T³ EUROPE

Unterrichtssequenzen für den TI-83+

Der allererste Einstieg in den Gebrauch des TI-83+
Jedem sein Logo oder „Die Verwandlung“
Die Winkelfunktionen erforschen mit dem TI-83+
Logistisches Wachstum – diskret, kontinuierlich und chaotisch
Vom Schrägriss und anderen Parallelprojektionen (Matrizenrechung)
Tiere auf Wanderschaft (Matrizenrechnung)

Josef Böhm

Ein Unterrichtsbehelf zum Einsatz moderner Technologien
im Mathematikunterricht

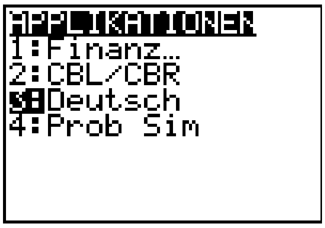
T^3 Österreich / ACDCA am PI-Niederösterreich, Hollabrunn

Der allererste Einstieg in den Gebrauch eines TI-83+

Diese Unterlage ist für Kollegen und Kolleginnen gedacht, die noch wenig Erfahrung im Gebrauch eines TI-83+ haben.

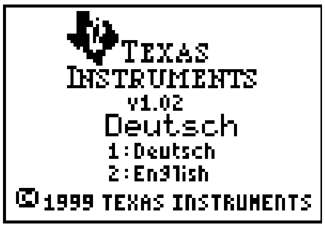
In diesem Papier wird mit der englischen Oberfläche gearbeitet, da die deutsche nach Erfahrung des Verfassers eher anfällig für Fehler ist und weil es nicht schadet, dass sich die Schüler langsam das englische Fachvokabular aneignen. Für spätere Internetrecherchen auch im Fach Mathematik ist das sehr nützlich.

Nach Einschalten des Gerätes über [ON] wird i.a. ein leerer Bildschirm gezeigt. Über [VARS] gelangen Sie zum Fenster, das die Übernahme aller Variablen in weitere Aktivitäten ermöglicht. Wenn dieser Schirm deutsche Bezeichnungen enthält, dann ist auf Ihrem Gerät die entsprechende Übersetzungssoftware aktiv. Über [APPS] können Sie die Applikation 3:Deutsch anwählen (mit [▼] und [ENTER]).



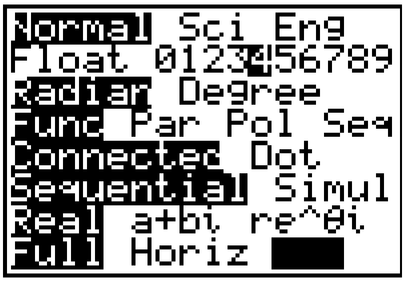
Wenn Sie nun [2] drücken, wird wieder die englische Grundeinstellung hergestellt. Auf die gleiche Weise können Sie aber wieder auf Deutsch umstellen.

Aus jeder Situation kommt man mit [2nd] [MODE] (= [QUIT]) zum Hauptbildschirm.



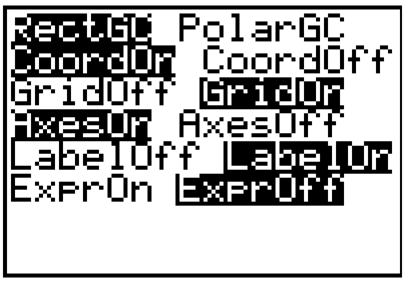
Nun soll eine Grundeinstellung vorgenommen werden. Das „Hauptschaltfeld" erreicht man über [MODE]:

Im Idealfall sollte sich der Schirm so präsentieren, wie rechts abgebildet.



Mit den Pfeiltasten navigiert man zu den gewünschten Optionen und fixiert sie mit [ENTER] (schwarz unterlegt).

Jetz können über [2nd] [ZOOM] (= [FORMAT]) auch gleich die Einstellungen für das Grafikfenster vereinheitlicht werden:

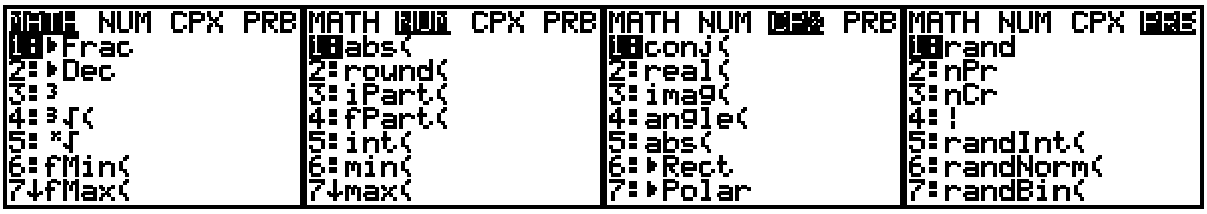


Auf der nächsten Seite finden Sie noch einige wertvolle Tipps für den Gebrauch des TI-83+.

Ich empfehle, sich einen Überblick über den ungefähren Inhalt der am häufigsten verwendeten Menüs zu verschaffen. Grundsätzlich wird keine Funktion über die Tastatur eingegeben sondern alle Befehle werden aus den einschlägigen Menüs abgerufen und mit [ENTER] übernommen.

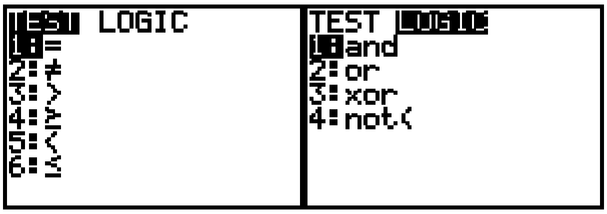
Machen Sie eine kleine Tour durch die Menüs:

Das [MATH] - Menü und seine Untermenüs



Mathematik | Funktionen mit Zahlen | Rechnen mit kompl. Z. | Wahrscheinlichkeitsr.

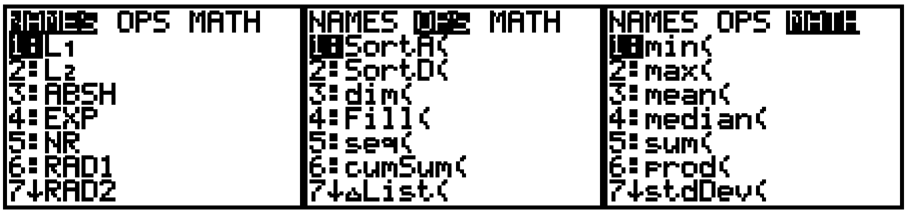
[2nd] [MATH] = [TEST]



Hier finden Sie das Gleichheitszeichen.

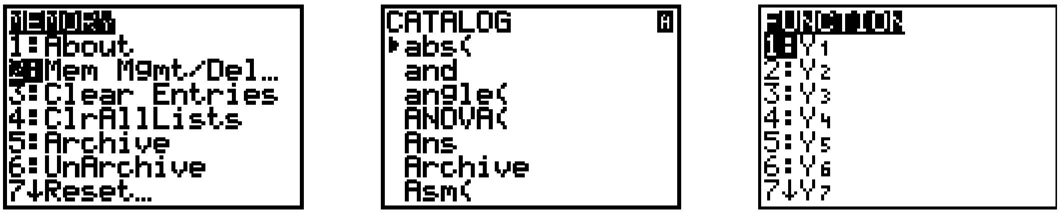
Relationszeichen | logische Verknüpfungen

[2nd] [STAT] = [LIST]



Aufruf von Listen | Listenoperationen | Listenfunktionen

Über [2nd] [+] = [MEM] können Elemente gelöscht werden.
Im [2nd] [0] = [CATALOG] finden Sie alle verfügbaren implementierten Funktionen.
Mit [VARS] <Y-VARS> <Function> kommen Sie an die Standardfunktionen (von *x*).



Beachten Sie bitte, dass Variable nur einbuchstabige Bezeichnungen erhalten dürfen.
Listennamen und Programmnamen sind Ausnahmen.
Bezeichnungen für Matrizen müssen Sie über [MATRIX] <NAMES> abrufen.

Die Unterrichtssequenzen *Jedem sein Logo*, *Die Winkelfunktionen erforschen*, *Matrizenrechnung* und *Logistisches Wachstum* sind zwar sehr detailliert beschrieben, aber eine vorherige Teilnahme an einem T^3-Einführungskurs für den TI-83+ ist sehr empfehlenswert.
Falls das nicht möglich ist, sollten Sie sich mit Hilfe des Handbuchs ein wenig mit dem notwendigsten Handling des TI-83+ vertraut machen.

Diese Unterrichtseinheit kann als Einführung oder aber besser als weiterführende Wiederholung für das Arbeiten im rechtwinkligen Koordinatensystem eingesetzt werden.

„Jedem sein Logo“ oder „Die Verwandlung“

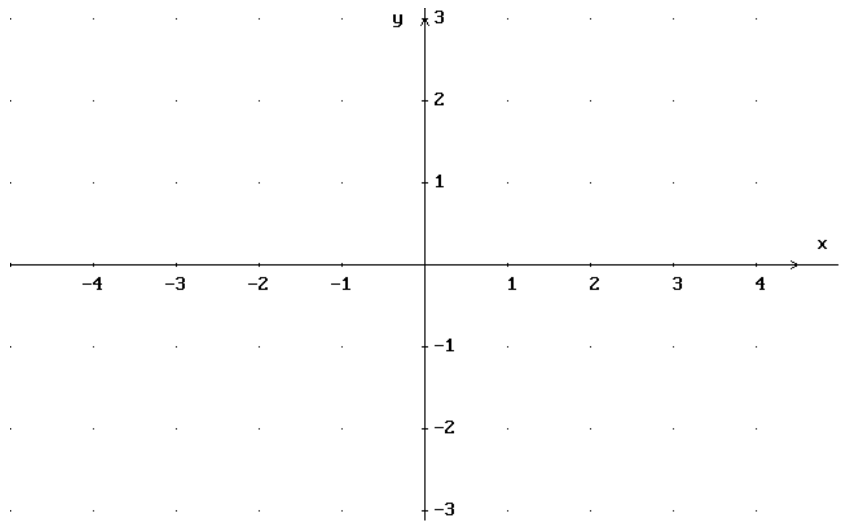
Ein Punkt wird in der Zeichenebene durch ein Zahlenpaar festgelegt. Ein derartiges Zahlenpaar nennt man die .... des Punktes.

Um einen Punkt festzulegen, braucht man zwei Bezugsgerade, die .... Eine Achse heißt die ...., sie verläuft .... oder ...., die andere Achse nennt man die ...., diese verläuft .... oder ....

Für diese Achsen gibt es eine weitere gebräuchliche Bezeichnung:
Die *x*-Achse nennt man auch **Abszissenachse**;
die *y*-Achse wird auch als **Ordinatenachse** bezeichnet.
Die beiden Achsen schneiden einander im .... oder ....
Dieser Punkt O hat die Koordinaten ....

Die Achsen teilen die Ebene in vier Teile, diese Teile heißen .... und sie werden im mathematisch **positiven Sinn** - das ist **gegen den Uhrzeigersinn** bezeichnet.

1. Bezeichne die 4 Quadranten mit **I**, **II**, **III** und **IV**.
2. Trage die Punkte A(3,2), B(-2,3), C(-3,-1) und D(4,-2) ins Koordinatensystem ein und stelle fest, in welchen Quadranten sich die Punkte befinden.



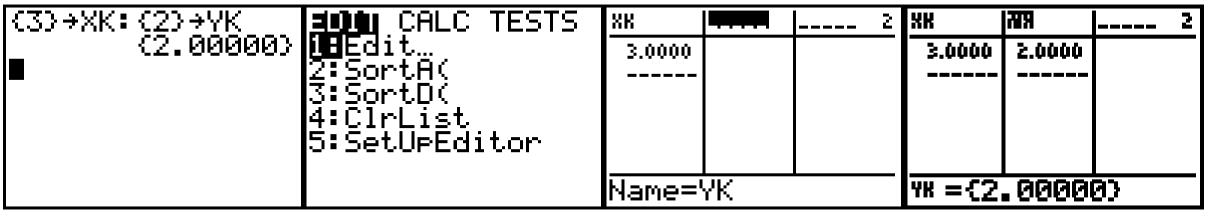
3. Beschreibe *x*- und *y*-Koordinate eines beliebigen Punktes mit eigenen Worten:

   x-Koordinate:

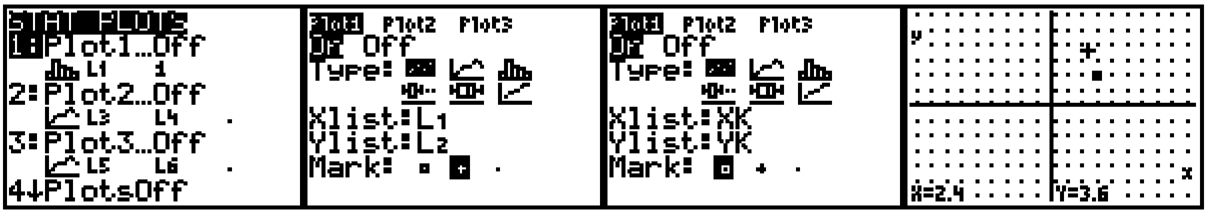
   y-Koordinate:

Nun soll ein Punkt im GRAPH-Fenster des TI-83+ dargestellt werden. Zu diesem Zweck tragen wir die Koordinaten des Punktes (später der Punkte) in Listen ein. Wir wollen vorerst nicht die vordefinierten Listennamen L1 bis L6 verwenden, sondern eigene Listennamen für *x*- und *y*-Koordinaten einführen.

Wir bezeichnen z.B. die beiden Listen als `XK` und `YK`. Mit Hilfe dieser beiden Listen soll der Punkt A mit den Koordinaten A = (3,2) dargestellt werden. Kurze Listen generiert man gleich im Rechenfenster (zwischen `{}`). Über $\boxed{\text{STAT}}$ gelangt man in den Listeneditor und überträgt die beiden Listennamen in die nächsten freien Überschriftenzellen `Name=`....



Das sollte dann so aussehen, wie oben gezeigt. Nun müssen diese Werte in ein Koordinatensystem übertragen werden. Über $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Y=}}$ (= `[STATPLOT]`) werden die Einstellungen für die graphische Darstellung festgelegt:



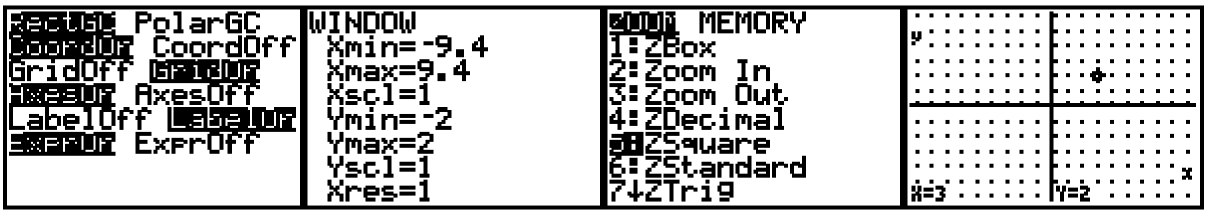
Im zweiten Bild ist eine beliebige Einstellung gezeigt. Sie muss so abgeändert werden, dass sie der dritten Abbildung entspricht. `Plot1` ist aktiviert (`On`). Als `Type` wählen wir das Piktogramm für ein Streudiagramm, d.h., dass die Punkte einzeln dargestellt werden. (Später wird auch noch die zweite Möglichkeit Verwendung finden, bei der die einzelnen Punkte verbunden werden.) Der *x*-Wert steht in der Liste `XK` und der *y*-Wert in der Liste `YK`. Der Punkt soll durch ein Kästchen dargestellt werden.

(Die Listen überträgt man über $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{STAT}}$ (= `[LIST]`) `NAMES` in die Felder für `Xlist` und `Ylist`.)

Nun ist es sehr wahrscheinlich, dass Deine Grafik anders aussieht, wie hier dargestellt. Möglicherweise siehst Du weder die Koordinatenachsen, noch das Koordinatengitter. Es kann auch sein, dass die Skalierung nicht gleichmäßig auf beiden Achsen eingestellt ist.

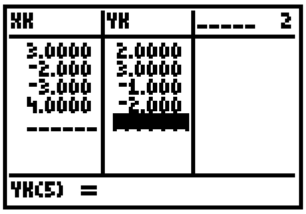
Über $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{ZOOM}}$ (= `[FORMAT]`) werden die entsprechenden Parameter gesetzt: Wir arbeiten im rechtwinkligen (= kartesischen) Koordinatensystem, die Koordinaten des Cursors, das Koordinatengitter, die Achsen und deren Bezeichnung sollen angezeigt werden. Die Bedeutung der letzten Einstellung – (`ExprOn ExprOff`) werden wir bald kennenlernen.

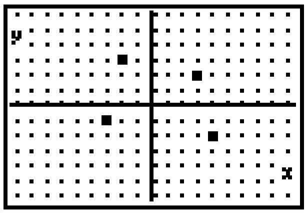
Auf der *x*-Achse soll etwa der Bereich $-10 \le x \le 10$ dargestellt werden. Es ist wünschenswert, dass beiden Achsen gleich skaliert sind. Mit $\boxed{\text{WINDOW}}$ legen wir den Bereich für die *x*-Werte fest: `Xmin` = `-9.4`, `Xmax` = `9.4` und `Xscl = 1`. `Yscl` muss auch mit dem Wert `1` belegt werden. Alle anderen Werte sind beliebig. Mit $\boxed{\text{ZOOM}}$ `5:ZSqare` passt der Rechner die Einheiten auf der *y*-Achse so an, dass ein quadratisches Koordinatengitter entsteht.



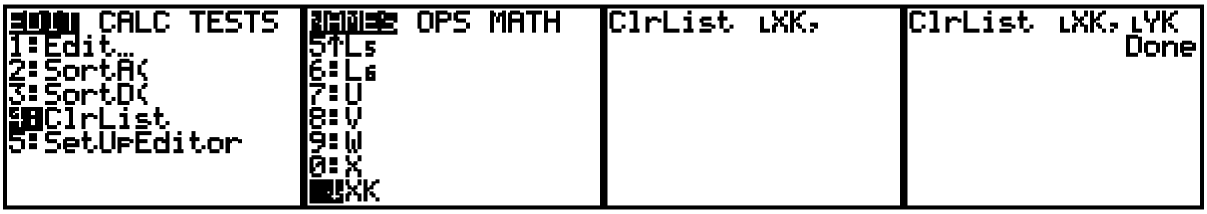
Bewege mit den Pfeiltasten das Fadenkreuz in den Punkt. Beachte, dass dabei die Koordinaten des Kreuzes (Cursor) angezeigt werden. (Wenn wir als Grenzen –10 und 10 gewählt hätten, dann wäre die Grafik sehr ähnlich geworden, aber wegen der Auflösung des Grafikschirms könnten wir nicht die genauen Koordinaten 3 und 2 ablesen. Teste dies, indem Du die WINDOW-Werte für den x-Bereich auf –10 und 10 änderst. Bewege dann den Cursor und beobachte die Koordinaten.

4. Wechsle mit STAT `1:Edit` wieder in den Listeneditor und übertrage Punkt für Punkt die weiteren Punkte B, C und D aus der 2. Aufgabe in die Liste und damit auch ins Koordinatensystem.





5. Zuerst werden die Inhalte der beiden Listen - aber nicht die Listen selbst - gelöscht. Das geht in einem Aufwaschen: STAT `4:ClrList`, dann `[LIST]`, `XK` anwählen, ENTER und die Prozedur für `YK` wiederholen.



Zeichne in jeden der vier Quadranten 3 Punkte. Notiere erst die Punkte, dann übertrage auf den Rechner. (Die Koordinaten aller Punkte können in die beiden vorbereiteten Listen eingetragen werden.) Entweder über STAT `1:Edit` in den Listeneditor wechseln, oder die Listen der Koordinaten im Rechenfenster eingeben!

1. Qu.: 2. Qu.:

3. Qu.: 4. Qu.:

6. Lösche die in 5. gezeichneten Punkte. Zeichne anschließend je zwei Punkte auf die positive und negative x-, bzw. y-Achse.

pos. x-Achse: neg. x-Achse:

pos. y-Achse: neg.y-Achse:

Welche Eigenschaft haben die Koordinaten von Punkten auf den Achsen?

Alle Punkte auf der x-Achse ....

Alle Punkte auf der y-Achse ....

7. Lösche alle Punkte. Zeichne den Punkt P(x = 2,5; y = 1,5).

Spiegle P an der y-Achse: P_1 = ...

Spiegle P an der x-Achse: P_2 = ...

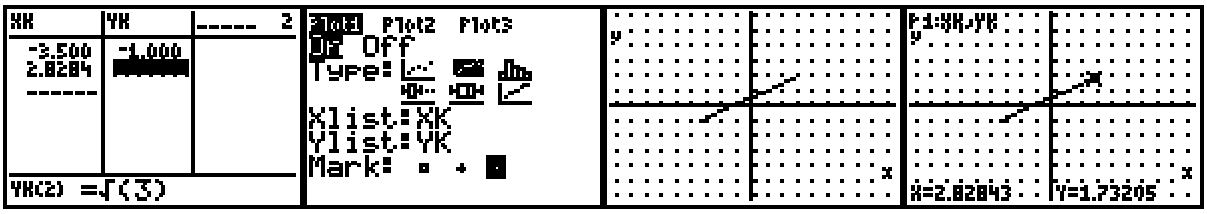
Spiegle P am Koordinatenursprung: P_3 = ...

Die vier Punkte bilden ein ....

Lösche alle Koordinaten und damit alle Punkte im `Plot1`.

Punkte lassen sich zu Strecken und weiter zu „Polygonzügen” verbinden. Wir wollen die Strecke zeichnen, die durch die beiden Endpunkte A(-7/2,-1) und B(2 √2,√3) bestimmt wird:

Editiere in der Liste die beiden Punkte. Wechsle mit [2nd] [Y=] ins `STATPLOT`-Menü und stelle die Parameter für den `Plot1` nun so ein:



Mit [TRACE] gelangst Du in den `Trace` (= Spur- oder Verfolgungs-)-Modus. Nun kannst Du mit den Pfeiltasten ◄ und ► die einzelnen Punkte „besuchen“. Jetzt erkennt man auch den Wert der Einstellung `ExprOn` in `[FORMAT]`: die genau Herkunft der Punkte wird angezeigt.

8. Zeichne diese Strecke nochmals mit großen Endpunkten. Ändere im `STAT PLOT`-die Einstellung für `Mark` geeignet.

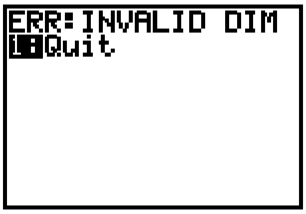
9. Lösche die Strecke und erzeuge ein Viereck, indem du vier Punkte in der entsprechenden Reihenfolge ins Datenblatt schreibst. Das Viereck soll Punkte in allen vier Quadranten enthalten!

   Beim ersten Versuch wird möglicherweise noch kein geschlossenes Viereck entstehen. Ergänze die Angabe so, dass sich das Viereck schließt!

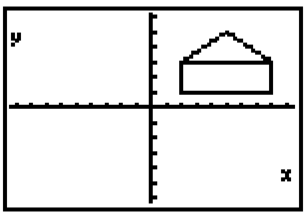
   Führe anschließend das Fadenkreuz zuerst ohne, dann mit dem `Trace`-Modus in alle Ecken des Vierecks.

10. Ergänze die Liste so, dass auch die Diagonalen sichtbar werden. Suche mit dem Cursor die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts. Der Schnittpunkt M liegt in M (....................).

    Tipp: Diese Fehlermeldung entsteht, wenn man Listen geleert hat, ohne anschließend den entsprechenden Plot zu deaktivieren und später wieder ins Grafikfenster wechselt.

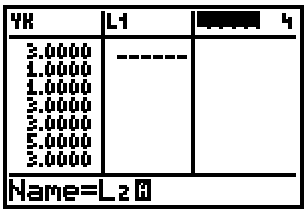


11. Zeichne im 1. Quadranten den Umriss eines Hauses:



(☜ nur ein mögliches Beispiel!!) Überlege zuerst die optimale Reihenfolge der Punkte im Polygonzug.

12. Spiegle dieses Haus zuerst an der *x*-, dann an der *y*-Achse und abschließend am Koordinatenursprung. Gib für jede Spiegelung die Konstruktionsvorschrift an.

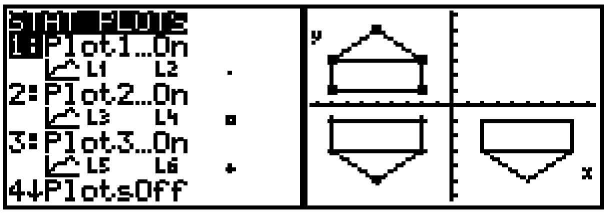


Für die Koordinaten der Spiegelbilder richtet man am besten die Listen `L1` bis `L6` ein ([STAT] `1:Edit`).

Spiegelung an der *x*-Achse:

Spiegelung an der *y*-Achse:

Spiegelung am Koordinatenursprung:



Da nur höchstens 3 Plots gleichzeitig gezeichnet werden können, wollen wir auf die Wiedergabe des Originals verzichten und definieren von `Plot1` bis `Plot3` die gesuchten Spiegelbilder.

13. Versuche, das Haus an der Symmetralen des 1. Quadranten zu spiegeln.
    Welche Vorschrift gilt hier?

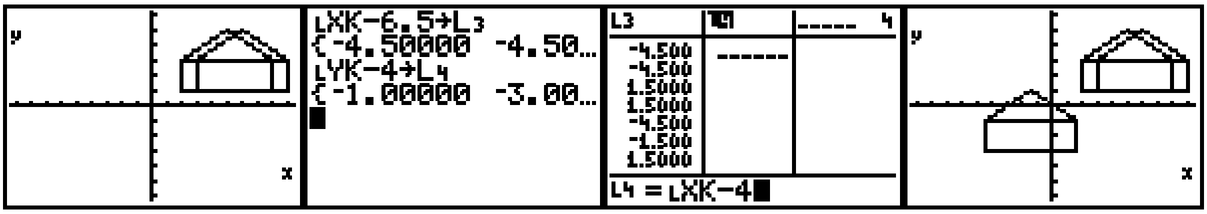
14. Lösche alle Grafiken und zeichne dann das ursprüngliche Haus noch einmal.
    Zeichne ein zweites Haus, das gegenüber dem ersten um 1 Einheit nach rechts verschoben ist.
    Wie ändern sich die Koordinaten?

    Zeichne ein drittes Haus, das um vier Einheiten nach unten und um 6,5 Einheiten nach links verschoben ist. Wie ändern sich die Koordinaten?

Wer schon Erfahrung mit einer Tabellenkalkulation gesammelt hat, wird sich möglicherweise schon gedacht haben, dass sich diese Koordinatenänderung mit Hilfe der Listen recht elegant in einem Schritt durchführen lassen sollte. Bei uns liegen die Koordinaten der Originalfigur in den Listen `XK` und `YK`. In den Listenpaaren `L1`, `L2` und `L3`, `L4` sollen die Koordinaten des zweiten, bzw. dritten Hauses eingetragen werden.

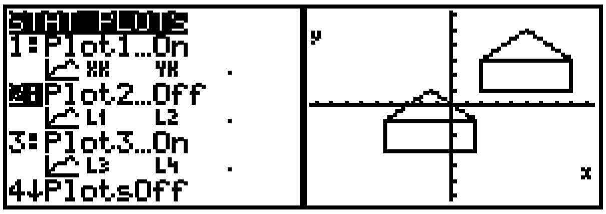
Man erhält die *x*-Koordinaten des dritten Hauses, indem man die ursprünglichen *x*-Werte um .... Diese **Transformation** wenden wir generell auf alle Elemente der Liste `XK` an und speichern die Werte in der Liste `L3`. Auf die gleiche Weise legen wir die *y*-Koordinaten des verschobenen Hauses fest, definieren die Darstellungsart in einem `Plot3`, und erhalten schließlich alle drei Häuser in einem Bild.

Tipp: Die Listen (außer `L1 - L6`, die über die Tastatur erreichbar sind) spricht man immer über `[LIST]` an. Man wählt die gewünschte Liste an und übernimmt sie dann mit [ENTER] in die Operation. Das dritte Bild unten zeigt, wie die Transformation eben im Listeneditor ([STAT] `1:Edit`)durchgeführt wird.



Lösche alle Grafiken.

(Du kannst Die Grafiken auch nur deaktivieren. Hier wurde das zweite Bild ausgeschaltet.)



15. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 2$, das eine waagrechte Seite und eine Ecke im Koordinatenursprung hat.
    (Erinnere dich an die Formeln für das gleichseitige Dreieck: $h = a\sqrt{3}/2$)

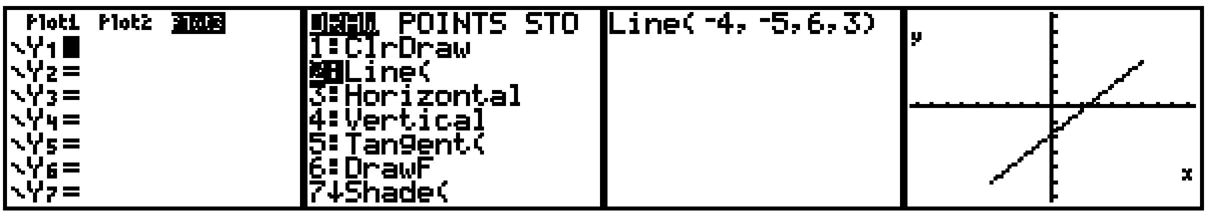
    Die Ecken sind: ....

16. Ergänze dieses Dreieck zu einem regelmäßigen Sechseck.

17. Zeichne eine Sternfigur nach eigenem Entwurf. (Dabei können maximal 3 Paare von Koordinatenlisten verwendet werden,)

18. Zeichne zumindest 8 Strecken, die gemeinsam mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 4 bilden.

Nun müssen wir uns anders behelfen, da jede Strecke einzeln gezeichnet werden soll und wir nur 3 Plots gleichzeitig ausführen können. Vom Rechenfenster kann der Befehl `Line(x1,y1,x2,y2)` aufgerufen werden, der die Verbindungsstrecke von P1(x_1,y_1) zu P2(x_2,y_2) zeichnen lässt.
Über [2nd] [PRGM] (= `[DRAW]`) `2:Line` wird der Befehl in das Rechenfenster geholt und die Koordinaten werden ergänzt.



Das erste Bild zeigt eine weitere Möglichkeit, Plots abzuschalten: Öffne mit [Y=] den Funktionseditor und bestätige mit [ENTER] die Plots, so dass sie nicht aktiviert sind. Hier wäre `Plot3` noch zu deaktivieren. Die Option `1:ClrDraw` löscht die gezeichneten Strecken.

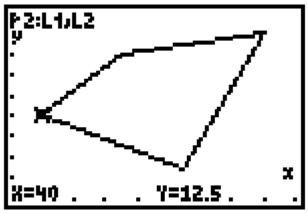
Zeichne nun die Strecken.

Öffne nochmals den Funktionseditor und gib für die Funktion `Y` den Ausdruck `2/X` ein.

Kommentiere das Ergebnis.

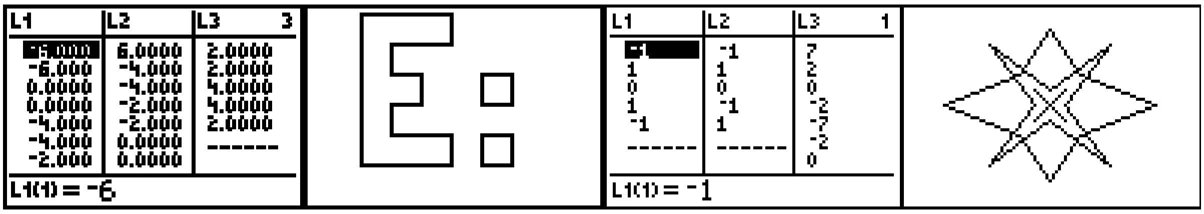
19. Die Standardeinstellung für die Achsen und deren Skalierung reicht oft nicht aus, eine Figur geeignet darzustellen. Mit [WINDOW] kann der Zeichenbereich angepasst werden.

Du sollst diese Möglichkeiten nutzen, um das Viereck ABCD [A(40;12,5), B(85; 12,25), C(110; 12,9), D(65; 12,8)] „schirmfüllend“ ins Grafikfenster zu zaubern:



20. Gegen Ende dieses Kapitels sollst Du Dir Dein eigenes LOGO - Initialen oder sonst etwas für Dich Charakteristisches- im Koordinatensystem schaffen. Wenn Du das Ergebnis dann auch noch „animieren“ willst, dann musst Du drei Paare von Listen verwenden..

Als Muster siehst Du hier ein „E :“ und einen „Stern“. Die Listen L1 und L2 beim Stern beschreiben das „×“ im Zentrum. Die Achsen, ihre Bezeichnung und der Raster werden am Ende ausgeblendet. Du kannst damit rechnen, den ganzen Schirm zur Verfügung zu haben.
$(-9{,}4 \le x \le 9{,}4;\ -6{,}2 \le y \le 6{,}2)$



Wenn dein LOGO fertig ist werden wir es mit Hilfe eines Programms animieren, d.h. einen kleinen Film draus machen.

Animation des Logos

Dazu brauchst Du das Programm `bilder` (siehe Anhang). Das Programm wird mit dem Übertragungskabel von einem Rechner auf den anderen übertragen. Das Programm erzeugt eine Sequenz von Bildern, die in rascher Folge auf dem Schirm des Rechners dargestellt werden. Über [PRGM], gefolgt von [ENTER], [ENTER] gelangt man zur Ausführung des Programms.

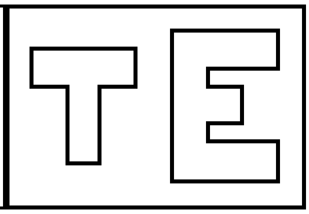
Die [ON]-Taste bricht den „Film“ ab.

21. Als „krönenden“ Abschluss werden wir ganz nach der Überschrift noch die Verwandlung eines Objekts in ein anderes vornehmen.

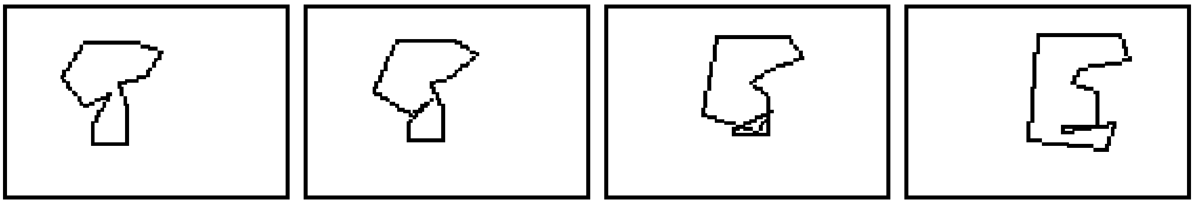
Dazu müssen Objekt 1 und Objekt 2 in den Listenpaaren L , L, und Lƒ, L„definiert werden. Beide Objekte müssen aus der gleichen Anzahl von Punkten bestehen.

L1	L2	L3 1
-3.000	-3.000	5.0000
-3.000	-1.000	5.0000
-3.000	1.0000	3.0000
-1.000	1.0000	3.0000
-1.000	3.0000	7.0000
-3.000	3.0000	7.0000
-5.000	3.0000	1.0000

L1(1) = -3



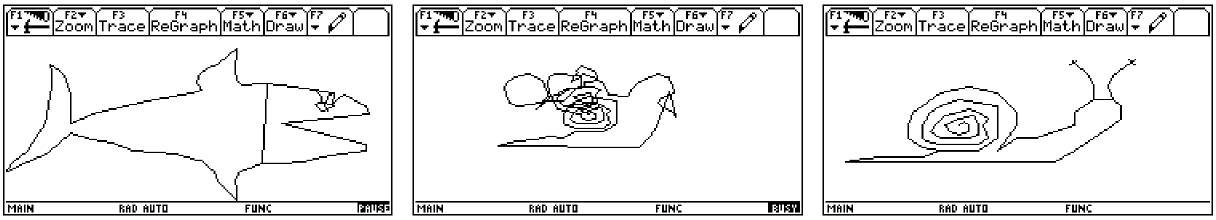
Dann wird nur noch das „Verwandlungsprogramm" `metamo` (siehe Anhang) aufgerufen – und schon verwandelt sich das kleine T in ein großes E..



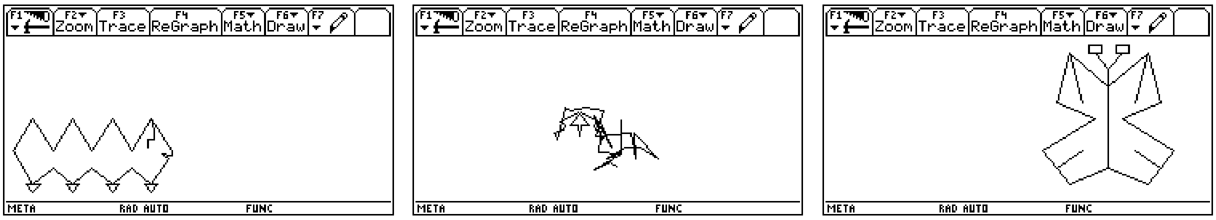
Tipp: Man kann dieses Programm zum Anlass nehmen, die Parameterdarstellung einer Geraden zu besprechen.

Es folgen zwei Schülerarbeiten (durchgeführt auf einem TI-92):

Magdalena Barthofer aus Waidhofen/Ybbs verwandelt einen Fisch in eine Schnecke:



Kathrin Leitner von der Handelsakademie St.Pölten nahm das Programm wörtlich – die Metamorphose in der Biologie beschreibt die Entwicklung des Schmetterlings – und zeigt, wie sich eine Raupe zum strahlenden Schmetterling „entpuppt".



Josef Böhm

nojo.boehm@pgv.at

Die Programme können im Programmeditor eingetippt werden. Sie sind im Anhang zu finden. Der Autor schickt die Programme gerne per email zu. Für das Überspielen vom PC auf einen Rechner muss entweder *GraphLink* oder *TI-Connect* am PC installiert sein.

Es folgen die Programme.

Programm BILDER

```
ClrDraw
AxesOff:GridOff
FnOff :Radian
ú9.4üXmin:9.4üXmax
ú6.2üYmin:6.2üYmax
Menu("AUSWAHL","ROTATE",L1,"FLASH",L2)
Lbl L1
While getKey=0
For(K,0,39Ä/20,Ä/20)
cos(K)*L üH
cos(K)*LƒüI
cos(K)*L…üJ
Plot1(xyLine,H,L‚,Ò)
Plot2(xyLine,I,L„,Ò)
Plot3(xyLine,J,L†,Ò)
DispGraph
End
End
Lbl L2
While getKey=0
For(K,0,1,.1)
K*L üH:K*L‚üI
K*LƒüJ:K*L„üL
K*L…üM:K*L†üN
Plot1(xyLine,H,I,Ò)
Plot2(xyLine,J,L,Ò)
Plot3(xyLine,M,N,Ò)
DispGraph
End
For(K,.9,.1,ú.1)
K*L üH:K*L‚üI
K*LƒüJ:K*L„üL
K*L…üM:K*L†üN
Plot1(xyLine,H,I,Ò)
Plot2(xyLine,J,L,Ò)
Plot3(xyLine,M,N,Ò)
DispGraph
End
End
```

Programm METAMO

```
PlotsOff
FnOff
For(T,0,1,.05)
L +T*(Lƒ-L )üL…
L‚+T*(L„-L‚)üL†
Plot3(xyLine,L…,L†,Ò)
DispGraph
End
Pause
ClrList L…,L†
PlotsOff
```

Wir gehen davon aus, dass der Begriff „Winkelfunktionen“ bereits bekannt ist. Es ist von Vorteil, wenn die Erweiterung über π/2 hinaus schon erfolgt ist. Diese Einheit ließe sich auch dazu verwenden von der *Blackbox* „Arbeiten mit Winkelfunktionen“ zur *Whitebox* „Winkelfunktionen allgemein“ zu gelangen In dieser Unterrichtseinheit soll vor allem auf die allgemeine Form der Winkelfunktionen hingearbeitet werden.

Die trigonometrischen Funktionen erforschen mit dem `TI-83+`

Da es in der Mathematik üblich ist, mit dem Bogenmaß zu arbeiten, werden wir grundsätzlich dieses Winkelmaß verwenden. Dabei soll aber nie der Zusammenhang zwischen Bogen- und Gradmaß vergessen werden. Wir wiederholen diesen Zusammenhang.

1. Wie lauten die Umrechnungsformeln zwischen den Modi?

   x rad = ...°

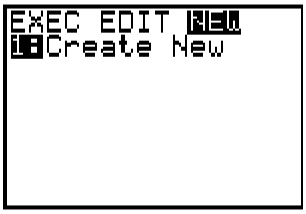
   α ° = ... rad

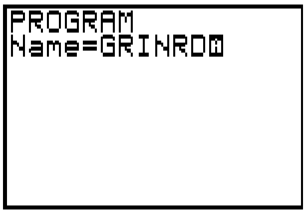
2. Ergänze die nebenstehende Tabelle:

Bogenmaß	**Gradmaß**
(in rad)	(in °)
π	
2π	
π/4	
	60°
	90°
	120°
3π/2	
	540°
	0°
π/6	

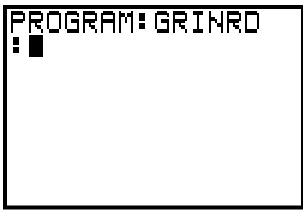
3. Wir erzeugen „Umrechungsprogramme“, und zwar `GRINRD` und `RDINGR`.

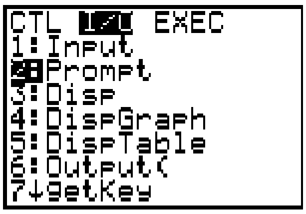
   Mit [PRGM] deklarieren wir den Wunsch nach einem neuen Programm, das `GRINRD` heißen soll. (Der Name ist über die alphabetische Tastatur einzugeben.)



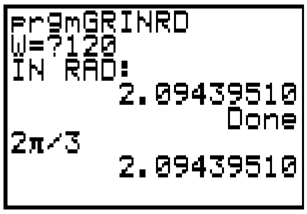


Dann findet man sich im Programmeditor. Die benötigten Programmierbefehle werden nach nochmaligem [PRGM] in den Menüs `CTL` bzw. `I/O` angeboten und nach Auswahl mit [ENTER] übernommen. `Prompt` und `Disp` sind im `I/O`-Menü zu finden.





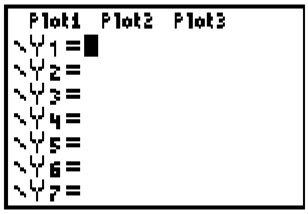
Über [PRGM] lässt sich das Programm sofort ausführen (exekutieren):



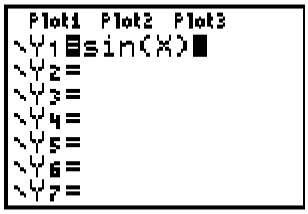
Wir testen zuerst die Umrechnung von 45º und dann von 120º.

4. Erzeuge das Programm `RDINGR` auf die gleiche Weise und überprüfe mit den beiden Programmen die Werte in der ausgefüllten Tabelle.

5. Erzeuge eine Tabelle für die Funktion $y = \sin(x)$ für $-2\pi \le x \le 4\pi$ und verwende diese Tabelle zur Herstellung des Graphen in einem geeigneten Maßstab.

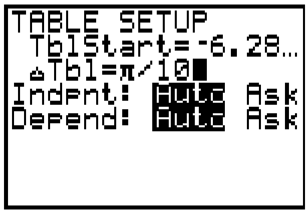


Sowohl für die Wertetabelle, als auch später für die Darstellung des Graphen am TI-83+ muss die Funktion zuerst über den Funktionseditor definiert werden.
Über Y= gelangt man in den Funktionseditor.
Die Eingabetaste ermöglicht die Eingabe des Funktionsterms in der Eingabezeile. Mit ENTER wird die Funktion dann endgültig in die Funktionenliste geschrieben. Das schwarz unterlegte Gleichheitszeichen zeigt an, dass diese Funktion nun aktiv ist.
(ENTER auf dem Gleichheitszeichen deaktiviert sie wieder.)



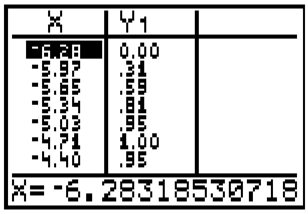
Um die Wertetabelle zu erhalten, müssen noch die Tabellenparameter gesetzt werden:

2nd WINDOW (= `TBLSET`) öffnet eine Dialogbox, in die wir die entsprechenden Werte einsetzen.



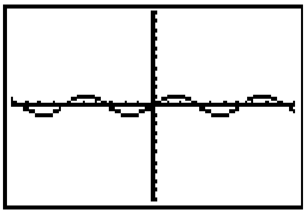
Die Tabelle soll bei -2π beginnen und z.B. eine Schrittweite von $\pi/10$ aufweisen. (Auch für `TblStart` kann -2π eingegeben werden).

Mit 2nd GRAPH (= `TABLE`) wechselt man nun sofort zur Tabelle.
Für die Erstellung einer Grafik reicht die Genauigkeit auf 2 Dezimalstellen völlig aus.

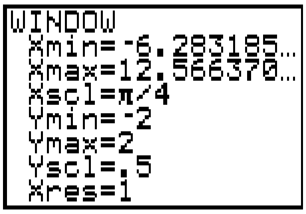


Skizziere den Funktionsgraphen von $y = \sin(x)$ für $-2\pi \le x \le 4\pi$ in den Kasten.

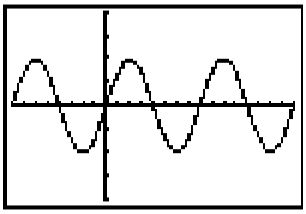
6. Stelle den Funktionsgraphen auf dem TI-83+ dar.



Man kann nun sofort über [GRAPH] ins Grafikfenster wechseln und erhält ein (erstes) Bild. Meistens ist man damit nicht zufrieden, da der dargestellte Bereich und die damit verbundene Skalierung nicht den Vorstellungen entspricht.



Mit [WINDOW] öffnet sich eine Eingabemaske, in der geeignete Parameter gesetzt werden können.
Man will z.B. den Ausschnitt $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ und $-2 \leq y \leq 2$, mit einer Skalierung von $\pi/4$, bzw. 0,5 auf den Achsen erreichen.



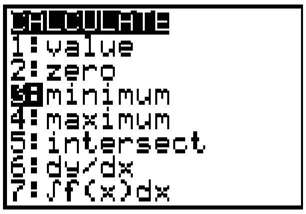
Wiederum mit [GRAPH] gelangt man zu einer ansprechenden graphischen Darstellung.

Vergleiche diese Grafik mit der vorhin händisch erstellten Skizze.

7. Welche Eigenschaften der Funktion kann man erkennen?

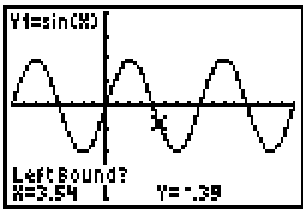
Insbesondere: Wo liegen die Nullstellen?

Wo liegen die Hoch- und Tiefpunkte?



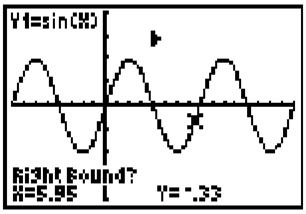
Der Umgang mit dem wichtigen und nützlichen [2nd] [TRACE] (= [CALC])-Menü soll an einem Beispiel gezeigt werden:

Wo liegt das erste Minimum mit $x > 0$?

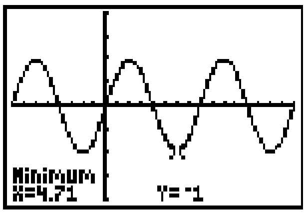


Unter CALC kann man die Funktionswerte (value), Nullstellen (zero), Maxima und Minima, Schnittpunkte mit anderen Graphen (intersect), den Anstieg (dy/dx) und das bestimmte Integral von dargestellten Graphen ermitteln.

Zurück zum gesuchten Tiefpunkt: die gewünschte Option ist anzuwählen(mit ▼ oder [3]), dann wird man um die Eingabe einer unteren (Left Bound) und einer oberen und einer oberen Begrenzung (Right Bound) des Suchbereichs gefragt.
Diese Grenzen lassen sich eintippen oder mit den Pfeiltasten (◀, ▶) ansteuern.



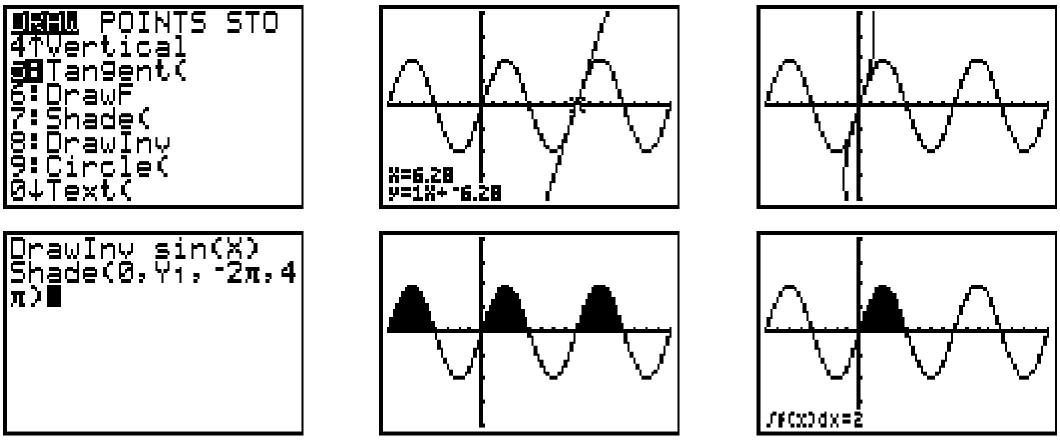
Das gesuchte Minimum liegt bei $x \approx 4{,}71$.
(Was ist der exakte Wert?)



Stelle hier in einer Liste die Nullstellen und Hoch-, bzw. Tiefpunkte zusammen.

8. Verwende geeignete Optionen des `CALC` bzw. `DRAW` -Menüs,
   a) um die Tangente in einer beliebigen Nullstelle zeichnen zu lassen,
   b) um die Umkehrfunktion zu zeichnen
   c) um das untenstehende Bild zu erzeugen,
   d) um die schraffierte Fläche zu berechnen (über `CALC 7:` – jetzt ohne nähere Erklärung)

(Mit `DRAW 1:ClrDraw` können alle nachträglich eingezeichneten Objekte wieder gelöscht werden).



Die gesuchte Fläche hat den Wert 6.

8. Sinuskurven (u.a.) nennt man nicht zu Unrecht *Schwingungen*. Bei einer Schwingung spricht man von der *Amplitude* (größte Abweichung von der Mittellage – Pendel!!) und von der *Periode* (= Intervall, innerhalb dessen sich die Funktion wiederholt, *Periodenlänge*, *Wellenlänge*). Die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit ist ihre *Frequenz*.

   Bei der Sinusschwingung $y = \sin(x)$ betragen diese Werte:

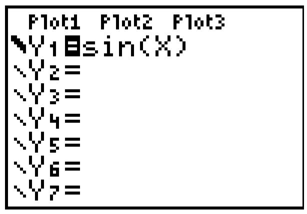
   Amplitude a = ... Periodenlänge l = ...

9. Eine etwas allgemeinere Form der Sinusschwingung lautet:

   $y = \sin(\omega x)$.

   Dabei nennt man ω (Omega) die *Kreisfrequenz.*

   Für die nächste Untersuchung wird der Graph von `Y1` stark ausgezeichnet. Dazu bewegt man den Cursor im [Y=]-Editor ganz nach links und drückt solange die [ENTER]-Taste bis das Symbol für die dicke Auszeichnung erscheint.



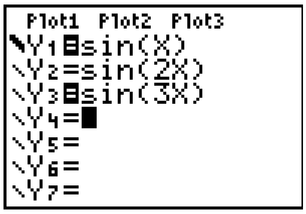
Zeichne nun der Reihe nach die angegebenen Sinusschwingungen zu sin(x), notiere für jede Schwingung die Kreisfrequenz und lies aus der Grafik die zugehörigen Periodenlängen ab.

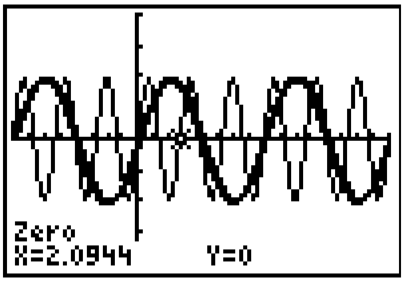
Die Funktionen, deren Graphen man nicht sehen will werden deaktiviert, indem man den Cursor auf das =-Zeichen stellt und mit [ENTER] die Markierung aufhebt.

Mit dem Cursor wird die interessierende Nullstelle angesteuert und die x-Koordinate abgelesen, oder man bestimmt sie über [2nd] [TRACE] (= `[CALC] 2:zero`).

(Tipp: mit den ⌃ ⌄-Tasten wechselt man zwischen den Graphen.)

Für das rechte Bild wurde auch die Ausgabegenauigkeit auf 4 Fixkommastellen verändert (über [MODE]).





Dabei sind fallweise auch die [WINDOW]-Einstellungen geeignet anzupassen.

$y = \sin(2x)$ ω = ... ; l = ... $y = \sin(3x)$ ω = ... ; l = ...

$y = \sin(4x)$ ω = ... ; l = ... $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ ω = ... ; l = ...

$y = \sin(0{,}1x)$ ω = ... ; l = ... $y = \sin(\pi x)$ ω = ... ; l = ...

Was bewirkt die jeweils veränderte Kreisfrequenz?

10. Suche einen Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Periodenlänge!
(Tipp: die Dezimalzahlen haben sicher etwas mit der Zahl π zu tun!)
Welche Gleichung beschreibt diesen Zusammenhang?

....

11. Skizziere hier ohne Unterstützung des Rechners die Graphen von $y = \sin\frac{3x}{2}$ und $y = \sin\frac{x}{3}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Gib für beide Funktionen zumindest zwei Nullstellen und die Amplitude an. Vergleiche dann die Graphen mit den Ergebnissen im GRAPH-Fenster.

12. Wie muss der Funktionsterm für eine Sinusschwingung (mit Amplitude = 1) mit den folgenden Periodenlängen lauten:

$l = \pi/3$: $y =$ .... $l = 2{,}5\pi$: $y =$ ....

$l = 100°$: $y =$ .... $l = 2$: $y =$ ....

Überprüfe die Ergebnisse mit dem TI-83+ !

13. Gelten diese Eigenschaften (Amplitude, Periodenlänge, Kreisfrequenz) auch für die Winkelfunktionen Kosinus und Tangens?

Funktion	**Amplitude**	**Periodenlänge / Kreisfrequenz**
$y = \cos x$		
$y = 0.5\cos(2x)$		
$y = 2\cos(0{,}25x)$		
$y = \tan x$		
$y = 3\tan(4x)$		
$y = \tan\dfrac{x}{5}$		

14. Skizziere die Tangensfunktion $y = \tan x$ für $-3\pi \le x \le 3\pi$.

Was passiert an den Stellen $x = \dfrac{k\pi}{2}$ für $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Diese Untersuchung wird nun konsequent weitergeführt, bis die Bedeutung aller Parameter in der allgemeinsten Form deutlich gemacht wird.

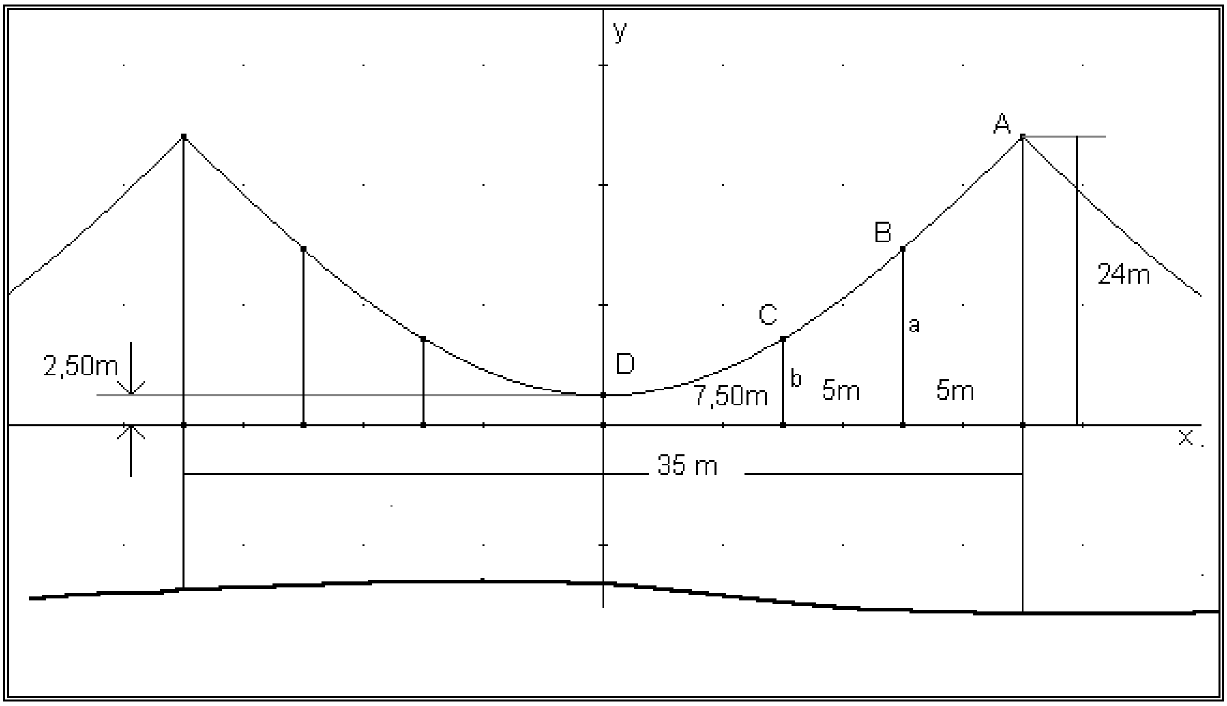
zB.: $y = a \sin(b\,x + c) + d$

(Wird hier nicht näher ausgeführt.)

Eine Anwendungsaufgabe könnte dann so lauten :

Bei einer Hängebrücke werden die Stahltrossen durch die Unterstützungen *a* und *b* in die Form einer Winkelfunktion gebracht. Welche Länge müssen die unterstützenden Stäbe *a* und *b* haben?

(Wähle zuerst ein geeignetes Koordinatensystem!)
Wie lange sind die Verbindungen x = AB, y = BC und z = CD?
Runde alle Ergebnisse auf 0,1m.



Die komplette Unterrichtseinheit wurde mehrmals erfolgreich im Unterricht eingesetzt. Rückfragen, bzw. Anregungen und Erfahrungen werden vom Autor gerne beantwortet bzw. entgegengenommen.

Josef Böhm
T³ Österreich
nojo.boehm@pgv.at

Weitere Anwendungen der Winkelfunktionen können von der Homepage der ACDCA unter den T³-Materialien heruntergeladen werden, `www.acdca.ac.at`.

Logistisches Wachstum – diskret, kontinuierlich und chaotisch

Es ist leicht einzusehen, dass das *exponentielle Wachstum* kein optimales Modell für realistische Wachstumsprozesse darstellt, da wohl kein Wachstum für lange Zeit unbegrenzt und unbeschränkt anhalten kann. Das **logistische Modell** verknüpft das exponentielle Wachstum mit dem gebremsten, indem es in geschickter Art und Weise zu Beginn eher dem exponentiellen Einfluss folgt, auf längere Sicht aber einer - faktisch immer vorhandenen - Kapazitätsgrenze immer mehr Gewicht verleiht sich und damit ähnlich dem beschränkten Wachstum entwickelt

Wir folgen einem Beispiel von Bert K. Waits:

Die Bären sind los!
1995 gab es im Jellystone Nationalpark - ein "geschlossenes" Ökosystem - 10 Grizzlybären.
Man weiß, dass der Park Raum für ca. 100 Bären bietet. Der jährliche Zuwachs ist etwa proportional zur jeweiligen Bärenpopulation, aber auch zur jeweils freibleibenden Restkapazität.
Biologen nennen uns einen Proportionalitätsfaktor von ≈ 0,001.

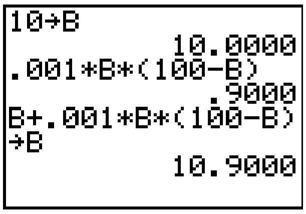
Zuerst wird ein diskretes Modell mit Hilfe einer rekursiven Darstellung entwickelt und studiert. Dazu bezeichnen wir den Anfangsbestand im Jahre 1995 als B_0, und dann allgemein mit B_n den Bestand für das Jahr 1995+n.

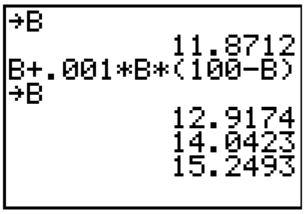
Bei den vorliegenden Daten ergibt sich der Bestand für die Jahre 1996 und 1997 wie folgt:

Für 1996 (n = 1) beträgt der Zuwachs $Z_1 = 0{,}001 \times 10 \times (100 - 10) = 0{,}9$ und daher ist der Bestand $B_1 = 10{,}9$.

Für 1997 (n = 2) ergibt sich der Bestand $B_2 = B_1 + 0{,}001 \times B_1 \times (100 - B_1) = 11{,}87$.

Diese Vorgangsweise können wir sehr leicht am TI-83+ beliebig lange - und sehr bequem - nachvollziehen.





Wir speichern den Anfangsbestand als B und rechnen den ersten Zuwachs aus (0,90).

Besser ist es, gleich den neuen Bestand zu berechnen und diesen sofort wieder als alten Bestand B zu speichern.

Man kann entweder erst mit [2nd] [ENTER] (= [ENTRY]) die ganze vorige Eingabe kopieren und mit [ENTER] das Ergebnis berechnen oder man drückt nur [ENTER] und erhält die Werte für die folgenden Jahre.

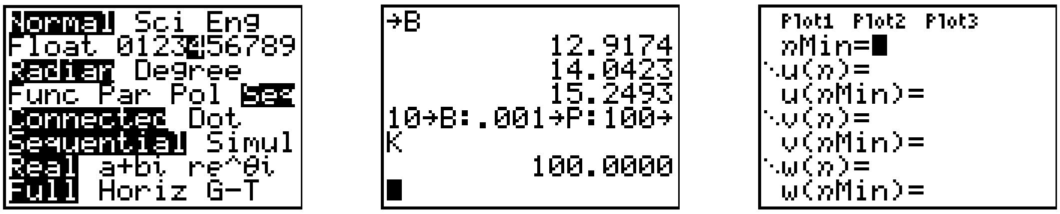
Leider wird das bald unübersichtlich, da man - ohne mitzuschreiben - bald nicht mehr weiß, wie viele Jahre verstrichen sind. Außerdem wird eine grafische Darstellung auch sehr umständlich. Das wird sich gleich ändern.

Zuerst formulieren wir den Sachverhalt möglichst allgemein:

$$\text{Zuwachs}(n) = p * B(n-1) * (K - B(n-1)), \text{ daher gilt weiter}$$
$$B(n) = B(n-1) + \text{Zuwachs}(n) = B(n-1) + p * B(n-1) * (K - B(n-1))$$

Diese *rekursive* Folge übertragen wir nun in den [Y=]-Editor, nachdem wir den Rechner in den dafür geeigneten Grafikmodus umgestellt haben. Dieser Modus heißt Seq (= Sequence = Folge)-Modus.

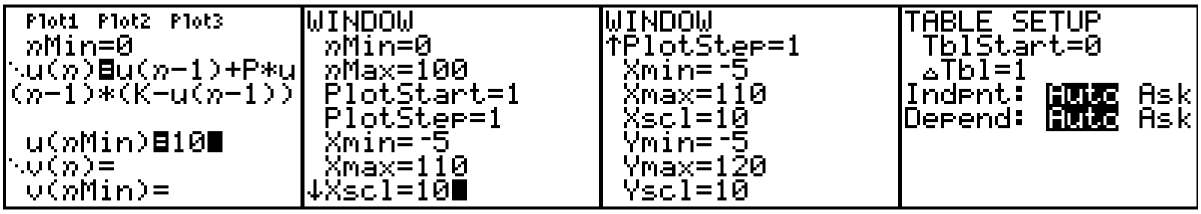
Über [MODE] stelle in der vierten Zeile die Option Seq ein. (Vergiss nicht, mit [ENTER] zu speichern.)



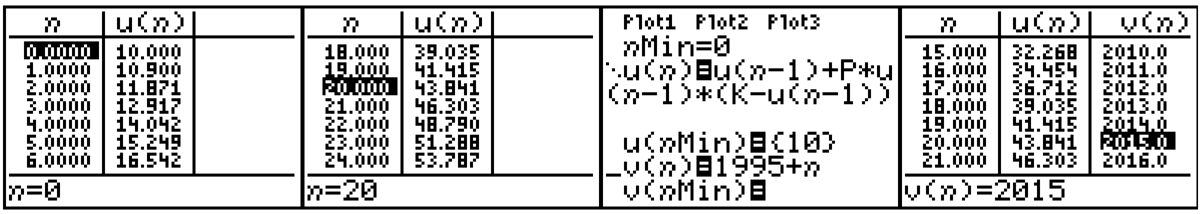
Um in weiterer Folge möglichst flexibel zu sein, speichern wir die Parameter Anfangsbestand, Proportionalitätsfaktor und Kapazität unter den Variablenbezeichnungen B, P und K. Dann wird der Funktionseditor [Y=] geöffnet, der sich ganz ungewohnt präsentiert.

Anstelle von Funktionen `y1(x)`, `y2(x)`, ... werden nun Folgen `u(n)`, `v(n)`, `w(n)` erwartet. Der Startwert für *n* wird über `nMin` für alle Folgen definiert. Für den Fall, dass rekursive Folgen vorliegen, müssen auch noch allfällige Startelemente `u(nMin)`, `v(nMin)`, `w(nMin)` festgelegt werden. Das *n* wird über die Taste [X,T,Θ,n] erreicht.

Somit schreiben wir die Folge in den Editor (anstelle von *B* heißt es hier eben `u`!)

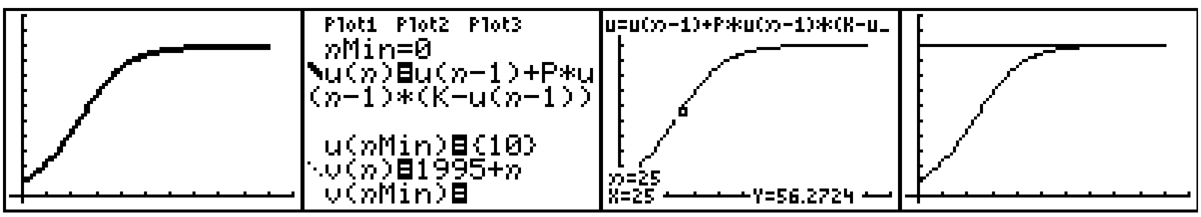


Nun sind einige wichtige Dinge zu beachten, sonst kommt es leicht zu lästigen Fehlermeldungen. Da unsere Folge mit dem „nullten“ Element beginnt, muss das in den [WINDOW]-Einstellungen fixiert werden. Bei dieser Gelegenheit richten wir auch die anderen Parameter ein (vorerst für die ersten 100 Jahre, der Zeichenbereich für *x* wird etwas größer gewählt und der *y*-Bereich ergibt sich aus der Angabe. Über [2nd] [WINDOW] (= `[TBLSET]`) legen wir den Start für die Wertetabelle fest und dann sehen wir uns mit [2nd] [GRAPH] (= `[TABLE]`) die Tabelle an.



Mit ⌄ kann man weiter in die Zukunft schauen und findet z.B., dass nach dem Modell im Jahr 1995+20 = 2015 ca. 44 Bären im Park sein sollten. Vielleicht möchtest Du aber bequemerweise auch die Jahreszahlen in die Tabelle aufnehmen? Das kann wieder rekursiv geschehen, geht aber einfacher direkt: `v(n)=1995+n`. (Rekursiv müsste es heißen: `v(n)=v(n-1)+1` und `v(nMin)=1995`).

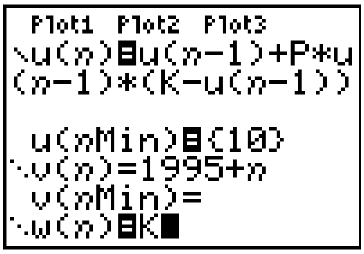
Da die Grafikeinstellungen bereits vorgenommen worden sind können wir mit [GRAPH] sofort ins Grafikfenster wechseln. (Beachte, dass in `[FORMAT]` die Darstellung `Time` eingestellt ist.)



Über [TRACE] gelangt man in den `Trace` (= Spur)-Modus und beantwortet z.B. graphisch die Frage, wie hoch der ca. Bestand im Jahr 2020 sein könnte.

Die Kapazitätsgrenze wird noch hinzugefügt, indem man im Funktionseditor die konstante Folge `w(n)=K` erzeugt. Über ⋱ lässt sich die entstehende horizontale Gerade punktiert darstellen.

Die Darstellung des Graphen (normal, fett, punktiert) wird im Funktionseditor ganz links festgelegt. Der Cursor wird auf das Symbol links von `u`, `v` oder `w` gesetzt und mit [ENTER] wechselt man zwischen den Darstellungsformen ⋱, ◥, ⋱ usw.



Beantworte die folgenden Fragen:

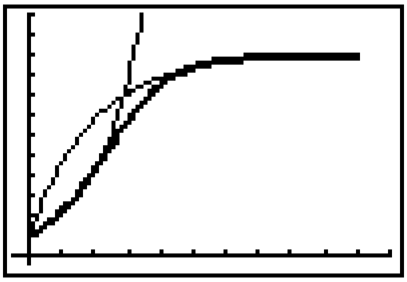
Wie viele Bären sind etwa 2040 zu erwarten?

Wann wird ca. die Kapazitätsgrenze erreicht sein?

Wann geht es den Bären am besten? Wann vermehren sie sich am raschesten?

Kannst Du den Wachstumsverlauf erklären?

Wie wirken sich Änderungen der Parameter Anfangsbestand, Kapazität und Proportionalitätsfaktor auf die Gestalt der Kurve aus? (`B` muss im Funktionseditor als `u(nMin)` verändert werden, `P` und `K` werden im Homescreen neu festgelegt.)

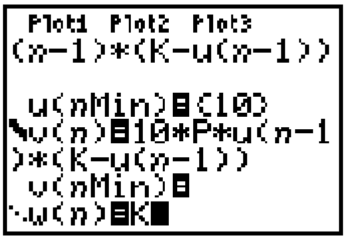


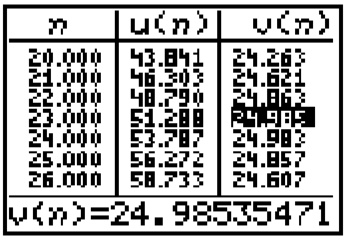
In diesem Bild (basierend auf den Ausgangsparametern) werden die „ersten paar“ Jahre durch ein exponentielles Wachstum und der spätere Verlauf durch beschränktes Wachstum modelliert.
Suche geeignete Werte für die beiden Folgen (Funktionen), die das logistische Wachstum annähernd stückweise beschreiben könnten.
Geeignete Abschnitte könnten durch eine lineare Funktion verbunden werden – *abschnitssweise definierte Funktion*.

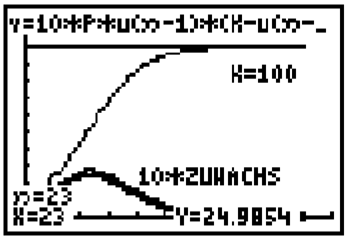
Hinweis: Diese beiden Kurven können im Funktionseditor als rekursive Folgen definiert werden.
Exponentielles Wachstum : der jährliche Zuwachs ist proportional zum jeweiligen Bestand,
Beschränktes oder gebremstes Wachstum: der jährliche Zuwachs ist proportional zur jeweiligen Restkapazität (= Kapazität – Bestand).

Wenn die Funktionsdarstellung dieser beiden Wachstumsmodelle bereits bekannt ist, können die Graphen der Funktionen wegen des eingestellten `Seq`-Mode nicht über den [Y=] - Editor definiert werden, sondern man ruft über [2nd] [PRGM] `(=DRAW) 6:DrawF` auf und schreibt den Funktionsterm in Abhängigkeit von `X`. Mit `1:ClrDraw` werden allfällig FRÜHER gezeichnete Graphen wieder gelöscht.

Die oben aufgestellte Frage, wann sich die Population am raschesten vermehrt lässt sich sehr schön graphisch (und tabellarisch) beantworten, indem man die „Zuwachsfolge“ deutlich macht. Die Zuwachsfolge wird als `v(n)` im Funktionseditor definiert. Dabei „überhöhe“ ich den Graphen mit dem Faktor 10, weil man sonst seine charakteristische Form nicht gut erkennen könnte.







Wo hat die Zuwachsfolge ihren größten Wert? Wie sieht dort der Graph der Bestandsmenge aus?

Der Text wird über [2nd] [PRGM] (= `[DRAW]`) `0:Text` an der gewünschten Stelle eingefügt.

Für das kontinuierliche Modell gibt es eine explizite Funktionsvorschrift, die sich aus der Analysis begründet. (Aus der Differenzengleichung, die das diskrete Modell beschreibt wird eine Differentialgleichung.)

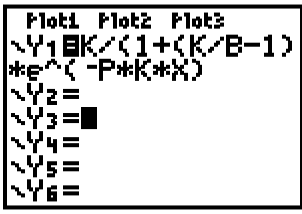
Die Funktionsvorschrift lautet: $B(x=t)=\dfrac{K}{1+\left(\dfrac{K}{B_0}-1\right)e^{-cKt}}$.

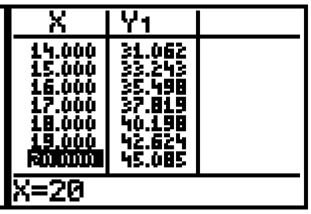
Dabei kann die Proportionalitätskonstante p von vorhin als Näherungswert für die Konstante c verwendet werden.

Für $K = 100$, $B_0 = 10$ und $c = 0{,}001$ erhalten wir die „Bärenformel“: $B(t)=\dfrac{100}{1+9e^{-0{,}1t}}$.

Zeichne die Funktion mit Hilfe von `[DRAW] 6:DrawF` (als Funktion von x) zum Bild des diskreten Modells. Beurteile die Anpassung. Um die numerischen Werte vergleichen zu können, muss im [MODE] der Grafikmodus auf `Func` umgestellt, und die Funktion im [Y=]-Editor definiert werden. Dann lassen sich im der Tabelle `[TABLE]` die Funktionswerte für das kontinuierliche Modell herauslesen und mit den alten Werten vergleichen (beachte auch `[TBLSET]`).

n/t	diskret	kontinuierlich
0	10	
1	10.90	
2	11.87	11.95
5		
10		
20		45.09
100		





Nimm den Bestand des 20. Jahres aus dem diskreten Modell und suche einen geeigneten Wert für c im kontinuierlichen, so dass die Bestände für dieses spezielle Jahr in beiden Modellen übereinstimmen.

($c \approx 0{,}000975$).

Herleitung der „Bärenformel“ aus der Differentialgleichung, die aus einer Differenzengleichung abgeleitet wird.

Aus $\quad B(n) = B(n-1) + p * B(n-1) * (K - B(n-1))$

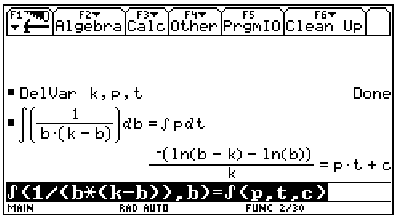
folgt $\quad B_t - B_{t-1} = \Delta B = \Delta t * p * B_{t-1} * (K - B_{t-1})$

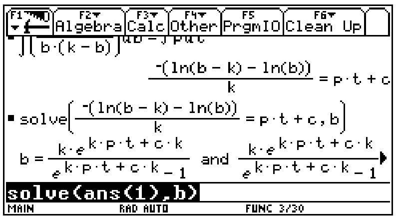
der Zuwachs (die Differenz) ist auch proportional zum (kleinen) Zeitzuwachs Δt.

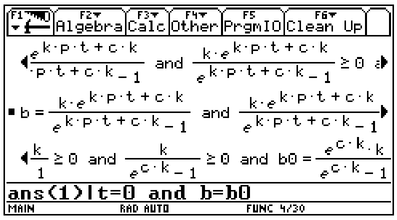
$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = p \cdot B \cdot (K - B) \rightarrow \frac{dB}{dt} = p \cdot B \cdot (K - B)$$

$$\frac{dB}{B \cdot (K - B)} = p \cdot dt; \qquad B(t = 0) = B_0$$

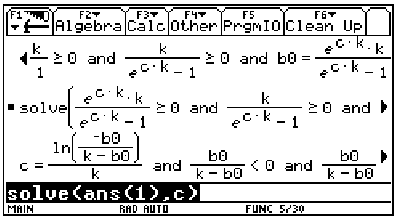
Die Differentialgleichung wird mittels Variablentrennung gelöst. Mit dem TI-83+ muss man auf die symbolische Behandlung dieser DGL verzichten. CAS-Werkzeuge wie der TI-89 oder der Voyage 200 machen dies auch möglich. Da es auch für den TI-83+ - Anwender interessant sein könnte, wie man mit einem CAS an eine derartige Aufgabe herangeht, wird das kurz demonstriert.

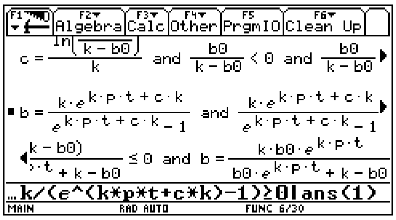


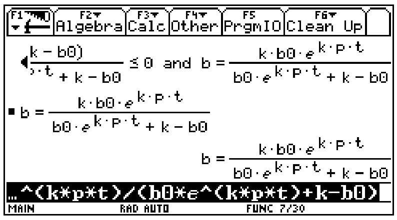




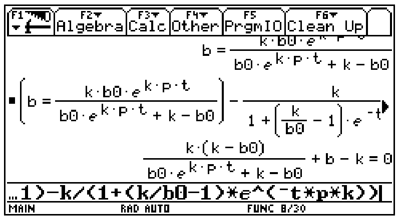
Das c als drittes Argument im rechten Integral erzeugt das unbestimmte Integral mit der Integrationskonstanten, führt daher zur allgemeinen Lösung der Differentialgleichung. Wir lösen nach *b* auf,



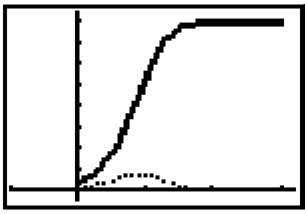




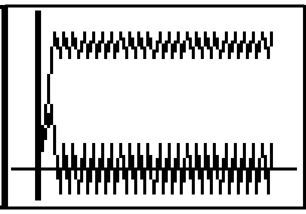
.... bestimmen die Integrationskonstante *c* aus der Bedingung $B(t = 0) = 10$ und setzen in den Ausdruck für *b* ein. Die Identität der Terme kann man durch manuelles Umformen zeigen, oder man benützt auch dazu das CAS.



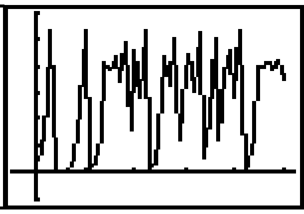
Für den letzten Teil unserer Untersuchung ändern wir die Angaben auf $K = 400$ und $B_0 = 20$. Außerdem interessieren nur die ersten 50 Zeitperioden. Für $p = 0{,}001$ und eine nicht überhöhte Wachstumsfolge ergibt sich das vertraute Bild.



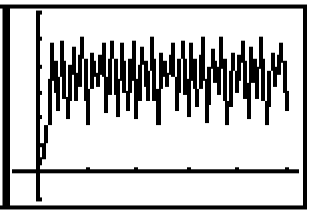
$p = 0{,}001$



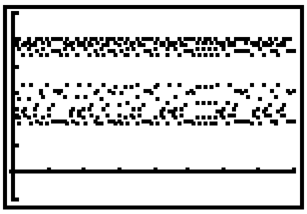
$p = 0{,}0051$



$p = 0{,}0075$, *n* Max= 50
nur die Bestandsfolge



$p = 0{,}065$, *nMax* = 100



$p = 0{,}0065$, *nMax* = 400, punktiert dargestellt

Aber wenn man den Faktor *p* vergrößert, wird die Entwicklung sehr sonderbar und entwickelt sich immer „chaotischer“. Da dieses *Chaos* aber strengen Rechenvorschriften entspringt, wird es ein *deterministisches Chaos* genannt.

Bei $p = 0{,}0051$ und $p = 0{,}0065$ lassen sich auch im Chaos gewisse Muster erkennen Der Prozess ist sehr sensibel. Versuche etwa $p = 0{,}0048$.

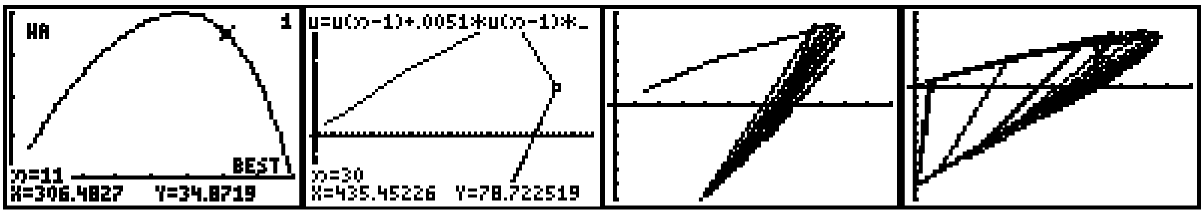
In weiterer Folge wollen wir auch das Bestand-Wachstums-*Phasendiagramm* und das *Cobweb*-Diagramm zeichnen lassen.

Wenn man die Wachstumsgeschwindigkeit des Bestands in Abhängigkeit vom jeweiligen Bestand graphisch darstellt, erhält man ein sogenannntes *Phasendiagramm*. Hier gilt

$B' = p\,B\,(K - B)$.

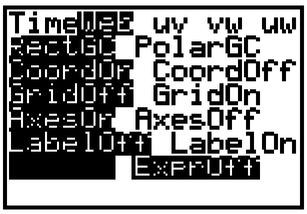
Welche Form hat das Phasendiagramm beim logistischen Wachstum? Was lässt sich aus dem Phasendiagramm rauslesen und was nicht?

Im Bestands-Wachstums-Phasendiagramm wird auf der x-Achse der jeweilige Bestand und auf der y-Achse der zugehörige Zuwachs aufgetragen. Die Werte entnehmen wir den Folgen `u(n)`, bzw. `v(n)` und stellen die grafische Darstellungsweise im [Y=]-Editor über [ALPHA] [ZOOM] (= `F3`) auf `uv` um.

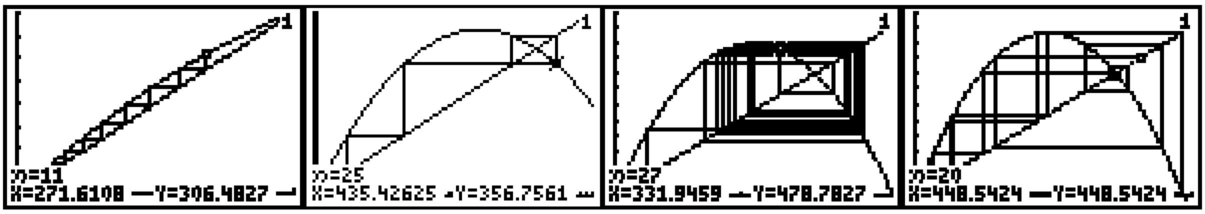


Dies sind die Phasendiagramme für p = 0,001, p = 0,0051, p = 0,0065 und p = 0,0075. Beim zweiten Bild sieht man deutlich, dass schließlich zwischen zwei Zuständen hin- und hergesprungen wird.

Natürlich sind die [WINDOW]-Werte anzupassen (Da auf der x-Achse nun die Bestände aufgetragen werden, ist `xmax` dementsprechend zu vergrößern, und auch die y-Werte unterliegen größeren Schwankungen.)



Über `[F3]` stellt man die Darstellung um auf `Web` und aktiviert nur `u(n)`. Dann lässt man das Cobweb-Diagramm zeichnen.



Für die oben angegebenen p-Werte ergeben sich charakteristische Bilder von der Konvergenz über zwei „*Attraktoren*“ bis hin zu chaotischen Prozessen. In jedem einführenden Buch über *Fraktale* kann man über diese Phänomene nachlesen.

Auf der nächsten Seite folgen Vorschläge für Übungs-, bzw. Vertiefungsaufgaben.

Übungsaufgabe 1: Verbreitung eines Produkts
(nach G.Ossimitz, Materialien zur Systemdynamik)

Wir nehmen an, dass sich ein Produkt auf einem Markt mit einer begrenzten Marktkapaziät ausbreitet wie eine ansteckende Krankheit. Jeder potentielle Käufer erwirbt das Produkt nur einmal.
Als Kapazität werden 1500 Einheiten angenommen und man startet mit einer Verteilung von 20 Werbeexemplaren. Als Wachstumsrate/Monat (= p) schätzt man den Wert 0,0005. Das Wachstum der Verbreitung entspricht dem monatlichen Absatz.

a) Erstelle das diskrete Modell für die Verbreitung des Produkts mit den zugehörigen Absatzmengen.
b) Stelle die Verbreitung und die Absatzmengen in einer geeigneten Form graphisch dar.
c) Wann wird die halbe Marktkapazität erreicht?
d) Wann wird das Absatzmaximum erreicht?
e) Wann wird die 1000 Einheitengrenze übersprungen?
f) Ändern sich die Ergebnisse c) bis e) wesentlich, wenn man mit 50 Werbeexemplaren beginnen würde?
g) Wie lautet die entsprechende logistische Wachstumsfunktion?

Übungsaufgabe 2: Steueraufkommen

Die Steuereinnahmen S (in Mill. EURO) eines Wirtschaftszweiges wachsen nach der Formel:

$$S(t) = \frac{6}{1 + 4e^{-ct}}$$

Nach $t = 3$ Jahren betragen die Einnahmen bereits 2,7 Millionen €.

a) Berechne die Wachstumskonstante c (auf drei Dezimalstellen genau).
b) Mit welchen Einnahmen wurde überhaupt begonnen?
c) Erzeuge den Funktionsgraphen in einem geeigneten Maßstab und skizziere den Graphen.
d) Zu welchem Zeitpunkt steigt das Steueraufkommen am raschesten? Markiere den Zeitpunkt am Graphen.
e) Wie hoch ist Deiner Meinung nach die obere Grenze der Steuereinnahmen? Begründung!

Übungsaufgabe 3: Haben Sie das schon gehört?

In einer Stadt mit ca. 50 000 Einwohnern sei die Anzahl $N(t)$ derer, die nach t Tagen von einem bestimmten Gerücht gehört haben, näherungsweise durch die folgende Formel gegeben:

$$N(t) = \frac{40000}{1 + 39999e^{-2.5t}}$$

Beantworte alle Fragen vorerst nur mit Hilfe des Funktionsgraphen und/der mit Hilfe der Tabelle.

a) Wie viele Personen wissen nach 5 Tagen von dem Gerücht?
b) Wie lange dauert es, bis dass die halbe Stadt davon weiß?
c) Zu welchem Zeitpunkt ist das Gerücht am lebendigsten?
d) Bis wann ist Deiner Meinung nach auch der letzte Bürger davon informiert? Begründe Deine Antwort!
e) Welche Größe in dieser Funktionsgleichung beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich das Gerücht verbreitet? Schreibe eine Formel für eine langsamere Verbreitung hin.
   Wie muss sich der Funktionsgraph verändern?
f) Versuche die Aufgaben a) und b) numerisch zu lösen.
g) Wie könnte ein entsprechendes diskretes Modell lauten.

Wir gehen davon aus, dass der Matrizenbegriff schon bekannt ist. Der Umgang mit Matrizen ist besonders rechenintensiv, daher ist es kaum möglich, sinnvolle Anwendungsaufgaben praktisch durchzuführen. Mit dem TI-83+ haben wir nun die Gelegenheit, die Rechnungen auszulagern, und uns auf die wesentlichen Grundlagen zu konzentrieren. In diesem Papier werden zwei Anwendungen angeboten:
(1) Eine Querverbindung zur Geometrie, die eine Vernetzung von Anwendung der Matrizenrechnung, Trigonometrie, Vektorrechnung und räumlicher Anschauung herstellt.
(2) Eine Aufgabe aus der Ökologie, die den Einsatz von Übergangsmatrizen zeigt.

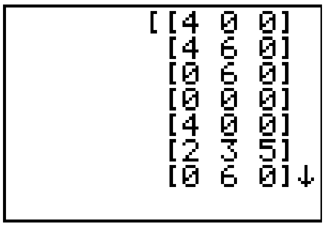
Vom Schrägriss und anderen Parallelprojektionen

Für die Darstellung von räumlichen Objekten stehen unterschiedliche Verfahren zur Verfügung.
Sie reichen von der Freihandzeichnung über die Fotografie zu strengen geometrischen Methoden, wie Darstellung in Grund-, Auf- oder Schrägriss. Besonders anschaulich sind perspektivische Bilder, da sie die räumliche Wirkung noch besser zur Geltung bringen.

Ein räumliches Objekt wird durch die Menge seiner Punkte bestimmt. Es kann eine Raumkurve oder eine durch eine oder mehrere Flächen begrenzte Figur sein. Wir wollen die Abbildungsverfahren an einer Pyramide mit einer rechteckigen Grundfläche erforschen. Die Pyramide hat ihre Basis ABCD in der xy-Ebene mit A(4,0,0), B(4,6,0), C(0,6,0) und D(0,0,0). Die Spitze S der Pyramide liegt in (2,3,5).

Wir beschreiben die Pyramide durch ein

„*Raumpolygon*“ [A,B,C,D,A,S,C,B,S,D].



Das Problem besteht nun vor allem darin, die dreikomponentigen Koordinaten des räumlichen Objekts in Koordinatenpaare des ebenen Bildes des Objektes zu transformieren.

$$P(x,y,z) \rightarrow P_p(x_p, y_p)$$

Eine allgemeine **axonometrische Abbildung** (Grund-, Auf-, Seiten- und Schrägriss sind Sonderfälle davon) ist festgelegt durch die Winkel α und β, die die Bilder von x- und y-Achse mit der waagrechten Bezugsgeraden bilden, sowie durch Verkürzungsverhältnisse v_x, v_y, und v_z in den Achsenrichtungen. Beim Schrägriss bilden z_p und x_p einen rechten Winkel, y_p bildet den Winkel β und nur die Abstände in y-Richtung werden verkürzt.

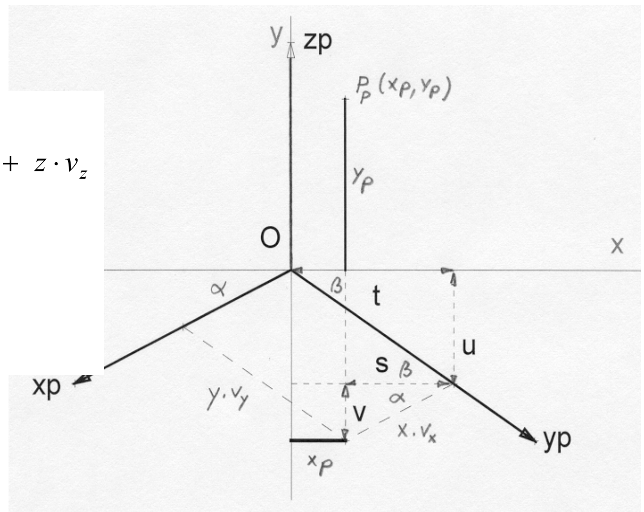
Skizziere einen Schrägriss der gegebenen Pyramide mit $\beta = 30°$ und $v_y = 0{,}5$.

Die Skizze soll die Ableitung der Transformationsformeln begleiten, die eine einfache Anwendung der Winkelfunktionen in rechtwinkligen Dreiecken darstellt:

$$x_p = t - s = y \cdot v_y \cdot \cos\beta - x \cdot v_x \cdot \cos\alpha$$
$$y_p = -u - v + z \cdot v_z = -y \cdot v_y \cdot \sin\beta - x \cdot v_x \cdot \sin\alpha + z \cdot v_z$$

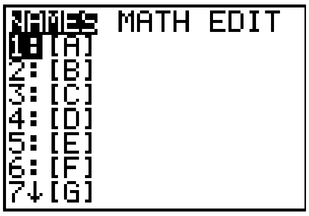
oder in Matrizenschreibweise:

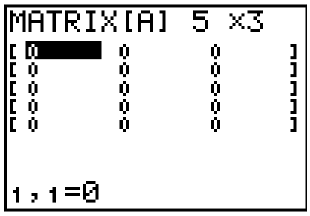
$$(x_p, y_p) = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} -v_x \cos\alpha & -v_x \sin\alpha \\ v_y \cos\beta & -v_y \sin\beta \\ 0 & v_z \end{pmatrix}$$



Bevor wir die Pyramide, deren Eckpunkte in einer Matrix zusammengefasst wurden, darstellen, sollen auch die Achsen abgebildet werden. Bei dieser Gelegenheit werden wir sehen, wie wir zur räumlichen Darstellung kommen. Das Achsenkreuz wird durch das räumliche Polygon *achsen* definiert. Als erste Darstellungsform wählen wir die recht beliebte „*isometrische Projektion*“. Bei dieser bilden die Bilder der Achsen miteinander die Winkel 120° ($\alpha = \beta = 30°$) und es gibt in keiner Achsenrichtung eine Verkürzung. Wir definieren die entsprechende Abbildungsmatrix, speichern sie unter dem Namen `[I]` und wenden sie auf die Matrix `[A]` an. Vorerst müssen die Matrizen definiert werden. Alle Matrizenoperationen erfolgen aus dem Aufruf [2nd] [x^{-1}] (= `[MATRIX]`): Über `NAMES` werden sie aufgerufen und ins Rechenfenster übertragen, über `MATH` spricht man die Matrizenoperationen an und über `EDIT` werden sie definiert, bzw. könne bereits bestehende Matrizen verändert werden. Insgesamt reicht der Speicher für 10 Matrizen, denen die Bezeichnungen `[A]` bis `[J]` zugeordnet werden können. Zuerst wird [A] erzeugt. Gehe mit [▶] zum `EDIT`-Menü und bestätige für [A], die Matrix *achsen* besteht aus 5 Zeilen und 3 Spalten.

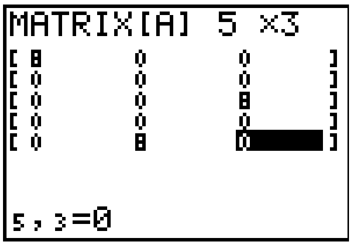
$$achsen = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$





Jetzt können Zeile für Zeile die Elemente der Matrix in die vorbereitete „Schablone“ eingetragen werden.

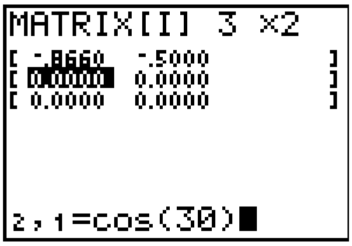
Die fertige Matrix `[A]` sollte dann so aussehen wie nebenstehend abgebildet.



Auf die gleiche Art erzeugen wir die 3×2-Transformationsmatrix [I] für die isometrische Abbildung.

Stelle zuvor sicher, dass im [MODE] in der dritten Zeile `Degree` als Winkelmaß eingestellt ist.

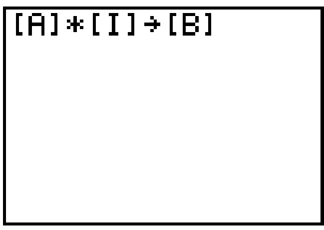
Die Matrix $\begin{pmatrix} -\cos(30) & -\sin(30 \\ \cos(30) & -\sin(30) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird editiert.

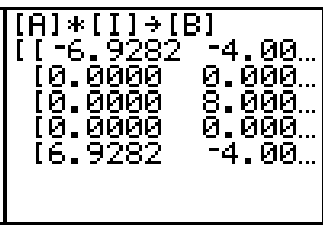


Anschließend kann im Rechenfenster das Produkt von `[A]` mit `[I]` erzeugt und etwa unter dem Namen `[B]` gespeichert werden.

Der Matrizeneditor wird mit [2nd] [MODE] (= `[QUIT]`) verlassen.

Die Matrizen werden immer über `[MATRIX] NAMES` aufgerufen und mit [ENTER] übernommen:



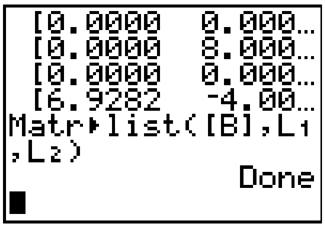


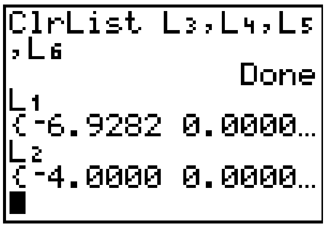
Die Punkte ... zeigen an, dass die Matrix nach rechts (oder nach anderen Richtungen) weitergeht. Mit den Cursortasten ◀ ▼ ▲ ▶ können auch diese Matrizenelemente erreicht werden.

In der ersten Spalten finden sich die x- und in der zweiten die y-Koordinaten der Bildpunkte. Das Problem besteht darin, diese Spalten in geeigneter Form in den Grafikschirm zu übertragen und die entsprechenden Punkte zu verbinden. Dazu würde sich ein Programm anbieten. Wir wollen hier aber nicht programmieren, sondern wählen eine einfache – und leicht wiederholbare – Vorgangsweise

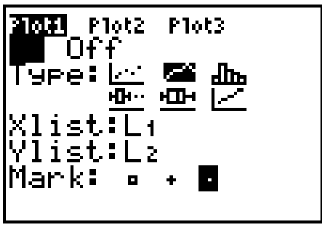
Wir übertragen die beiden Spalten in Listen und stellen die Punkte als ein -Diagramm dar. Maximal drei Diagramme können gleichzeitig präsentiert werden. Es lässt sich daher zu den Achsen auch das Bild unserer Pyramide herstellen.

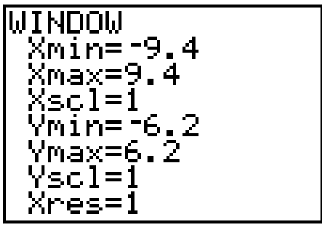
Über `[MATRIX] MATH` wähle den Befehl `Matrålist(` und ergänze im Rechenfenster:

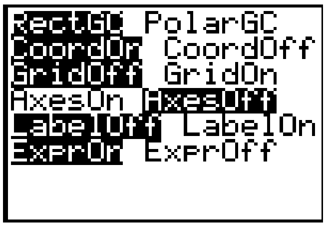


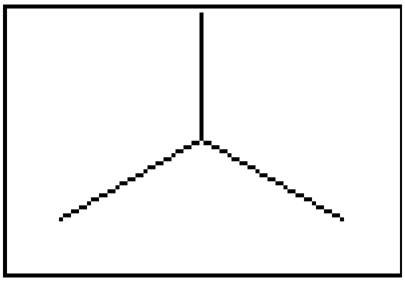


Die Spalten der Matrix werden in die Listen `L1` und `L2` kopiert.



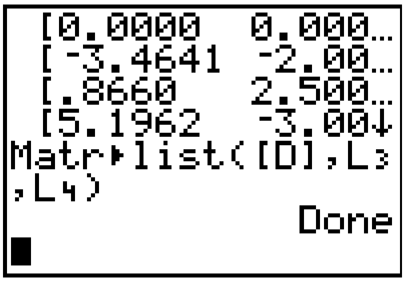


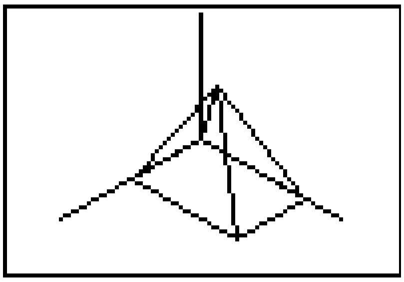




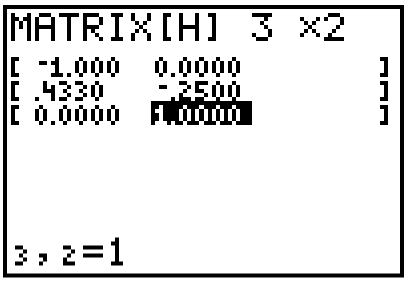
Über 2nd Y= (= `[STAT PLOT]`) und ENTER werden für den `Plot1` die Diagrammparameter festgelegt. Die WINDOW-Werte werden angepasst und nach dem Wechsel ins Grafikfenster - GRAPH - sind über 2nd ZOOM (= `[FORMAT]`) möglicherweise die Einstellungen zu verändern. Dann sollten sich die Koordinatenachsen in isometrischer Darstellung zeigen.

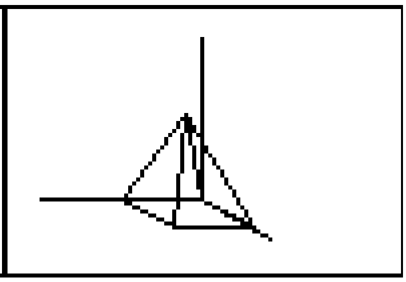
Erzeuge nun die Matrix für das Raumpolygon, das die Pyramide darstellt und speichere sie unter dem Namen `[C]`. Führe die Transformation mittels der Matrix `[I]` durch, speichere das Ergebnis in der Matrix `[D]` und übertrage die Spalten von `[D]` in die Listen `L3` und `L4`, die im `Plot2` zur Darstellung der Pyramide herangezogen werden.





Definiere nun die, den Schrägriss von Seite 1 ($\beta = 30°$, $v_y = 0{,}5$) erzeugende Transformationsmatrix `[H]` und erzeuge das entsprechende Bild (Achsen + Pyramide). Dabei sind fallweise die WINDOW-Werte anzupassen.

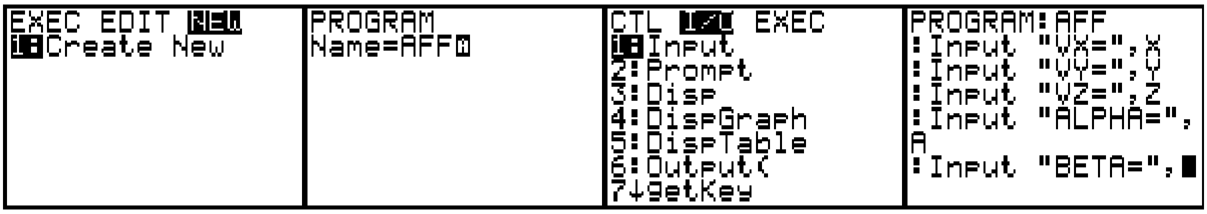




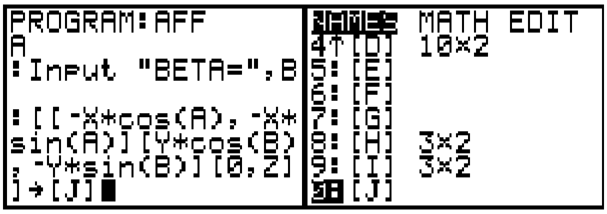
Für die Anwendung unterschiedlicher *axonometrischer* Abbildungen ist es praktisch, ein (kleines) Programm `AFF` zu verwenden, das zu beliebigen Verkürzungsverhältnissen v_x, v_y, v_z und den Winkeln α, β zwischen den Projektionen der Achsen (siehe Seite 1) die jeweilige Matrix erzeugt.

Zu diesem Zweck rufe `PRGM` `NEW` auf, gib dem zu schaffenden Programm den Namen `AFF` und übertrage den Programmcode.

```
Input "VX=",X
Input "VY= ,Y
Input "VZ=",Z
Input "ALPHA=",A
Input "BETA=",B
[[úX*cos(A),úX*sin(A)][Y*cos(B),úY*sin(B)][0,Z]]ü[J]
```

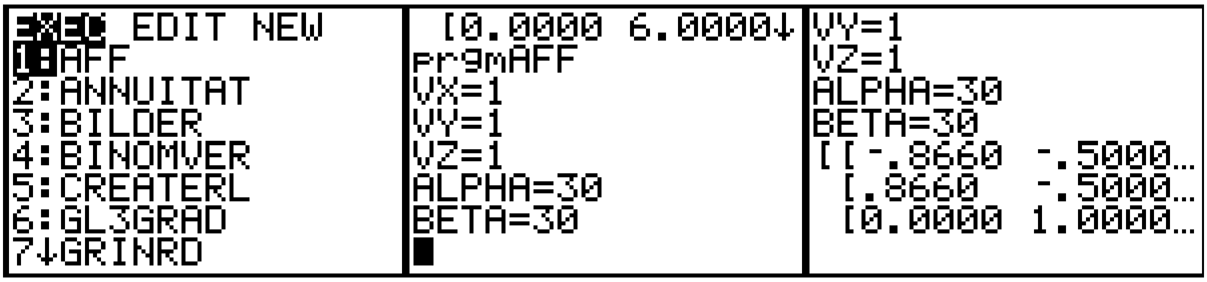


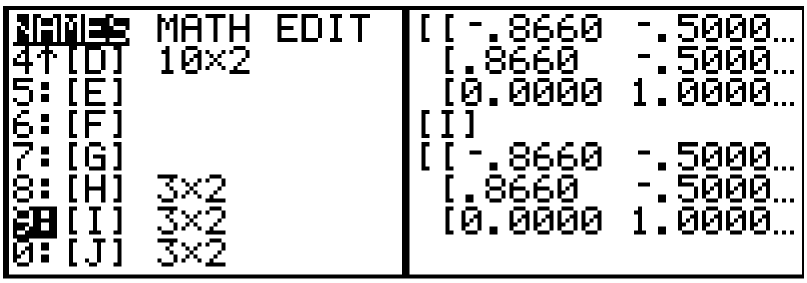
Den Befehl `Input` kann man nicht eintippen, sondern erhält ihn – wie viele andere Input/Outputanweisungen – im Programmeditor, nachdem man nochmals die `PRGM`-Taste gedrückt hat. Die Doppelpunkte erscheinen automatisch an jedem Zeilenanfang.



In der letzten Zeile ist zu beachten, dass die Matrixbezeichnung `[J]` für die neu geschaffene Transformationsmatrix nicht einzutippen ist, sondern unter `[MATRIX]` abgerufen werden muss.

Das Programm kann gleich getestet werden, indem man nachprüft, ob die entsprechenden Daten die Matrizen für die isometrische Abbildung, bzw. für den Schrägriss unter dem Namen `[J]` ergeben. Mit `[QUIT]` wird der Programmeditor verlassen. Aus dem Rechenfenster wird `PRGM` aufgerufen:





Der Vergleich mit der früher hergestellten Matrix `[I]` zeigt die Identität.

Überprüfe auch die Transformationsmatrix für den Schrägriss.

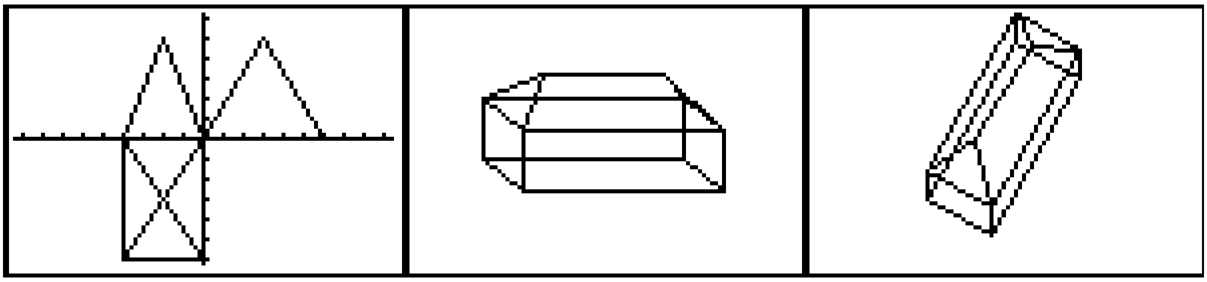
Übungsaufgaben:

a) Welche Parameter erzeugen Grund-, Auf und Seitenriss? Erzeuge ein Bild der Pyramide mit allen drei Rissen.

b) Stelle einen Würfel, Oktaeder, Tetraeder oder eine Figur deiner Wahl in mindestens zwei verschiedenen Projektionen dar.

c) Die „*Militärperspektive*" lässt den Grundriß unverändert und verkürzt in der z-Richtung mit dem Faktor 0,5. Damit wurden früher anschauliche Bilder von Befestigungsanlagen hergestellt. Erzeuge die Transformationsmatrix `mil` und bilde ein Haus ab.

d) Eine besondere Projektion heißt *dimetrisch*. Dabei erscheinen y- und z-Achse unverkürzt und bilden in der Projektion den Winkel 97,18°. Die x-Achse wird im Verhältnis 0,5 verkürzt und ihr Bild schließt mit den Projektionen der beiden anderen Achsen gleiche Winkel ein. Erzeuge das dimetrische Bild eines Objektes deiner Wahl.



Grund-, Auf- und Seitenriss der Pyramide

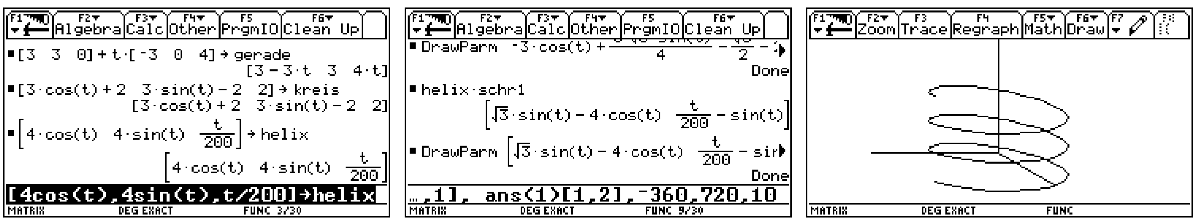
Haus in Schrägriss und in Militärperspektive

Eine Raumkurve wird durch einen Vektor mit einem Parameter dargestellt. Die einfachste Raumkurve stellt die Gerade in Vektorform dar, z.B. Gerade g(A(3,3,0),B(0,3,4)). Als zweites Beispiel wird ein Kreis mit dem Radius 3 und Mittelpunkt M = (2,-1,2)beschrieben, der sich in einer Horizontalebene befindet. Die dritte Kurve ist eine Schraublinie (*Helix*). Wir wollen alle drei Kurven im Schrägriss darstellen.

Die Parameterdarstellungen der drei Kurven lauten:

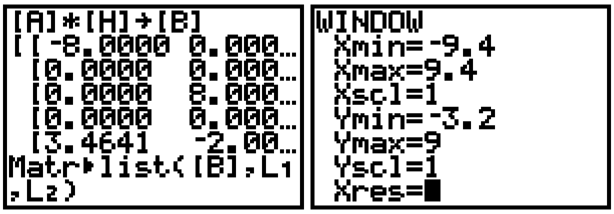
$$\text{Gerade: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \text{Kreis: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos t + 2 \\ 3\sin t - 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \text{Helix: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos t \\ 4\sin t \\ 0{,}05t \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation mit der Transformationsmatrix liefert eine Parameterdarstellung der gesuchten Bildkurve, die auf den Grafikschirm übertragen werden muss. Mit einem symbolischen Rechner wie dem Voyage 200 oder TI-89 wäre das direkt zu erledigen.



In den Bildern wird der Vektor `helix` mit der Transformationsmatrix `schr1` multipliziert und das Ergebnis sofort zum bereits vorhandenen Achsensystem gezeichnet.

Auf dem TI-83+ müssen wir einen „numerischen“ Weg beschreiten: die Matrix `schr1` entspricht unserer Matrix `[H]`. Zuerst bilden wir das Achsenkreuz (Matrix `[A]`) ab, schreiben die Punkte in die Listen `L1` und `L2` wie oben gezeigt und können im `Plot1` die Achsen im Schrägriss darstellen.

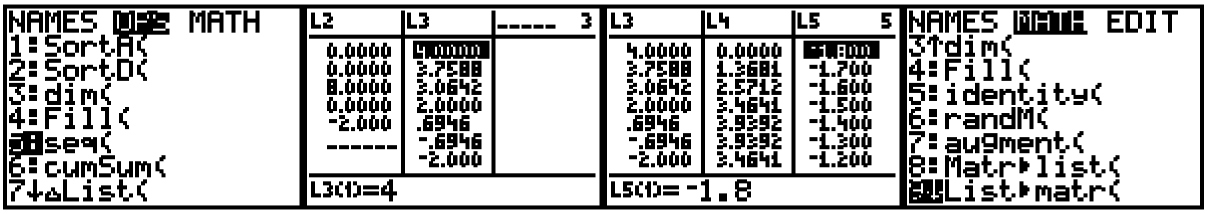


Nun folgt der neue – numerische – Teil:

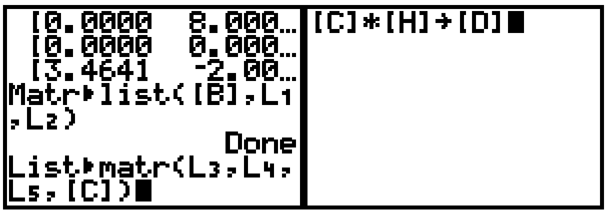
Wir wollen exemplarisch den Schrägriss der Schraublinie erzeugen. Dazu definieren wir in den Listen `L3`, `L4` und `L5` die Folgen der *x*-, *y*- und *z*-Koordinaten der Parameterdarstellung mit einer hinreichend kleinen Schrittweite, so dass die entstehende Kurve doch schön glatt erscheint. Wir wählen den Parameter *t* zwischen –360° und +720° mit einer Schrittweite von 20°.

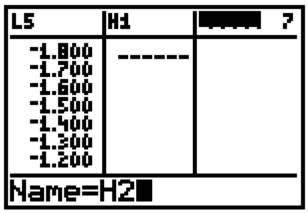
Mit STAT `1:Edit` öffnen wir den Listeneditor, setzen den Cursor auf `L3` und gelangen mit ENTER in die Eingabezeile. `[LIST]` führt über `OPS` zu den möglichen Listenoperationen, aus denen wir den Folgenbefehl `seq(` auswählen. Nach der Parameterdarstellung der Helix ist die erste Komponente 4*cos(*t*), daher wird die Folge dementsprechend gebildet: `seq(4*cos(T),T,-360,720,20)`.

Die Folge erscheint sofort in der Liste. In `L4` wird `seq(4*sin(T),T,-360,720,20)` und in `L5` schließlich für die *z*-Koordinate `seq(T/200,T,-360,720,20)` erzeugt.



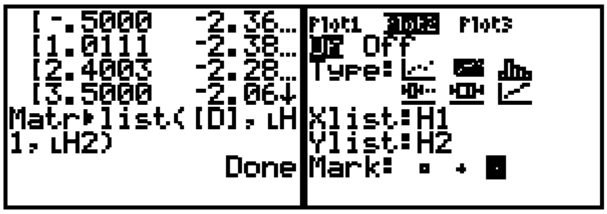
Um die transformierende Multiplikation durchführen zu können, müssen diese drei Listen in eine Matrix übergeführt werden, bei der sie die Spalten der Matrix bilden. Da können wir schon vermuten, dass es den zu `Matrålist` inversen Befehl `ListåMatr` auch geben wird. Und tatsächlich werden wir unter `[MATRIX] MATH` fündig. Wir speichern diese umfangreiche Matrix unter dem Namen `[C]`.



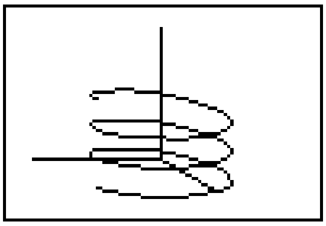


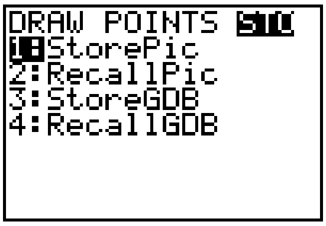
Die Daten für die grafische Ausgabe wollen wir in die Listen `H1` und `H2` schreiben.

`H1` und `H2` werden über STAT `1:Edit` definiert und bereitgestellt.

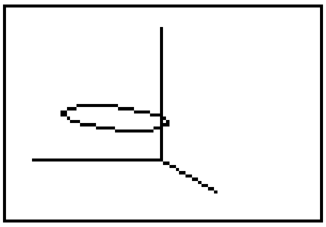


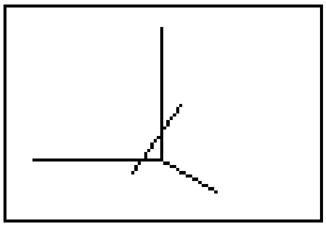
Nun wird es Zeit, dass wir die Schraublinie endlich sehen!





Das Bild lässt sich als Ganzes speichern (über 2nd PRGM (= `[DRAW]`)und bei Bedarf wieder ins Grafikfenster laden. Ich habe hier das Achsenkreuz als `Pic1` gespeichert und kann diese Grafik mit der Projektion einer beliebigen anderen Figur überlagern. Damit wird der Platz für ein weiteres Diagramm frei.





Zum Schluss sehen wir noch die Schrägrisse des Kreises und der Geraden (mit $0 \le t \le 1$).

Für die Darstellung von perspektivischen Bildern ist ein größerer Aufwand nötig. Ich verweise auf [1].

Tiere auf Wanderschaft

Wissenschaftler haben die Wanderbewegungen einer bestimmten Tierart beobachtet. Zu diesem Zweck wurde ein größeres Gebiet, das von dieser Spezies bewohnt wird in 5 Regionen geteilt. Eine Anzahl von Tieren wurde markiert und man konnte ein einigermaßen stabiles Wanderverhalten der Tiere beobachten. Eine „*Übergangsmatrix*“ beschreibt die Migrationsgewohnheiten der Tiere.

		Anteil wandert ein in				
		Region 1	Region 2	Region 3	Region 4	Region 5
Anteil wandert aus von	Region 1	0,60	0,10	0,05	0,10	0,15
	Region 2	0,10	0,50	0,10	0,05	0,25
	Region 3	0,05	0,10	0,70	0,05	0,10
	Region 4	0,20	0,20	0,10	0,40	0,10
	Region 5	0,15	0,15	0,00	0,15	0,55

Eine Zählung ergab für die 5 Regionen die folgenden geschätzten momentanen Bestandsmengen:

2500, 3600, 1700, 2100, 2400.

a) In zwei Jahren wird wieder gezählt. Wie viele Tiere sind in den Regionen zu erwarten, wenn angenommen werden darf, dass sich das Wanderverhalten nicht wesentlich ändern wird?

b) Wie sehen die Bestände in 10, in 20 und in 50 Jahren aus?

c) Wird sich einmal ein stabiler „Gleichgewichtszustand“ einstellen? Wie sieht dieser aus? (Natürlich unter der Voraussetzung von Verhaltensweisen, die sich nicht wesentlich ändern – etwa durch Umweltkatastrophen, ein geändertes Nahrungsangebot, Eingreifen des Menschen, usw.)

d) Ökologen fangen 800 Exemplare aus Region 2 und verteilen diese gleichmäßig auf die vier anderen Gebiete. Beantworte die Fragen a) – c) unter den geänderten Bedingungen.

Lösungsvorschlag

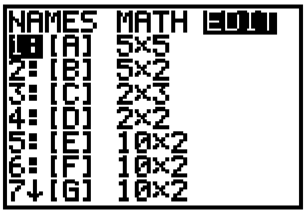
Die erste Zeile der Tabelle bedeutet, dass ca. 60% der Tiere, die sich in Region 1 aufhalten standorttreu bleiben, 10% von ihnen wechseln in Region 2, bzw. Region 4, 5% wandern aus nach Region 3 und 15% begeben sich nach Region 5.

Wie groß ist daher die Population im nächsten Jahr in Region 1?

$2500 \times 0{,}60 + 3600 \times 0{,}10 + 1700 \times 0{,}05 + 2100 \times 0{,}20 + 2400 \times 0{,}15 = 2725$

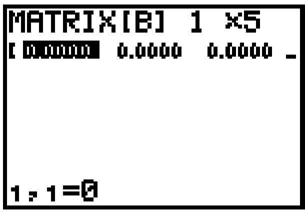
Berechne auch den Bestand in den anderen 4 Regionen – mit der Hand, oder mit Hilfe einer geeigneten Matrizenoperation!

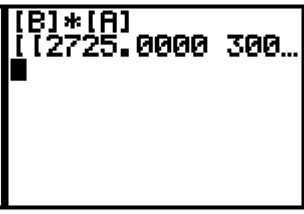
Über `[MATRIX] EDIT` erzeugen wir die 5 × 5 Matrix `[A]` und übertragen die Werte aus der Migrationstabelle.

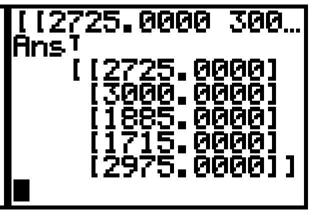


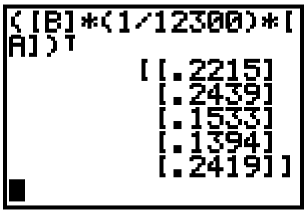
Die Elemente werden nacheinander eingegeben. Jede Eingabe wird mit ENTER abgeschlossen.

Der Bestand wird in der 1 × 5 Matrix `[B]` (= Zeilenvektor) festgelegt. Die Multiplikation `[B]*[A]` liefert die Bestände nach einem Jahr.

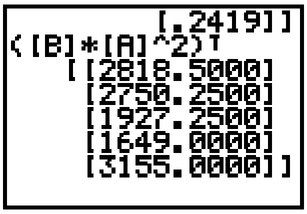


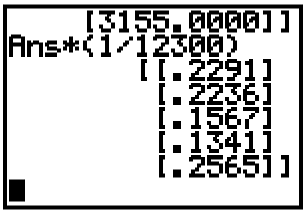






Das Ergebnis erscheint wieder als Zeilenvektor. `[MATRIX] MATH 2:`^{T} transponiert das Ergebnis, so dass es als Spaltenvektor erscheint.
Wenn nur die Anteile gefragt sind (wesentlich allgemeiner), dann ist das Ergebnis noch durch die Gesamtanzahl zu dividieren! Beachte, dass die Division in eine Multiplikation umzuwandeln ist.



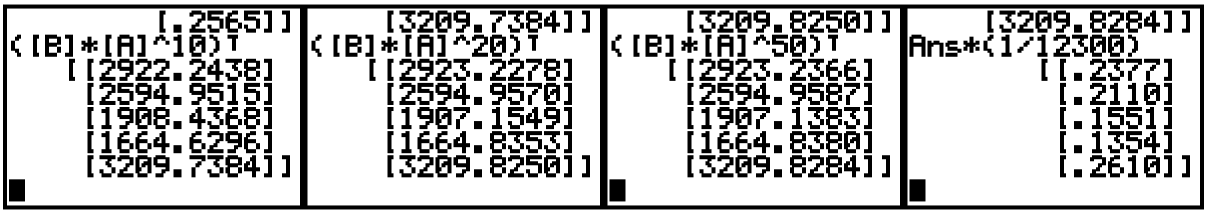


Nach zwei Jahren sind nach dem Modell 2819, 2750, 1927, 1649 und 3155 Tiere in den verschiedenen Regionen. Oder ihre Anteile betragen etwa 22,9%, 22,4%, 15,7% 13,4% und 25,6%.

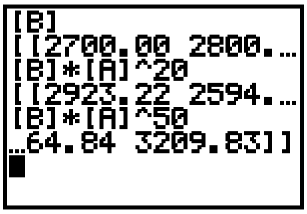
Das sind die Bestände nach 10 Jahren:

und nach 20 Jahren:

und nach 50 Jahren:



Welcher Schluss könnte gezogen werden?



Wie lauten die Prozentanteile für die fünf Regionen?

Führe nun die Aufgabe mit dem geänderten Anfangsbestand aus [2700, 2800, 1900, 2300, 2600]. Editiere die Matrix `[B]`.

Offensichtlich stabilisiert sich der Zustand. Diesen stabilen Zustand wollen wir nun berechnen. Wenn es ihn gibt, dann muss die Multiplikation des Bestandsvektors `[B]` = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) mit der Übergangsmatrix `[A]` diesen unverändert lassen, also

`[B]*[A]=[B]`; für welchen Vektor `[B]`, gilt dies, wobei aber außerdem die Summe aller Vektorkomponenten wieder 12300 sein muss (oder 1, wenn wir mit den %-Anteilen rechnen).

Es entsteht das folgende Gleichungssystem:

$$0{,}60\,b_1 + 0{,}10\,b_2 + 0{,}05\,b_3 + 0{,}20\,b_4 + 0{,}15\,b_5 = b_1 \qquad (1)$$
$$0{,}10\,b_1 + 0{,}50\,b_2 + 0{,}10\,b_3 + 0{,}20\,b_4 + 0{,}15\,b_5 = b_2 \qquad (2)$$

.... (3)

.... (4)

.... (5)

Diese fünf Gleichungen sind linear abhängig und liefern keine eindeutige Lösung. Eine der fünf Gleichungen wird ersetzt durch die oben genannte Bedingung, dass $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 1$ (6).

Warum sind die fünf Gleichungen (1) – (5) nicht von einander unabhängig?

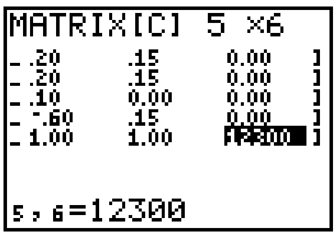
Löse das Gleichungssystem.

Hier gibt es mehrere Möglichkeiten, das lineare Gleichungssystem zu lösen. Man kann nicht, wie mit einem symbolischen Rechner die Gleichungen nacheinander eingeben und sofort die Lösung erhalten. Alle folgenden Überlegungen beziehen sich auf die Arbeit mit Matrizen.

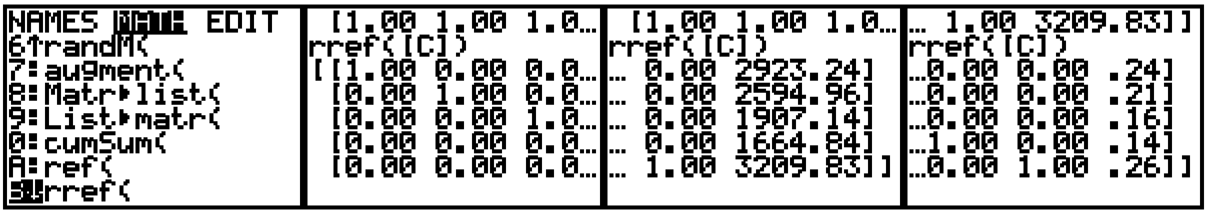
1. Möglichkeit:

Das Gleichungssystem (1) bis (4) wird umgeordnet und Gleichung (5) durch (6) ersetzt. Die entstehende (erweiterte) Koeffizientenmatrix wird als 5 × 6 Matrix `[C]` gespeichert.

$$\begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}10 & -0{,}50 & 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & -0{,}30 & 0{,}10 & 0{,}00 & 0 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}05 & -0{,}60 & 0{,}15 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12300 \end{pmatrix}$$

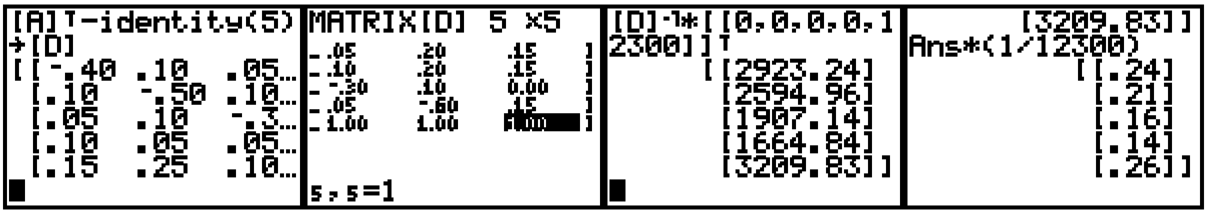


Der Befehl `rref` (aus `[MATRIX] MATH`) bringt die Matrix in die „**R**ow **R**educed **E**chelon **F**orm“ (= reduzierte Zeilen-Staffel-Form), in der die Lösungen des GLS sofort abgelesen werden können.



Und diese Werte kennen wir ja schon. Das letzte Bild ist entstanden, nachdem die Zahl 12300 in der Matrix `[C]` auf 1 abgeändert wurde.

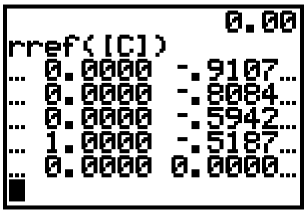
Als zweite Möglichkeit will ich die Lösung mittels inverser Matrix anbieten, wobei wir uns auch das Schreiben der Systemmatrix `[C]` - ohne letzte Spalte - ersparen wollen. Bei Betrachtung des Systems (1) – (5) fällt auf, dass die Koeffizienten aus der Differenzmatrix $[A]^T$ - E hervorgehen, wobei E die 5 × 5-Einheitsmatrix ist.



Die Differenzmatrix wird gebildet und die Elemente der letzten Zeile werden abgeändert. Aus der Multiplikation des „Konstantenvektors“ mit der inversen Matrix ergibt sich wieder das nun schon bekannte Ergebnis der stabilen Endverteilung.

Noch ein interessantes Rechenexempel soll durchgeführt werden:

Wir lösen das Gleichungssystem (1) – (5) und sehen dass sich eine einparametrige Lösungsmannigfaltigkeit ergibt ($b_5 = t$). (In `[C]` sind wieder die ursprünglichen Koeffizienten der Zeile (5) eingetragen.)



Die vorletzte Zeile heißt interpretiert: $b_4 - 0{,}5187t = 0 \rightarrow b_4 = 0{,}5187t$.

Analog ergibt sich: $b_3 = 0{,}5942t$, $b_2 = 0{,}8084t$ und $b_1 = 0{,}9107t$. Damit ist die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems gegeben. Suche nun jene spezielle Lösung, bei der die Summe aller Variablen den Wert 12300 bzw. 1 annimmt. Und das wollen wir ohne den SOLVER erledigen:

$0{,}9107t + 0{,}8084t + 0{,}5942t + 0{,}5187t + t = 12300 \quad \rightarrow t = 3209{,}81$

Und damit treten neuerlich - bis auf Rundungsungenauigkeiten - die Ergebnisse von vorhin auf.

Referenzen

[1] J. Böhm, *Matrizenrechnung mit dem TI-92*, T³-Skriptum, download von www.acdca.ac.at

[2] F.S. Budnick, *Applied Mathematics for Business*, Mc Graw-Hill, 1986