

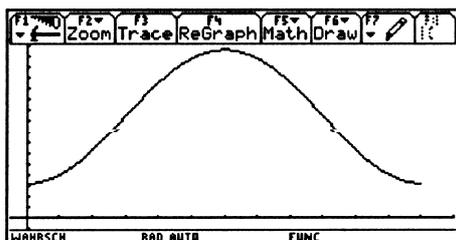
Themenvorschlag für die schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik

für die 8. Klasse des Aufbaurealgymnasiums

im Haupttermin 1998/ 99

vorgelegt von Mag. Elisabeth Schmidt

- 1) Weinfässer sind rotationssymmetrische Körper. Das Fassinnere kann man als Rotationskörper einer geeigneten um die x-Achse rotierenden Kurve betrachten.
 - a) Erstelle eine Skizze des Weinfasses und ermittle jeweils die Funktionsgleichung für die Kurve, wenn diese durch einen
 - " Parabelbogen,
 - " Ellipsenbogen,
 - " Kreisbogenapproximiert wird.
Dabei habe das Weinfass folgende Innenmaße: Bodendurchmesser $d_1=160\text{cm}$, Spunddurchmesser (größter Durchmesser) $d_2=200\text{cm}$, Höhe $h=200\text{cm}$.
 - b) Berechne für alle drei Modelle das Volumen des Fasses in Liter. Wie groß ist der maximale prozentuelle Volumensunterschied zwischen den drei Modellen?
- 2) Die jahreszeitlich bedingte Veränderung des Sonnenstandes hat zur Folge, dass der zeitliche Verlauf der Sonnenenergiestrahlung näherungsweise durch eine Funktion der Art $G(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x + c)] + d$ ($x=0$: entspricht der Jahreswende) beschrieben werden kann. Dabei bezeichnet $G(x)$ die im Laufe eines Tages auf einen horizontalen Quadratmeter aus allen Richtungen auftreffende Sonnenstrahlung (sogenannte Globalstrahlung in kWh). Die Abbildung zeigt den Verlauf der Globalstrahlung in Rom innerhalb eines Jahres.



x-Achse: Monate
y-Achse: Globalstrahlung in kWh

Minimum: 1,6 kWh zur Jahreswende
Maximum: 7,8 kWh im Hochsommer

a)

- " Erkläre die Bedeutung der Parameter a , b , c und d bei der Funktion $G(x)$.
 - " Ermittle den Funktionsterm $G(x)$ für Rom und berechne damit, innerhalb welches Bereiches die Globalstrahlung im März und November liegt.
 - " Bestimme die Jahressumme der Globalstrahlungsenergie in Rom.
- b) Wir betrachten nun speziell die Globalstrahlung im Monat Juli in Rom. Es sei das tägliche Sonnenenergieangebot normalverteilt mit dem Erwartungswert $G=7,7\text{ kWh}$ und der Standardabweichung $\Phi = 1,1\text{ kWh}$.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Globalstrahlung mehr als 6 kWh beträgt?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei drei Besuchen in Rom im Monat Juli jeweils weniger als 6 kWh Globalstrahlung pro Tag erlebt?
 - In welchem Bereich liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit die Globalstrahlung im Monat Juli in Rom? (Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen genau)

- 3) a) Die Fichte ist in Nordeuropa und in den Gebirgen Mitteleuropas beheimatet. Das Wachstum von Fichten kann näherungsweise durch die Funktion

$$h(t) = \frac{0,6}{0,02 + e^{-30kt}}$$

beschrieben werden. Dabei ist k eine Konstante und $h(t)$ die Höhe einer Fichte in Metern t Jahre nach Beobachtungsbeginn.

- " Wie hoch war eine dieser Fichten bei Beobachtungsbeginn?
- " Berechne den Wert von k , wenn eine dieser Fichten 15 Jahre nach Beobachtungsbeginn 12 m hoch ist. Wie viele Jahren nach Beobachtungsbeginn hat eine Fichte die Höhe von 20 m erreicht?
- " Berechne die erste Ableitung von $h(t)$ für $t=3$ und interpretiere das Ergebnis.
- " Zu welchem Zeitpunkt nach Beobachtungsbeginn ist die Wachstumsgeschwindigkeit am größten?
- " Zeichne den Graph der Funktion im Intervall $0 \leq t \leq 40$ und trage die berechneten Werte ein.

- b) Der Stammdurchmesser einer Fichte erreicht maximal etwa 1 Meter. Das Alter einer Fichte wird näherungsweise dadurch bestimmt, dass man den Durchmesser d des Stammes in 1,3 Meter Höhe misst. Es sei nun $y = \frac{1}{d}$ der Kehrwert des in Metern gemessenen Durchmessers und t das Alter der Fichte in Jahren.

- " Erläutere das Modell: $\frac{dy}{dt} = k \cdot (1 - y)$
- " Bestimme die zugehörige Funktion $y(t)$ durch Lösen der Differentialgleichung.
- " Wird die Zeit t in Jahren gemessen, dann hat die Proportionalitätskonstante den Wert $k=0,05$. Weiters kennt man den durchschnittlichen Stammdurchmesser $d = 0,06$ m einer 5jährigen Fichte. Welches Alter hat eine Fichte mit einem Durchmesser von 0,4 Metern?

- 4) Ein Patient bekommt zur Behandlung zusätzliche Vitamine verschrieben. Er benötigt täglich mindestens 10 mg Vitamin A, 24mg Vitamin B und 125mg Vitamin C. Zwei verschiedene Medikamente können verwendet werden. Eine Pille des Medikaments M_1 enthält 4mg Vitamin A, 6mg Vitamin B und 25mg Vitamin C und kostet 3.-S pro Pille. Eine Pille des Medikaments M_2 enthält 2mg Vitamin A, 6mg Vitamin B und 50 mg Vitamin C und kostet 5.-S pro Pille.

- a) Wie viele Pillen von jedem Präparat sollte der Patient nehmen, um seinen täglichen Minimalbedarf an Vitaminen zu decken, und dabei die Kosten zu minimieren?
Stelle ein mathematisches Modell auf und verwende das graphische Lösungsverfahren. Kontrolliere das aus der Zeichnung erhaltene Ergebnis durch Rechnung und ermittle die minimalen täglichen Kosten. Welche Mengen an Vitamin A,B und C nimmt der Patient unter dieser Annahme täglich zu sich?
- b) Wie ändern sich die täglichen Kosten, wenn als einschränkende Bedingung maximal 12mg Vitamin A pro Tag eingenommen werden dürfen, um eine Überdosierung zu vermeiden?

.....
Fachprüfer

Direktor