriert ($t_R = 1,3 \text{ s}$) und Fahrer 2 mit 140 km/h und - wie er behauptet- besser konzentriert ($t_R = 0,8 \text{ s}$).
 Ist das Argument „Ich kann schneller fahren, weil ich mich besser konzentriere!“ haltbar?
- 4.5.1 Ein Fahrzeug nähert sich einer Ampelkreuzung. Die Ampel springt von grün auf grün-blinkend. Der Fahrer ist unsicher: Soll er anhalten oder durchfahren? Lässt sich diese subjektive Unsicherheit, die viele Autofahrer täglich erleben, durch physikalisch-mathematische Modellierung erhellen und damit erst verstehen?

Didaktischer Kommentar:

Im Beispiel 1 hat der Schüler erfahren, welche großen Geschwindigkeitserhöhungen für relativ kleine Zeitgewinne in Kauf genommen werden müssen. Eine Fortsetzung und Erweiterung dieser Thematik könnten in Verbindung mit beschleunigten bzw. verzögerten Bewegungsvorgängen mit dem Hintergrund der Verkehrserziehung die Analyse der Brems- und Anhaltewege bei den verschiedenen Geschwindigkeiten sein.

Dazu sind allerdings schon mehr Vorkenntnisse bei den Schülerinnen und Schülern erforderlich.

Fachliche Voraussetzungen:

Den gesamten zurückgelegten Weg vom Erkennen der Bremsnotwendigkeit bis zum Stillstand des Fahrzeuges nennt man die Anhaltstrecke s_A . Diese setzt sich aus der Vorbremsstrecke s_V und der Bremsstrecke s_B zusammen. Wenn wir in erster Näherung die Bremsverzögerung a als konstant ansehen, können wir zur rechnerischen Behandlung des Bremsvorganges die Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung heranziehen. Wir erhalten dann

$$s_A = v \cdot t_R + \frac{v^2}{2a}$$

d.h. die Anhaltstrecke hängt ab von

der Fahrzeuggeschwindigkeit v
 der Reaktionszeit des Fahrers t_R
 der Bremsverzögerung a

Bei allen Straßenverhältnissen und Witterungsbedingungen bleibt der Einfluss der Geschwindigkeit auf den Bremsweg der gleiche. Dazu kommt nun die unterschiedliche Bremsverzögerung durch die geänderten Bedingungen. Geschwindigkeitsreduzierung ist das einzige Mittel und auch die einzige Größe, die der Fahrer unmittelbar beeinflussen kann, um Bremswege auch bei schlechten Witterungsbedingungen (nasse Straßen, Schnee und Eis) in vernünftigem Rahmen zu halten. Stellen Sie sich vor, Sie geraten im Winter von mäßig nasser Fahrbahn in einem Waldstück plötzlich mit 80 km/h auf eine Schneefahrbahn, ohne das Tempo zu reduzieren.

- ☐ Im Funktionen-Editor des TI83 werden nun die entsprechenden Funktionen definiert und durch Parameterstudien wird ermittelt, wie sich eine Änderung der einzelnen Parameter auf den Anhalteweg auswirkt.

Die Ergebnisse werden mit im Anwendungskontext der Alltagssituationen interpretiert und diskutiert.

So stellt der Schüler fest, dass eine Verringerung der Bremsverzögerung eine Vergrößerung des Anhalteweges hervorruft; er erkennt aber auch, dass die beiden Größen keineswegs direkt oder indirekt proportional zueinander sind, sondern, dass ein komplizierter Zusammenhang besteht. So erweitert er an der konkreten Alltagsaufgabe seine Kenntnis von Funktionstypen und hat auch eine kognitive Verankerung.

3 Interpretieren von Diagrammen und Ermitteln von Funktionstermen

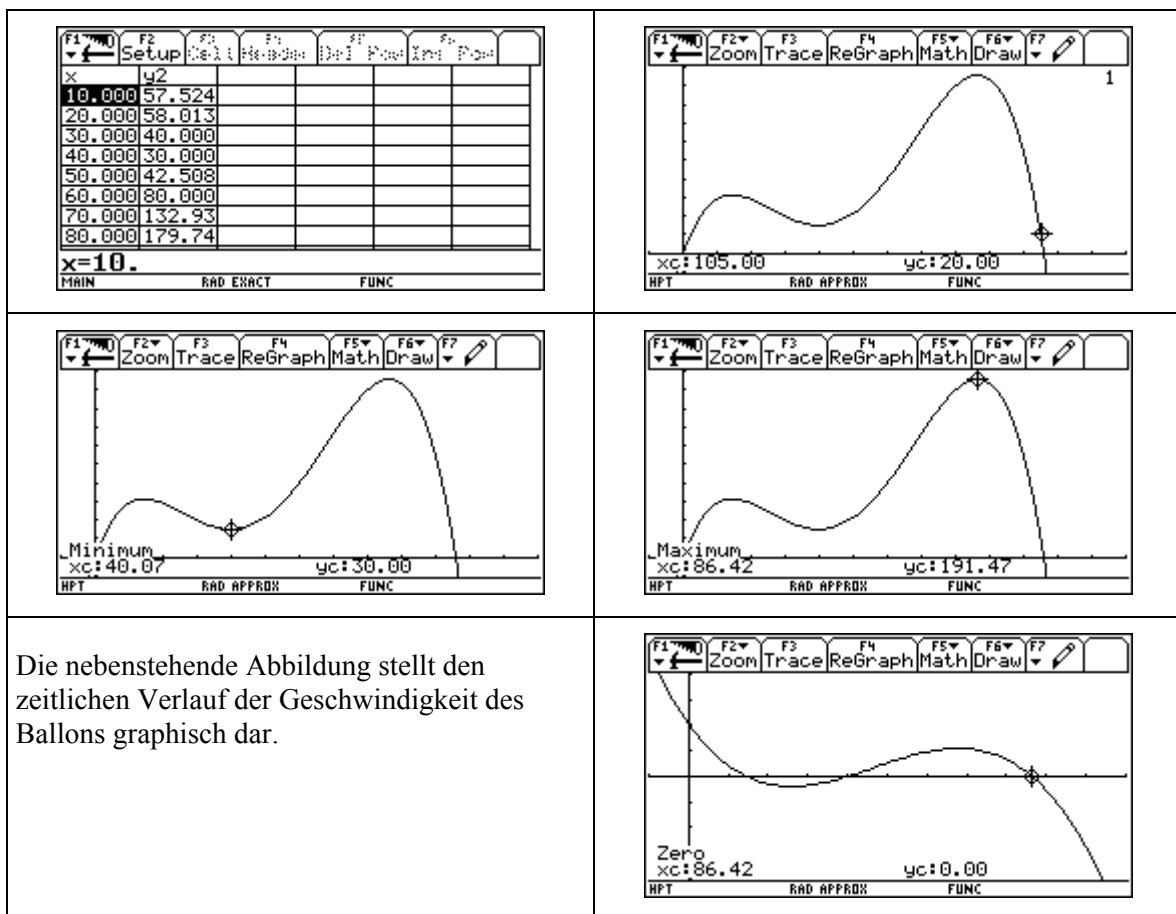
Beispiel 5:

Bei einem Flug im Heißluftballon liegt der Start in der Höhe 0, die Landung erfolgt (nach 1 Stunde 45 Minuten) auf einer 20 m höher gelegenen Plattform.

Nach sehr genauen Messungen und Berechnungen ergibt sich für $h(t)$ eine Polynomfunktion 4. Grades, welche die Flughöhe in Meter in Abhängigkeit von der Flugzeit in Minuten angibt.

Es gilt $0 \text{ min} \leq t \leq 105 \text{ min}$.

Die ersten vier Abbildungen² geben Auskunft über den Ort des Ballons in Abhängigkeit von der Zeit.



² Bei den Abbildungen handelt es sich um „Screen-Shots“ von einem TI92 – der Schüler soll diese nur betrachten und versuchen die notwendigen Informationen zu gewinnen, um die Funktion dann auf seinem TI83 zu definieren, nachdem er den passenden Funktionsterm ermittelt hat.

- 5.1 Versuchen Sie mit zwei verschiedenen Lösungsstrategien den Funktionsterm $h(t)$ zu ermitteln! *Hinweis: Verwenden Sie dazu den Ausschnitt aus der zugehörigen Wertetabelle, sowie die angebotenen Sreen-Shots.*
- 5.2 In welchen Zeitintervallen befindet sich der Ballon im Steigflug?
- 5.3 In welchen Zeitintervallen befindet sich der Ballon im Sinkflug?
- 5.4 Zu welchem Zeitpunkt ist die Flughöhe maximal bzw. minimal?
- 5.5 Welcher Zusammenhang besteht im Zeit-Geschwindigkeitsdiagramm zwischen einem Hochpunkt bzw. Tiefpunkt und der Geschwindigkeit?
- 5.6 Welches Vorzeichen hat die Geschwindigkeit während des Steig- bzw. Sinkfluges?
- 5.7 Wie drückt sich der Betrag der Geschwindigkeit in der Flugkurve aus?
- 5.8 Wo sind die Stellen im Schaubild der Flugkurve (im Zeit-Weg-Diagramm), wo die Geschwindigkeit minimal bzw. maximal ist und was kann man dort über den Kurvenverlauf aussagen? Kann diese Geschwindigkeit mit Hilfe dieses Diagramms näherungsweise berechnet werden.
- 5.9 Was können wir über die Geschwindigkeitsänderung aussagen?
- 5.10 Was bedeuten positive Beschleunigungswerte, was negative Werte?
- 5.11 Welche Bedeutung haben die Nullstellen der Zeit-Beschleunigungsfunktion?
- 5.12 Gibt es an diesen Nullstellen im Zeit-Weg- bzw. im Zeitgeschwindigkeits-Diagramm Besonderheiten festzustellen?

Lernziele:

Der Schüler soll sich in einem graphischen Schaubild zurechtfinden können, d.h. insbesondere die Zuordnung der in dem Diagramm vorkommenden Größen zu den beiden Achsen richtig vornehmen und aus den Zahlenangaben die verwendeten Einheiten identifizieren können.

Weiter soll der Schüler ermitteln können, wie viele und welche Informationen er zur Lösung der Aufgabe, d.h. vorerst zur Ermittlung des Funktionsterms erforderlich sind und wie er diese aus den verschiedenen Angaben (Text, Tabelle, Graphiken) extrahieren kann.

Nach der Modellierung der Funktion soll der Schüler wiederum aus der graphischen Darstellung eine erste qualitative Beurteilung der anwendungsorientierten Situation geben, dabei aber auch die mathematischen Entsprechungen seiner Beobachtungen und Beschreibungen reflektieren.

Didaktischer Kommentar:

Im Sinne einer „umgekehrten Kurvendiskussion“ sollen aus verschiedenen zur Verfügung stehenden Daten und Informationen die relevanten bzw. ausreichend notwendigen ausgewählt werden, um die Aufgabenstellung zu lösen und vor allem den Funktionsterm zu finden.

In einem Reflexionsprozess soll diese Funktion dann auch durch eine vorerst qualitative Beschreibung und anschließende quantitative Diskussion untersucht werden und so die Bedeutung der Begriffe Nullstelle, Steigung, Ableitung, Wendepunkt, etc. im Anwendungsbezug verstanden werden.

Beispiel 6: Die Anomalie des Wassers

Zwischen 0°C und 24°C besteht zwischen dem Volumen V und der Temperatur x des Wassers der Zusammenhang $V(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Gegeben seien folgende Messwertepaare (x/V) : $(0/1,00013)$, $(12/1,00047)$, $(18/1,00137)$, $(24/1,00267)$.


- 6.1 Bestimmen Sie (wenn möglich) auf zwei verschiedene Arten die Koeffizienten a , b , c und d und stellen Sie die Funktion $V(x)$ im Graphik-Fenster des TI83 dar!
- 6.2 Führen Sie eine elementare Funktionsdiskussion durch!
- 6.3 Gibt es ein Minimum und wo liegt es? Welche physikalische Eigenschaft des Wassers wird damit zum Ausdruck gebracht?
- 6.4 Um wieviel VE (Volumseinheiten) ändert sich das Volumen bei einer Erwärmung von 3°C auf 4°C ? Welches Vorzeichen hat diese Änderung und welche physikalische Interpretation können Sie dazu geben?
- 6.5 Um wieviel VE (Volumseinheiten) ändert sich das Volumen bei einer Erwärmung von 4°C auf 5°C ? Welches Vorzeichen hat diese Änderung und welche physikalische Interpretation können Sie dazu geben?
- 6.6 Um wieviel VE (Volumseinheiten) ändert sich das Volumen bei einer Erwärmung von 4°C auf $4,05^{\circ}\text{C}$ und von 80°C auf $80,05^{\circ}\text{C}$? Wie erklären Sie die verschiedenen Werte? Wie drücken sich die Resultate in der Graphik aus?

Didaktischer Kommentar:

Der Schüler kann diese Aufgabe durch Aufstellen eines Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und vier Variablen eindeutig lösen.

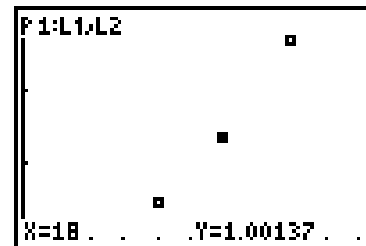
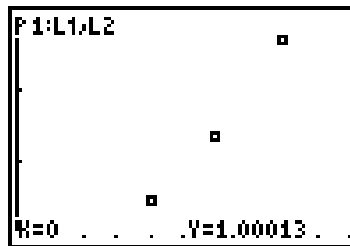
Wenn der Schüler mit dem TI83 schon statistische Berechnungen durchgeführt hat und das Arbeiten mit dem STAT-Listen-Editor beherrscht, eröffnet sich eine weitere Möglichkeit, dem Schüler erfahren zu lassen, wie er aus Daten mit Hilfe von Regressionsmodellen Funktionsgleichungen gewinnen kann.

Nach meiner persönlichen Einschätzung halte ich das Erlernen des Umgangs mit dem STAT-Editor direkt an diesem Beispiel nicht für optimal geeignet, weil einerseits die auftretenden Zahlenwerte und das damit verbundene notwendige Geschick bei der Wahl der Fenstervariablen und andererseits die doch etwas komplexe Bedienungssituation den Blick auf den mathematischen und im fächerübergreifenden Kontext physikalischen Zusammenhang versperren. Daher möchte ich an dieser Stelle auch nur einige „Screen-Shots“ anführen, die dem interessierten und bereits technisch kundigen Leser ermöglichen, die Aufgabe in den einzelnen Gedankenschritten nachzuvollziehen und selbst zu entscheiden, ob und wie er diesen Zugang im Unterricht einsetzen möchte.

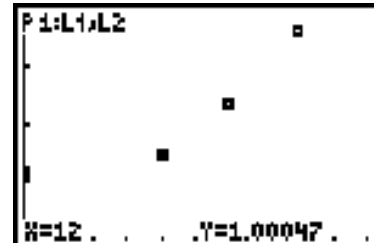
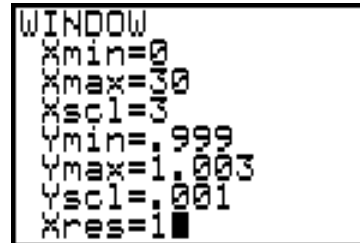
-  Im STAT – Listen – Editor werden die angegebenen Zahlenpaare angegeben und nach Definition eines PLOTS im Graphikfenster als Punktwolke ausgegeben.

Hier ist bereits zu erahnen, dass es ein Minimum zwischen 0°C und 8°C geben könnte und dass es vielleicht notwendig ist, die Fenstervariablen noch einmal zu optimieren.

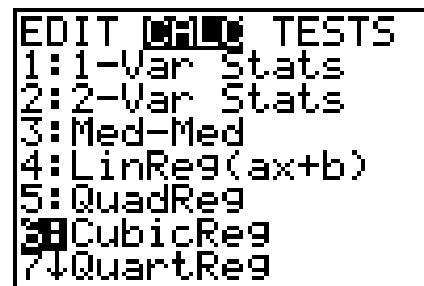
L1	L2	----- 1
0	1.0001	
12	1.0005	
18	1.0014	
24	1.0027	
-----	-----	
L1(1) = 0		



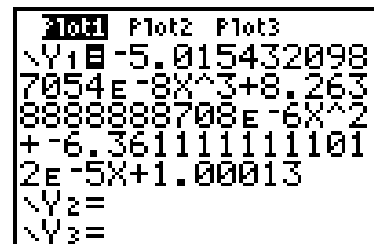
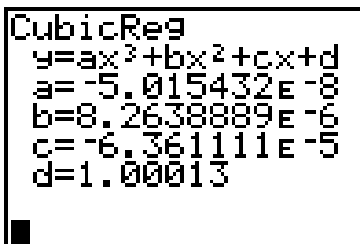
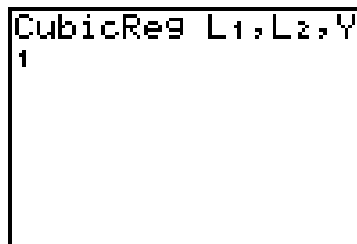
Mit WINDOW werden die Fenster-Variablen angepasst, wo auf den beiden nebenstehenden Abbildungen nachvollzogen werden kann.



Da der Schüler aus der Angabe weiß, dass der Zusammenhang zwischen Temperatur und Volumen durch eine Polynomfunktion dritten Grades beschrieben wird, wird er aus dem STAT-CALC-Menü die kubische Regression [CubicReg] wählen.

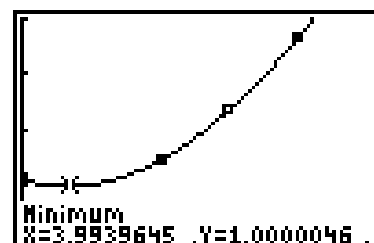
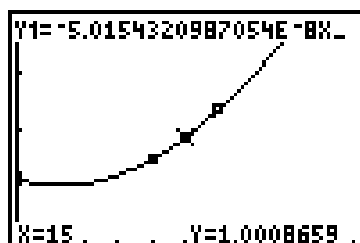
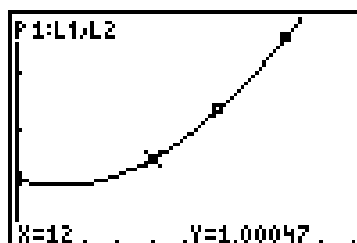


Bei vier Punkten (wie in diesem Fall) ist die erhaltene Gleichung eine polynomiale Anpassung, die im Funktionen-Editor Y= unter Y1 abgespeichert wird.

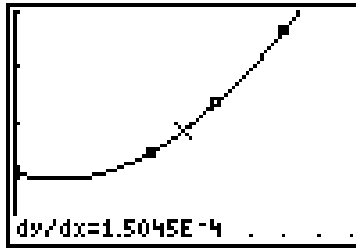


Didaktischer Kommentar:

Der Schüler hat nun nicht nur die vier angegebenen Wertepaare zur Verfügung und kann zu jeder beliebigen Temperatur das zugehörige Volumen ermitteln, wie auch das Minimum. Er erkennt, dass dieses Modell zumindest im fokussierten Temperaturbereich die Realität hinreichend gut und genau abbildet. Mit Hilfe geeigneter Fragestellungen wird der Schüler zu weiten eigenen Fragestellungen und Untersuchungen motiviert.



Für die Bearbeitung der Fragestellungen kann sowohl das Graphik- als auch das Tabellen-Fenster herangezogen werden.



X	Y1	
17	1.0012	
18	1.0014	
19	1.0016	
20	1.0018	
21	1.002	
22	1.0022	
23	1.0024	

X=23

X	Y1	
30	1.0043	
31	1.0046	
32	1.0049	
33	1.0052	
34	1.0055	
35	1.0059	
36	1.0062	

X=36

4 Arbeiten mit dem Mode Parametric

Eine häufige Anwendung von Parameterdarstellungen ist die Darstellung von Kurven unter Berücksichtigung des zeitlichen Verlaufs.

Beispiel 7:

Ein punktförmiger Körper wird aus einer Höhe $h = 45 \text{ m}$ horizontal mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 20 \text{ m/s}$ abgeworfen.

- 7.1 Welche Bahnkurve beschreibt der Körper?
- 7.2 Wie kann der Ort des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt werden?
- 7.3 Kann die Bewegung des Körpers bis zum Aufschlag in einem Diagramm in einem x-y-Koordinatensystem dargestellt werden?
- 7.4 Wo befindet sich der Körper 1s, 1,5s, 2s, 2,5s und 3s nach dem Abwurf?
- 7.5 Nach welcher Zeit t und in welcher Entfernung x_w trifft der Körper auf den Boden?
- 7.6 Mit welcher Endgeschwindigkeit v und unter welchem Winkel trifft er auf den Boden?
- 7.7 Ein Körper wird horizontal aus unbekannter Höhe geschleudert und erreicht nach $t = 8 \text{ s}$ den Boden in $s = 1800 \text{ m}$ Entfernung. Aus welcher Höhe h und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist der Körper abgeworfen worden?
- 7.8 Kommt der Körper doppelt so weit, wenn er aus doppelter Höhe geschleudert wird oder wenn er die doppelte Anfangsgeschwindigkeit besitzt?

Beispiel 8: Lissajous – Figuren , Sinus – und Kosinusfunktionen, Wurzelfunktion

Lissajous-Figuren entstehen durch ungestörte Überlagerung zweier aufeinander senkrecht stehender harmonischer Schwingungen, deren Frequenzen in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen. Es werden zwei Schwingungen in zwei Dimensionen überlagert. Lissajous-Figuren lassen sich beispielsweise auf einem Oszillograph durch Anlegen von sinus- oder kosinusförmigen Wechselspannungen an den beiden Ablenkcondensatoren realisieren.

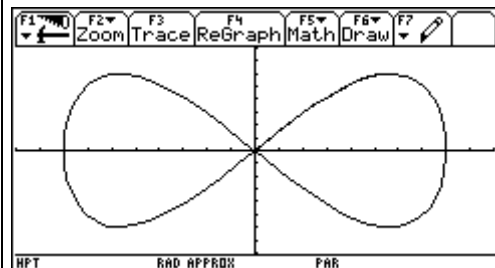
- 8.1 Es ist der Verlauf der von dem Elektronenstrahl auf dem Schirm gezeichneten Lissajous-Figur mit der Parameterdarstellung $x = a \cdot \sin(\omega \cdot t)$, $y = b \cdot \sin(2 \omega \cdot t)$, $t \geq 0$ für $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ und $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ zu bestimmen.
- 8.2 Durch welche Funktion in expliziter Form lässt sich diese Kurve beschreiben?

Fachliches Hintergrundwissen:

Die Schwingungen in der x- und y – Richtung erfolgen mit den Schwingungsdauern (Perioden)

$$T_x = 2\pi s \text{ und } T_y = \pi s.$$

Die kleinste gemeinsame Periode ist somit $T = 2\pi s$, d.h. nach Durchlaufen eines Periodenintervalls dieser Länge ist die Lissajous-Figur geschlossen, der Elektronenstrahl zeichnet die gleiche Figur von Neuem.

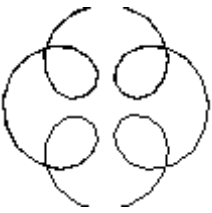


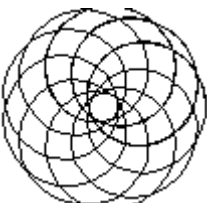


Im obigen Beispiel waren die Amplituden verschieden, aber es gab keinen Phasenunterschied zwischen den beiden Grundschwingungen.

Mögliche Erweiterungen:

- gleiche Amplituden, verschiedene Frequenzverhältnisse (1:1 , 2:3, 5:6), kein Phasenunterschied zwischen den Grundschwingungen
 - gleiche Amplituden, verschiedene Frequenzverhältnisse (1:1 , 2:3, 5:6), Phasendifferenzen von 45° und 90° zwischen den Grundschwingungen
 - welche Figuren ergeben sich bei großen Frequenzverhältnissen oder bei nicht rationalen Frequenzverhältnissen?
 - verallgemeinerte Lissajous-Figuren können erzeugt werden, wenn die Grundschwingungen schon komplexere Gestalt haben;
- z.B. $x(t) = A \cdot \cos(t) + B \cdot \cos(kt)$ und $y(t) = A \cdot \sin(t) + B \cdot \sin(kt)$

8.3 Ordnen Sie die folgenden Funktionsterme den richtigen Schaubildern zu und versuchen Sie Ihre Entscheidungen zu begründen:


$x(t) = A \cos(t) + B \cos(k \cdot t)$ $y(t) = A \sin(t) + B \sin(k \cdot t)$ mit $A = 30, B = 8$ und $k = 4$		$x(t) = A \cos(t) + B \cos(k \cdot t)$ $y(t) = A \sin(t) + B \sin(k \cdot t)$ mit $A = 30, B = 8$ und $k = -4$	
$x(t) = A \cos(t) + B \cos(k \cdot t)$ $y(t) = A \sin(t) + B \sin(k \cdot t)$ mit $A = 30, B = 20$ und $k = 5$		$x(t) = A \cos(t) + B \cos(k \cdot t)$ $y(t) = A \sin(t) + B \sin(k \cdot t)$ mit $A = 30, B = 40$ und $k = 10$	

Schon diese wenigen Parametervariationen zeigen, dass zusätzlichen Erweiterungen keine Grenzen gesetzt sind und hier leicht Lernsituationen für Forschungsaufgaben geschaffen werden können und damit die Selbsttätigkeit der Schüler angekurbelt werden kann. Für einfachere Lissajous- Figuren kann ebenso wie in der Musteraufgabe die die Figur erzeugende Funktion in expliziter Darstellung gefordert sein. Ob die gesuchten Formeln richtig sind, lässt sich mit dem TI83 sehr leicht feststellen. Es wurde dann die richtige Darstellung gefunden, wenn die Schaubilder übereinstimmen.

Beispiel 9: Parameterdarstellung ausgewählter Funktionen

Parabel – Kreis - Ellipse

9.1 Geben Sie die Parameterdarstellung eines Kreises mit dem Radius 5 an. Finden Sie mehrere Lösungsmöglichkeiten?

 Einstellen des Modus zur Parameterdarstellung

Der Modus-Bildschirm wird mit **[MODE]** aufgerufen. Dort müssen Sie den Graphik-Modus **[PAR]** auswählen.

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
Horiz G-T
```

 Anzeige des Y=Editors für Parameterdarstellungen


Sie rufen den Y=Editor mit **[Y=]** auf und können dort die x- und y-Komponenten von bis zu 6 Gleichungen $X1T$ und $Y1T$ bis zu $X6T$ und $Y6T$ anzeigen und eingeben. Dabei wird jede Gleichung über die unabhängige Variable T definiert.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\X1T =
Y1T =
\X2T =
Y2T =
\X3T =
Y3T =
\X4T =
```

 Definition der Fenstervariablen


Drücken Sie **[WINDOW]**, um die Fenstervariablen anzuzeigen. Diese Variablen legen das Anzeigefenster fest. Die nebenstehenden Werte sind die Voreinstellungen für PAR im Winkelmodus RADIAN.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\X1T 5*cos(T)
Y1T 5*sin(T)
\X2T =
Y2T =
\X3T =
Y3T =
\X4T =
```

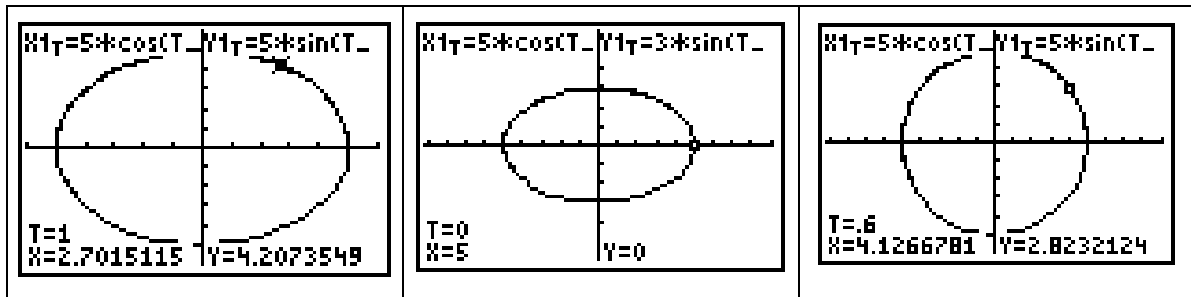
 Anzeige eines Graphen

Wenn Sie **[GRAPH]** drücken, zeichnet der TI83 die ausgewählten Parameterdarstellungen. Die x- und y-Komponenten werden für jeden Wert von T von T_{MIN} bis T_{MAX} mit der Schrittweite T_{STEP} ausgewertet und dann jeder durch x und y definierte Punkt gezeichnet.

```
WINDOW
Tmin=0
Tmax=10
Tstep=.1
Xmin=-6
Xmax=6
Xscl=1
↓Ymin=-6
```

 Mit TRACE können Sie den Cursor am Graphen immer einen TSTEP nach dem anderen weiter bewegen.

Achtung!! „Nicht alles, was wie eine Ellipse aussieht, ist auch eine Ellipse!“



Mit **ZOOM** und **ZSquare** passen Sie die Fenster-Variablen so an, dass ein Kreis als Kreis und ein Quadrat als Quadrat dargestellt wird.

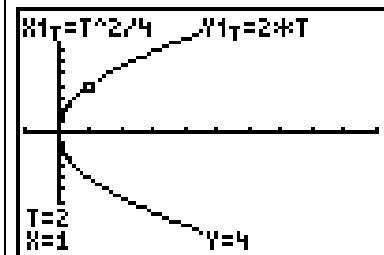


Anregungen zum Experimentieren:

Finden Sie noch weitere Parameterdarstellungen für diese Parabel?

Sind Parameterdarstellungen immer eindeutig?

Wie lautet die Parameterdarstellung einer Geraden?



5 Übungsaufgaben zum Thema Funktionen

Beispiel 10:

In einem Gefäß befindet sich heißes Wasser mit der Temperatur $T_2 = 85^\circ\text{C}$; die Umgebung hat die Temperatur $T_1 = 18^\circ\text{C}$. Die Abkühlung auf die Temperatur T erfolgt nach den Newtonschen Abkühlungsgesetz $T = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot e^{-0,05t}$ (Zeit t in Minuten).

- 10.1 Ermitteln Sie das Schaubild der $T(t)$ – Funktion im Graphikfenster!
- 10.2 Welche Temperatur hat das Wasser nach 10 min, nach 20 min, nach 40 min, nach 1 h?
- 10.3 Stellen Sie eine Vermutung auf, wovon die Abkühlungsgeschwindigkeit abhängt?
- 10.4 Sie bekommen eine Tasse mit besonders heißem Tee (93°C) serviert. Da Sie ihn gezuckert trinken, möchten Sie zwei Stück Würfelzucker hineingeben. Dadurch wird der Tee – vor allem durch den Lösungsvorgang – um 15°C abgekühlt. Sie bevorzugen 38°C als Trinktemperatur. Ist es nun klüger, den Zucker sofort hineinzuworfen – oder abzuwarten, bis der Tee auf 53°C abgekühlt ist und erst dann zu zuckern? Verwenden Sie das Newtonsche Abkühlungsgesetz und stellen Sie beide Vorgänge im Graphik-Fenster dar!

Beispiel 11:

Ein Flugzeug, das in $h = 500$ m Höhe mit konstanter Geschwindigkeit von $v = 30$ m/s fliegt, wirft einen Versorgungskanister ab.

- 11.1 Führen Sie zwei Ortskoordinaten $x(t)$ und $y(t)$ als Funktion der Zeit t ein; die Position des Kanisters soll durch $(x(t)/y(t))$ festgelegt sein. Sie müssen zwei Bewegungen ungestört überlagern!
- 11.2 Welche Bahn beschreibt der Kanister, und in welcher Entfernung von der Abwurfstelle schlägt er auf dem Boden auf?
- 11.3 Was für eine Kurve ist die Flugbahn des Kanisters?
- 11.4 Variieren Sie die Geschwindigkeit (z.B. $v = 20$ m/s , $v = 40$ m/s) sowie die Höhe (z. B. $h=400$ m, $h=600$ m) des Flugzeugs und untersuchen Sie, wie die Auftreffstelle davon beeinflusst wird, indem Sie mehrere Graphen mit unterschiedlichen Werten für h bzw. für v in einer einzigen Graphik darstellen.
- 11.5 Weisen Sie durch Parameterelimination nach, dass die Bahnkurve des Kanisters eine quadratische Parabel ist!
- 11.6 Zeigen Sie, dass die Auftreffstelle im Punkt $(0,45 \cdot v \cdot h^{1/2})$ erfolgt und versuchen Sie diesen Zusammenhang herzuleiten!

Beispiel 12:

Für die Fahrt zwischen zwei Haltestellen gehorcht ein U-Bahnzug folgender Weg-Zeit-Funktion:

$$s_1(t) = 0,5 \cdot t \quad (\text{für } 0 \leq t \leq 12),$$

$$s_2(t) = 0,2 \cdot (t + 18)^2 - 108 \quad (\text{für } 12 < t \leq 35),$$

$$s_3(t) = 21,2 \cdot (t - 35) + 453,8 \quad (\text{für } 35 < t \leq 38) \text{ und}$$

$$s_4(t) = -0,48 \cdot (t - 60)^2 + 749,72 \quad (\text{für } 38 < t \leq 60).$$

- 12.1 Stellen Sie die Funktion $s(t)$, die sich aus diesen vier Teilfunktionen zusammensetzt, im Graphik-Fenster dar und beschreiben Sie die Bewegung!
- 12.2 Stellen Sie fest, wo beschleunigt wird und ob bzw. wo gebremst wird?
- 12.3 Stellen Sie fest, wo die Geschwindigkeit maximal ist!
- 12.4 Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit im gesamten Bereich?
- 12.5 Welchen Weg legt der U-Bahnzug in der angegebenen Zeit zurück?
- 12.6 Skizzieren Sie auf einem Blatt Papier die Funktion $v(t)$! (Berechnen Sie dazu an einigen Stellen Näherungswerte für die „Momentangeschwindigkeit“ mit Hilfe des Differenzenquotienten $\Delta s/\Delta t$)
- 12.7 Beschreiben Sie die Zusammenhänge der beiden Graphen $s(t)$ und $v(t)$!
- 12.8 Können Sie – nur qualitativ – für die einzelnen Zeitintervalle die Zeit-Beschleunigungsfunktion beschreiben?

Beispiel 13:

Am 26. April 1986 explodierte der vierte Reaktorblock des Kernkraftwerks Tschernobyl. Das bei der Atomspaltung entstehende radioaktive Isotop Jod-131 wurde in die Luft geschleudert und – vom Wind verweht – in ganz Europa abgelagert. Einer Probe von Waldpilzen aus der Steiermark wurden 1000 mg Jod-131 entnommen. Folgende Werte hat man in den darauf folgenden 8 Tagen gemessen:

Tage	0	1	2	3	4	5	6	7	8
mg Jod – 131	1000	910	820	740	670	605	550	500	450

- 13.1 Stellen Sie ein mathematisches Gesetz zur Beschreibung dieses Zerfallsprozesses auf! Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgangsweise!
- 13.2 Bestimmen Sie die Quotienten je zweier aufeinander folgender Zahlenwerte als Änderung der Anzahl der Teilchen in einem bestimmten Zeitintervall und berechnen Sie daraus den Mittelwert des „Wachstumsfaktors“. Stellen Sie dann den Zerfallsvorgang rekursiv dar!
- 13.3 Welche Bedeutung hat der Zahlenwert des Wachstumsfaktors? Wie interpretieren Sie einen Wert kleiner 1, gleich 1 bzw. größer 1?
- 13.4 Warum liegt hier kein linearer Zusammenhang vor?
- 13.5 Wozu ist die Änderungsrate (Änderung pro Periode) proportional?

Beispiel 14:

Ein Segelflugzeug setzt in einer Höhe von 2000m über dem Erdboden zum Gleitflug an, wobei die Einflüsse von Auf- und Abwinden nicht berücksichtigt werden sollen. Im Abstand von jeweils drei Minuten notiert der Pilot die Höhe; die Zahlenpaare (Zeit in min/ Höhe in m) lauten: (0/2000), (3/1722), (6/1389), (9/1107), (12/793).

- 14.1 Stellen Sie die Messpunkte und die Ausgleichskurve graphisch dar!
- 14.2 Mit welcher Höhe kann der Pilot nach einer Flugzeit von 16 min noch rechnen?
- 14.3 Wann wird das Flugzeug voraussichtlich auf der Landebahn aufsetzen?
- 14.4 Um wie viel Meter sinkt das Flugzeug durchschnittlich pro Minute? Wie können Sie diesen Wert ermitteln?
- 14.5 Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeit des Flugzeugs während des Gleitflugs?
- 14.6 Wie viel Meter legt das Flugzeug während des Gleitflugs in der Luft bis zur Landung zurück?