Unterrichtssequenzen für die CAS-TIs
TI-89/92/92+/Voyage 200

Der allererste Einstieg in den Gebrauch des TI-89
Der allererste Einstieg in den Gebrauch des Voyage 200
Jedem sein Logo oder „Die Verwandlung“
Die Winkelfunktionen erforschen mit dem TI
Logistisches Wachstum – diskret, kontinuierlich und chaotisch
Vom Schrägriss und anderen Parallelprojektionen (Matrizenrechung)
Tiere auf Wanderschaft (Matrizenrechnung)

Josef Böhm

Ein Unterrichtsbehelf zum Einsatz moderner Technologien
im Mathematikunterricht

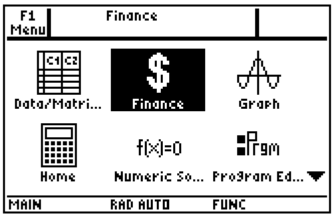
T^3 Österreich / ACDCA am PI-Niederösterreich, Hollabrunn

Der allererste Einstieg in den Gebrauch eines TI-89

Diese Unterlage ist für Kollegen und Kolleginnen gedacht, die noch wenig Erfahrung im Gebrauch eines TI-89 haben.

In diesem Papier wird mit der englischen Oberfläche gearbeitet, da die deutsche nach Erfahrung des Verfassers eher anfällig für Fehler ist und weil es nicht schadet, dass sich die Schüler langsam das englische Fachvokabular aneignen. Für spätere Internetrecherchen auch im Fach Mathematik ist das sehr nützlich.

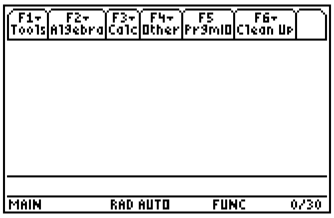
Nach Einschalten des Gerätes über [ON] wird i.a. der Desktop angezeigt, auf dem alle verfügbaren Applikationen aufscheinen.
Hier erkannt man z.B. das Finanzmathematikwerkzeug „`Finance`“, den Grafikschirm „`Graph`“, den Hauptbildschirm „`Home`“, ein Werkzeug zum numerischen Lösen von Gleichungen, usw. (Manchmal ist der Desktop abgeschaltet und man findet sich sofort im Hauptbildschirm – im „Homescreen“).



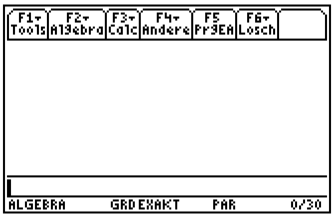
Mit den Pfeiltasten (CursorPad) navigiert man zum Symbol „Home“ und betätigt die [ENTER]-Taste.

Nun befindet man sich im „Homescreen“.

Im Idealfall sollte sich dieser so präsentieren, wie rechts abgebildet.



Was tun, wenn dem nicht so ist. Er könnte ja auch so aussehen, wie der Screenshot darunter zeigt.



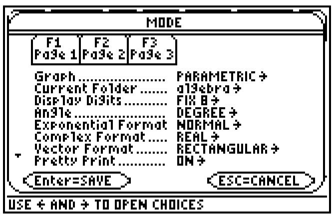
Aufgabe: Welche Unterschiede fallen auf?

(1) die Sprache

(2) links unten `FINANCE` anstelle von `MAIN`

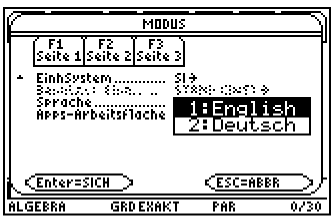
(3) Mitte unten: `GRD EXAKT`

(4) rechts unten: PAR anstelle von `FUNC`

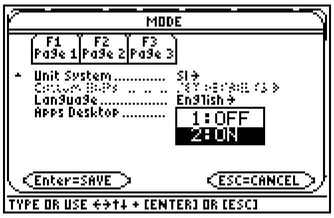


Die Schaltzentrale für die Basiseinstellungen wird über [MODE] angesprochen.

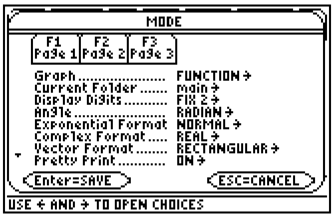
Über [F3] gelangt man zur Seite 3 der Einstellungen, und dort kann man – falls nötig – von der deutschen zur englischen Oberfläche wechseln.



Mit den Pfeiltasten navigiert man wieder zur entsprechenden Zeile, öffnet mit ▸ die Optionen und wählt die gewünschte Sprache. Auf dieser Seite kann man auch den Desktop ein- und ausschalten.



Schalten Sie dann mit [F1] auf die erste Seite und treffen Sie die Einstellungen wie daneben angezeigt.

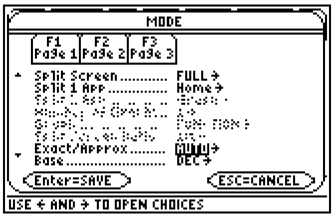


Mit `Graph` wird der Grafikmodus fixiert (u.a. auch Parameterdarstellung möglich),

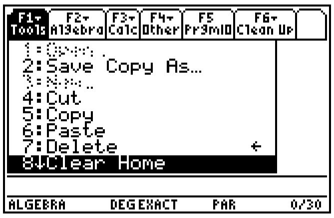
`Current Folder` ist das aktuelle Verzeichnis,

mit `Display Digits` wird die Ausgabegenauigkeit für Dezimalzahlen festgelegt (hier 2 Dezimalstellen),

`Angle` stellt mit `RADIAN` das Bogenmaß, mit `DEGREE` das Gradmaß für Winkel ein.



Auf der zweiten Seite achten Sie noch auf die `AUTO`matic-Einstellung.



Vergessen Sie nicht, abschließend über [ENTER] die Einstellungen zu speichern.

Es könnte sein, dass von einem Vorbenützer noch etwas im Homescreen zu sehen ist.

Der Schirm wird einfach gelöscht über die Tastenfolge [F1] [8].

In allen Bedarfsfällen wird auf notwendige Änderungen dieser Grundeinstellungen hingewiesen.

In den Spezialeinheiten sind nur Screenshots vom Voyage 200 zu sehen. Die Durchführung der Unterrichtseinheiten erfolgt vollkommen identisch. Beim TI-89 ist die Tastaturbelegung etwas umständlicher wegen der dreifach Belegung der Tasten.

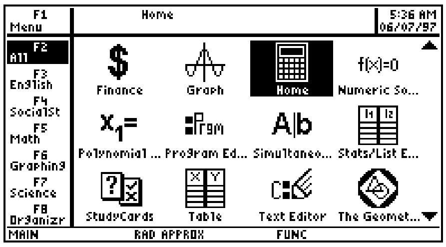
Die Unterrichtssequenzen *Jedem sein Logo*, *Die trigonometrischen Funktionen erforschen*, *Matrizenrechnung* und *Logistisches Wachstum* sind zwar sehr detailliert beschrieben, aber vorherige eine Teilnahme an einem T^3-Einführungskurs ist sehr empfehlenswert.
Falls das nicht möglich ist, sollten Sie sich mit Hilfe des Handbuchs ein wenig mit dem notwendigsten Handling des TI-89 vertraut machen.

Der allererste Einstieg in den Gebrauch eines Voyage 200

Diese Unterlage ist für Kollegen und Kolleginnen gedacht, die noch wenig Erfahrung im Gebrauch eines Voyage 200 haben.

In diesem Papier wird mit der englischen Oberfläche gearbeitet, da die deutsche nach Erfahrung des Verfassers eher anfällig für Fehler ist und weil es nicht schadet, dass sich die Schüler langsam das englische Fachvokabular aneignen. Für spätere Internetrecherchen auch im Fach Mathematik ist das sehr nützlich.

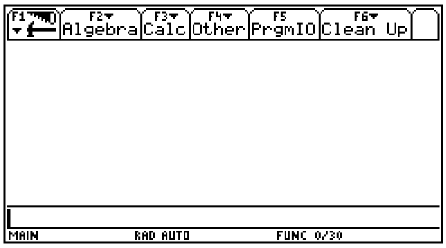
Nach Einschalten des Gerätes über ON wird i.a. der Desktop angezeigt, auf dem alle verfügbaren Applikationen aufscheinen.
Hier erkannt man z.B. das Finanzmathematikwerkzeug „Finance“, den Grafikschirm „Graph“, den Hauptbildschirm „Home“, ein Werkzeug zum numerischen Lösen von Gleichungen, usw.
(Manchmal ist der Desktop abgeschaltet und man findet sich sofort im Hauptbildschirm – im „Homescreen“).



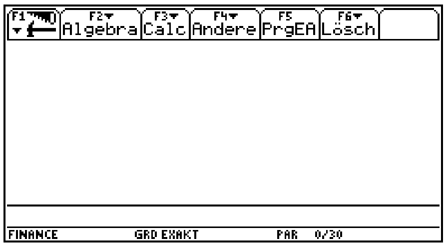
Mit den Pfeiltasten (CursorPad) navigiert man zum Symbol „Home“ und betätigt die ENTER-Taste.

Nun befindet man sich im „Homescreen“.

Im Idealfall sollte sich dieser so präsentieren, wie rechts abgebildet.



Was tun, wenn dem nicht so ist. Er könnte ja auch so aussehen, wie der Screenshot darunter zeigt.



Aufgabe: Welche Unterschiede fallen auf?

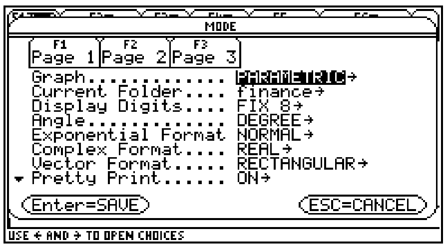
(1) die Sprache

(2) links unten FINANCE anstelle von MAIN

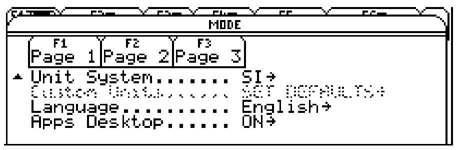
(3) Mitte unten: GRD EXAKT

(4) rechts unten: PAR anstelle von FUNC

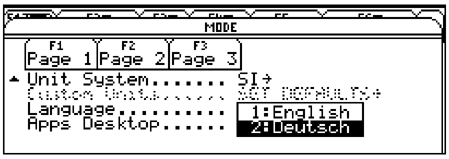
Die Schaltzentrale für die Basiseinstellungen wird über MODE angesprochen.



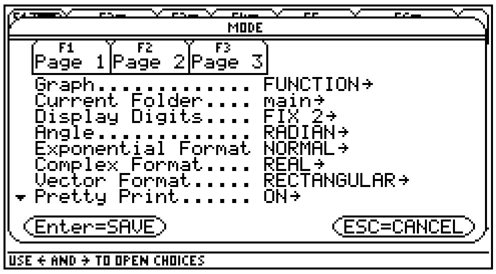
Über F3 gelangt man zur Seite 3 der Einstellungen, und dort kann man – falls nötig – von der deutschen zur englischen Oberfläche wechseln.



Mit den Pfeiltasten navigiert man wieder zur entsprechenden Zeile, öffnet mit ⨀ die Optionen und wählt die gewünschte Sprache. Auf dieser Seite kann man auch den Desktop ein- und ausschalten.



Schalten Sie dann mit [F1] auf die erste Seite und treffen Sie die Einstellungen wie daneben angezeigt.

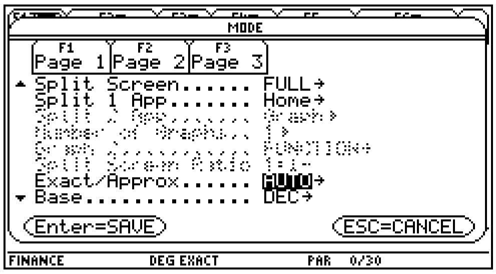


Mit `Graph` wird der Grafikmodus fixiert (u.a. auch Parameterdarstellung möglich),

`Current Folder` ist das aktuelle Verzeichnis,

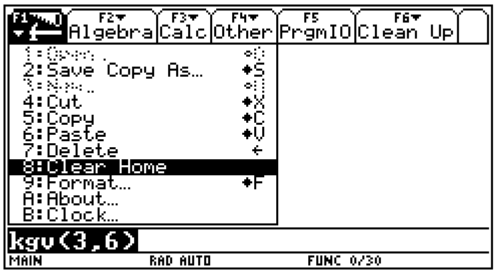
mit `Display Digits` wird die Ausgabegenauigkeit für Dezimalzahlen festgelegt (hier 2 Dezimalstellen),

`Angle` stellt mit `RADIAN` das Bogenmaß, mit `DEGREE` das Gradmaß für Winkel ein.



Auf der zweiten Seite achten Sie noch auf die `AUTO`matic-Einstellung.

Vergessen Sie nicht, abschließend über [ENTER] die Einstellungen zu speichern.



Es könnte sein, dass von einem Vorbenützer noch etwas im Homescreen zu sehen ist.

Der Schirm wird einfach gelöscht über die Tastenfolge [F1] [8].

In allen Bedarfsfällen wird auf notwendige Änderungen dieser Grundeinstellungen hingewiesen.

Die Unterrichtssequenzen *Jedem sein Logo*, *Die trigonometrischen Funktionen erforschen*, *Matrizenrechnung* und *Logistisches Wachstum* sind zwar sehr detailliert beschrieben, aber eine vorherige eine Teilnahme an einem T^3-Einführungskurs ist sehr empfehlenswert.
Falls das nicht möglich ist, sollten Sie sich mit Hilfe des Handbuchs ein wenig mit dem notwendigsten Handling des Voyage 200 vertraut machen.

Diese Unterrichtseinheit kann als Einführung oder aber besser als weiterführende Wiederholung für das Arbeiten im rechtwinkligen Koordinatensystem eingesetzt werden.

„Jedem sein Logo“ oder „Die Verwandlung“

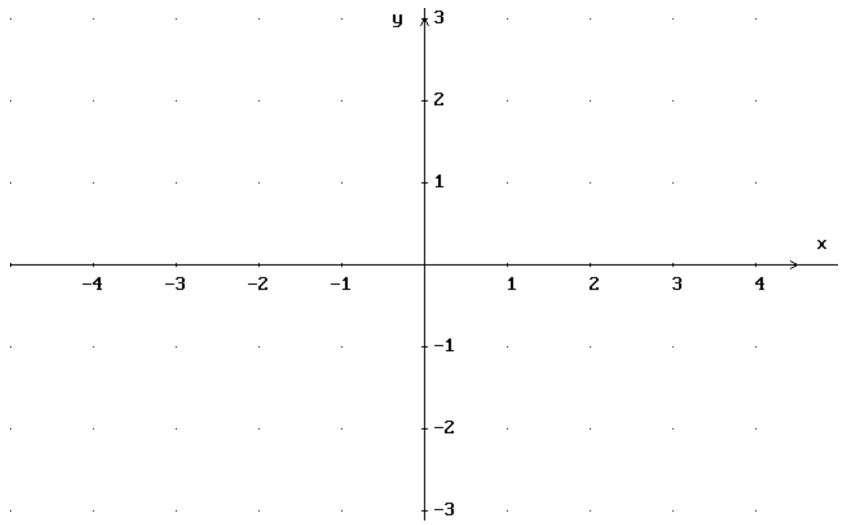
Ein Punkt wird in der Zeichenebene durch ein Zahlenpaar festgelegt. Ein derartiges Zahlenpaar nennt man die .... des Punktes.

Um einen Punkt festzulegen, braucht man zwei Bezugsgerade, die .... Eine Achse heißt die ...., sie verläuft .... oder ...., die andere Achse nennt man die ...., diese verläuft .... oder ....

Für diese Achsen gibt es eine weitere gebräuchliche Bezeichnung:
Die *x*-Achse nennt man auch **Abszissenachse**;
die *y*-Achse wird auch als **Ordinatenachse** bezeichnet.
Die beiden Achsen schneiden einander im .... oder ....
Dieser Punkt O hat die Koordinaten ....

Die Achsen teilen die Ebene in vier Teile, diese Teile heißen .... und sie werden im mathematisch **positiven Sinn** - das ist **gegen den Uhrzeigersinn** bezeichnet.

1. Bezeichne die 4 Quadranten mit **I**, **II**, **III** und **IV**.
2. Trage die Punkte A(3,2), B(-2,3), C(-3,-1) und D(4,-2) ins Koordinatensystem ein und stelle fest, in welchen Quadranten sich die Punkte befinden.

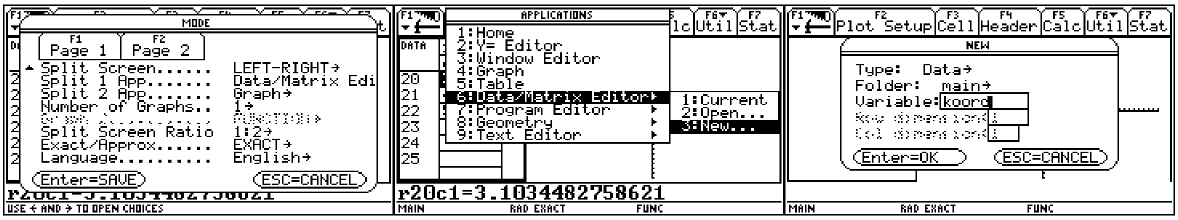


3. Beschreibe *x*- und *y*-Koordinate eines beliebigen Punktes mit eigenen Worten:

   x-Koordinate:

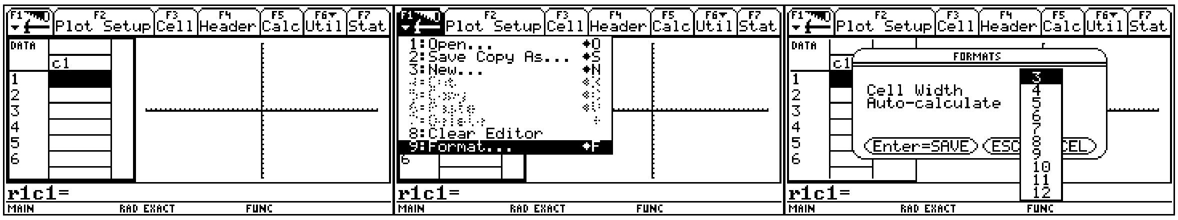
   y-Koordinate:

Nun soll ein Punkt im [GRAPH]-Fenster des TI-89/Voyage 200 dargestellt werden. Wir wollen die analytische und graphische Darstellung der Punkte parallel betrachten, daher wird der Schirm geteilt. Öffne [MODE] und stelle die zweite Seite [Page 2] so ein:

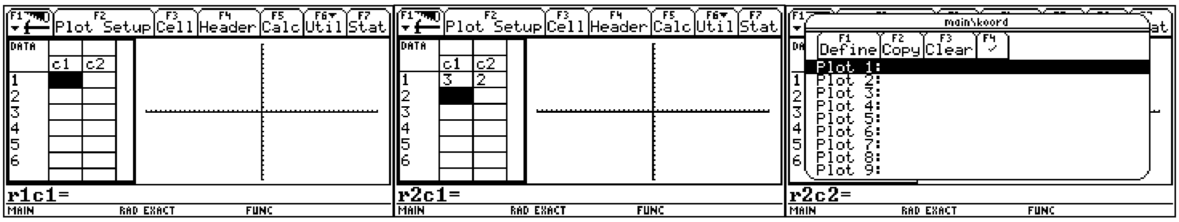


Wir öffnen mit [APPS] die Applikationen und wählen den `Data/Matrix Editor` aus, um eine neue „Datentabelle“, die wir `koord` nennen wollen, zu erzeugen.

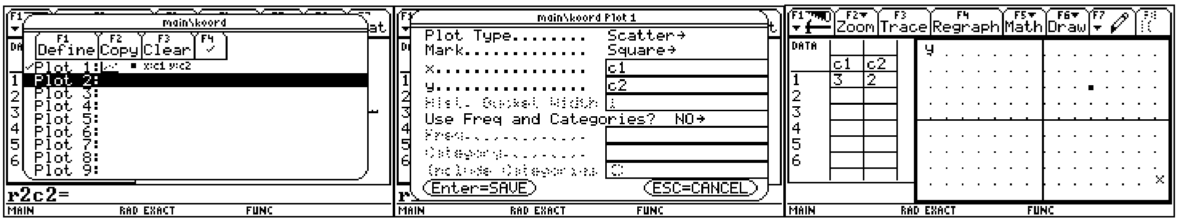
Mit [F1] `8:Format` stellen wir die Spaltenbreite so ein, dass man zwei Spalten - für die beiden Koordinaten - erkennen kann:



Wir wollen den Punkt A mit den Koordinaten (2,3) darstellen:



In der ersten Spalte `c1` (column 1) wollen wir sinnvoller Weise die *x*-Koordinate und in Spalte `c2` (column 2) die *y*-Koordinate eintragen. Mit [ENTER] gelangst Du in die Eingabezeile; [3] [ENTER], bewege das schwarze Feld in die „Zelle“ `r1c2` - (row 1, col 2), [ENTER], [2], [ENTER]. Damit ist für uns der Punkt festgelegt: Der Rechner „weiß“ aber noch nicht, dass er dieses Zahlenpaar graphisch darstellen soll. Wir wählen [F2] um das Zeichnen (Plot) herzurichten und anschließend [F1] um den Plot genauer zu definieren.

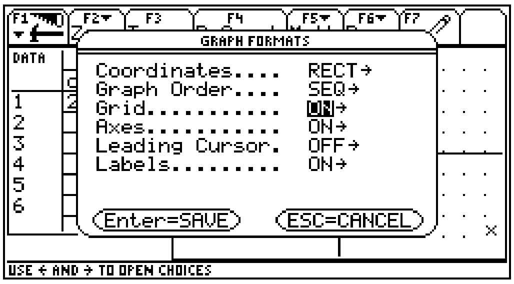


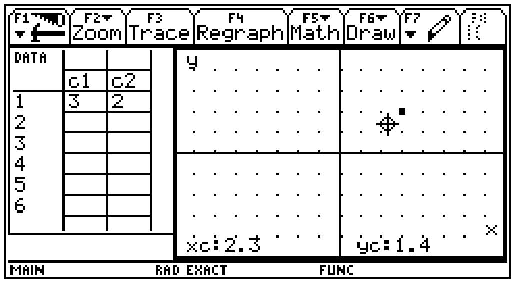
Plot Type `Scatter` erzeugt ein Streudiagramm (getrennte Punkte), mit Mark (= `Square`) markieren wir die Punkte durch ein gefülltes Quadrat (welche Marks gibt es noch?). Die *x*- und *y*-Werte finden wir in den Spalten `c1` und `c2` des aktuellen Datenblatts (`koord`).

Mit [2nd] [⊞] wechselt Du zwischen den Anwendungen (*applications*) und solltest den Punkt (3,2) im Koordinatensystem deutlich erkennen können.

Möglicherweise siehst Du weder die Koordinatenachsen, noch das Koordinatengitter. Es kann auch sein, dass die Skalierung nicht gleichmäßig auf beiden Achsen eingestellt ist.

Mit [F1] `8:Format` kannst Du die Achsen, deren Bezeichnung und den Raster ein- und ausschalten. [F2] `4:ZoomDec` stellt eine gleichmäßige Skalierung her.

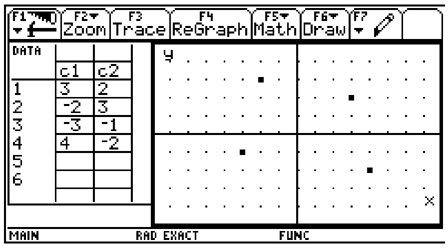




Bewege mit den Pfeiltasten das Fadenkreuz in den Punkt. Beachte, dass dabei die Koordinaten des Kreuzes (Cursor) angezeigt werden.

Zusatzfrage: Welche Einstellung im „`Format`“ ist dafür verantwortlich, dass „Kartesische Koordinaten“ verwendet werden? Welche „`Coordinates`“ gibt es noch?

4. Wechsle mit [2nd] [⊞] wieder ins Datenblatt und übertrage nun Punkt für Punkt die weiteren Punkte B, C und D aus der 2. Aufgabe ins Koordinatensystem.



5. Lösche im Datenblatt mit [F6] `5:Clear Column` die Werte in den Spalten `c1` und `c2`. Damit sind beim nächsten Wechsel ins [GRAPH]-Fenster die alten Punkte gelöscht.

   Zeichne in jeden der vier Quadranten 3 Punkte (Notiere erst die Punkte, dann übertrage sie auf den Rechner):

   I.Qu.: II.Qu.:

   III.Qu.: IV.Qu.:

6. Lösche die in 5. gezeichneten Punkte. Zeichne anschließend je zwei Punkte auf die positive und negative x-, bzw y-Achse.

   pos. x-Achse: neg. x-Achse:

   pos. y-Achse: neg.y-Achse:

   Welche Eigenschaft haben die Koordinaten von Punkten auf den Achsen?

   Alle Punkte auf der x-Achse ....

   Alle Punkte auf der y-Achse ....

7. Lösche alle Punkte. Zeichne den Punkt P(x = 2,5; y = 1,5).

   Spiegle P an der y-Achse: P_1 = ...

   Spiegle P an der x-Achse: P_2 = ...

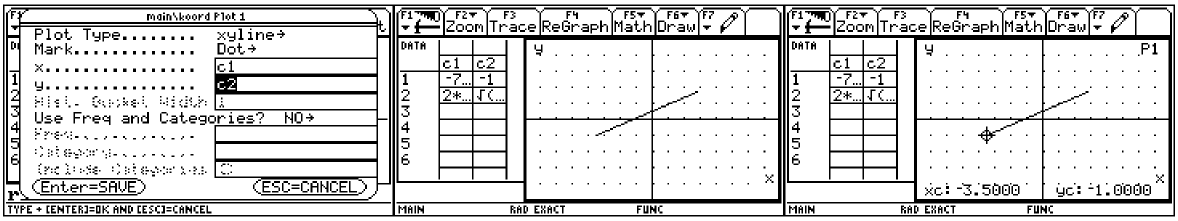
   Spiegle P am Koordinatenursprung: P_3 = ...

   Die vier Punkte bilden ein ....

Lösche alle gezeichneten Punkte im Datenblatt.

Punkte lassen sich zu Strecken und weiter zu „Polygonzügen” verbinden. Wir wollen z.B. diejenige Strecke zeichnen, die durch die beiden Endpunkte A(-7/2,-1) und B(2 √2,√3) bestimmt wird:

Editiere im Datenblatt die beiden Punkte. Wechsle mit F2 und F1 ins `Define`-Menü und stelle die Parameter nun ein, wie unten gezeigt.



Mit F3 gelangst Du in den `Trace` (= Spur- oder Verfolgungs-)-Modus. Nun kannst Du mit den Pfeiltasten ◀ und ▶ die einzelnen Punkte „besuchen“.

8. Zeichne diese Strecke nochmals mit großen Endpunkten. Stelle im `Define`-Menü den Plot Type auf "`Square`" oder "`Box`" um.

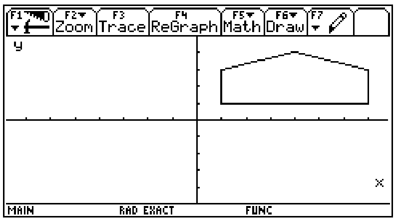
9. Lösche die Strecke und erzeuge ein Viereck, indem du vier Punkte in der entsprechenden Reihenfolge ins Datenblatt schreibst. Das Viereck soll Punkte in allen vier Quadranten enthalten!

   Beim ersten Versuch wird möglicherweise noch kein geschlossenes Viereck entstehen. Ergänze die Angabe so, dass sich das Viereck schließt!

   Führe anschließend das Fadenkreuz zuerst ohne, dann mit dem `Trace`-Modus in alle Ecken des Vierecks.

10. Ergänze das Datenblatt so, dass auch die Diagonalen sichtbar werden. Suche mit dem Cursor die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts. Der Schnittpunkt M liegt in M (....................).

11. Zeichne im I.Quadranten den Umriss eines Hauses:
    (Stelle im MODE wieder den vollen Grafikschirm her.)



(☜ nur ein mögliches Beispiel!!)
Überlege zuerst die optimale Reihenfolge der Punkte im Polygonzug.

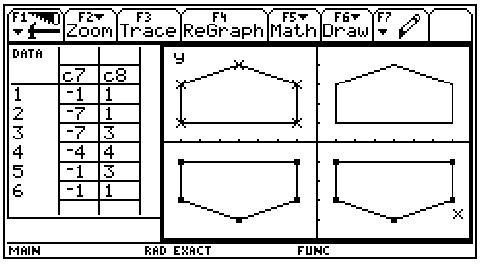
12. Spiegle dieses Haus zuerst an der *x*-, dann an der *y*-Achse und abschließend am Koordinatenursprung. Gib für jede Spiegelung die Konstruktionsvorschrift an:

(Du kannst die Koordinaten des zweiten Bildes in die Spalten `c3`, `c4` schreiben, musst aber mit F2 `Plot Setup` einen neuen `Plot2` aktivieren und dessen Einstellungen über F1 `Define` festlegen. Alle aktivierten Plots haben ein vorangestelltes Häkchen, das mit F4 ein- und abgeschaltet werden kann.

Spiegelung an der *x*-Achse:

Spiegelung an der *y*-Achse:

Spiegelung am Koordinatenursprung:



Lösche alle Figuren mit Ausnahme des Originalhauses. Im Funktionseditor ◆ [Y=] sind auch die entsprechenden Plots zu löschen. (Sonst erfolgt die Fehlermeldung `Undefined Variable`).

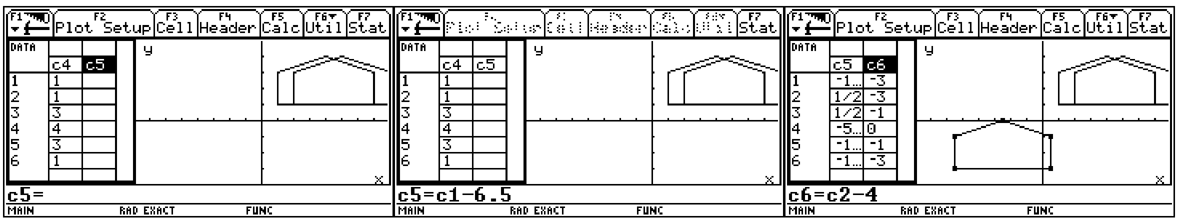
13. Versuche, das Haus an der Symmetralen des I.Quadranten zu spiegeln.
    Welche Vorschrift gilt hier?

14. Lösche alle Grafiken im Funktionseditor (Häkchen aus!), zeichne dann das ursprüngliche Haus noch einmal.
    Zeichne ein zweites Haus, das gegenüber dem ersten um 1 Einheit nach rechts verschoben ist.
    Wie ändern sich die Koordinaten?

    Zeichne ein drittes Haus, das um vier Einheiten nach unten und um 6,5 Einheiten nach links verschoben ist. Wie ändern sich die Koordinaten?

Wer schon Erfahrung mit einer Tabellenkalkulation gesammelt hat, wird sich möglicherweise schon gedacht haben, dass sich diese Koordinatenänderung recht elegant in einem Schritt durchführen lassen sollte. Wir wollen annehmen, dass in `c1` und `c2` die Koordinaten der Originalfigur liegen, in `c3` und `c4` findest Du die Koordinaten des zweiten Hauses und in `c5`, bzw. `c6` sollen die Koordinaten des dritten eingetragen werden.

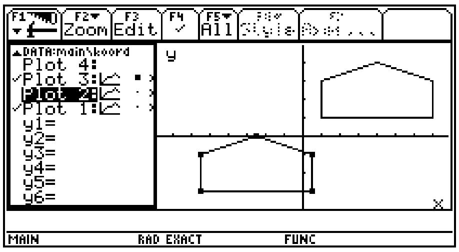
Man erhält die *x*-Koordinaten des dritten Hauses, indem man die ursprünglichen *x*-Werte um .... Diese **Transformation** wenden wir generell auf alle Elemente der Spalte `c1` an und speichern die Werte in `c5`:



Genauso legen wir die *y*-Koordinaten des verschobenen Hauses fest, definieren die Darstellungsart in einem `Plot 3`, und erhalten schließlich alle drei Häuser in einem Bild.

Lösche alle Grafiken.

(Du kannst Die Grafiken auch nur deaktivieren, indem Du mit [♦] [Y=] in den Funktionseditor gehst und mit der [F4]-Taste die jeweiligen Plots ausschaltest. An einem Häkchen am linken Rand erkennst Du, ob ein Plot aktiv ist oder nicht).



Mit [APPS] [6] `Data/Matrix Editor` und [1] `Current` kommst Du wieder zurück ins Datenblatt.

Du kannst jederzeit den ganzen Schirm zum [GRAPH]-Fenster machen, indem Du im [MODE] entsprechende Angaben machst. Versuche, einmal einen vollen Grafikschirm zu erzeugen und stelle dann den geteilten Schirm wieder her.

15. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 2$, das eine waagrechte Seite und eine Ecke im Koordinatenursprung hat.
    (Erinnere dich an die Formeln für das gleichseitige Dreieck: $h = a\,\sqrt{3}/2$)

    Die Ecken sind: ....

16. Ergänze dieses Dreieck zu einem regelmäßigen Sechseck.

17. Zeichne eine Sternfigur nach eigenem Entwurf.

18. Lösche die Figur.

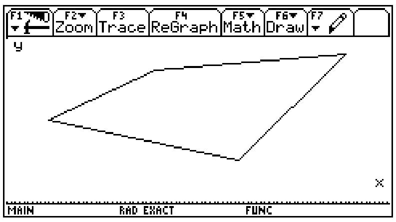
    Zeichne zumindest 8 Strecken, die gemeinsam mit den Koordinatenachsen im I.Quadranten ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 2 bilden.

    Gehe mit [♦] [Y=] in den Funktionseditor und editiere für `y1(x)` den Ausdruck `1/x`. Wechsle zurück ins Grafikfenster.

    Kommentiere das Ergebnis:

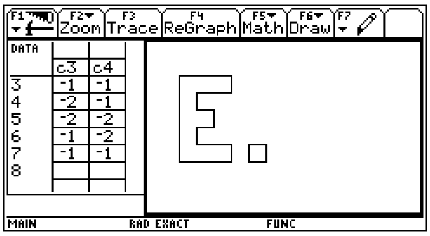
19. Die Standardeinstellung für die Achsen und deren Skalierung reicht oft nicht aus, eine Figur geeignet darzustellen. Mit [♦] [WINDOW] kann die Skalierung individuell eingestellt werden.

    Du sollst diese Möglichkeiten nutzen, um das Viereck ABCD [A(40;12,5),B(85;12,25),C(110;12,9),D(65;12,8)] „schirmfüllend" auf den Grafikschirm zu zaubern:



20. Gegen Ende dieses Kapitels sollst Du Dir Dein eigenes LOGO - Initialen oder sonst etwas - im Koordinatensystem schaffen. Erzeuge ein neues Datenblatt `logo`:[APPS] [6] [3] ......
    Jedes Polygon (Vieleck) wird durch ein Paar von Spalten im Datenblatt definiert.

Als Muster siehst Du hier ein „E .“. Die Spalten `c3` und `c4` beschreiben den „Punkt“. Die Achsen, ihre Bezeichnung und der Raster werden am Ende ausgeblendet. Du kannst damit rechnen, den ganzen Schirm zur Verfügung zu haben. ($-11 \le x \le 11$; $-5 \le y \le 5$)



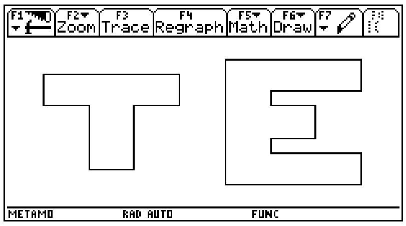
Wenn das LOGO fertig ist, werden wir es mit Hilfe eines Programms animieren, d.h. einen kleinen Film draus machen.

Animation des Logos

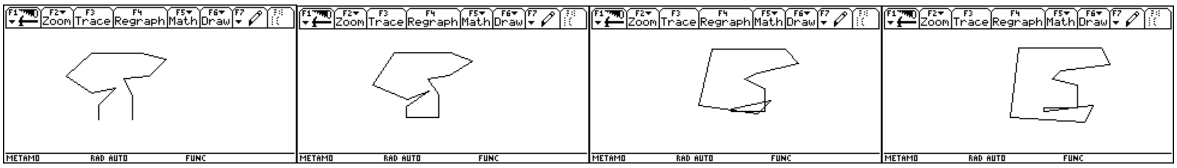
Dazu brauchst Du die beiden Programme `pics` und `film`*. Die Programme werden mit dem Übertragungskabel von einem Rechner auf den anderen übertragen. Mit dem ersten Programm wird eine Sequenz von Bildern erzeugt, die dann `film` auf dem Schirm des Rechners abspielt.
Rufe im Homescreen das Programm mit `pics()` auf. Es dauert dann eine ganze Weile, bis alle Bildchen hergestellt und gespeichert sind.

Anschließend kann der Film im Homescreen mit `film()` abgerufen werden. Mit der ON-Taste bricht man die „Vorführung“ ab.

21. Als Abschluß werden wir ganz nach der Überschrift noch eine Verwandlung eines Objekts in ein anderes vornehmen.
Dazu müssen Objekt 1 und Objekt 2 in einem Datenblatt definiert werden. Beide Objekte müssen aus der gleichen Anzahl von Punkten bestehen. Das Datenblatt muss den Namen `meta` (von Metamorphose = Verwandlung) tragen, weil das Verwandlungsprogramm darauf eingerichtet ist.

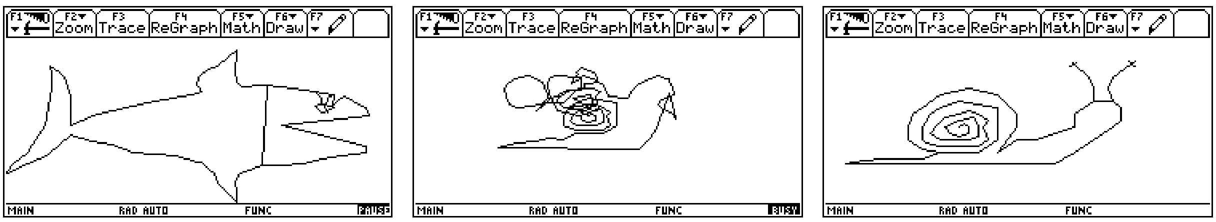


Dann kann im Homescreen das „Verwandlungsprogramm“ `metamo()` aufgerufen werden.

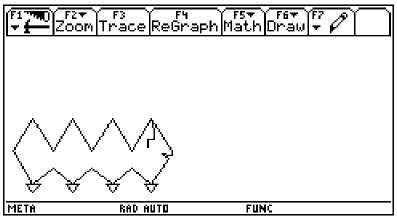


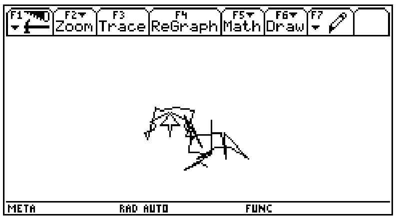
Tipp: Man kann dieses Programm zum Anlass nehmen, die Parameterdarstellung einer Geraden zu besprechen.

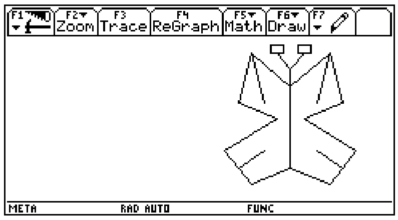
Es folgen zwei Schülerarbeiten.
Magdalena Barthofer aus Waidhofen/Ybbs verwandelt einen Fisch in eine Schnecke:



Kathrin Leitner von der Handelsakademie St.Pölten nahm das Programm wörtlich – die Metamorphose in der Biologie beschreibt die Entwicklung des Schmetterlings – und zeigt, wie sich eine Raupe als strahlender Schmetterling „entpuppt“.







* Die Programme können im Programmeditor eingetippt werden. Sie sind im Anhang zu finden. Der Autor schickt die Programme gerne per email zu. Für das Überspielen vom PC auf einen Rechner muss entweder *GraphLink* oder *TI-Connect* am PC installiert sein.

Josef Böhm
nojo.boehm@pgv.at

Es folgen die Programme.

```
pics()
Prgm
Local i,i_,j,θt,θk,zz
ClrIO
setGraph("Axes","Off"):setGraph("Grid","Off")
setGraph("Labels","Off"):FnOff :PlotsOff
Request "Name of the data",zz
Disp "Rotate →     1"
Disp "Switch →     2"
Disp "Flash →      3"
Disp ""
Input "Eingabe (1/2/3)",θk
For θt,Ø,1Ø,1
ClrDraw
1→i
While dim(#zz[i])≠Ø
  #zz[i]→xl:#zz[i+1]→yl
  (i+1)/2→i_
  If θk=1 Then
   xl*cos(θt*π/1Ø)→#("xl"&string(i_))
   yl→#("yl"&string(i_))
  ElseIf θk=2 Then
   xl→#("xl"&string(i_))
   yl*cos(θt*π/1Ø)→#("yl"&string(i_))
  ElseIf θk=3 Then
   xl*(1Ø-θt)/1Ø→#("xl"&string(i_))
   yl*(1Ø-θt)/1Ø→#("yl"&string(i_))
  EndIf
  NewPlot i_,2,#("xl"&string(i_)),#("yl"&string(i_)),,,,5
i+2→i
EndWhile
DispG:StoPic #("p"&string(θt))
EndFor
ClrDraw:ClrIO:Disp :Disp :Disp
```

```
Disp "Press F5 and"
Disp "Call film() from the Home Screen"
EndPrgm
film()
Prgm
ClrDraw:PlotsOff
Lbl  start
CyclePic  "p",1Ø,Ø.1,1,⁻1
Goto  start
EndPrgm
```

```
metamo()
Prgm
Local  t
PlotsOff  : FnOff
For  t,Ø,1,Ø.Ø5
meta[1]+t*(meta[3]-meta[1])→lx
meta[2]+t*(meta[4]-meta[2])→ly
NewPlot  9,2,lx,ly,,,,5
DispG
EndFor
DelVar  lx,ly
PlotsOff
EndPrgm
```

Wir gehen davon aus, dass der Begriff „Winkelfunktionen“ bereits bekannt ist. Es ist von Vorteil, wenn die Erweiterung über π/2 hinaus schon erfolgt ist. Diese Einheit ließe sich auch dazu verwenden von der *Blackbox* „Arbeiten mit Winkelfunktionen“ zur *Whitebox* „Winkelfunktionen allgemein“ zu gelangen In dieser Unterrichtseinheit soll vor allem auf die allgemeine Form der Winkelfunktionen hingearbeitet werden.

Die trigonometrischen Funktionen erforschen mit einem CAS

Da es in der Mathematik üblich ist, mit dem Bogenmaß zu arbeiten, werden wir grundsätzlich dieses Winkelmaß verwenden. Dabei soll aber nie der Zusammenhang zwischen Bogen- und Gradmaß vergessen werden. Wir wiederholen diesen Zusammenhang.

1. Wie lauten die Umrechnungsformeln zwischen den Modi?

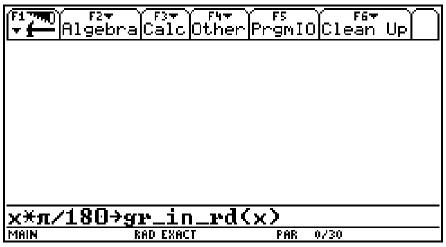
   x rad = ...°

   α ° = ... rad

2. Ergänze die nebenstehende Tabelle:

Bogenmaß	**Gradmaß**
(in rad)	(in °)
π	
2π	
π/4	
	60°
	90°
	120°
3π/2	
	540°
	0°
π/6	

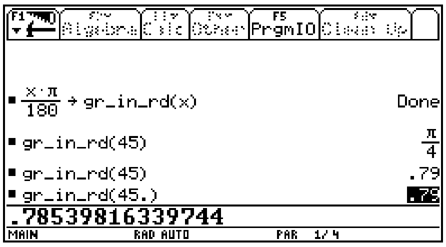
3. Wir erzeugen „Umrechungsfunktionen“, und zwar `gr_in_rd` und `rd_in_gr`.



(Den Unterstrich _ erhält man über [2nd] + [P]. Funktionsnamen dürfen höchstens aus 8 Zeichen bestehen.)

Wir testen das Programm durch Umrechnung von 45° ins Bogenmaß:

Das erste (exakte) Ergebnis erhält man mit [ENTER], wenn man das Ergebnis als Dezimalzahl sehen will, dann drückt man [♦] [ENTER] oder gibt im AUTO(matic)-Mode zumindest einen Dezimalpunkt in der Eingabe an. Mit der ⬆-Taste kann man das Ergebnis in der „History Area“ aktivieren und mit [ENTER] in die Eingabezeile kopieren. Nun sieht man alle verfügbaren Dezimalstellen.

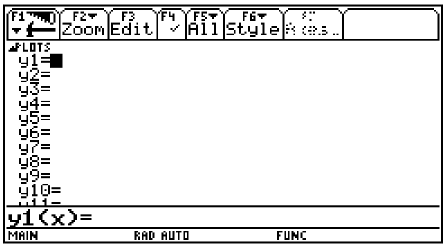


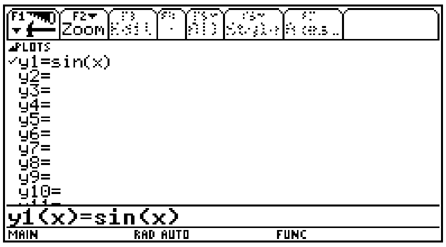
[CLEAR] löscht den Inhalt der Eingabezeile.

4. Erzeuge die Funktion `rd_in_gr` auf die gleiche Weise und überprüfe mit den beiden Funktionen die Werte in der ausgefüllten Tabelle.

5. Erzeuge eine Tabelle für die Funktion $y = \sin(x)$ für $-2\pi \le x \le 4\pi$ und verwende diese Tabelle zur Herstellung des Graphen in einem geeigneten Maßstab.

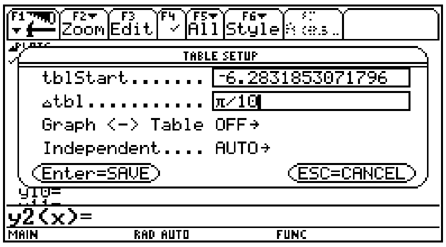
Sowohl für die Wertetabelle, als auch später für die Darstellung des Graphen am TI-89/Voyage 200 muss die Funktion zuerst über den Funktionseditor definiert werden.
Über [♦] [Y=] gelangt man in den Funktionseditor.
Die Eingabetaste ermöglicht die Eingabe des Funktionsterms in der Eingabezeile. Mit [ENTER] wird die Funktion dann endgültig in die Funktionenliste geschrieben. Das Häkchen daneben zeigt an, dass diese Funktion nun aktiv ist.
(Mit [F4] lässt sie sich wieder deaktivieren.)





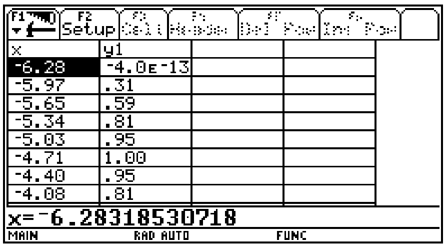
Um die Wertetabelle zu erhalten, müssen noch die Tabellenparameter gesetzt werden:

[♦] [TblSet] öffnet eine Dialogbox, in die wir die entsprechenden Werte einsetzen.



Die Tabelle soll bei -2π beginnen und z.B. eine Schrittweite von $\pi/10$ aufweisen. (Auch für `tblStart` kann -2π eingegeben werden). Vergiss nicht zu speichern.

Mit [♦] [TABLE] wechselt man nun sofort zur Tabelle.

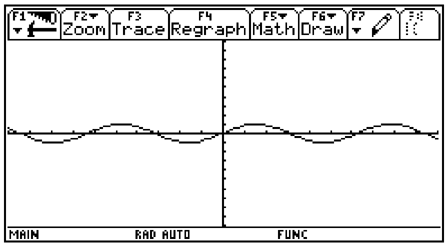


Für die Erstellung einer Grafik reicht die Genauigkeit auf 2 Dezimalstellen völlig aus.

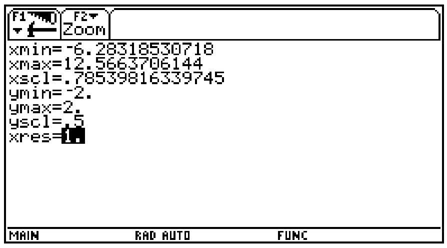
Skizziere den Funktionsgraphen von $y = \sin(x)$ für $-2\pi \le x \le 4\pi$ in den Kasten.

6. Stelle den Funktionsgraphen auf dem Rechner dar.

Man kann nun sofort über [◆] [GRAPH] ins Grafikfenster wechseln und erhält ein (erstes) Bild. Meistens ist man damit nicht zufrieden, da der dargestellte Bereich und die damit verbundene Skalierung nicht den Vorstellungen entspricht.

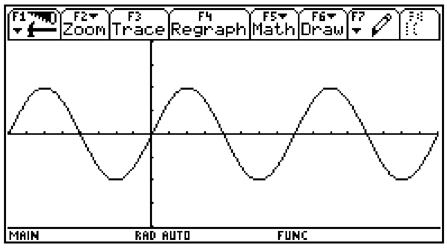


Mit [◆] [WINDOW] öffnet sich eine Eingabemaske, in der geeignete Parameter gesetzt werden können. Man will z.B. den Ausschnitt $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ und $-2 \leq y \leq 2$, mit einer Skalierung von $\pi/4$, bzw. 0,5 auf den Achsen erreichen.



Wiederum mit [◆] [GRAPH] erhält man eine ansprechende graphische Darstellung.

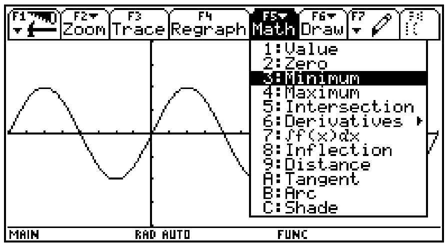
Vergleiche diese Grafik mit der händisch erstellten Skizze von vorhin.



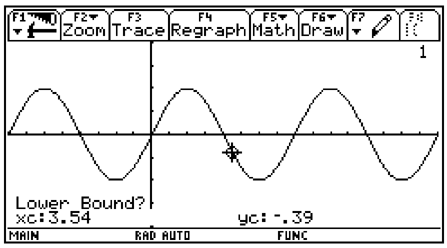
7. Welche Eigenschaften der Funktion kann man erkennen?

Insbesondere: Wo liegen die Nullstellen?
Wo liegen die Hoch- und Tiefpunkte?

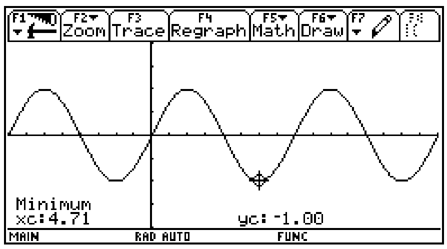
Der Umgang mit dem wichtigen und nützlichen [F5] `Math`-Menü soll an einem Beispiel gezeigt werden:
Wo liegt das erste Minimum mit $x > 0$?



Unter [F5] kann man u.a. die Funktionswerte (`Value`), Nullstellen (`Zero`), Maxima und Minima, Schnittpunkte (`Intersection`), Tangenten, Bogenlängen (`Arc`) von dargestellten Graphen ermitteln. Die gewünschte Option ist anzuwählen (mit ⊙ oder hier mit [3]), dann wird man um die Eingaben einer unteren (`Lower Bound`) und oberen Begrenzung (`Upper Bound`) des Suchbereichs, sowie um eine erste Schätzung (`Guess`) gefragt.
Alle Angaben lassen sich eintippen oder mit den Pfeiltasten (⊙, ⊙) ansteuern.



Das gesuchte Minimum liegt bei $x \approx 4{,}71$.
(Was ist der exakte Wert?)



Stelle hier in einer Liste die Nullstellen und Hoch-, bzw. Tiefpunkte zusammen.

8. Verwende geeignete Optionen des F5-Menüs,

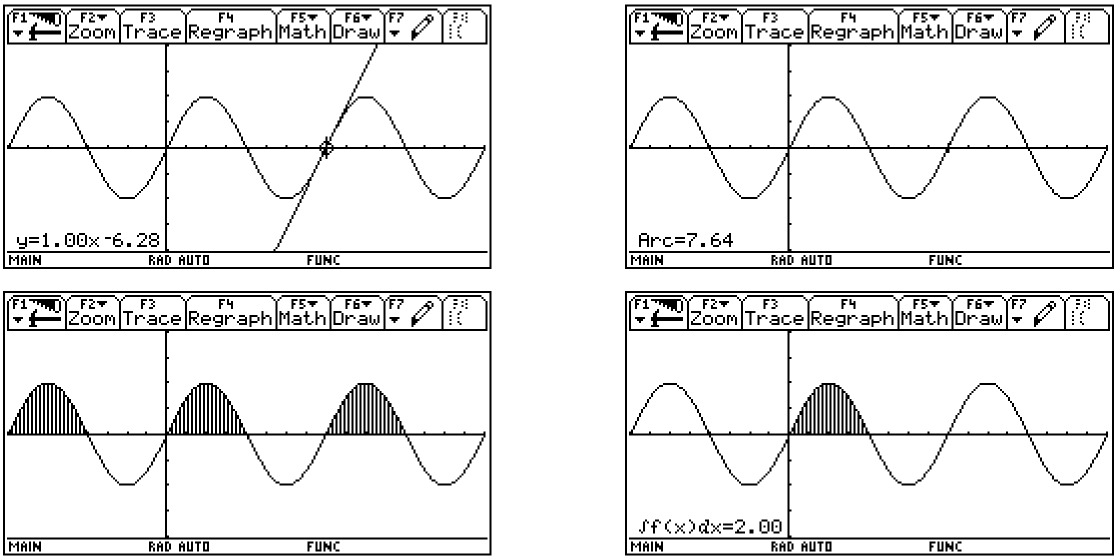
   (a) um die Tangente in einer beliebigen Nullstelle zeichnen zu lassen,

   (b) um die Länge der Kurve für eine Periode zu finden,

   c) um das untenstehende Bild zu erzeugen,

   d) um die schraffierte Fläche zu berechnen (über die Option `7:...` – jetzt ohne nähere Erklärung)

   (Mit F6 `1:ClrDraw` können alle nachträglich eingezeichneten Objekte wieder gelöscht werden).



Die gesuchte Fläche hat den Wert 6.

8. Sinuskurven (u.a.) nennt man nicht zu Unrecht *Schwingungen*. Bei einer Schwingung spricht man von der *Amplitude* (größte Abweichung von der Mittellage – Pendel!!) und von der *Periode* (= Intervall, innerhalb dessen sich die Funktion wiederholt, *Periodenlänge*, *Wellenlänge*). Die Anzahl der Schwingungen in einer Zeitheit nennt ihre *Frequenz*.

   Bei der Sinusschwingung $y = \sin(x)$ betragen diese Werte:

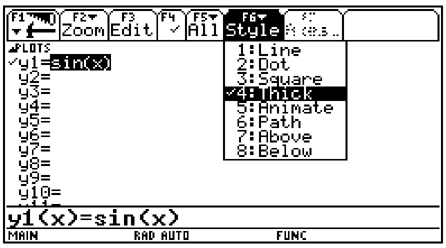
   Amplitude a = ... Periodenlänge l = ...

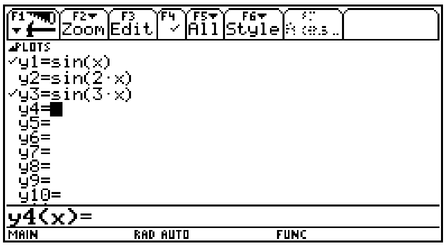
9. Eine etwas allgemeinere Form der Sinusschwingung lautet:

   $y = \sin(\omega x)$.

   Dabei nennt man ω (Omega) die *Kreisfrequenz.*

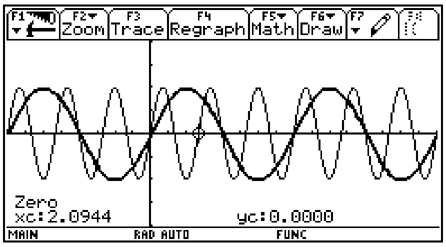
   Für die nächste Untersuchung wird der Graph von `y1` stark ausgezeichnet:





Zeichne nun der Reihe nach die angegebenen Sinusschwingungen zu $\sin(x)$, notiere für jede Schwingung die Kreisfrequenz und lies aus der Grafik die zugehörigen Periodenlängen ab.

Die Funktionen, deren Graphen man nicht sehen will werden mit [F4] deaktiviert.



Steuere entweder nur mit dem Cursor [F3] `Trace` die entsprechende Nullstelle an und lies die x-Koordinate ab, oder suche über [F5] eine geeignete Nullstelle.

(Tipp: mit den ⬆ ⬇-Tasten wechselt man zwischen den Graphen.)

Für das rechte Bild wurde auch die Ausgabegenauigkeit auf 4 Fixkommastellen verändert.

Dabei sind fallweise auch die [WINDOW]-Einstellungen geeignet anzupassen.

$y = \sin(2x)$ ω = ... ; l = ...

$y = \sin(3x)$ ω = ... ; l = ...

$y = \sin(4x)$ ω = ... ; l = ...

$y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ ω = ... ; l = ...

$y = \sin(0{,}1x)$ ω = ... ; l = ...

$y = \sin(\pi x)$ ω = ... ; l = ...

Was bewirkt die jeweils veränderte Kreisfrequenz?

10. Suche einen Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Periodenlänge!
(Tipp: die Dezimalzahlen haben sicher etwas mit der Zahl π zu tun!)
Welche Gleichung beschreibt diesen Zusammenhang?

....

11. Skizziere hier - ohne TI-89/Voyage-Unterstützung!! - die Graphen von $y = \sin\frac{3x}{2}$ und $y = \sin\frac{x}{3}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Gib für beide Funktionen zumindest zwei Nullstellen und die Amplitude an. Vergleiche dann die Graphen mit den Ergebnissen im [GRAPH]-Fenster.

11. Wie muss der Funktionsterm für eine Sinusschwingung (Amplitude = 1) mit den folgenden Periodenlängen lauten:

$l = \pi/3$: $y =$ .... $l = 2{,}5\pi$: $y =$ ....

$l = 100°$: $y =$ .... $l = 2$: $y =$ ....

Überprüfe die Ergebnisse mit dem Rechner!

12. Gelten diese Eigenschaften (Amplitude, Periodenlänge, Kreisfrequenz) auch für die Winkelfunktionen Kosinus und Tangens?

Funktion	**Amplitude**	**Periodenlänge / Kreisfrequenz**
$y = \cos x$		
$y = 0.5\cos(2x)$		
$y = 2\cos(0{,}25x)$		
$y = \tan x$		
$y = 3\tan(4x)$		
$y = \tan\dfrac{x}{5}$		

13. Skizziere die Tangensfunktion $y = \tan x$ für $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.

Was passiert an den Stellen $x = \dfrac{k\pi}{2}$ für $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Diese Untersuchung wird nun konsequent weitergeführt, bis die Bedeutung aller Parameter in der allgemeinsten Form deutlich gemacht wird:

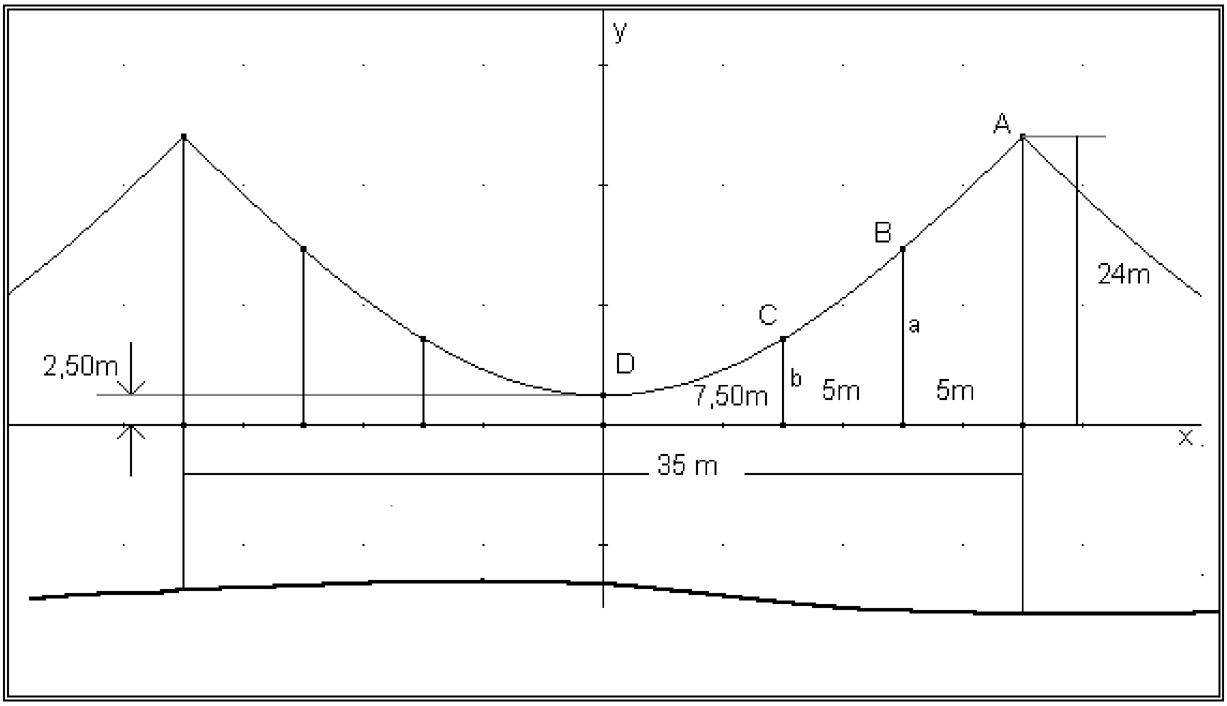
zB. $y = a \sin(b\,x + c) + d$

(Wird hier nicht näher ausgeführt.)

Eine Anwendungsaufgabe könnte dann so lauten :

Bei einer Hängebrücke werden die Stahltrossen durch die Unterstützungen *a* und *b* in die Form einer Winkelfunktion gebracht. Welche Länge müssen die unterstützenden Stäbe a und b haben?

(Wähle zuerst ein geeignetes Koordinatensystem!)
Wie lange sind die Verbindungen x = AB, y = BC und z = CD?
Runde alle Ergebnisse auf 0,1m.



(In der Realität sind die Kurven Parabeln.)

Die komplette Unterrichtseinheit wurde mehrmals erfolgreich im Unterricht eingesetzt. Rückfragen, bzw. Anregungen und Erfahrungen werden vom Autor gerne beantwortet bzw. entgegengenommen.

Josef Böhm
T³ Österreich & ACDCA
nojo.boehm@pgv.at

Weitere Aufgaben zu Anwendungen der Winkelfunktionen können von der Homepage der ACDCA unter den T³-Materialien heruntergeladen werden, `www.acdca.ac.at`.

Logistisches Wachstum – diskret, kontinuierlich und chaotisch

Es ist leicht einzusehen, dass das *exponentielle Wachstum* kein optimales Modell für realistische Wachstumsprozesse darstellt, da wohl kein Wachstum für lange Zeit unbegrenzt und unbeschränkt anhalten kann. Das **logistische Modell** verknüpft das exponentielle Wachstum mit dem beschränkten, indem es in geschickter Art und Weise zu Beginn eher dem exponentiellen Einfluss folgt, auf längere Sicht aber einer - faktisch immer vorhandenen - Kapazitätsgrenze immer mehr Gewicht verleiht, und sich und damit ähnlich wie das beschränkte Wachstum entwickelt

Wir folgen einem Beispiel von Bert K. Waits:

Die Bären sind los!
1995 gab es im Jellystone Nationalpark - ein „geschlossenes“ Ökosystem - 10 Grizzlybären.
Man weiß, dass der Park Raum für ca. 100 Bären bietet. Der jährliche Zuwachs ist etwa proportional zur jeweiligen Bärenpopulation, aber auch zur jeweils freibleibenden Restkapazität.
Biologen nennen uns einen Proportionalitätsfaktor von ≈ 0,001.

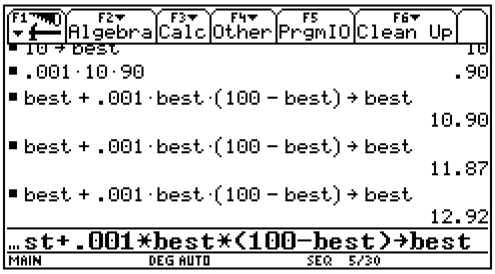
Zuerst wird ein diskretes Modell mit Hilfe einer rekursiven Darstellung entwickelt und studiert. Dazu bezeichnen wir den Anfangsbestand im Jahre 1995 als B_0, und dann allgemein mit B_n den Bestand für das Jahr 1995+n.

Bei den vorliegenden Daten ergibt sich der Bestand für die Jahre 1996 und 1997 wie folgt:

Für 1996 (n = 1) beträgt der Zuwachs $Z_1 = 0{,}001 \times 10 \times (100 - 10) = 0{,}9$ und daher ist der Bestand $B_1 = 10{,}9$.

Für 1997 (n = 2) ergibt sich der Bestand $B_2 = B_1 + 0{,}001 \times B_1 \times (100 - B_1) = 11{,}87$.

Diese Vorgangsweise können wir sehr leicht am TI-89/Voyage 200 beliebig lange - und sehr bequem - nachvollziehen.



Wir speichern den Anfangsbestand als `best` und rechnen den ersten Zuwachs aus (0,90).

Besser ist es, gleich den neuen Bestand zu berechnen und diesen sofort wieder als alten Bestand `best` zu speichern. Nun führt jeder weiter Druck auf [ENTER] zum Wert des folgenden Jahres.

Leider wird das bald unübersichtlich, da man - ohne mitzuschreiben - bald nicht mehr weiß, wie viele Jahre verstrichen sind. Außerdem wird eine grafische Darstellung auch sehr umständlich. Das wird sich gleich ändern.

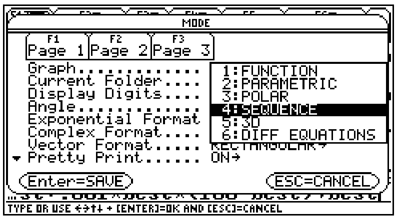
Zuerst formulieren wir den Sachverhalt möglichst allgemein:

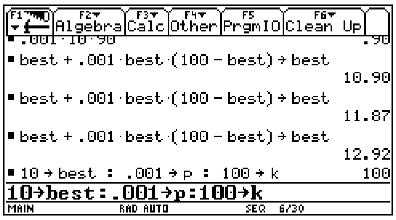
$$\text{Zuwachs}(n) = p * B(n-1) * (K - B(n-1)), \text{ daher gilt weiter}$$

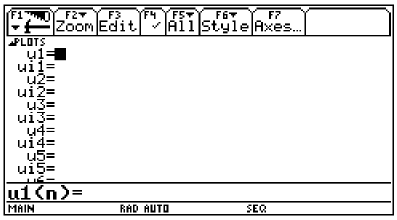
$$B(n) = B(n-1) + \text{Zuwachs}(n) = B(n-1) + p * B(n-1) * (K - B(n-1))$$

Diese *rekursive* Folge übertragen wir nun in den [Y=]-Editor, nachdem wir den Rechner in den dafür geeigneten Grafikmodus umgestellt haben. Dieser Modus heißt `SEQUENCE` (= Folge)-Modus.

Über [MODE] stelle den `Graph` auf die 4. Option `4:SEQUENCE` ein. (Öffne die Optionen mit ▷ und vergiss nicht, mit [ENTER] zu speichern.)



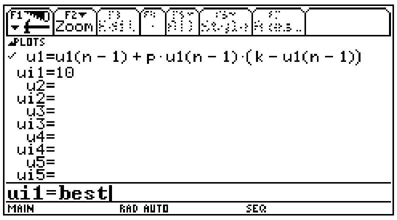


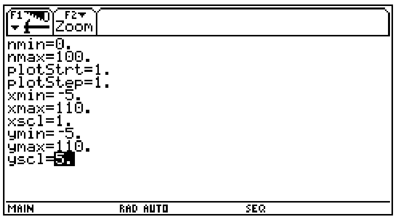


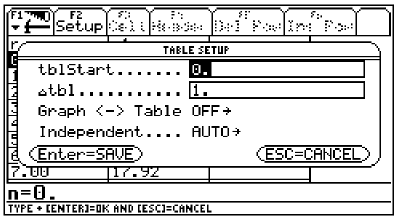
Um in weiterer Folge möglichst flexibel zu sein, speichern wir die Parameter Anfangsbestand, Proportionalitätsfaktor und Kapazität unter den Variablenbezeichnungen `best`, `p` und `k`. Dann wird der Funktionseditor [♦] [Y=] geöffnet, der sich ganz ungewohnt präsentiert.

Anstelle von Funktionen `y1(x)`, `y2(x)`, ... werden nun Folgen `u1(n)`, `u2(n)`, ... erwartet. Für den Fall, dass rekursive Folgen definiert werden, müssen auch noch allfällige Startelemente `ui1`, `ui2`, ... festgelegt werden (das `i` kommt von *initial*).

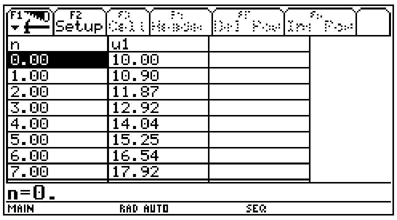
Somit schreiben wir die Folge in den Editor (anstelle von $B(n)$ heißt es hier eben `u1(n)`!)

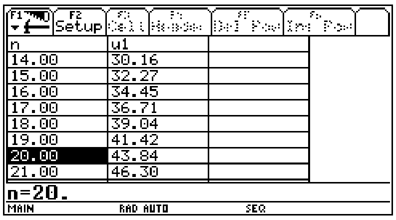


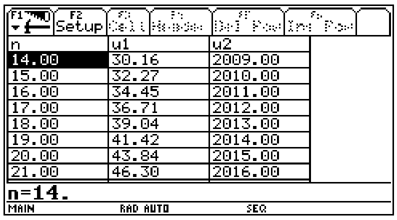




Nun sind einige wichtige Dinge zu beachten, sonst kommt es leicht zu lästigen Fehlermeldungen. Da unsere Folge mit dem „nullten“ Element beginnt, muss das in den [♦] [WINDOW]-Einstellungen fixiert werden. Bei dieser Gelegenheit richten wir auch die anderen Parameter ein - vorerst für die ersten 100 Jahre. Der Zeichenbereich für x wird etwas größer gewählt und der y-Bereich ergibt sich aus der Angabe. Über [♦] [TblSet] legen wir den Start für die Wertetabelle fest und dann sehen wir uns mit [♦] [TABLE] die Tabelle an.

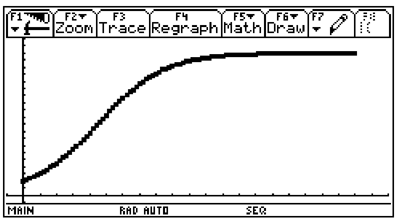
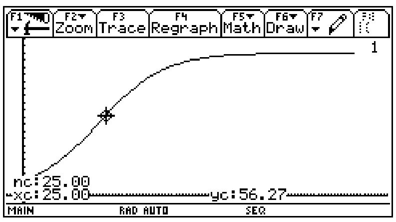


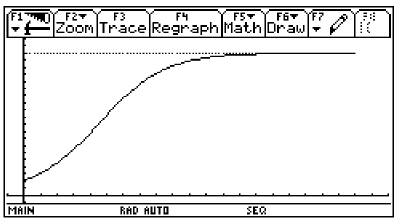




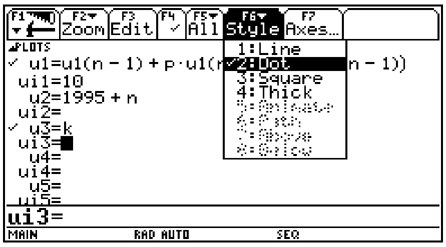
Mit [⊙] kann man weiter in die Zukunft schauen und findet z.B., dass nach dem Modell im Jahr 1995 + 20 = 2015 ca. 44 Bären im Park sein sollten. Vielleicht möchtest Du aber bequemerweise auch die Jahreszahlen in die Tabelle aufnehmen? Das kann wieder rekursiv geschehen, geht aber einfacher direkt: `u2(n)=1995+n`. (Rekursiv müsste es heißen: `u2(n)=u2(n-1)+1` und `ui2=1995`.)

Da die Grafikeinstellungen bereits vorgenommen worden sind können wir sofort ins Grafikfenster wechseln ([♦] [GRAPH]). Das erste Bild hat den [F6] `Style 3:Square`, die anderen `1:Line` erhalten.



Über [F3] gelangt man in den `Trace` (= Spur)-Modus und beantwortet z.B. graphisch die Frage, wie hoch ca. der Bestand im Jahr 2020 sein könnte. (Bei Fehler: [F7] `Axes TIME` einstellen!!)



Die Kapazitätsgrenze wird noch hinzugefügt, indem man im Funktionseditor die konstante Folge `u3(n)=k` erzeugt. Über [F6] `Style` lässt sich die entstehende horizontale Gerade punktiert darstellen.

Beantworte die folgenden Fragen:

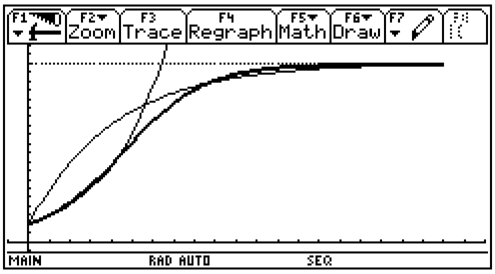
Wie viele Bären sind etwa 2040 zu erwarten?

Wann ungefähr wird die Kapazitätsgrenze erreicht sein?

Wann geht es den Bären am besten? Wann vermehren sie sich am raschesten?

Kannst Du den Wachstumsverlauf erklären?

Wie wirken sich Änderungen der Parameter Anfangsbestand, Kapazität und Proportionalitätsfaktor auf die Gestalt der Kurve aus? (`best` muss im Funktionseditor als `ui1` verändert werden, `p` und `k` werden im Homescreen neu festgelegt.)



In diesem Bild (basierend auf den Ausgangsparametern) werden die „ersten paar" Jahre durch ein exponentielles Wachstum und der spätere Verlauf durch beschränktes Wachstum modelliert.

Suche geeignete Werte für die beiden Folgen (Funktionen), die das logistische Wachstum annähernd stückweise beschreiben könnten.
(Verbinde passende Abschnitte durch eine lineare Funktion.)

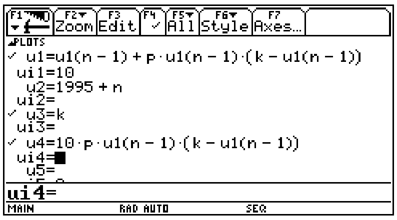
Hinweis: Diese beiden Kurven können im Funktionseditor als rekursive Folgen definiert werden.
Exponentielles Wachstum : der jährliche Zuwachs ist proportional zum jeweiligen Bestand,
Beschränktes oder gebremstes Wachstum: der jährliche Zuwachs ist proportional zur jeweiligen Restkapazität (= Kapazität – momentaner Bestand).

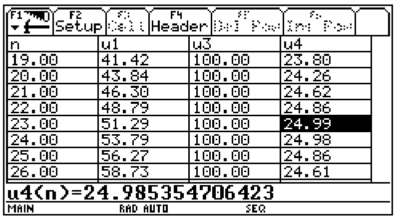
Wenn die Funktionsdarstellung dieser beiden Wachstumsmodelle bereits bekannt ist, können die Graphen der Funktionen nicht über den [Y=] - Editor definiert werden, sondern man ruft über [F6] `Draw 2:DrawFunc` auf und schreibt den Funktionsterm in Abhängigkeit von x. Mit [F6] `1:ClrDraw` werden allfällig früher gezeichnete Graphen wieder gelöscht.

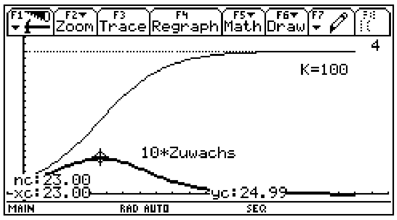
Die oben aufgestellte Frage, wann sich die Population am raschesten vermehrt, lässt sich sehr schön graphisch (und tabellarisch) beantworten, indem man die „Zuwachsfolge" deutlich macht. Die Zuwachsfolge definiere ich als `u4(n)` im Funktionseditor. Ich „überhöhe" den Graphen mit dem Faktor 10, weil er sonst zu flach wäre, und man seine charakteristische Form nicht gut erkennen könnte.

(Wo hat die Zuwachsfolge ihren größten Wert? Wie sieht dort der Graph der Bestandsmenge aus?)

Der Text wird über [F7] `7:Text` in die Grafik eingefügt.







Für das kontinuierliche Modell gibt es eine explizite Funktionsvorschrift, die sich aus der Analysis begründet. (Aus der Differenzengleichung, die das diskrete Modell beschreibt wird eine Differentialgleichung.)

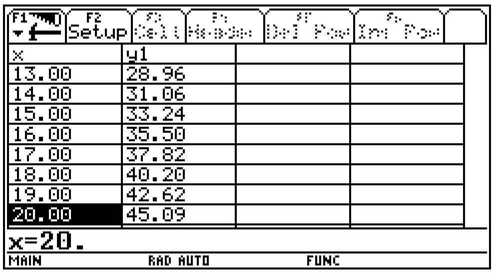
Die Funktionsvorschrift lautet: $B(x=t)=\dfrac{K}{1+\left(\dfrac{K}{B_0}-1\right)e^{-cKt}}$.

Dabei kann die Proportionalitätskonstante p aus dem diskreten Modell als Näherungswert für die Konstante c verwendet werden.

Für $K = 100$, $B_0 = 10$ und $c = 0{,}001$ erhalten wir die „Bärenformel“: $B(t)=\dfrac{100}{1+9e^{-0{,}1t}}$.

Zeichne die Funktion mit Hilfe von [F6] `2:DrawFunc` (als Funktion von x) zum Bild des diskreten Modells. Beurteile die Anpassung. Um die numerischen Werte vergleichen zu können, muss im [MODE] der Grafikmodus auf `FUNCTION` umgestellt und die Funktion im Funktionseditor definiert werden. Dann lassen sich im der Tabelle [♦] [TABLE] die Funktionswerte für das kontinuierliche Modell herauslesen und mit den alten Werten vergleichen.

n/t	diskret	kontinuierlich
0	10	
1	10.90	
2	11.87	11.95
5		
10		
20		45.09
100		



Nimm den Bestand des 20. Jahres aus dem diskreten Modell und suche einen geeigneten Wert für c im kontinuierlichen, so dass die Bestände für dieses spezielle Jahr in beiden Modellen übereinstimmen.

($c \approx 0{,}000975$).

Es folgt die Herleitung der „Bärenformel“ aus der Differentialgleichung, die aus der Differenzengleichung abgeleitet wird.

Aus $\quad B(n) = B(n-1) + p * B(n-1) * (K - B(n-1))$ $\quad$ (siehe Seite 1)

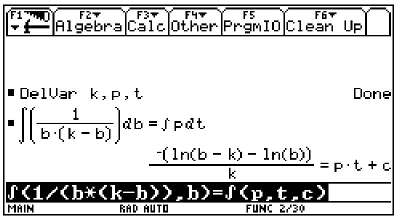
folgt $\quad B_t - B_{t-1} = \Delta B = \Delta t \cdot p \cdot B_{t-1} \cdot (K - B_{t-1})$

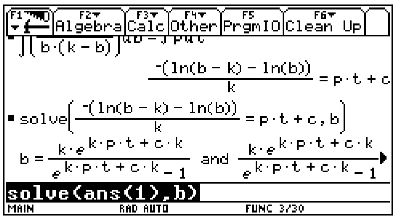
der Zuwachs (die Differenz) ist auch proportional zum (kleinen) Zeitzuwachs Δt.

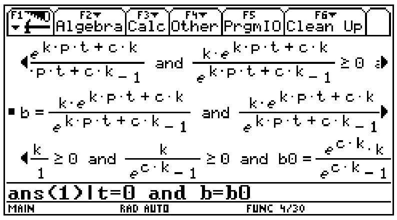
$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = p \cdot B \cdot (K-B) \rightarrow \frac{dB}{dt} = p \cdot B \cdot (K-B)$$

$$\frac{dB}{B \cdot (K-B)} = p \cdot dt; \qquad B(t=0) = B_0$$

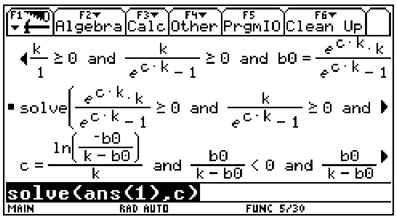
Die Differentialgleichung wird mittels Variablentrennung gelöst. Da erweist sich ein CAS-Werkzeug wie der TI-89 oder der Voyage 200 als ideales Instrument.

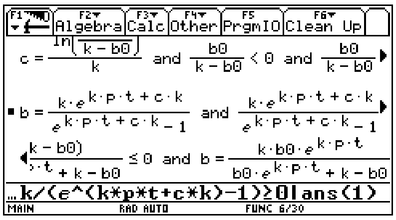


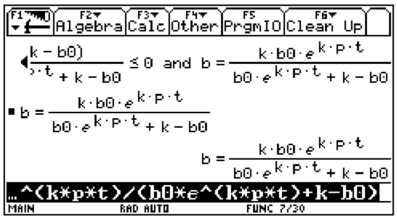




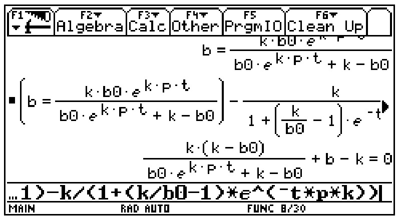
Die Angabe von c als drittes Argument im Integral erzeugt das unbestimmte Integral mit c als Integrationskonstante, führt daher zur allgemeinen Lösung der Differentialgleichung. Wir lösen nach b auf, ...



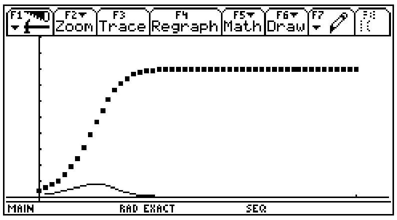




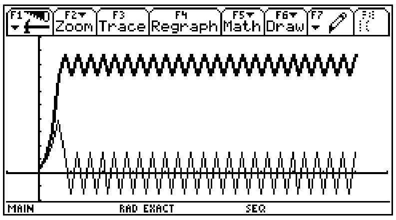
.... bestimmen die Integrationskonstante c aus der Bedingung $B(t = 0) = 10$ und setzen das Ergebnis in den Ausdruck für b ein. Die Identität der Terme kann man durch manuelles Umformen zeigen, oder man benützt auch dazu das CAS.



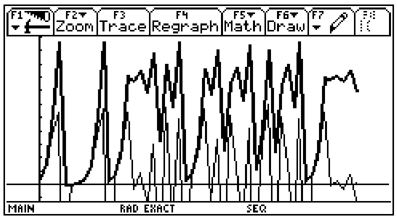
Für den letzten Teil unserer Untersuchung ändern wir die Angaben auf $K = 400$ und $B_0 = 20$. Außerdem interessieren nur die ersten 50 Zeitperioden. Für $p = 0{,}001$ und eine nicht überhöhte Wachstumsfolge ergibt sich das vertraute Bild.



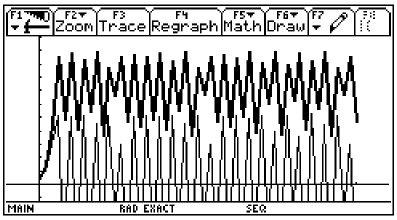
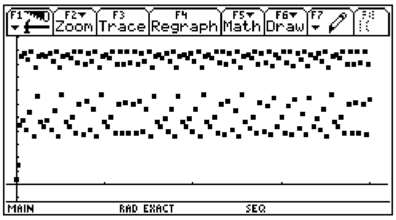
$p = 0{,}001$



$p = 0{,}0051$



$p = 0{,}0075$

$p = 0{,}0065$, rechts nur `u1(n)` im `Style Thick`

Aber wenn man den Faktor p vergrößert, wird die Entwicklung sehr sonderbar und entwickelt sich immer „chaotischer". Da dieses *Chaos* aber strengen Rechenvorschriften entspringt, wird es ein *deterministisches Chaos* genannt.

Bei besonderen Werten für p lassen sich auch im Chaos gewisse Muster erkennen. Der Prozess ist sehr sensibel. Versuche etwa $p = 0{,}0048$.

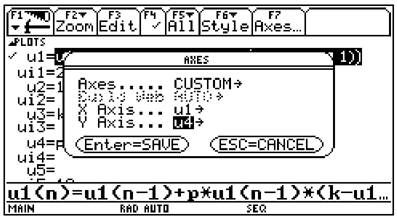
In weiterer Folge wollen wir auch die Bestand-Wachstums-*Phasen*- und die *Cobweb*-Diagramme zeichnen lassen.

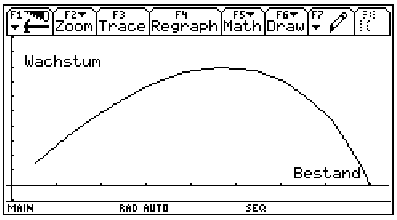
Wenn man die Wachstumsgeschwindigkeit des Bestands in Abhängigkeit vom jeweiligen Bestand graphisch darstellt, erhält man ein sogenannntes *Phasendiagramm*. Hier gilt

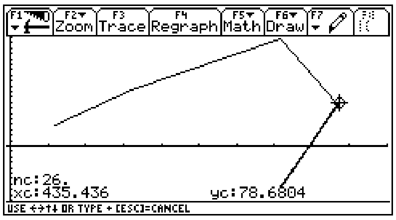
$$B' = p\, B\, (K - B).$$

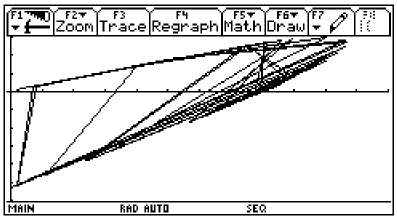
Welche Form hat das Phasendiagramm beim logistischen Wachstum? Was lässt sich aus dem Phasen-diagramm rauslesen und was nicht?

Im Bestands-Wachstums-Phasendiagramm wird auf der *x*-Achse der jeweilige Bestand und auf der *y*-Achse der zugehörige Zuwachs aufgetragen. Die Werte entnehmen wir den Folgen `u1`, bzw. `u4` und stellen die grafische Darstellungsweise im [Y=]-Editor über [F7] `Axes` um.





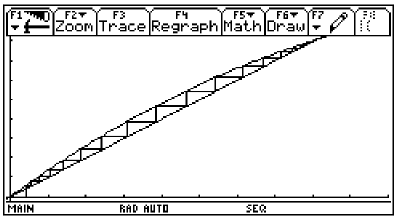


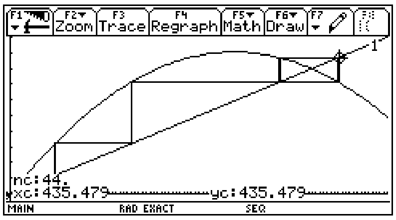


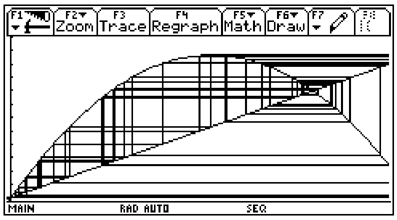
Dies sind die Phasendiagramme für $p = 0{,}001$, $p = 0{,}0051$ und $p = 0{,}0075$. Beim zweiten Bild sieht man deutlich, dass schließlich zwischen zwei Zuständen (*Attraktoren*) hin- und hergesprungen wird.

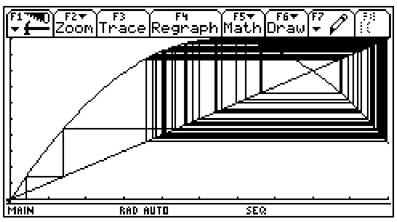
Natürlich sind die [WINDOW]-Werte anzupassen. Da auf der *x*-Achse nun die Bestände aufgetragen werden, ist `xmax` dementsprechend zu vergrößern, und auch die *y*-Werte unterliegen größeren Schwankungen.

Über [F7] `Axes` stellt man die `Axes` um auf `WEB`, aktiviert im Funktionseditor nur `u1` und lässt das Cobweb-Diagramm zeichnen. (Erst [F3] und dann mit ⊙ den Linienzug erzeugen.)









Für die oben angegebenen *p*-Werte ergeben sich charakteristische Bilder von der Konvergenz über zwei „*Attraktoren*" bis hin zu den chaotischen Prozessen. In jedem einführenden Buch über *Fraktale* kann man über diese Phänomene nachlesen.

Auf der nächsten Seite folgen Vorschläge für Übungs-, bzw. Vertiefungsaufgaben.

Übungsaufgabe 1: Verbreitung eines Produkts

(nach G.Ossimitz, Materialien zur Systemdynamik)

Wir nehmen an, dass sich ein Produkt auf einem Markt mit einer begrenzten Marktkapaziät ausbreitet wie eine ansteckende Krankheit. Jeder potentielle Käufer erwirbt das Produkt nur einmal.
Als Kapazität werden 1500 Einheiten angenommen und man startet mit einer Verteilung von 20 Werbeexemplaren. Als Wachstumsrate/Monat (= p) schätzt man den Wert 0,0005. Das Wachstum der Verbreitung entspricht dem monatlichen Absatz.

a) Erstelle das diskrete Modell für die Verbreitung des Produkts mit den zugehörigen Absatzmengen.
b) Stelle die Verbreitung und die Absatzmengen in einer geeigneten Form graphisch dar.
c) Wann wird die halbe Marktkapazität erreicht?
d) Wann wird das Absatzmaximum erreicht?
e) Wann wird die 1000 Einheitengrenze übersprungen?
f) Ändern sich die Ergebnisse c) bis e) wesentlich, wenn man mit 50 Werbeexemplaren beginnen würde?
g) Wie lautet die entsprechende logistische Wachstumsfunktion?

Übungsaufgabe 2: Steueraufkommen

Die Steuereinnahmen S (in Mill. EURO) eines Wirtschaftszweiges wachsen nach der Formel:

$$S(t) = \frac{6}{1 + 4e^{-ct}}$$

Nach $t = 3$ Jahren betragen die Einnahmen bereits 2,7 Millionen €.

a) Berechne die Wachstumskonstante c (auf drei Dezimalstellen genau).
b) Mit welchen Einnahmen wurde überhaupt begonnen?
c) Erzeuge den Funktionsgraphen in einem geeigneten Maßstab und skizziere den Graphen.
d) Zu welchem Zeitpunkt steigt das Steueraufkommen am raschesten? Markiere den Zeitpunkt am Graphen.
e) Wie hoch ist Deiner Meinung nach die obere Grenze der Steuereinnahmen? Begründung!

Übungsaufgabe 3: Haben Sie das schon gehört?

In einer Stadt mit ca. 50 000 Einwohnern sei die Anzahl $N(t)$ derer, die nach t Tagen von einem bestimmten Gerücht gehört haben, näherungsweise durch die folgende Formel gegeben:

$$N(t) = \frac{40000}{1 + 39999e^{-2.5t}}$$

Beantworte alle Fragen vorerst nur mit Hilfe des Funktionsgraphen und/der mit Hilfe der Tabelle.

a) Wie viele Personen wissen nach 5 Tagen von dem Gerücht?
b) Wie lange dauert es, bis dass die halbe Stadt davon weiß?
c) Zu welchem Zeitpunkt ist das Gerücht am lebendigsten?
d) Bis wann ist Deiner Meinung nach auch der letzte Bürger davon informiert? Begründe Deine Antwort!
e) Welche Größe in dieser Funktionsgleichung beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich das Gerücht verbreitet? Schreibe eine Formel für eine langsamere Verbreitung hin.
   Wie muss sich der Funktionsgraph verändern?
f) Versuche die Aufgaben a) und b) numerisch zu lösen.
g) Wie könnte ein entsprechendes diskretes Modell lauten.

Wir gehen davon aus, dass der Matrizenbegriff schon bekannt ist. Der Umgang mit Matrizen ist besonders rechenintensiv, daher ist es kaum möglich, sinnvolle Anwendungsaufgaben praktisch durchzuführen. Mit dem TI-89 und dem Voyage 200 haben wir nun die Gelegenheit, die Rechnungen auszulagern, und uns auf die wesentlichen Grundlagen zu konzentrieren. In diesem Papier werden zwei Anwendungen angeboten:
(1) Eine Querverbindung zur Geometrie, die eine Vernetzung von Anwendung der Matrizenrechnung, Trigonometrie, Vektorrechnung und räumlicher Anschauung herstellt.
(2) Eine Aufgabe aus der Ökologie, die den Einsatz von Übergangsmatrizen zeigt.

Erzeuge einen neuen Folder mit dem Namen `matrix`, indem Du in der Eingabezeile schreibst: `newfold matrix`. Stelle über [MODE] das Winkelmaß `Angle` auf `DEGREE` ein. Zur Eingabe von Matrizen siehe die Hinweise auf der letzten Seite.

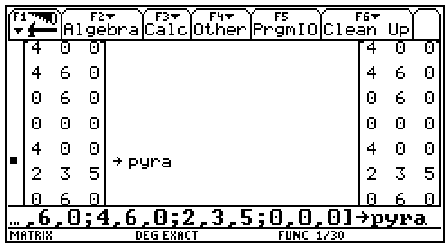
Vom Schrägriss zur perspektiven Darstellung

Für die Darstellung von räumlichen Objekten stehen unterschiedliche Verfahren zur Verfügung. Sie reichen von der Freihandzeichnung über die Fotografie zu strengen geometrischen Methoden, wie Darstellung in Grund-, Auf- oder Schrägriss. Sehr anschaulich sind perspektivische Bilder, da sie die räumliche Wirkung besonders zur Geltung bringen.

Ein räumliches Objekt wird durch die Menge seiner Punkte bestimmt. Es kann eine Raumkurve oder eine durch eine oder mehrere Flächen begrenzte Figur sein. Wir wollen die Abbildungsverfahren an einer Pyramide mit einer rechteckigen Grundfläche erforschen. Die Pyramide hat ihre Basis ABCD in der *xy*-Ebene mit A(4,0,0), B(4,6,0), C(0,6,0) und D(0,0,0). Die Spitze S der Pyramide liegt in (2,3,5).

Wir beschreiben die Pyramide durch ein

„*Raumpolygon*" [A,B,C,D,A,S,C,B,S,D].



Das Problem besteht nun vor allem darin, die dreikomponentigen Koordinaten des räumlichen Objekts in Koordinatenpaare des ebenen Bildes des Objektes zu transformieren.

$$P(x,y,z) \rightarrow P_p(x_p, y_p)$$

Eine allgemeine **axonometrische Abbildung** (Grund-, Auf-, Seiten- und Schrägriss sind Sonderfälle davon) ist festgelegt durch die Winkel α und β, die die Bilder von *x*- und *y*-Achse mit der waagrechten Bezugsgeraden bilden, sowie durch Verkürzungsverhältnisse v_x, v_y, und v_z in den Achsenrichtungen. Beim Schrägriss bilden z_p und x_p einen rechten Winkel, y_p bildet den Winkel β und nur die Abstände in *y*-Richtung werden verkürzt.

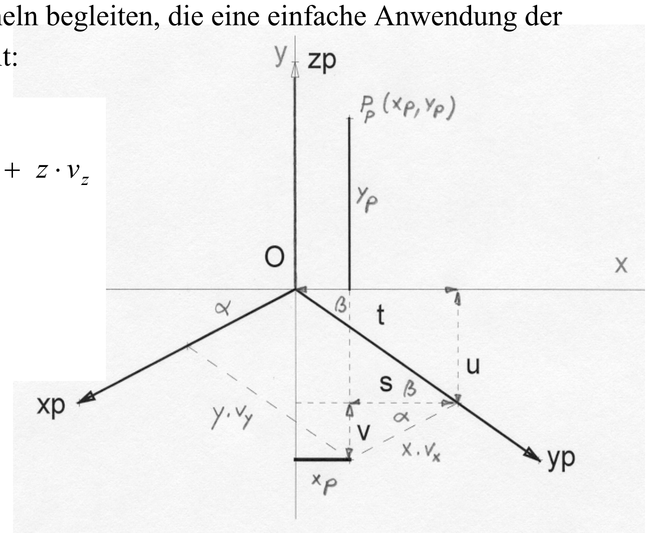
Skizziere einen Schrägriss der gegebenen Pyramide mit $\beta = 30°$ und $v_y = 0,5$.

Die Skizze soll die Ableitung der Transformationsformeln begleiten, die eine einfache Anwendung der Winkelfunktionen in rechtwinkligen Dreiecken darstellt:

$$x_p = t - s = y \cdot v_y \cdot \cos\beta - x \cdot v_x \cdot \cos\alpha$$
$$y_p = -u - v + z \cdot v_z = -y \cdot v_y \cdot \sin\beta - x \cdot v_x \cdot \sin\alpha + z \cdot v_z$$

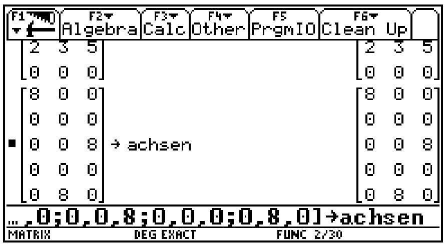
oder in Matrizenschreibweise:

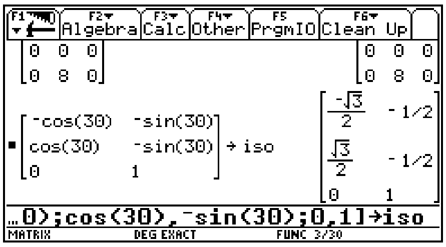
$$(x_p, y_p) = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} -v_x \cos\alpha & -v_x \sin\alpha \\ v_y \cos\beta & -v_y \sin\beta \\ 0 & v_z \end{pmatrix}$$

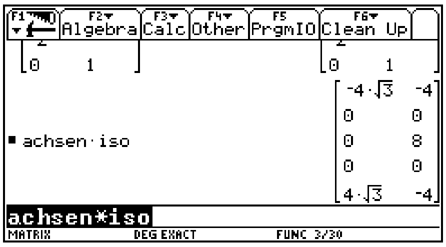


Bevor wir das Objekt `pyra` darstellen, sollen auch die Achsen abgebildet werden. Bei dieser Gelegenheit werden wir sehen, wie wir zu einer räumlichen Darstellung kommen. Das Achsenkreuz wird durch das räumliche Polygon `achsen` definiert. Als erste Darstellungsform wählen wir die recht beliebte „*isometrische Projektion*“. Hier bilden die Bilder der Achsen miteinander die Winkel 120° ($\alpha = \beta = 30°$) und es gibt in keiner Achsenrichtung eine Verkürzung. Wir definieren die entsprechende Abbildungsmatrix, speichern sie unter dem Namen `iso` und wenden sie auf die Matrix `achsen` an:

$$achsen = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

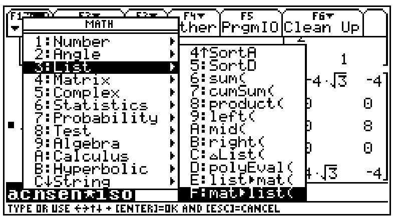


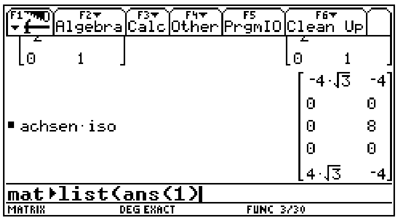


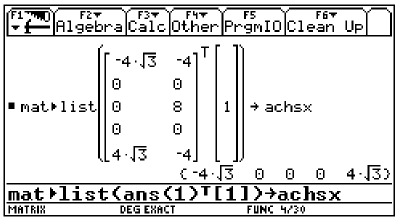


In der ersten Spalte finden sich die *x*- und in der zweiten die *y*-Koordinaten der Bildpunkte. Das Problem besteht darin, die den Zeilenvektoren entsprechenden Punkte in geeigneter Form in den Grafikschirm zu übertragen. Dazu würde sich ein Programm anbieten. Wir wollen hier aber nicht programmieren, sondern wählen eine einfache - und leicht wiederholbare - Vorgangsweise.

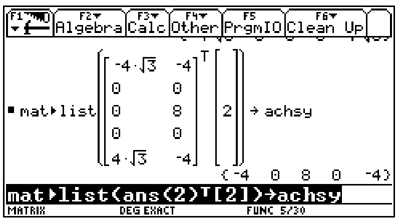
Die Matrix wird transponiert (Spalten und Zeilen werden vertauscht) und erste, bzw. zweite Zeile werden als Listen `achsx`, bzw. `achsy` gespeichert. Dazu müssen aus dem [2nd] [MATH] `3:List-`
-Untermenü zwei Befehle abgerufen werden (einer zum Transponieren der Matrix und einer, der einen Zeilenvektor in eine Liste umwandelt):

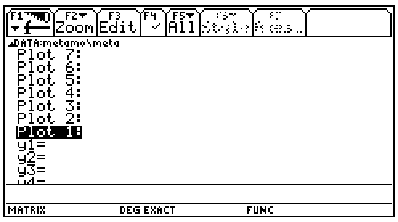


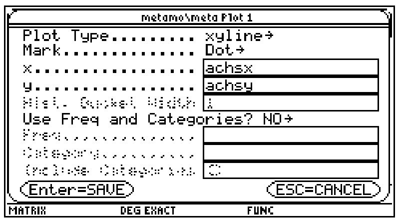




[ENTER] [2nd] [ANS] (die Matrix), dann übertrage mit [ENTER] das „Transponierungs-ᵀ“. `[1]` bezeichnet das erste Element der „gekippten Matrix“, das ist nun die erste Zeile, die erfolgreich in der Liste `achsx` gespeichert wird. Wiederhole den Vorgang für die zweite Zeile und erzeuge die Liste `achsy`.

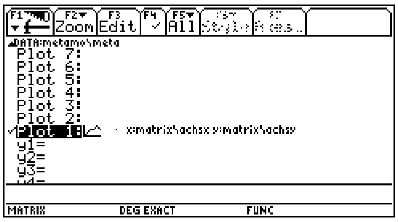


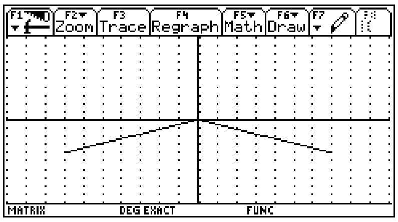


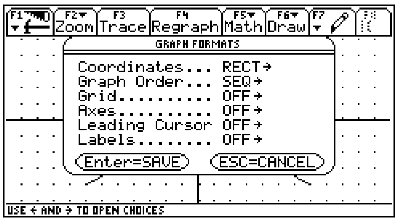


Diese Listen werden nun in ein Diagramm übertragen. Im Funktionseditor [◆] [Y=] steuern wir den `Plot 1:` an und öffnen mit [ENTER]. Die Einstellungen sind wie oben zu treffen. In die Felder für `x` und `y` tragen wir die Namen der Listen ein und dort wo ein kleiner Pfeil → steht, wird mit ⊙ ein Auswahlfenster geöffnet. Vergiss nicht, mit [ENTER] die Einstellungen zu speichern.

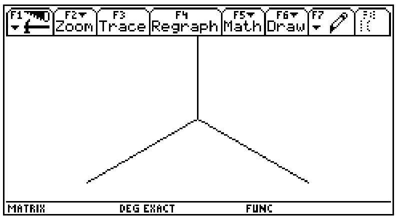
Nun sieht man im Funktionseditor den kürzlich definierten Plot, das Häkchen zeigt an, dass dieser Plot aktiviert ist, d.h., dass er beim Wechsel ins Grafikfenster mit [♦] [GRAPH] gezeichnet wird.

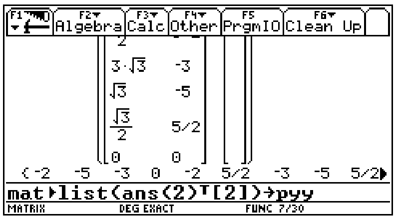


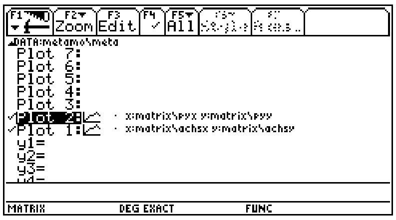




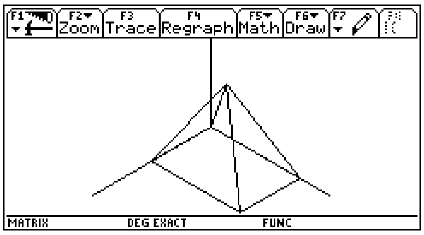
Das Bild entspricht i.a. noch nicht unseren Vorstellungen. Die [♦] [WINDOW]-Einstellungen sind möglicherweise zu ändern (hier reicht [F2] `4:ZoomDec`), die Koordinatenachsen und das Gitter deaktiviert man über [♦] [F] oder [F1] `9:Format` wie oben dargestellt. Wenn das alles gelungen ist, wird sich das Achsenkreuz in isometrischer Darstellung präsentieren.

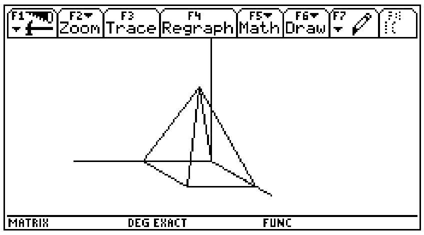






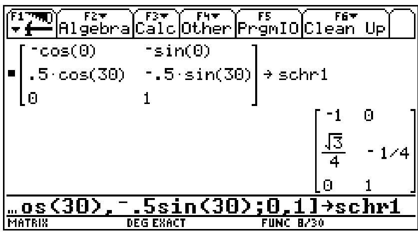
Wenn man nun die gleiche Prozedur auf `pyra` anwendet (erzeuge z.B. die Listen `pyx` und `pyy` und definiere mit ihnen den `Plot 2`), sollte man schon erfolgreich die Darstellung der Pyramide sehen können.

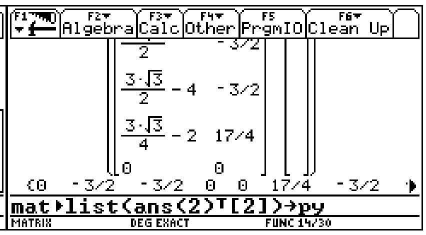




Definiere nun die, den Schrägriss von Seite 1 ($\beta = 30°$, $v_y = 0{,}5$) erzeugende Transformationsmatrix `schr1` und erzeuge das entsprechende Bild (Achsen + Pyramide). Dabei müssen fallweise die [WINDOW]-Parameter angepasst werden. Der Schrägriss ist rechts oben abgebildet.

Zwei Abbildungen von „unterwegs“ sollen die Vorgangsweise unterstützen.





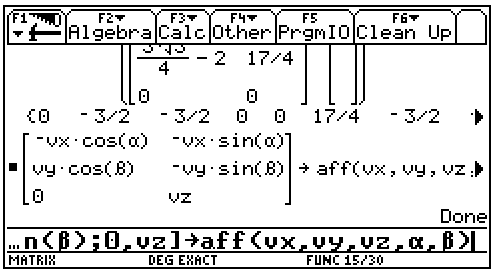
Für die Anwendung unterschiedlicher *axonometrischer* Abbildungen ist es praktisch, eine Funktion

`aff(vx,vy,vz,α,β)`

zu definieren.

Die griechischen Buchstaben erhält man über [2nd] `G A`, bzw. [2nd] `G B.`

Erzeuge die Transformationsmatrizen `iso` und `schr1` mit Hilfe von `aff()` und überprüfe die Identität.



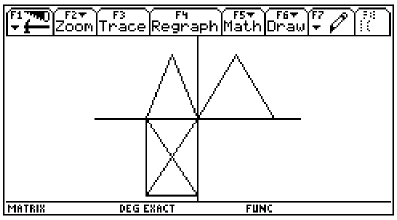
Übungsaufgaben:

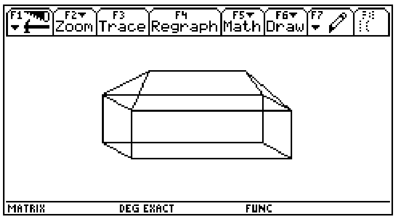
a) Welche Parameter erzeugen Grund-, Auf und Seitenriss? Erzeuge ein Bild der Pyramide mit allen drei Rissen.

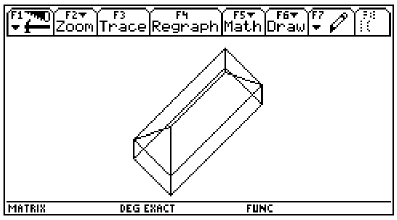
b) Stelle einen Würfel, Oktaeder, Tetraeder oder eine Figur deiner Wahl in mindestens zwei verschiedenen Projektionen dar.

c) Die „*Militärperspektive*" lässt den Grundriß unverändert und verkürzt in der z-Richtung mit dem Faktor 0,5. Damit wurden früher anschauliche Bilder von Befestigungsanlagen hergestellt. Erzeuge die Transformationsmatrix `mil` und bilde ein Haus ab.

d) Eine besondere Projektion heißt *dimetrisch*. Dabei erscheinen y- und z-Achse unverkürzt und bilden in der Projektion den Winkel 97,18°. Die x-Achse wird im Verhältnis 0,5 verkürzt und ihr Bild schließt mit den Projektionen der beiden anderen Achsen gleiche Winkel ein. Erzeuge das dimetrische Bild eines Objektes deiner Wahl.



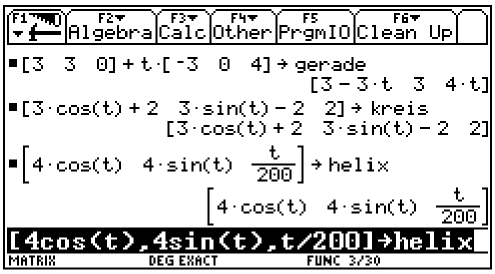




Grund-, Auf- und Seitenriss der Pyramide

Haus in Schrägriss und in Militärperspektive

Eine *Raumkurve* wird durch einen Vektor mit einem Parameter dargestellt. Die einfachste Raumkurve stellt die Gerade in Vektorform dar, z.B. Gerade g(A(3,3,0),B(0,3,4)). Als zweites Beispiel wird ein Kreis mit dem Radius 3 und Mittelpunkt M(2,-2,2) beschrieben, der sich in einer Horizontalebene befindet. Die dritte Kurve ist eine Schraublinie (*Helix*). Wir wollen alle drei Kurven im Schrägriss darstellen.



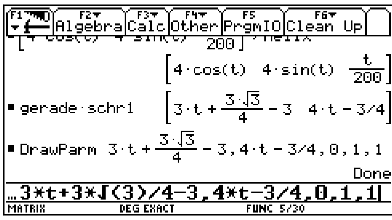
Die Multiplikation mit der Transformationsmatrix liefert eine Parameterdarstellung der gesuchten Bildkurve, die wir am einfachsten mit dem `DrawParm()`-Befehl in den Grafikschirm übertragen:

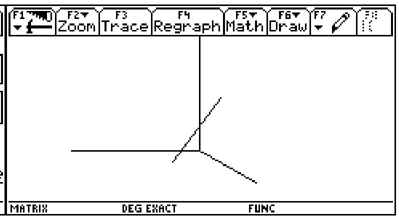
(Nur die Variable `t` darf als Parameter verwendet werden!)

`DrawParm(`*x*`-Wert,` *y*`-Wert, Startwert_`*t*`, Endwert_`*t*`, Schrittweite_`*t*`)`

Vorerst aktivieren wir nur die Achsen im Funktionseditor.

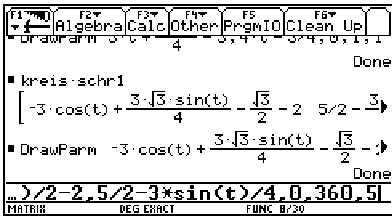
Schreibe `drawparm`, kopiere mit ENTER den Vektor in die Eingabezeile, lösche die eckigen Klammern und ergänze die Werte für den Parameter `t`.

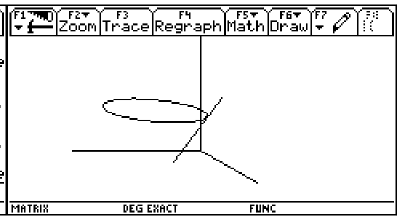


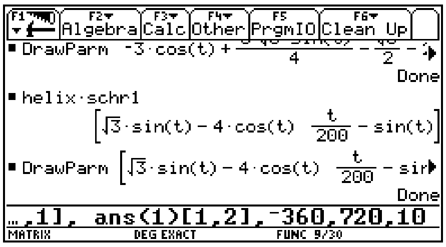


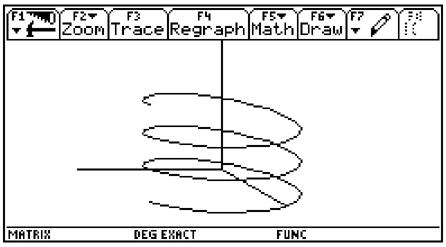
Der Kreis wird dazu gezeichnet.

Bevor wir die Schraublinie zeichnen können wir über F6 `1:ClrDraw` alle Kurven löschen.

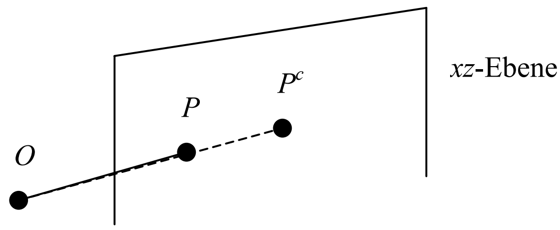




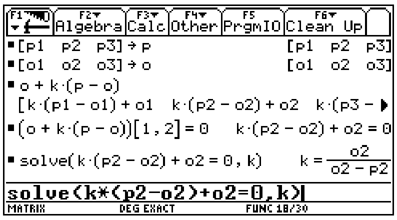


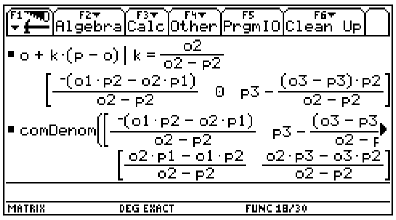


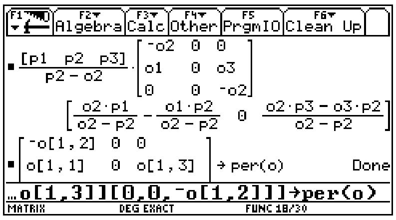
Besonders anschauliche Bilder liefert die perspektivische Abbildung oder *Zentralprojektion*. Bei ihr wird angenommen, dass das Objekt von einem *Augpunkt O* auf eine *Projektionsebene* π projiziert wird. Die Schnittpunkte der *Sehstrahlen OP* mit π liefern die Bildpunkte P^c.



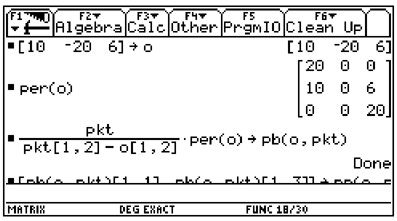
Vergleiche die Skizze und die zugehörige Vektorrechnung. Wir nehmen an, dass die *xz*-Ebene die Bildebene π darstellt. (Daher muss die zweite Koordinate - die *y*-Koordinate - des Bildpunktes verschwinden!)

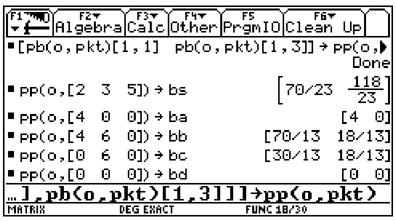


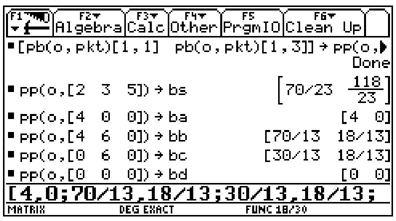




Raumpunkt *P* und Augpunkt *O* werden definiert und der Sehstrahl *OP* mit der *xz*-Ebene geschnitten, indem man die zweite Koordinate des Bildpunktes = 0 setzt. Der daraus resultierende Wert für *k* wird in den Schnittpunkt eingesetzt und so erhält man die Koordinaten des Bildpunktes, von denen wir aber nur die erste und die dritte benötigen. Die Matrizenoperation im rechten Bild führt ebenfalls zum Bildpunkt.

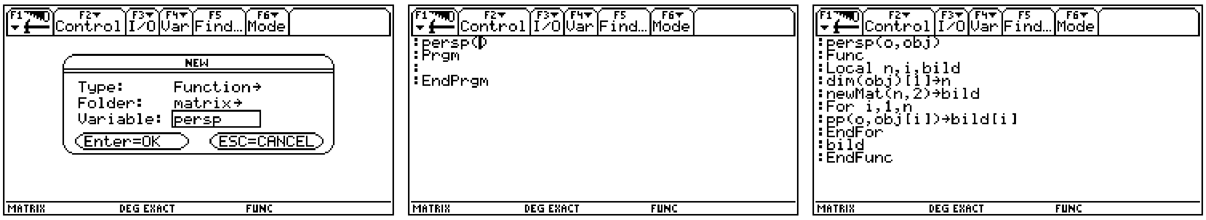




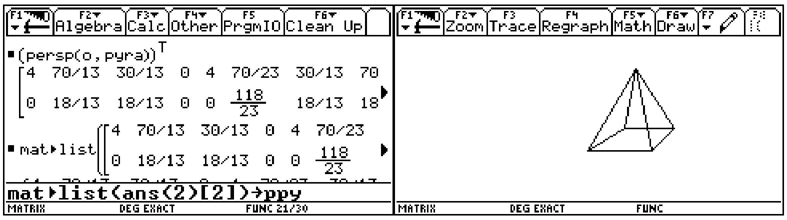


Die Funktion `pb(o,pkt)` erzeugt den Bildpunkt von `pkt` bei Betrachtung aus dem Auge `o` in der Bildebene und schließlich `pp(o,pkt)` ergibt die zweidimensionale Projektion des Punktes – das perspektive Bild. Leider lässt sich die Abbildung des kompletten Objekts nicht durch eine Matrizenoperation durchführen, da die jeweiligen Punktkoordinaten in die Operation einfließen. So muss man alle Punkte einzeln abbilden und die Einzelpunkte wieder zum Gesamtbild zusammenfügen. Anschließend extrahiert man wieder die Listen und zeichnet das Objekt – aber in Perspektive.

Oder aber, man erzeugt sich eine Funktion, die das erledigt. Da diese Funktion etwas aufwändiger ist, werden wir sie im Programmeditor erstellen. Rufe über APPS den `Program Editor` auf, wähle `Function` als Type und gib der Funktion den Namen `persp`. Übertrage die Funktion in den Editor.

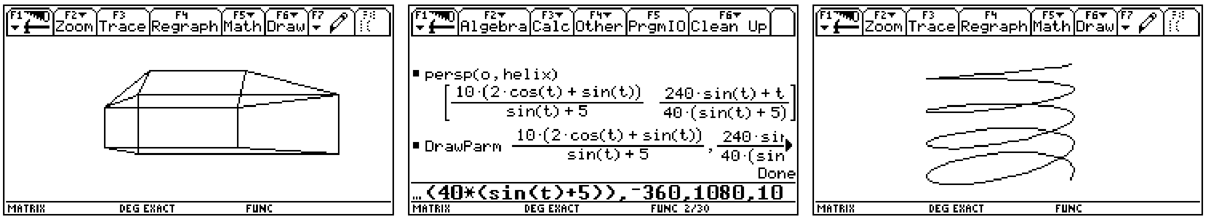


Wir erzeugen zuerst die leere Matrix `bild`, die genau so viele Zeilen wie das abzubildende Objekt, aber nur zwei Spalten hat. Dann wird in einer Schleife jeder einzelne Punkt der Transformation unterworfen und sein Koordinatenpaar Zeile um Zeile in die Matrix `bild` übertragen. Das „`bild`“ erscheint dann im Homescreen und wird in der bewährten Methode (transponieren und Zeilen extrahieren) in ein Diagramm umgewandelt. Das Ergebnis ist unten zu sehen.



Während jene Kanten, die parallel zur Bildebene verlaufen auch parallele Bilder haben, scheint das andere Paar von parallelen Grundkanten einem „Fluchtpunkt“ zuzustreben.

In der nächsten Bilderreihe ist das perspektive Bild eines Hauses (mit einem geänderten Augpunkt) zu sehen. Daneben werden die Erzeugung und das Bild der Helix in Perspektive gezeigt.

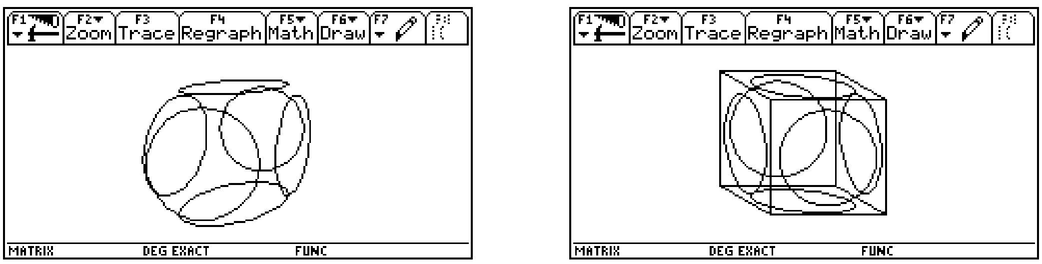


Weitere Aufgaben:

e) Stelle einen Quader dar, bei dem die Kanten der Grundflächen nicht parallel zur *xz*-Ebene sind und beobachte die „Fluchtpunkte“ der jeweils parallelen Kanten. Je näher sich der Augpunkt beim Objekt befindet desto stärker kommt die Verzerrung zur Wirkung.

f) Bilde Kreise in Parallelprojektion und Zentralprojektion ab. Wähle Kreise und Augpunkt so, dass in Zentralprojektion alle Formen der Kegelschnitte als Bilder entstehen.

g) Erzeuge Objekte, wie den unten abgebildeten ausgeschnittenen Würfel und stelle sie in verschiedenen Projektionen dar.



Tiere auf Wanderschaft

Wissenschaftler haben die Wanderbewegungen einer bestimmten Tierart beobachtet. Zu diesem Zweck wurde ein größeres Gebiet, das von dieser Spezies bewohnt wird in 5 Regionen geteilt. Eine Anzahl von Tieren wurde markiert und man konnte ein einigermaßen stabiles Wanderverhalten der Tiere beobachten. Eine „*Übergangsmatrix*“ beschreibt die Migrationsgewohnheiten der Tiere.

		Anteil wandert ein in				
		Region 1	Region 2	Region 3	Region 4	Region 5
Anteil wandert aus von	Region 1	0,60	0,10	0,05	0,10	0,15
	Region 2	0,10	0,50	0,10	0,05	0,25
	Region 3	0,05	0,10	0,70	0,05	0,10
	Region 4	0,20	0,20	0,10	0,40	0,10
	Region 5	0,15	0,15	0,00	0,15	0,55

Eine Zählung ergab für die 5 Regionen die folgenden geschätzten momentanen Bestandsmengen:

2500, 3600, 1700, 2100, 2400.

a) In zwei Jahren wird wieder gezählt. Wie viele Tiere sind in den Regionen zu erwarten, wenn angenommen werden darf, dass sich das Wanderverhalten nicht wesentlich ändern wird?

b) Wie sehen die Bestände in 10, in 20 und in 50 Jahren aus?

c) Wird sich einmal ein stabiler „Gleichgewichtszustand“ einstellen? Wie sieht dieser aus? (natürlich unter der Voraussetzung von Verhaltensweisen, die sich nicht wesentlich ändern – etwa durch Umweltkatastrophen, ein geändertes Nahrungsangebot, Eingreifen des Menschen, usw.)

d) Ökologen fangen 800 Exemplare aus Region 2 und verteilen diese gleichmäßig auf die vier anderen Gebiete. Beantworte die Fragen a) – c) unter den geänderten Bedingungen.

Lösungsvorschlag

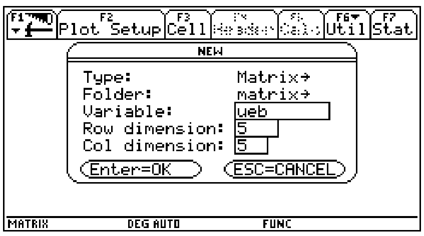
Die erste Zeile der Tabelle bedeutet, dass ca. 60% der Tiere, die sich in Region 1 aufhalten standorttreu bleiben, 10% von ihnen wechseln in Region 2, bzw. Region 4, 5% wandern aus nach Region 3 und 15% begeben sich nach Region 5. Warum ist die Summe in den Zeilen immer 1?

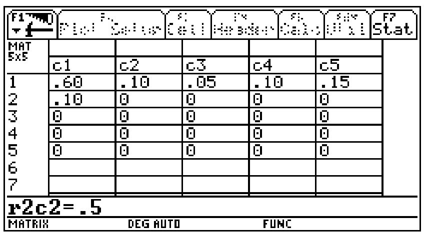
Wie groß ist daher die Population im nächsten Jahr in Region 1?

$2500 \times 0{,}60 + 3600 \times 0{,}10 + 1700 \times 0{,}05 + 2100 \times 0{,}20 + 2400 \times 0{,}15 = 2725$

Berechne auch den Bestand in den anderen 4 Regionen – mit der Hand, oder mit Hilfe einer geeigneten Matrizenoperation!

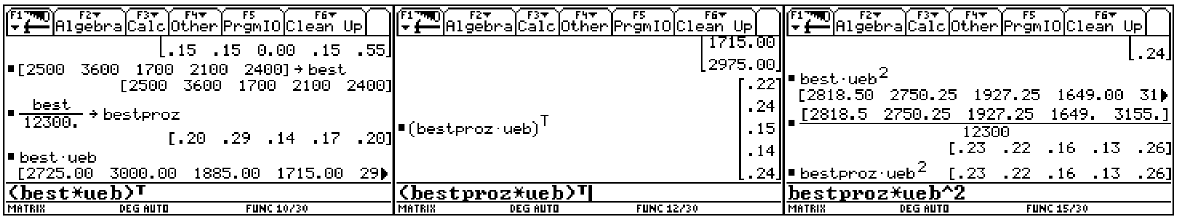
Da diese Matrix etwas umfangreicher ist, wird sie als neue Matrix (`New...`) im `Data/Matrix Editor` erzeugt, der über `APPS` geöffnet wird. Die 5 × 5 Matrix soll den Namen `ueb` erhalten.





Die Elemente werden nacheinander eingegeben. Jede Eingabe wird mit ENTER abgeschlossen.

Der Bestand wird entweder in absoluten Zahlen als Zeilenvektor `best` und/oder allgemeiner in seinen Anteilen (in %) als `bestproz` festgelegt. Die Multiplikationen *best* ∗ *ueb* bzw. *bestproz* ∗ *ueb* zeigen die Bestände nach einem Jahr.



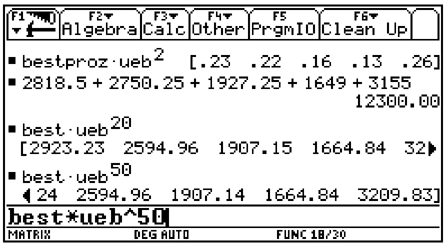
Nach zwei Jahren sind nach dem Modell 2819, 2750, 1927, 1649 und 3155 Tiere in den verschiedenen Regionen.

Das sind die Bestände nach 10 Jahren:

und nach 20 Jahren:

und nach 50 Jahren:

Welcher Schluss könnte gezogen werden?



Wie lauten die Prozentanteile für die fünf Regionen nach 50 Jahren?

Führe nun die Aufgabe mit dem geänderten Anfangsbestand aus.

bestneu = [2700, 2800, 1900, 2300, 2600]

Wir wollen nun versuchen diesen „stabilen“ Zustand auch zu berechnen. Wenn es ihn gibt, dann muss die Multiplikation des Bestandsvektors $a = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$ mit der Übergangsmatrix *ueb* diesen unverändert lassen, also

$a * ueb = a$; für welchen Vektor a, gilt dies, wobei aber außerdem die Summe aller Vektorkomponenten wieder 1 sein muss (wenn wir mit den %-Anteilen rechnen).

Es entsteht das folgende Gleichungssystem:

$0{,}60\, a_1 + 0{,}10\, a_2 + 0{,}05\, a_3 + 0{,}20\, a_4 + 0{,}15\, a_5 = a_1$ (1)

$0{,}10\, a_1 + 0{,}50\, a_2 + 0{,}10\, a_3 + 0{,}20\, a_4 + 0{,}15\, a_5 = a_2$ (2)

.... (3)

.... (4)

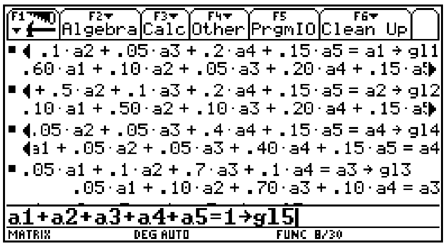
.... (5)

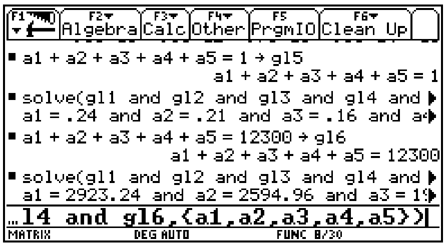
Diese fünf Gleichungen sind linear abhängig und liefern keine eindeutige Lösung. Eine der fünf Gleichungen wird ersetzt durch die oben genannte Bedingung, dass $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$ (6).

Warum sind die fünf Gleichungen (1) – (5) nicht von einander unabhängig?

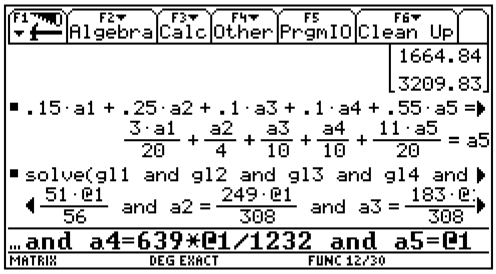
Löse das Gleichungssystem.

Tipp: Speichere die fünf Gleichungen (etwa unter den Bezeichnungen `gl1`, `gl2`, ..., `gl5`) und löse dann das System mit `solve(gl1 and gl2 and gl3 and gl4 and gl5,{a1,a2,a3,a4,a5})`. Wenn die absoluten Bestände gefragt sind, muss man die %-Anteile umrechnen oder man nimmt als fünfte Gleichung eben $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 12300$.





Vergleiche mit den Antworten von vorhin! Wie man deutlich sehen kann, hängt die stabile Endverteilung überhaupt nicht von der Anfangsverteilung ab. Diese geht auch nicht ins Gleichungssystem ein! Überprüfe diesen Sachverhalt mit einer ganz „extremen" Anfangsverteilung. Wie sieht es dann nach 50 Jahren aus?



Noch ein interessantes Rechenexempel soll folgen: Wir lösen das Gleichungssystem (1) – (5) von vorhin, ohne dass wir eine Gleichung ersetzen.

Wie prognostiziert ergibt sich eine einparametrige Lösungsmannigfaltigkeit. Der Parameter wird durch `@1` ausgedrückt (es kann auch eine andere Ziffer auftreten).

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems lautet demnach:

$$\left(a_1 = \frac{51}{56}t,\ a_2 = \frac{249}{308}t,\ a_3 = \frac{183}{308}t,\ a_4 = \frac{639}{1232}t,\ a_5 = t\right)$$

Suche nun jene spezielle Lösung, bei der die Summe aller Variablen den Wert 1, bzw. 12300 annimmt.

Es werden wieder die Ergebnisse von vorhin auftreten.

Eingabe einer Matrix

Eine Matrix kann auch direkt im Homescreen eingegeben werden: die Elemente werden zwischen eckige Klammern geschrieben, wobei sie durch Kommata getrennt werden. Die Zeilen werden durch Strichpunkte getrennt, z.B. `[1,2,3;4,5,6;7,89]`. Wenn man die Matrix in die Eingabezeile kopiert, dann erscheint sie allerdings in einem anderen Format: `[[1,2,3][4,5,6][7,8,9]]`. Zeilenvektoren `[1,2,3]` erscheinen in der Eingabezeile als einzeilige Matrizen: `[[1,2,3]]` und Spaltenvektoren `[1;2;3]` als Matrizen der Form `[[1][2][3]]`. Die direkte Eingabe empfiehlt sich für kleine Matrizen.

Für größere Matrizen ist die Eingabe über den `Data/Matrix-Editor` zu empfehlen, wie auf Seite 7 beschrieben. Dabei wird diese Matrix auch gleich unter einem Variablennamen gespeichert.

Referenzen

[1] J. Böhm, *Matrizenrechnung mit dem TI-92*, T^3-Skriptum, download von www.acdca.ac.at

[2] F.S. Budnick, *Applied Mathematics for Business*, Mc Graw-Hill, 1986