Traditionelle Mathematik und CAS

CAS-Aufgaben von Llorens Fuster

(Version vom 7.2.2008)

Aus den frühen 90er Jahren stammt eine Aufgabensammlung des spanischen Hochschullehrers Llorens Fuster, der sich sehr früh mit dem Einsatz von CAS (Derive) beschäftigt hat.

Diese Sammlung ist mir nun wieder in die Hände gefallen und ich dachte, dass es reizvoll sein könnte, die damaligen Aufgaben einerseits mit den heutigen Versionen von Derive, aber auch TI-92/Voyage 200 und TI-*Nspire*-CAS zu behandeln, aber andererseits in Erinnerung zu rufen, wie man diese Aufgaben ohne CAS – also „traditionell“ bearbeiten könnte, wobei ich da das CAS wenn überhaupt nur als Rechenkrücke bzw. Rechenkontrolle einsetze.

Ein Teil der Aufgaben gehen über den Mittelschulstoff hinaus, sind aber noch keine „hohe“ Mathematik. Ich hoffe, dass es für den Leser bzw. die Leserin auch ein Anreiz sein kann, sich an die eigene Hochschulmathematik zu erinnern.

Einige Aufgaben konnte ich nicht lösen, bei einigen gibt es sicherlich auch noch andere Möglichkeiten. Daher verstehe ich diese Sammlung auch als eine Diskussionsbasis und würde mich freuen, Beiträge dazu zu erhalten. Es gibt keinerlei Beschränkung auf bestimmte Computer Algebra Systeme, alles ist willkommen.

Die Sammlung wird ständig erweitert. Die letzten paar Aufgaben lasse ich bewusst offen, um auch Ihnen die Gelegenheit zu geben, ein wenig zu „rechnen“.

Über Rückmeldungen würde ich mich sehr freuen.

Ihr
Josef Böhm

nojo.boehm@pgv.at

1 Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2+1]{3\cdot 6\cdot 9\ldots 3n}$

Überlegung:

$$3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot 3n = (1\cdot 3)\cdot(2\cdot 3)\cdot(3\cdot 3)\cdot\ldots\cdot(n\cdot 3) = n!\cdot 3^n$$

$$\sqrt[n^2+1]{n!\cdot 3^n} = n!^{\frac{1}{n^2+1}}\cdot 3^{\frac{n}{n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2+1]{n!\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} n!^{\frac{1}{n^2+1}}\cdot\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{n}{n^2+1}} = 1\cdot 1 = 1$$

Durchführung mit *Derive*:

#1: $\prod_{k=1}^{n} 3\cdot k = 3^n\cdot n!$

#2: $\mathrm{VECTOR}\left((3^n\cdot n!)^{1/(n^2+1)}, n, 1, 10\right)$

#3: [1.73205, 1.78260, 1.66322, 1.56117, 1.48498, 1.42756, 1.38307, 1.34764, 1.31876, 1.29475]

#4: $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{n/(n^2+1)} = 1$

#5: $\lim\limits_{n\to\infty} n!^{1/(n^2+1)} = 1$

#6: $\lim\limits_{n\to\infty} (3^n\cdot n!)^{1/(n^2+1)} = 1$

Durchführung mit dem TI-*Nspire* mit dem Voyage 200

$\prod_{k=1}^{n}(3\cdot k)$ $n!\cdot 3^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left((n!\cdot 3^n)^{\frac{1}{n^2+1}}\right)$ 1

F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up

▪ $\prod_{k=1}^{n}(3\cdot k)$ $n!\cdot 3^n$

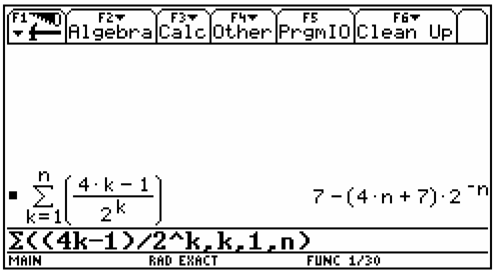
▪ $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n!\cdot 3^n)^{\frac{1}{n^2+1}}\right)$ 1

…it((n!*3^n)^(1/(n^2+1)),n,∞)

MAIN RAD EXACT FUNC 2/30

2 Bestimme die Summe der Reihe $\frac{3}{2}+\frac{7}{2^2}+\frac{11}{2^3}+...$

Alle CAS geben sofort das Ergebnis aus.



Überlegung:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-1}{2^k}=4\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{-k}-\sum_{k=1}^{n}2^{-k} \qquad (1)$$

$\sum_{k=1}^{n}2^{-k}$ ist eine geom. Reihe mit der Summe $1-2^{-n}$.

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{-k}=2^{-1}+2\cdot 2^{-2}+3\cdot 2^{-3}+...+n\cdot 2^{-n}$$

Die Summe wird in Teilsummen zerlegt.

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + ... + 2^{-n} = 1 - 2^{-n}$$
$$2^{-2} + 2^{-3} + ... + 2^{-n} = 2^{-1} - 2^{-n}$$
$$2^{-3} + ... + 2^{-n} = 2^{-2} - 2^{-n}$$
$$\text{.................................}$$
$$+ 2^{-n} = 2^{1-n} - 2^{-n}$$

Wenn die Summe der rechten Seiten gebildet wird, ist zunächst wieder die Summe einer geometrischen Reihe zu bilden und von ihr $n \cdot 2^{-n}$ abzuziehen. Daher ergibt sich für diese Summe:

$2\left(1-2^{-n}\right)-n\cdot 2^{-n}.$

Alles wird nach (1) zusammengefasst:

$$4\cdot\left(2\left(1-2^{-n}\right)-n\cdot 2^{-n}\right)-\left(1-2^{-n}\right)=8-8\cdot 2^{-n}-4n\cdot 2^{-n}-1+2^{-n}=$$
$$=7-7\cdot 2^{-n}-4n\cdot 2^{-n}.$$

3 Berechne $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Ein CAS ist gleich damit fertig.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{SIN}(x)^2}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}$$

Leider gibt die Stepwise Simplification keine Auskunft über die Berchnungsweise dieses Grenzwerts

Aber wie kommt man drauf? Die unbestimmte Form $\infty - \infty$ lässt sich möglicherweise mit der Regel von l'Hospital berechnen!

$$\#1:\quad f(x) := \frac{x^2-\mathrm{SIN}(x)^2}{x^2\cdot \mathrm{SIN}(x)^2}$$

$$\#2:\quad \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2-\mathrm{SIN}(x)^2\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2\cdot\mathrm{SIN}(x)^2\right)}=\frac{x-\mathrm{SIN}(x)\cdot\mathrm{COS}(x)}{x\cdot\mathrm{SIN}(x)\cdot(x\cdot\mathrm{COS}(x)+\mathrm{SIN}(x))}$$

$$\#3:\quad \mathrm{SUBST}\left(\frac{\frac{d}{dx}\left(x^2-\mathrm{SIN}(x)^2\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2\cdot\mathrm{SIN}(x)^2\right)},\ x,\ 0\right)=\ ?$$

Der Ausdruck wird komplizierter, wie sieht es nach zweimaligem Differenzieren aus?

$$\#4:\quad \frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^2\left(x^2-\mathrm{SIN}(x)^2\right)}{\left(\frac{d}{dx}\right)^2\left(x^2\cdot\mathrm{SIN}(x)^2\right)}=\frac{2\cdot\mathrm{SIN}(x)^2}{2\cdot x^2\cdot\mathrm{COS}(x)^2+4\cdot x\cdot\mathrm{SIN}(x)\cdot\mathrm{COS}(x)+\mathrm{SIN}(x)^2-x^2}$$

$$\#5:\quad \mathrm{SUBST}\left(\frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^2\left(x^2-\mathrm{SIN}(x)^2\right)}{\left(\frac{d}{dx}\right)^2\left(x^2\cdot\mathrm{SIN}(x)^2\right)},\ x,\ 0\right)=\ ?$$

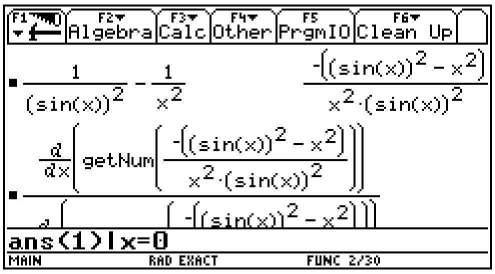
Wenig Chancen, oder führt Beharrlichkeit doch zum Ziel?

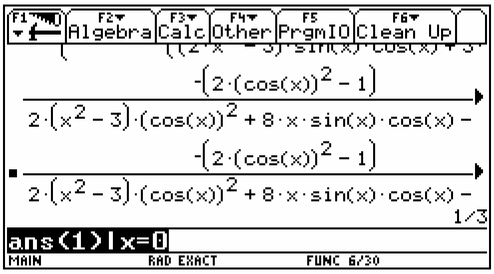
$$\#6:\quad \mathrm{TABLE}\left(\mathrm{SUBST}\left(\frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x^2 - \mathrm{SIN}(x)^2)}{\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x^2 \cdot \mathrm{SIN}(x)^2)}, x, 0\right), k, 1, 5\right)$$

$$\#7:\quad \begin{bmatrix} 1 & ? \\ 2 & ? \\ 3 & ? \\ 4 & \frac{1}{3} \\ 5 & ? \end{bmatrix}$$

Die Tabelle zeigt, dass nach viermaligem Differenzieren von Zähler und Nenner der Grenzwert gebildet werden kann und sich der erwartete Wert einstellt.

Mit dem TI-92/Voyage/Nspire ist die „halbautomatische“ Berechnung besonders elegant, da der ans(1)-Operator gemeinsam mit dem |-Operator erfolgreich eingesetzt werden kann:





Tipp: Die Anweisung *d*(getNum(ans(1)),x)/*d*(getDenom(ans(1)),x) kann mit ¥ +C kopiert und dann mit ¥ +V immer wieder in die Eingabzeile eingefügt werden.

4 Ein „wichtiger“ Politiker mit einer Körpergröße von 1,60m lässt sich ein Denkmal errichten, auf dem er auf einer Säule von 11,80m in doppelter Körpergröße dargestellt wird. Durch einen Militärputsch kommt ein neuer „starker“ Mann an die Macht, der 1,80m misst. In welcher Entfernung von der Statue sieht dieser seinen Vorgänger unter dem größten Winkel? Vereinfachend wird die Augenhöhe mit der Körpergröße gleich gesetzt.

Hier handelt es sich um eine bekannte einfache Extremwertaufgabe in einer anderen Einkleidung.

Der Sehwinkel ist die Differenz der beiden Winkel α_1 und α_2, für die gilt:

$$\tan\alpha_1 = \frac{13,2}{x} \text{ und } \tan\alpha_2 = \frac{10}{x}.$$

$\alpha_1 - \alpha_2$ = Minimum!

$$\#1: \quad \mathrm{SOLUTIONS}\left(\frac{d}{dx}\left(\mathrm{ATAN}\left(\frac{13.2}{x}\right) - \mathrm{ATAN}\left(\frac{10}{x}\right)\right) = 0,\ x\right)$$

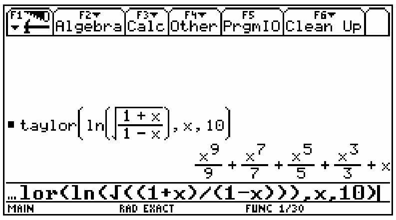
$$\#2: \quad [2\cdot\sqrt{33},\ -2\cdot\sqrt{33},\ \infty,\ -\infty]$$

$$\#3: \quad [11.48912529,\ -11.48912529,\ \infty,\ -\infty]$$

Nur x = 11,49 m ist eine sinnvolle Lösung.

5 Bestimme die Entwicklung in eine Potenzreihe mit Angabe des Konvergenzradius für die Funktion

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$



Der Funktionsterm lässt sich umschreiben in $\frac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)$. (1)

Die ersten Glieder der Taylorentwicklung für ln(1 + x) lauten:

$$\ln(1)+\frac{1}{1!}x-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1\cdot 2}{3!}x^3-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{4!}x^4+-...=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$$

Weiters gilt dann für ln(1 – x): $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}(-x)^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}(-1)^k x^k}{k}$.

Eingesetzt in (1) und vereinfacht führt dies zu

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}(x^k-(-1)^k x^k)}{k}\right).$$

Für gerade k verschwinden die Terme und es bleiben nur die Terme mit ungeraden k übrig – und diese sind natürlich positiv:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^{2k-1}+x^{2k-1})}{2k-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^{2k-1}}{2k-1}\right).$$

#1: $\mathrm{TAYLOR}\left(\mathrm{LN}\left(\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\right),\ x,\ 12\right)=\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x$

#2: $\sum_{k=1}^{6}\frac{x^{2\cdot k-1}}{2\cdot k-1}=\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x$

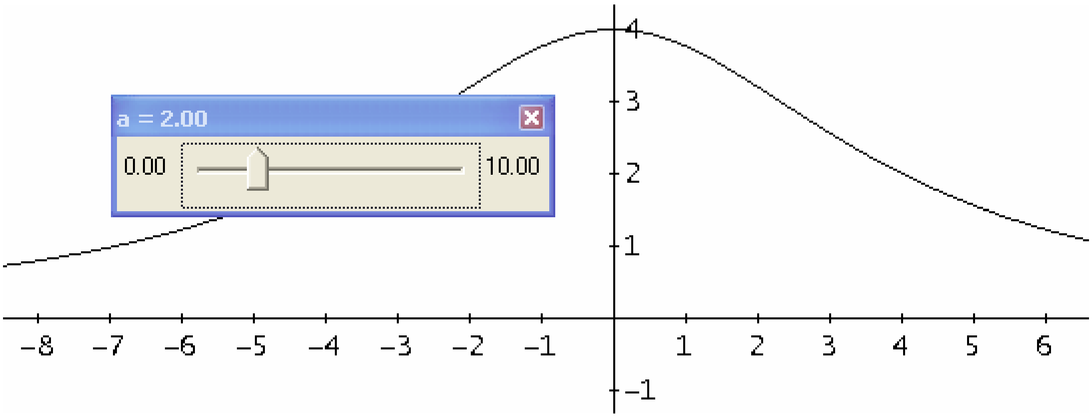
Sowohl das Quotienten- als auch das Wurzelkriterium liefert für den Konvergenzradius den Wert 1:

#3: $a(k):=\frac{1}{2\cdot k-1}$

#4: $\lim_{k\to\infty}\frac{a(k)}{a(k+1)}=1$

#5: $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|a(k)|^{1/k}}=1$

6 Berechnen Sie die Fläche zwischen der x-Achse und der *Agnesikurve* $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$.



Ein Grundintegral ist $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{atan}(x)$.

Es wird umgeformt und Integration durch Substitution durchgeführt:

$$\int \frac{8a^3}{x^2+4a^2}\,dx = \int \frac{8a^3\,dx}{4a^2\left(\left(\frac{x}{2a}\right)^2+1\right)}; \qquad z = \frac{x}{2a};\ dz = \frac{dx}{2a} \to dx = 2a\,dz$$

$$\int \frac{8a^3\ 2a\ dz}{4a^2\ (z^2+1)} = 4a^2\ \operatorname{atan}(z) = 4a^2\ \operatorname{atan}\left(\frac{x}{2a}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{8a^3}{x^2+4a^2}\,dx = 2\cdot\lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{8a^3}{x^2+4a^2}\,dx = 2\left(\lim_{u\to\infty}\left(4a^2\ \operatorname{atan}\left(\frac{u}{2a}\right)\right) - 4a^2\ \operatorname{atan}(0)\,\pi\right) =$$

$$= 2\cdot 4a^2\cdot\frac{\pi}{2} = 4a^2\pi$$

#1: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{8\cdot a^3}{x^2 + 4\cdot a^2}\,dx = 4\cdot\pi\cdot a^2\cdot \mathrm{SIGN}(a)$$

Interessant ist die schrittweise Durchführung mit DERIVE:

$$\#1: \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{8\cdot a^3}{x^2 + 4\cdot a^2}\, dx$$

If F(x)=F(-x),

$$\int_{-a}^{a} F(x)\, dx \rightarrow 2\cdot\int_{0}^{a} F(x)\, dx$$

$$\#2: \quad 2\cdot\int_{0}^{\infty} \frac{8\cdot a^3}{x^2 + 4\cdot a^2}\, dx$$

$$\int_{a}^{b} a\cdot F(x)\, dx \rightarrow a\cdot\int_{a}^{b} F(x)\, dx$$

$$\#3: \quad 16\cdot a^3\cdot\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4\cdot a^2}\, dx$$

If a*b>0 and n>1,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{a\cdot x^n + b}\, dx \rightarrow \frac{\pi}{n\cdot a\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{(n - 1)/n}}$$

$$\#4: \quad \frac{16\cdot\pi\cdot a^3\cdot \mathrm{SIGN}(a)}{2\cdot 2\cdot a\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 1$$

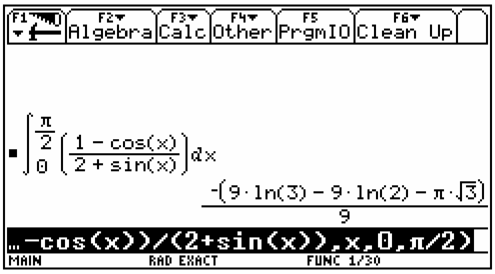
$$\#5: \quad \frac{16\cdot\pi\cdot a^3\cdot \mathrm{SIGN}(a)}{4\cdot a}$$

$$\#6: \quad 4\cdot\pi\cdot a^2\cdot \mathrm{SIGN}(a)$$

7 Berechne $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{2+\sin x}\,dx.$

Das CAS antwortet:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \mathrm{COS}(x)}{2 + \mathrm{SIN}(x)}\,dx = \frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{9} - \mathrm{LN}\left(\frac{3}{2}\right)$$



Händische Berechnung:

$$\frac{1-\cos x}{2+\sin x} = \frac{-\cos x}{2+\sin x} + \frac{1}{2+\sin x};$$

$$\text{Der erste Summand}: \int \frac{-\cos x}{2+\sin x}\,dx = -\ln(2+\sin x)$$

Für das zweite Teilintegral findet man in der Integraltafel:

$$\int \frac{dx}{b+c\sin(ax)} = \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\,\mathrm{atan}\left(\frac{b\tan\frac{a\,x}{2}+c}{\sqrt{b^2-c^2}}\right) \quad \text{für } b^2 > c^2\,.$$

Hier ist $b = 2$ und $a = c = 1$, daher:

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{atan}\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\tan\frac{x}{2}+1\right)\right)$$

Nun wird zusammengefasst und die Grenzen werden eingesetzt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{2+\sin x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\tan\frac{x}{2}+1\right)\right) - \ln(2+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} - \ln 3 - \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{9} - \ln 2\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} - \ln\frac{3}{2}$$

8 Die Funktion $f(x,y,z,t)=(x,2x,x,x+a\,y)$ sei ein Endomorphismus (ein linearer Operator) von $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

Für welche reellen Werte für a ist die Gleichung diagonalisierbar? Bestimme für diese Werte die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.

9 Das folgende Gleichungssystem beinhaltet den Parameter a. Diskutiere die Lösungen des Systems in Abhängigkeit vom Parameter.

$$\begin{aligned}(a-1)\,x+(a-2)\,y+z&=a\\ a\,x+a\,z&=a\\ (a+1)\,x+y+z&=a\end{aligned}$$

```
#1:  SOLUTIONS([(a - 1)·x + (a - 2)·y + z = a, a·x + a·z = a, (a + 1)·x + y + z = a], [x, y, z])
```

#2: $\left[\left[1-\dfrac{1}{a-2},\ \dfrac{2}{a-2},\ \dfrac{1}{a-2}\right]\right]$

DERIVE gibt nur eine unvollständige Antwort. Es lässt sich nur herauslesen, dass $a \neq 2$ sein muss.

Die Bestimmung der Gröbnerbasis hilft da deutlich weiter:

```
GROEBNER_BASIS([(a - 1)·x + (a - 2)·y + z - a, a·x + a·z - a, (a + 1)·x + y + z - a], [x, y, z, a])
```

$\left[z\cdot(a^3-3\cdot a^2+2\cdot a)-a^2+a,\ y-z\cdot(a^2-2\cdot a+2)+a,\ x+z\cdot(a^2-3\cdot a+3)-a\right]$

$z\cdot(a^3-3\cdot a^2+2\cdot a)-a^2+a=0$

$a\cdot(a-1)\cdot(a\cdot z-2\cdot z-1)=0$

Aus dem ersten Term lässt sich ein z nur berechnen, wenn $a \neq 2$. Für $a = 0$ und $a = 1$ verschwindet der erste Term, damit sind x und y von z abhängig.

Für $a = 0$: $x = t$, $y = –2t/3$ und $z = –t/3$

Für $a = 1$: $x = s$, $y = -s$, $z = 1 – s$.

```
SOLUTIONS([(-1)·x + (-2)·y + z = 0, (+1)·x + y + z = 0], [x, y, z])
```

$\left[\left[@1,\ -\dfrac{2\cdot @1}{3},\ -\dfrac{@1}{3}\right]\right]$

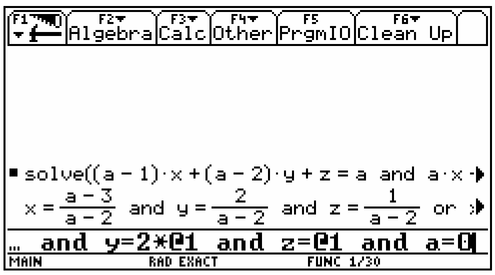
```
SOLUTIONS([(1 - 1)·x + (1 - 2)·y + z = 1, x + z = 1, (1 + 1)·x + y + z = 1], [x, y, z])
```

`[[@2, -@2, 1 - @2]]`

Aus der Gröbnerbasis ergibt sich für $a = 0$: $x = –3t$, $y = 2t$, $z = t$ und für $a = 1$: $x = 1 – s$, $y = s – 1$, $z = s$.

Die CAS-Rechner sind etwas penibler in der Ausgabe:

Der allgemeine Fall und der Fall $a = 0$ werden in der Lösung berücksichtigt.



10 Bestimme die n-te Potenz der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die ersten fünf Potenzen werden gebildet:

$$\#1: \quad m := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\#2: \quad \mathrm{VECTOR}(m^k, k, 5)$$

$$\#3: \quad \left[\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{n} & \frac{2}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{n} & \frac{3}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{n} & \frac{4}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{n} & \frac{5}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

Daher lässt sich vermuten, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

DERIVE gibt eine falsche Antwort, da die Potenz der Matrix allgemein nicht richtig behandelt wird:

$$\#4: \quad m^n = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{1}{n}\right)^n & \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ ? & 1 & ? \\ ? & ? & 1 \end{bmatrix}$$

$$\#5: \quad n :\in \mathrm{Integer}\ (0, \infty)$$

$$\#6: \quad m^n = \begin{bmatrix} 1 & n^{-n} & n^{-n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Versuche eines Beweises über die vollständige Induktion:

Annahme:

$$m^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n-1}{n} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{n-1}{n} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = m^n \qquad \text{qued}$$

11 Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot\sin\dfrac{a}{\sqrt{1}}+2\cdot\sin\dfrac{a}{\sqrt{2}}+\cdots+n\cdot\sin\dfrac{a}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n^3}}$

Um zu einer Vermutung zu gelangen lassen wir ein CAS für a = 1 bis 10 die Summe der ersten 10 000 bzw. 20 000 Summanden bilden.

$$\mathrm{TABLE}\left(\lim_{n\to 10000}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot\mathrm{SIN}\left(\dfrac{a}{\sqrt{k}}\right)}{n^{3/2}},\ a,\ 1,\ 10\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.6666833897 \\ 2 & 1.333168850 \\ 3 & 1.999260650 \\ 4 & 2.664766501 \\ 5 & 3.329497618 \\ 6 & 3.993268158 \\ 7 & 4.655894864 \\ 8 & 5.317197289 \\ 9 & 5.976998305 \\ 10 & 6.635124281 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{TABLE}\left(\lim_{n\to 20000}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot\mathrm{SIN}\left(\dfrac{a}{\sqrt{k}}\right)}{n^{3/2}},\ a,\ 1,\ 10\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.6666750200 \\ 2 & 1.333250773 \\ 3 & 1.999628772 \\ 4 & 2.665711749 \\ 5 & 3.331403685 \\ 6 & 3.996609605 \\ 7 & 4.661235462 \\ 8 & 5.325188212 \\ 9 & 5.988376002 \\ 10 & 6.650708230 \end{bmatrix}$$

Die Vermutung lautet, dass der Grenzwert den Wert $\dfrac{2a}{3}$ annimmt.

Beweis:

In den Lösungen ist der Grenzwert mit $\dfrac{2a}{3}$ angegeben!

12 Für welche Werte für *a*, *b* und *c* existiert die Summe, und welchen Wert hat diese dann:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{an^4 + (b-2)n^3 + (c+1)n^2 + n + 1}{(n-1)\,n\,(n+2)}$$

Es werden die Summen von 2 bis *u* gebildet und dann der Grenzwert berechnet. Dabei treten vorerst merkwürdige Symbole wie ψ und γ auf. Der Zählergrad ist außerdem viel zu groß.

Der Reihe nach setzen wir $a = 0$, $b = 2$ und $c = -1$ und lassen im Zähler des Folgenterms die Glieder 2. bis 4. Ordnung verschwinden. Dann lässt sich die Summe bilden:

$$f(n) := \frac{a \cdot n^4 + (b - 2) \cdot n^3 + (c + 1) \cdot n^2 + n + 1}{(n - 1) \cdot n \cdot (n + 2)}$$

$$\lim_{u \to \infty} \sum_{n=2}^{u} f(n) = \infty \cdot \mathrm{SIGN}(a)$$

$$f1(n) := \frac{(b - 2) \cdot n^3 + (c + 1) \cdot n^2 + n + 1}{(n - 1) \cdot n \cdot (n + 2)}$$

$$\lim_{u \to \infty} \sum_{n=2}^{u} f1(n) = \infty \cdot \mathrm{SIGN}(b - 2)$$

$$\lim_{u \to \infty} \sum_{n=2}^{u} f2(n) = \infty \cdot \mathrm{SIGN}(c + 1)$$

$$f3(n) := \frac{n + 1}{(n - 1) \cdot n \cdot (n + 2)}$$

$$\sum_{n=2}^{u} f3(n) = \frac{29 \cdot u^3 + 51 \cdot u^2 - 32 \cdot u - 48}{36 \cdot u \cdot (u + 1) \cdot (u + 2)}$$

$$\lim_{u \to \infty} \sum_{n=2}^{u} f3(n) = \frac{29}{36}$$

Die schrittweise Durchführung der Berechnung der Summen ist sehr aufschlussreich, wie ein CAS die Summe über die „Antidifferenzen“ bildet.

13 Berechne:

$$\lim_{x\to 0}\left(\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

$$\#1:\quad \lim_{x\to 0} \mathrm{TAN}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{1/\mathrm{SIN}(x)} = e^{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}\right) \qquad e^{2}$$

Der Grenzwert ist eine unbestimmte Form 1^{∞}. Der Ausdruck wird umgeschrieben und dann die Regel von l'Hospital versucht.

$$\lim f^{g} = \lim e^{\ln f\cdot g} = e^{\lim(\ln f\cdot g)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\tan(x+\pi/4))}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\tan(x+\pi/4))}{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\tan(x+\pi/4))}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\tan(x+\pi/4)\cdot\cos^{2}(x+\pi/4)}}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x\cdot\sin(x+\pi/4)\cdot\cos(x+\pi/4)} = 2$$

Daher nimmt der Grenzwert den Wert e^{2} an.

14 Berechne die Fläche des flächengrößten gleichschenkeligen Dreiecks, dessen Scheitel im Punkt $(a,0)$ liegt und dessen Basis eine senkrechte Sehne der Parabel $y^2 = 2px$ ist.

Extremwertaufgabe:

Die Basis werde an der Stelle $x = x_0$ gelegt, dann hat das Dreieck die Höhe $a - x_0$ und die Basis $2 \cdot \sqrt{2px_0}$.

$A(x_0) = \sqrt{2px_0}\,(a - x_0) = \max$

#1: $x0 :=$

#2: $\dfrac{d}{d\,x0}\left((a - x0)\cdot\sqrt{(2\cdot p\cdot x0)}\right) = 0$

#3: $\dfrac{\sqrt{2}\cdot(a - 3\cdot x0)\cdot\sqrt{(p\cdot x0)}}{2\cdot x0} = 0$

#4: $\mathrm{SOLVE}\left(\dfrac{\sqrt{2}\cdot(a - 3\cdot x0)\cdot\sqrt{(p\cdot x0)}}{2\cdot x0} = 0,\ x0\right)$

#5: $x0 = \dfrac{a}{3}$

#6: $\mathrm{SUBST}\left((a - x0)\cdot\sqrt{(2\cdot p\cdot x0)},\ x0,\ \dfrac{a}{3}\right) = \dfrac{2\cdot\sqrt{6}\cdot a\cdot\sqrt{(a\cdot p)}}{9}$

Ich habe – erst für Derive und später auch für den Nspire ein Programm geschrieben, das die üblichen Extremwertaufgaben automatisch löst, wenn Hauptbedingung, Nebenbedingung und die Variablen (zwei) eingegeben werden. Die Art des Extremwerts lässt bei der allgemeinen Angabe nicht bestimmen.

$\mathrm{extrem}(\sqrt{(2\cdot p\cdot x)}\cdot h,\ h = a - x,\ h,\ x)$

$$\left[\begin{array}{cccc} h & x & \text{Optimum} & \\ \dfrac{2\cdot a}{3} & \dfrac{a}{3} & \dfrac{2\cdot\sqrt{6}\cdot a\cdot\sqrt{(a\cdot p)}}{9} & \mathrm{IF}\left(\dfrac{\sqrt{(a\cdot p)}}{a} < 0,\ \text{lokales Minimum},\right. \end{array}\right.$$

$\mathrm{extrem}\left(2\cdot p\cdot x0\cdot h^2, h=a-x0, x0, h\right)$

$$\begin{bmatrix} x0 & h & \text{"Optimum"} \\ \dfrac{a}{3} & \dfrac{2\cdot a}{3} & \dfrac{8\cdot a^3\cdot p}{27} \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fertig

$\mathrm{extrem}\left(\sqrt{2\cdot p\cdot x0}\cdot h, h=a-x0, x0, h\right)$

$$\begin{bmatrix} x0 & h & \text{"Optimum"} \\ \dfrac{a}{3} & \dfrac{2\cdot a}{3} & \dfrac{2\cdot a\cdot \mathrm{conj}\left(\sqrt{a\cdot p}\right)\cdot\sqrt{6}}{9} \end{bmatrix}$$

Fertig

15 Entwickle die Funktion y = ln(1+3*x*) in eine Potenzreihe und gib ihren Konvergenzradius an.

Wende diese Reihenentwicklung an zur Gewinnung einer Potenzreihe für

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-3x}{1+3x}}$$

Zuerst wird die „traditionelle" Vorgangsweise versucht.

Potenzreihe: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$.

$$f^{(0)} = \ln(1+3x)$$
$$f' = 3\cdot(1+3x)^{-1}$$
$$f'' = -3^2\cdot(1+3x)^{-2}$$
$$f''' = 2\cdot 3^3\cdot(1+3x)^{-3}$$
$$f^{(4)} = -3\cdot 2\cdot 3^4\cdot(1+3x)^{-4}$$
...
$$f^{(n)} = (-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot 3^n\cdot(1+3x)^{-n}$$

$$f^{(n)}(x=0) = (-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot 3^n$$

daher lautet die Potenzreihe: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot 3^n}{n!}\cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{n}\cdot x^n$.

Das lassen wir uns gerne von einem CAS bestätigen:

```
TAYLOR(LN(1 + 3·x), x, 0, 7)
```

$$\frac{2187\cdot x^7}{7} - \frac{243\cdot x^6}{2} + \frac{243\cdot x^5}{5} - \frac{81\cdot x^4}{4} + 9\cdot x^3 - \frac{9\cdot x^2}{2} + 3\cdot x$$

$$\sum_{n=1}^{7}\frac{3^n\cdot(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n}$$

$$\frac{2187\cdot x^7}{7} - \frac{243\cdot x^6}{2} + \frac{243\cdot x^5}{5} - \frac{81\cdot x^4}{4} + 9\cdot x^3 - \frac{9\cdot x^2}{2} + 3\cdot x$$

Für den Konvergenzradius gilt: $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Daher $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n\cdot(n+1)}{n\cdot 3^{n+1}\cdot(-1)^{n+2}}\right| = \frac{1}{3}$. Dazu sollte man keinen Rechner benötigen!

Für den zweiten Teil der Aufgabe wird die Funktion umgeschrieben

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-3x}{1+3x}} = \frac{1}{2}\left(\ln(1-3x) - \ln(1+3x)\right)$$

Die Potenzreihe für den ersten Summanden erhalten wir aus der schon gewonnenen, indem +3 konsequent durch –3 ersetzt wird:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{n} \cdot x^n \;\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-3)^n}{n} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1) \cdot 3^n}{n} \cdot x^n.$$

```
TAYLOR(LN(1 - 3·x), x, 0, 7)
```

$$-\frac{2187 \cdot x^7}{7} - \frac{243 \cdot x^6}{2} - \frac{243 \cdot x^5}{5} - \frac{81 \cdot x^4}{4} - 9 \cdot x^3 - \frac{9 \cdot x^2}{2} - 3 \cdot x$$

$$\sum_{n=1}^{7} -\frac{3^n \cdot x^n}{n}$$

$$-\frac{2187 \cdot x^7}{7} - \frac{243 \cdot x^6}{2} - \frac{243 \cdot x^5}{5} - \frac{81 \cdot x^4}{4} - 9 \cdot x^3 - \frac{9 \cdot x^2}{2} - 3 \cdot x$$

Nun werden die Reihen zusammengefasst:

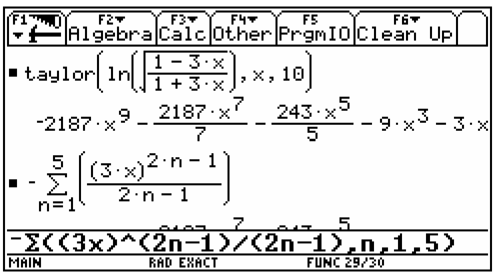
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1) \cdot 3^n}{n} \cdot x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{n} \cdot x^n \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1) \cdot 3^n - (-1)^{n+1} \cdot 3^n}{n} \cdot x^n =$$

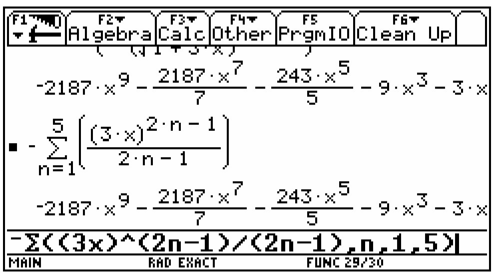
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1) \cdot 3^n - (-1)^{n+1} \cdot 3^n}{2n} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1) \cdot 3^n (1 - (-1)^n)}{2n} \cdot x^n$$

Der Term $(1-(-1)^n)$ verschwindet für gerade n und nimmt für ungerade n den Wert 2 an. Daher lässt sich in der Summe durch 2 kürzen und wir brauchen nur die ungeraden Terme zu berücksichtigen:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x^{2n-1}}{2n-1}$$

Das CAS bestätigt die händische Rechnung:





16 Berechne die Fläche, die vom Graph von $y^2x^4 = (4a^2 - x^2)(8a^2 + x^2)^2$ und den Geraden $x = a$ und $x = 2a$ gebildet wird.

Man gelangt rasch zu einer graphischen Darstellung der Kurve und der gewünschten Fläche. Mit einem Schieberegler für a lässt sich das einfach realisieren:

$$y^2 \cdot x^4 = (4 \cdot a^2 - x^2) \cdot (8 \cdot a^2 + x^2)^2$$

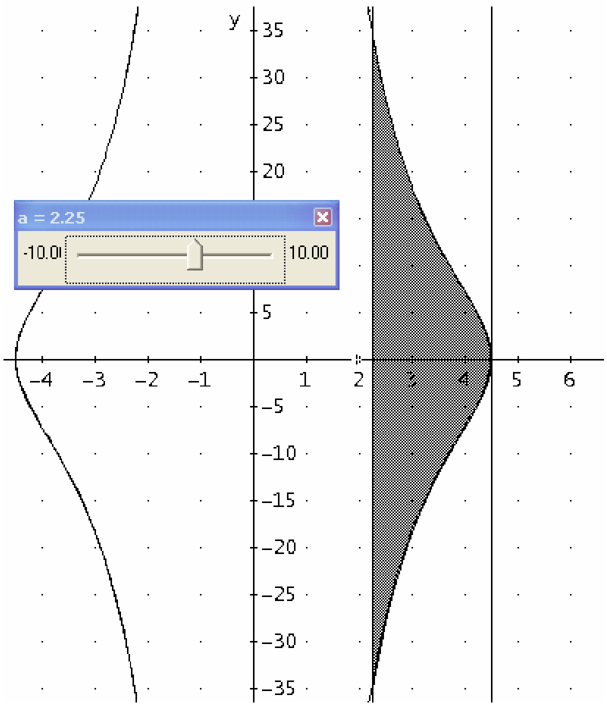
$$x = a$$

$$x = 2 \cdot a$$

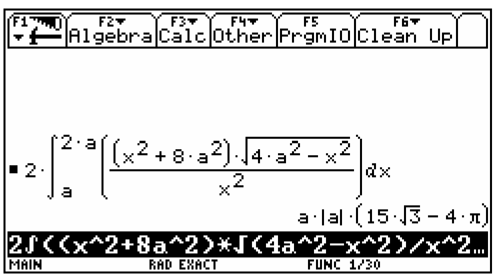
$$\mathrm{SOLVE}(y^2 \cdot x^4 = (4 \cdot a^2 - x^2) \cdot (8 \cdot a^2 + x^2)^2, y)$$

$$y = -\frac{(x^2 + 8 \cdot a^2) \cdot \sqrt{(4 \cdot a^2 - x^2)}}{x^2} \vee y = \frac{(x^2 + 8 \cdot a^2) \cdot \sqrt{(4 \cdot a^2 - x^2)}}{x^2}$$

$$a \le x \le 2 \cdot a \wedge -\frac{(x^2 + 8 \cdot a^2) \cdot \sqrt{(4 \cdot a^2 - x^2)}}{x^2} \le y \le \frac{(x^2 + 8 \cdot a^2) \cdot \sqrt{(4 \cdot a^2 - x^2)}}{x^2}$$



Die gesuchte Fläche erhalten wir über das Integral:



Nun wird versucht, das Integral auch ohne CAS zu berechnen.

Der Integrand wird zerlegt in $\int \frac{(x^2+8a^2)\sqrt{4a^2-x^2}}{x^2}dx = \int \sqrt{4a^2-x^2}\,dx + \int \frac{8a^2\sqrt{4a^2-x^2}}{x^2}dx$.

Wir kümmern uns um das erste Integral und führen eine geeignete Substitution durch.

$$\int \sqrt{4a^2-x^2}\,dx \qquad x = 2a\sin t;\;\; dx = 2a\cos t$$

$$\int \sqrt{4a^2-4a^2\sin^2 t}\cdot 2a\cos t\,dt = 4a^2\int \cos^2 t\,dt \qquad \text{(mit Hilfe partieller Integration!)}$$

$$4a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right) = 2a^2t + a^2\sin 2t = 2a^2t + a^2\,2\sin t\cos t =$$

$$= 2a^2t + 2a^2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} \qquad \text{mit } \sin t = \frac{x}{2a}$$

$$= 2a^2\sin^{-1}\frac{x}{2a} + 2a^2\cdot\frac{x}{2a}\sqrt{1-\frac{x^2}{4a^2}} = 2a^2\sin^{-1}\frac{x}{2a}+\frac{2a^2x}{4a^2}\sqrt{4a^2-x^2} =$$

$$= 2a^2\sin^{-1}\frac{x}{2a}+\frac{x}{2}\sqrt{4a^2-x^2}$$

Kontrolle mit CAS: $\int \sqrt{(4\cdot a^2 - x^2)}\,dx = 2\cdot a^2\cdot \mathrm{ASIN}\left(\frac{x}{2\cdot|a|}\right) + \frac{x\cdot\sqrt{(4\cdot a^2 - x^2)}}{2}$

Beim zweiten Teilintegral führt die gleiche Substitution zu

$\int \cot^2 t\,dt = -\cot t - t = -\frac{\cos t}{\sin t} - t$ und dann leicht zum Endergebnis.

17 Berechne $\int \sqrt{\tan^3 x}\,\sec^4 x\,dx = \int \frac{\sqrt{\tan^3 x}}{\cos^4 x}\,dx$

18 Ein Endomorphismus (linearer Operator) sei verknüpft mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche Relation zwischen den reellen Parametern a und b kann die Matrix diagonalisiert werden?

Bestimme für diesen Fall die Basis der Eigenvektoren.

19 Das folgende Gleichungssystem hängt von der Variablen a ab:

$$(a+1)x+y+z=a^2+3a$$
$$x+(a+1)y+z=a^3+3a^2$$
$$x+y+(a+1)z=a^4+3a^3$$

Diskutiere die Lösbarkeit des Systems in Abhängigkeit von a.

20 Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{n^2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{n^2} & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$