Bundesrealgymnasium und Bundes-
Oberstufenrealgymnasium
A-3100 St. Pölten, Schulring 16

8C-Klasse(1998/99)

1. Aufgabe:

Mechanische Unruhen in Uhren, Federungseinrichtungen in Kraftfahrzeugen und Eisenbahnwaggons und elektrische Schwingkreise erzeugen bei einer einmaligen Erregung, ohne weiteren Antrieb, eine gedämpfte Schwingung der Form:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

a) Wie groß ist die Dämpfungskonstante *, wenn bei $t = \dfrac{5 \cdot \pi}{2 \cdot \omega}$ s und T = 2.Bs^{-1} die zugehörige Auslenkung y(t) der gedämpften Schwingung um 40 % kleiner als die ungedämpften Schwingung ist? (auf 5 Dez.)
Nehme für die weiteren Berechnungen eine ursprüngliche Auslenkung y_o mit 5 Einheiten an! Wie lautet nun die Funktion der gedämpften Schwingung?

b) Es ist zu zeigen, dass die Kurve der gedämpften Schwingung zwischen ihren beiden Einhüllenden $y(t) = +\, y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$ und $y(t) = -\, y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$ liegt. Skizziere dazu die gedämpfte Schwingung und die beiden Einhüllenden! Berechne die Berührpunkte der Dämpfungskurve mit ihrer Einhüllenden $y(t) = +\, y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$ im Intervall t , [0,3 s].

c) Wie läßt sich nachweisen, dass die Kurven einander berühren und nicht bloß schneiden? Zeige, dass die Schwingungsextrema nicht mit den Berührungsstellen zusammenfallen!

d) Sind die Wendepunkte der Dämpfungskurve - so wie bei der Sinuskurve – mit ihren Nullstellen identisch? Begründung!

2. Aufgabe:

a) Die Weltbevölkerung betrug 1950 etwa 2,515 Milliarden Menschen, 1989 etwa 5,201 Milliarden Menschen. Wir nehmen „überexponentielles" Wachstum an, die dazugehörige Differentialgleichung lautet:

$$dy = k.y^2.dt$$

Ermittle die Wachtumsfunktion zuerst allgemein und dann für die gestellte Aufgabe. Erstelle eine Wertetabelle für die Wachstumsfunktion der Weltbevölkerung in den Jahren 1950 bis 2020 für jedes zehnte Jahr. Interpretiere diese Ergebnisse und vergleiche - soweit wie möglich - mit den tatsächlichen Werten! Gib ein geeignetes Zeitintervall an und was wäre am Ende deines Intervall zu erwarten! Skizziere die Funktion!

b) Eine Bakterienkultur wächst in einer Nährlösung; diese kann höchstens 105 000 Individuen aufnehmen. Zunächst werden 1 000 Individuen in die Nährlösung gegeben; nach vier Stunden sind es bereits 3000. Wie viele sind es nach acht Stunden? Wann hat die Nährlösung eine Auslastung von 95 % erreicht? Stelle unter Annahme logistischen

Wachstums die Differentialgleichung und die zugehörige Wachstumsfunktion auf und beantworte dann die gestellten Fragen. Wodurch ist ein logistisches Wachstum gekennzeichnet?

3. Aufgabe:

a) Zwei Orte A und B liegen in einer Ebene 12,5 km voneinander entfernt. Ein Flugzeug, das im geraden Horizontalflug über die beiden Orte (von A in Richtung B) direkt hinwegfliegt, wird gleichzeitig in A unter dem Höhenwinkel 79,5° und in B unter 37,94° gemessen. Nach 30 s wird eine zweite Peilung vorgenommen und es werden die Winkel in A mit ∀' = 38,83° und in B mit ß' = 77,28° gemessen. Bestimme die Höhe h und die Geschwindigkeit v des Flugzeuges. (Keine Instrumentenhöhe). Visualisiere durch eine Skizze!

b) Ein vom Flugzeug abgeworfener Gegenstand beschreibt unter Einwirkung der Schwerkraft und unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes eine Parabelbahn. Die Parabelbahn setzt sich zusammen aus: Weg in die x-Richtung $x = v \cdot t$, Weg in die y-Richtung $y = h - \frac{g \cdot t^2}{2}$.
Zeige, dass ein genau über A vom Flugzeug abgeworfener Gegenstand unter den gegebenen Annahmen ziemlich genau im Punkt B auf die Erde fällt. ($g = 9,81\ m/s^2$)

4. Aufgabe:

Nach der Einführung der Autobahnvignette in Österreich betrug Statistiken zufolge der Anteil der AutobahnbenutzerInnen, die keine Vignette geklebt haben, 3 %.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf einem Autobahnrastplatz nicht alle der zwölf parkenden Autos eine Vignette geklebt haben?

b) Eine Polizeistreife überprüft täglich etwa 400 Autos auf Autobahnen.
*) Wie viele FahrerInnen ohne Vignette wird diese Streife im Mittel täglich antreffen?
**) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, an einem Tag mehr als 15 FahrerInnen ohne Vignette anzutreffen? Interpretiere das Ergebnis!

c) Wie oft muss eine Polizeistreife kontrollieren, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens 1 FahrerInn ohne Vignette anzutreffen, 95 % übersteigt?

d) In welchem Bereich liegt mit 80 %iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der FahrerInnen ohne Vignette, die die Polizeistreife an einem Tag antrifft? Visualisiere durch eine Skizze!

Punkteverteilung:
1. Beispiel: 14 Punkte
2. Beispiel: 14 Punkte
3. Beispiel: 10 Punkte
4. Beispiel: 10 Punkte