Themen zur schriftlichen Reifeprüfung aus Mathematik

Haupttermin 1996/97

Gruppe 1

und

Gruppe 2

Schulform: **Gymnasium**

Fachprüfer: Mag. Dr. Thomas Himmelbauer

THEMEN ZUR SCHRIFTLICHEN REIFEPRÜFUNG AUS MATHEMATIK

Haupttermin 1996/97

Gruppe 1

1) Der Weg s eines gleichförmig bewegten Körpers wird in Abhängigkeit von der Zeit t gemessen (Meßdaten siehe Tabelle). Laut den Gesetzen der gleichförmigen Bewegung gilt: $s = s_0 + v \cdot t$ (v ... Geschwindigkeit, s_0 ... Anfangsposition, t ... Zeit und s ... Wegposition zum Zeitpunkt t).

   a) Berechne unter Verwendung der Statistikfunktionen des TI-82 durch lineare Regression v und s_0!

   1 Punkt

   b) Berechne ohne Verwendung der Statistikfunktionen des TI-82 durch lineare Regression v und s_0! Es ist eine Tabelle für die Werte von t, t^2, s und $s \cdot t$ anzulegen. Die Rechenschritte sind aufzuschreiben!

   8 Punkte

   c) Stelle fest, zu welchem Zeitpunkt die durch die lineare Regression berechnete lineare Funktion am stärksten von den Meßdaten abweicht, und gib diese Abweichung an!

   2 Punkte

   d) Berechne, welche Wegposition für t = 12s zu erwarten ist!

   1 Punkt

   Meßdaten aus dem Versuch: t in Sekunden, s in Metern

   Summe: 12 Punkte

t_i	s_i
0,8	7,7
1,7	11,0
2,6	13,9
2,9	15,2
3,5	17,4
4,4	20,2
4,8	21,9
5,2	23,4

2) Berechne die Gleichungen jener Kreise, die durch die Punkte A = (7 | -3) und B = (8 | 2) verlaufen und die Gerade t: 2x - 3y = -3 berühren.

   12 Punkte

3) Das Integral $\int_0^2 10x \cdot e^{-x^2} \cdot dx$ ist auf mehrere Arten zu berechnen:

a) mit Hilfe der numerischen Integrationsfunktion des TI-82!

1 Punkt

b) mit Hilfe der Integration durch Substitution und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung!

3 Punkte

c) mit Hilfe der angeführten Näherungsverfahren, wobei das Intervall [1 ; 2] in 50 gleichgroße Teilintervalle zerlegt wird!
Näherungsverfahren: Trapezformel, Tangentenformel, Formel von Poncelet, Simpsonsche Formel
Beschreibe dabei ausführlich die Vorgangsweise am TI-82!

8 Punkte

Summe: 12 Punkte

4) a) Beweise den Sinussatz an Hand der Zeichnung eines spitzwinkeligen Dreiecks!

4 Punkte

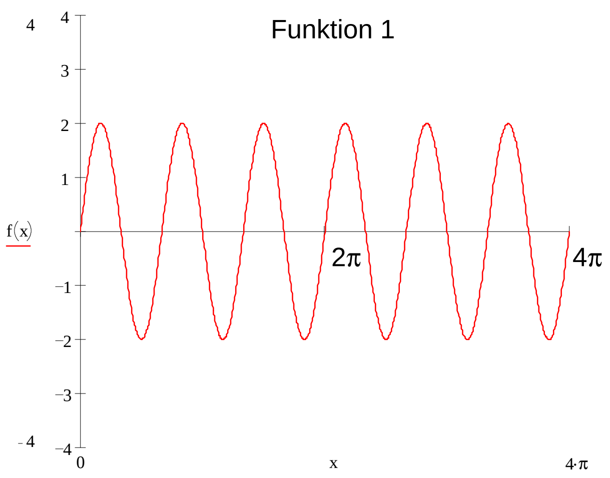
b) Beschreibe die vier Fälle, die beim Auflösen eines schiefwinkeligen Dreiecks auftreten können, und gib an, mit welchen Lehrsätzen man die Lösungen erzielt!

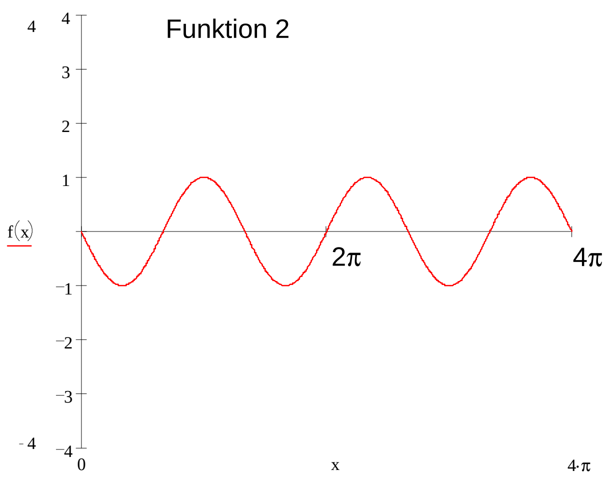
2 Punkte

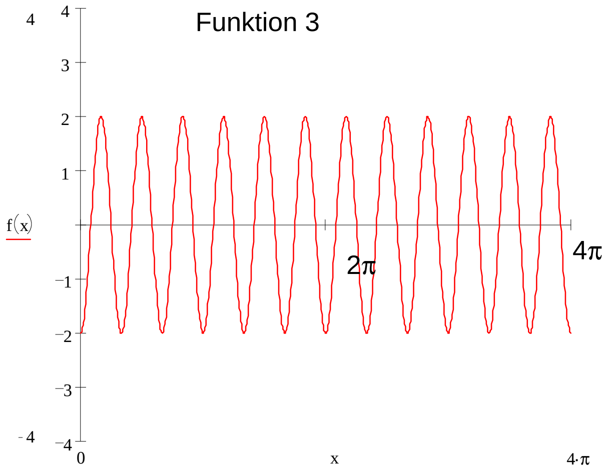
c) Die abgebildeten Graphen sind Graphen von Funktionen der Form $f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$.
Bestimme jeweils A, ω und φ!

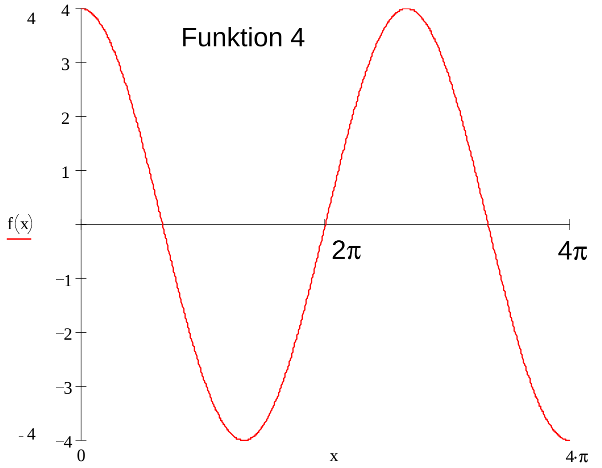
6 Punkte

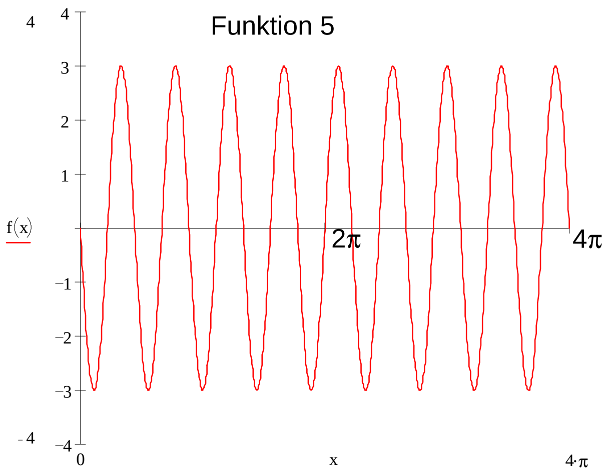
Summe: 12 Punkte

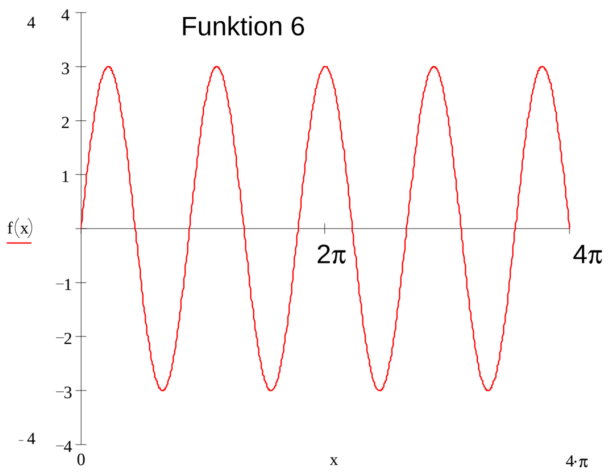












Notenschlüssel:

0 - 23	Punkte	Nicht Genügend
24 - 30	Punkte	Genügend
31 - 38	Punkte	Befriedigend
39 - 44	Punkte	Gut
45 - 48	Punkte	Sehr Gut

Gruppe 2

1) Bei einer Tombola werden 2000 Lose ausgegeben. Davon sind 400 Gewinnlose.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man unter acht gekauften Losen genau zwei Gewinnlose hat?
1 Punkt

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter acht gekauften Losen kein Gewinnlos ist?
1 Punkt

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter acht gekauften Losen mindestens zwei Gewinnlose sind?
1 Punkt

d) Wie viele Lose muß man mindestens kaufen, um mit 90% Wahrscheinlichkeit mit mindestens einem Gewinn rechnen zu können?
3 Punkte

Der Anteil der Gewinnlose soll verändert werden.

e) Wie groß müßte der Anteil mindestens sein, damit man beim Kauf von acht Losen mit 90% Wahrscheinlichkeit mindestens ein Gewinnlos hat?
3 Punkte

f) Wie groß müßte der Anteil mindestens sein, damit man beim Kauf von acht Losen mit 90% Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Gewinnlose besitzt?
3 Punkte

Summe: 12 Punkte

2) a) Bestimme jeweils die Lage der drei Ebenen und begründe die Entscheidung!

1) ε_1: $3x - y + 5z = 11$
ε_2: $5x + y - 6z = 12$
ε_3: $13x + y - 7z = 2$

2) ε_1: $3x + 7y + 6z = 10$
ε_2: $-6x - 14y - 12z = -20$
ε_3: $15x + 35y + 30z = 50$

3) ε_1: $3x + 12y - 24z = 1$
ε_2: $5x + 20y - 40z = 3$
ε_3: $x + 4y - 8z = 2$

4) ε_1: $20x + 12y - 8z = 20$
ε_2: $-10x - 6y + 4z = -10$
ε_3: $5x + 3y - 2z = 2$

6 Punkte

b) Beschreibe alle möglichen Lagen, die 3 Ebenen im Raum zueinander besitzen können!
2 Punkte

c) Erfinde für jene Fälle, die im Teil a) der Aufgabe nicht vorgekommen sind, je ein Beispiel und zeichne je eine räumliche Skizze!
4 Punkte

Summe: 12 Punkte

3) a) Leite die Formel für das NEWTONsche Näherungsverfahren ausführlich an Hand einer Zeichnung her!

6 Punkte

Für die Funktion $g(x) = x^3 - \frac{81x^2}{100} - \frac{501x}{500} + \frac{100}{125}$ sind folgende Aufgaben zu lösen:

b) Bestimme die Nullstellen mit der CALC-Funktion root und gib sie auf 5 Kommastellen genau an!

1 Punkt

c) Die zwischen den x-Werten 0,6 und 0,9 gelegene Nullstelle x_1 ist mit dem NEWTONschen Näherungsverfahren zu approximieren, bis $|f(x_1)| < 0{,}001$ ist! A = 0,6 ist als Startwert zu verwenden! Eine Tabelle, aus der die Näherungsschritte abgelesen werden können, ist anzulegen!

3 Punkte

d) Die zwischen den x-Werten 0,9 und 1,2 gelegene Nullstelle x_2 ist mit Hilfe der Regula falsi zu nähern, bis $|f(x_2)| < 0{,}001$ ist! U = 0,9 und O = 1,2 sind als Startwerte zu verwenden! Eine Tabelle, aus der die Näherungsschritte abgelesen werden können, ist anzulegen!

3 Punkte

Summe: 12 Punkte

4) Gegeben ist die Ellipse $9x^2 + 16y^2 = 144$.

a) Der Ellipse wird das achsenparallele Rechteck mit maximalem Flächeninhalt eingeschrieben. Berechne seine Länge und seine Breite!

4 Punkte

b) Berechne die Volumina der Ellipsoide, die entstehen, wenn die gegebene Ellipse um die x-Achse bzw. um die y-Achse rotiert!

4 Punkte

c) Dem Ellipsoid, das durch Rotation der Ellipse um die x-Achse entsteht, wird der Drehzylinder mit maximalem Volumen eingeschrieben, dessen Achse auf der x-Achse liegt. Berechne seinen Radius und seine Höhe!

4 Punkte

Summe: 12 Punkte

Notenschlüssel:

0 - 23	Punkte	Nicht Genügend
24 - 30	Punkte	Genügend
31 - 38	Punkte	Befriedigend
39 - 44	Punkte	Gut
45 - 48	Punkte	Sehr Gut

THEMEN ZUR SCHRIFTLICHEN REIFEPRÜFUNG AUS MATHEMATIK

Haupttermin 1997/98

Gruppe 1

1) a) Formuliere und beweise die Cramersche Regel für ein System von 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten!

4 Punkte

b) Entscheide, welches der angegebenen Systeme von 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten eindeutig lösbar ist, begründe diese Entscheidung und löse dieses System mit Hilfe der Cramerschen Regel!

System 1:	System 2:	System 3:
I) $ax + by = 2$	I) $x + ay = 2a$	I) $abx + y = a$
II) $x + \frac{by}{a} = \frac{2}{a}$	II) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{b+1}{b}$ mit $b \neq 1$	II) $-bx - \frac{y}{a} = -b$

Für alle 3 Systeme gilt: $a \neq 0$ und $b \neq 0$

5 Punkte

c) Gib je ein Beispiel für folgende Systeme von 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten an:
c_1) das System ist eindeutig lösbar
c_2) das System ist mehrdeutig lösbar
c_3) das System ist nicht lösbar
Stelle diese Beispiele graphisch dar!

3 Punkte

Summe: 12 Punkte

2) Das Integral $\int_1^2 \ln(x) \cdot dx$ ist auf mehrere Arten zu berechnen:

a) mit Hilfe der numerischen Integrationsfunktion des TI-82!

1 Punkt

b) mit Hilfe der partiellen Integration und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

3 Punkte

c) mit Hilfe der angeführten Näherungsverfahren, wobei das Intervall [1 ; 2] in 50 gleich große Teilintervalle zerlegt wird!
Näherungsverfahren: Trapezformel, Tangentenformel, Formel von Ponclet, Simpsonsche Formel. Beschreibe dabei ausführlich die Vorgangsweise am TI-82!

8 Punkte

Summe: 12 Punkte

3) a) Leite die Formel für die Regula falsi ausführlich an Hand einer Zeichnung her!

6 Punkte

b) Gegeben ist $f(x) = \frac{1}{1000} \cdot \left(x^3 - \frac{212x^2}{7} - \frac{9140x}{7} + \frac{105605}{7} \right)$

Berechne die Nullstellen mit der CALC-Funktion root des TI-82 und gib sie auf 5 Kommastellen genau an!

1 Punkt

c) Bestimme die Windowvariablen (Xmin, Xmax, Ymin, Ymax) so, daß alle Nullstellen deutlich erkennbar sind und der Graph zwischen den Nullstellen zur Gänze zu sehen ist!

1 Punkt

d) Die zwischen den x-Werten 50 und 60 gelegene Nullstelle x_0 ist mit Hilfe der Regula Falsi zu nähern, bis $|f(x_0)| < 0{,}001$ ist! U = 50 und O = 60 sind als Startwerte zu verwenden! Eine Tabelle, aus der die Näherungsschritte abgelesen werden können, ist anzulegen!

4 Punkte

Summe: 12 Punkte

4) Der Punkt P = (4 | 3) ist einer der Schnittpunkte einer Ellipse in 1. Hauptlage mit einer Hyperbel in 1. Hauptlage. Die große Halbachse a der Ellipse beträgt 6 Einheiten und S = (3 | 0) ist ein Scheitel der Hyperbel.

a) Stelle die Gleichung der Ellipse auf!

2 Punkte

b) Stelle die Gleichung der Hyperbel auf!

2 Punkte

c) Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der dadurch entsteht, daß das von Ellipse und Hyperbel eingeschlossene, linsenförmige Flächenstück um die y-Achse rotiert!

4 Punkte

c) Der Ellipse wird das achsenparallele Rechteck mit maximalem Flächeninhalt eingeschrieben. Berechne seine Länge und seine Breite!

4 Punkte

Summe: 12 Punkte

Notenschlüssel:

0 - 23	Punkte	Nicht Genügend
24 - 30	Punkte	Genügend
31 - 38	Punkte	Befriedigend
39 - 44	Punkte	Gut
45 - 48	Punkte	Sehr Gut

Gruppe 2

1) Gegeben ist die Folge $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{7n^2+5}{2n^2+9} \right\rangle$.

   a) Berechne die Folgenglieder a_1, a_2, a_3, a_{10}, a_{100}, a_{500} auf 4 Kommastellen genau!

   1 Punkt

   b) Gib eine untere Schranke m und eine obere Schranke M für diese Folge an und zeige, daß es sich tatsächlich um eine untere bzw. obere Schranke handelt!

   2 Punkte

   c) Stelle eine Vermutung über die Monotonie der Folge auf und beweise ihre Richtigkeit!

   4 Punkte

   d) Berechne den Grenzwert der Folge unter Verwendung der Grenzwertsätze!

   2 Punkte

   e) Berechne für $\varepsilon = \frac{1}{100}$ den Index N, ab dem alle Folgenglieder weniger als ε vom Grenzwert entfernt sind!

   3 Punkte

Summe: 12 Punkte

2) Gegeben sind die Punkte A = (0 | 0), B = (9 | 0) und C = (0 | 12)

   a) Bestimme die Gleichung des Kreises K_1, der durch die Punkte A, B und C verläuft!

   3 Punkte

   b) Zeige, daß die Menge aller Punkte X, für die gilt:

   $\frac{\left\|\overrightarrow{XA}\right\|}{\left\|\overrightarrow{XB}\right\|} = \frac{4}{5}$, ein Kreis K_2 ist!

   5 Punkte

   c) Berechne den Schnittpunkt S von K_1 und K_2, der einen positiven y-Wert besitzt, und zeige, daß die beiden Mittelpunkte von K_1 und K_2 und S ein rechtwinkeliges Dreieck bilden!

   4 Punkte

Summe: 12 Punkte

3) a) Leite aus der Definition des Differentialquotienten die 1. Ableitung für die Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$ her!

6 Punkte

b) Gegeben ist $f(x) = \frac{50}{x^4 + 3} \cdot \left(x^3 + \frac{26}{27} x^2 - \frac{163}{27} x + \frac{2}{9} \right)$.
Bestimme die Nullstellen von f mit der CALC-Funktion root und gib sie auf 5 Kommastellen genau an!

2 Punkte

c) Für den x-Wert $x_0 = -2$ sind die Windowvariblen (Xmin, Xmax, Ymin, Ymax) so zu bestimmen, daß sich der Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ im Zentrum des Fensters befindet und das dargestellte Stück des Graphen von f als eine der Diagonalen des Fensters erscheint!

2 Punkte

d) Aus den in c) ermittelten Windowvariablen ist näherungsweise der Anstieg der Tangente im Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ zu ermitteln und mit dem mit Hilfe der MATH-Funktion nderive errechneten Wert für den Anstieg zu vergleichen.

2 Punkte

Summe: 12 Punkte

4) Eine Blumengroßhandlung rechnet damit, daß 10% der bestellten Rosen beim Transport vom Erzeuger beschädigt werden.

a) In welchem Bereich liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der unbeschädigten Rosen, wenn 300 Stück bestellt werden?

4 Punkte

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Lieferung von 400 Rosen höchstens 50 beschädigte Rosen enthält?

4 Punkte

c) In einer Lieferung von 100 Rosen waren 7 beschädigt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine so starke oder noch stärkere Abweichung vom erwarteten Wert?

4 Punkte

Summe: 12 Punkte

Notenschlüssel:

0 - 23	Punkte	Nicht Genügend
24 - 30	Punkte	Genügend
31 - 38	Punkte	Befriedigend
39 - 44	Punkte	Gut
45 - 48	Punkte	Sehr Gut