1) Die Ausgangslage

- **Klasse 8 R mit 12 Schülern und Schülerinnen**
- **Realgymnasium.**
- **TI 92 wurde seit dem zweiten Semester der sechsten Klasse, verwendet**
- **mathematisch durchschnittlich begabte Schülerinnen und Schüler**
- **nur sehr selten ein "Sehr Gut" im Jahreszeugnis**
- **mehrheitlich "Befriedigend" und "Genügend"**
- **gleiches Bild zeigte sich auch nach der schriftlichen Matura**
- **Großes Interesse der Schülerinnen und Schüler an der Arbeit mit dem TI 92**
- **eine Arbeits- und vor allem Rechenerleichterung wurde von ihnen erwartet**
- **an die veränderte Aufgabenstellung mußten sich die Schüler aber erst gewöhnen.**

2) Praktische Überlegungen

1. **Welche Formeln und Programme bzw. Texte dürfen die Schülerinnen und Schüler auf ihren Gerät abspeichern und**

2. **wie überprüfe ich dies und schließlich**

3. **was tue ich, wenn ein Gerät während der Matura seinen Geist aufgibt ?**

ad 1) Für die Matura durften die Schüler aber nur Formeln und Programme, die für Schul- oder Hausübungen erarbeitet wurden auf ihrem Gerät speichern.

Ad 2) Kontrolle: die Rechner wurden von mir - wie auch die Formelsammlungen - vor der Matura eingesammelt und stichprobenartig kontrolliert.

ad 3) Mein eigenes Gerät und ein weiteres, ausgeborgtes Gerät standen zur Verfügung, falls ein Rechner den "Geist" aufgeben sollte.

3) Wie finde ich geeignete Maturabeispiele ?

Andere Anforderungen:

- nicht nur Abbilder von in irgendeiner Form im Unterricht behandelten Beispielen
- aber auch nicht so ganz anders bzw. zu schwer, um auch der Streßsituation, unter der die Kandidaten stehen gerecht zu werden.
- reine Rechenbeispiele (z. Bsp. eine "normale" Kurvendiskussion) fallen weg,.
- die Fähigkeit der graphischen und tabellarischen Darstellungsmöglichkeiten nutzen.
- mehr Modellbidungs- und Interpretationsaufgaben.

Literatur:

Leistungskurs Mathematik - Abitur 1988 - 1993. Die in Baden - Württemberg zentral gestellten Aufgaben und deren Lösungen. Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1993. (ISBN 3 - 12 - 725320 - 6)

Leistungskurs Mathematik - Abitur 1991 - 1996. Die in Baden - Württemberg zentral gestellten Aufgaben und deren Lösungen. Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1993.(ISBN 3 - 12 - 725540 - 3)

Abitur. Prüfungsaufgaben mit Lösungen 1985 - 1993. Mathematik Grundkurs. Stark Verlag, Freising, 16. Auflage1993. (ISBN 3-89449 - 083 - 7)

Dieter Kindinger, 55 Klausuraufgaben Analysis. Aufgabenvorschläge für die Sekundarstufe II mit Lösungshinweisen. Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1992. (ISBN 3 - 12 - 929703 - 0)

4) Welche Aufgaben eignen sich besonders ?

- Aufgaben, die eine graphische Darstellung verlangen oder graphisch gelöst werden können.
- Aufgaben mit eher umfangreicheren oder "schwierigeren Differentiationen oder Integrationen bzw. näherungsweise zu lösenden Gleichungen eignen sich, wenn sie nicht den Hauptteil einer Aufgabe bilden, sondern innerhalb eines umfangreicheren Beispieles Vorkommen.
- Aufgaben, die eine normalerweise relativ umfangreiche Rechenarbeit beinhalten, die vom TI - 92 abgenommen wird.
- Aufgaben, bei denen Modellbildung und Interpretation der Lösung einen wichtigen Teil des Beispiels bilden

Gruppe A:

Bsp. 1) Umgekehrte Diskussion einer Polynomfunktion. Gegeben war lediglich ein TI - 92 Fenster, aus dem alle wichtigen Punkte zu entnehmen und die Gleichung der Polynomfunktion zu ermitteln war

Bsp. 2) Analytische Geometrie des Raumes

Bsp. 3) Trigonometrie verbunden mit einer Extremwertaufgabe

Bsp. 4) Wahrscheinlichkeitsrechnung

Gruppe B:

Bsp. 1) Differentialrechnung (1. Ableitung interpretiert als Maß für die Geschwindigkeit)

Bsp. 2) Dynamische Systeme, gelöst durch Differenzengleichungen

Bsp. 3) Funktionen: Exponentialfunktion und gebrochen rationale Funktion mit graphischer und tabellarischer Darstellung

Bsp. 4) Lineare Optimierung : Minimumaufgabe mit graphischer Lösung

Schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik zum Haupttermin 1997/98

Klasse 8 R (Aufbaurealgymnasium)

Gruppe B

1) In einen oben offenen kegelförmigen Behälter (r = 6dm, h = 12dm) fließt Wasser mit einer konstanten Einflußgeschwindigkeit von 50 l /min.

a) Schätze, ob die Wasserhöhe mit konstanter Geschwindigkeit steigt. Wie lautet die Formel, die das Volumen des Behälters zu jedem beliebigen Zeitpunkt t bestimmt ?

b) Stelle eine Formel auf, die jedem Zeitpunkt t die Wasserhöhe h(t) im Behälter zuordnet. Achte dabei auf das Verhältnis zwischen r und h !

c) Wie schnell steigt die Wasserhöhe nach 2 min ? (Berechne die momentane Geschwindigkeit des Wasseranstiegs zum Zeitpunkt t = 2 min). Beweise deine in a) aufgestellt Schätzung durch Berechnung der Wasseranstiegsgeschwindigkeit nach t = 2, 3, 4 min.

d) Wie schnell steigt die Wasserhöhe, wenn das Volumen des Wassers gerade 400 dm³ beträgt ?

e) Stelle eine Formel auf, die jedem Zeitpunkt t den Radius r(t) der Wasseroberfläche zuordnet. Wie schnell wächst dieser Radius nach t Sekunden ?

2) Zwei Betriebe der Lebensmittelindustrie sind voneinander abhängig und beliefern einander. Die Betriebe C und D produzierten im n - ten Jahr Waren im Wert x_n bzw. y_n (in Mill. S) C verwendet 80% der produzierten Ware selbst weiter und liefert 20% an den Betrieb D. D verbraucht 60% der Ware selbst und liefert 40% an C. Der für das nächste Jahr notwendige Output x_{n+1} bzw. y_{n+1} setzt sich aus den angelieferten und der selbstproduzierten Warenmenge zusammen.

a) Beschreibe den Vorgang durch ein System von zwei Differenzengleichungen.

b) Stelle die Entwicklung für die ersten sieben Jahre graphisch dar, wenn $x_o = 100$ und $y_o = 160$ Einheiten sind. Gib eine Formel zur Berechnung des n-ten Zustandsvektors $\vec{z}_n$ an und berechne $\vec{z}_4$. Interpretiere das Ergebnis.

c) Strebt das System einem Gleichgewichtszustand zu ? Wenn ja, welchem ? Berechne die Koordinaten des Gleichgewichtsvektors.

d) Wie verhält sich das System auf lange Sicht, wenn im Betrieb C aus technischen Gründen 3% der Produkte fehlerhaft sind und somit nicht weiter verwendet werden können ? (Ändere das Gleichungssystem entsprechend ab und stelle es graphisch dar !)

3) Der Bestand an privaten PKW eines Landes hat sich in den vergangenen 40 Jahren stark erhöht und wird auch in den kommenden Jahren noch weiter steigen. Aus einer Statistik sind die folgenden Daten entnommen:

Jahr	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
PKW in Mill. Stk	0,7	1,9	4,9	9,7	14,4	18,2	23,2	26,1	30,6

a) Für die Jahre 1950 - 1965 läßt sich der PKW - Bestand annähernd durch eine Exponentialfunktion $g(t) = a \cdot e^{\lambda t}$ beschreiben. Bestimme aus den Daten der Jahre 1955 (t=0) und 1965 die Funktionsgleichung.
Wie groß ist die prozentuale Abweichung vom Tabellenwert für das Jahr 1950 ? Wie groß wäre die prozentuale Abweichung, würde man 1990 noch die gleiche Näherungsfunktion benutzen ?

b) Um eine bessere Näherung für die Jahre ab 1965 zu erhalten arbeitet man ab diesem Jahr mit der Funktion $f\colon y = \frac{18x}{\sqrt{x^2 + 18^2}} + 18$. Stelle die Funktion graphisch dar ($-25 \le x \le 25,\ \ 5J. = 1cm$) und trage die Daten aus obiger Tabelle in die Graphik ein. Welchem Jahr entspricht der Wert für x=0 ? Beschrifte den Graphen entsprechend und gib die Bedeutung der Variablen x im neuen mathematischen Modell an. In welchem Jahr zwischen 1975 und 1990 gibt es die größte prozentuelle Abweichung? Einige Prognosen sagen für das Jahr 2010 zwischen 30,5 und 34,7 Mill. Fahrzeuge in Privatbesitz voraus. Liegen die Vorhersagen des Modells in diesem Bereich ? Welcher maximale PKW - Bestand ergibt sich aus diesem mathematischen Modell ?

c) Berechne den Wert der 1. Ableitung von f bezogen auf das Jahr 2000 und gib die Bedeutung dieses Wertes für die Entwicklung des PKW - Bestandes im Jahr 2000 an.
Für welches Jahr ist der Bestandszuwachs/Jahr erstmals < 50 000 PKW ? Die Fläche zwischen dem Graphen von f(x) und der x - Achse, bezogen auf den Zeitraum von 1970 - 1990 sei ein Maß für den Schadstoffausstoß der PKW in diesem Zeitraum. Berechne dieses Maß und interpretiere die so erhaltene Zahl !

4) Der Server eines Computernetzwerkes sendet Daten an zwei verschiedene Drucker D_1 und D_2. Der Drucker D_1 verarbeitet 50 Zeichen pro Sekunde und arbeitet mit Einzelblatteinzug, die Kosten pro Blatt Papier betragen 30 Groschen. D_2 verarbeitet 70 Zeichen pro Sekunde und arbeitet mit Endlospapier zu 25 Groschen pro Blatt. Es soll ein Formular hergestellt werden, das 800 Zeichen enthält. Der Unternehmer wird beauftragt, mindestens 2250 Formulare zu drucken, die höchstens S 800,- kosten dürfen.
Mindestens zwei Drittel der Formulare sollen dabei aus Zweckmäßigkeitsgründen im Einzelblattdruckverfahren hergestellt werden. Die Drucker könne nicht gleichzeitig in Betrieb sein. Wie viele Formulare müssen nun von den einzelnen Druckern D_1 bzw. D_2 hergestellt werden, wenn die Gesamtzeit für die Herstellung der Formulare minimal sein soll ? Wie hoch sind die Kosten dafür ?
Welche Konsequenzen ergeben sich, wenn unter sonst gleichen Bedingungen nur ein Betrag von S 500,- zur Verfügung steht ?

6) Wie lösten die Schüler nun die Aufgaben ?

1. Beispiel:

- Obwohl recht umfangreich konnten alle Schüler das Beispiel fast richtig lösen.
- Formeln für das Volumen in Abhängigkeit von der Zeit, als auch der Höhe in Abhängigkeit von der Zeit wurden richtig aufgestellt.
- Differenzieren der für die Höhe erhaltenen Wurzelfunktion und das Einsetzen der entsprechenden Werte erledigte der TI 92 ohne Probleme.
- die erste Ableitung wurde als Möglichkeit zur Berechnung der Geschwindigkeit des Wasser-anstiegs. erkannt.
- Formel für den Radius in Abhängigkeit von der Zeit erstellten die Schüler und Schülerinnen richtig, meist "händisch"
- die Berechnung der Geschwindigkeit des Wachstums des Radius überließen sie meist wieder dem Rechner.

In diesem Beispiel wurden von den Schülern die entsprechenden Modelle (Formeln) richtig erkannt und erstellt und der TI - 92 als Werkzeug zur Berechnung der entsprechenden Differentiale und ihrer Werte genutzt.

2. Beispiel:

- nur mehr von der Hälfte aller Schülerinnen und Schüler annähernd richtig gelöst

- andere Hälfte scheiterte an ihren mangelnden Kenntnissen von Systemen von Differentialgleichungen.

- Das System von Differentialgleichungen konnten alle mehr oder weniger richtig aufstellen und richtig in den auf Mode Sequence umgestellten Rechner eingegeben bzw. richtig graphisch darstellen.

- an der Berechnung des allgemein geforderten n-ten Zustandsvektors scheiterten viele

- den Wert von $\vec{z}_4$ konnten die meisten aus der Tabelle entnehmen, wurde aber nicht als vollständig richtig gewertet, wenn nicht die entsprechende Formel für $\vec{z}_n$ ebenfalls vorhanden war, da ja eindeutig eine Berechnung gefordert war (Formulierung der Aufgabe überlegen !)

- Auch die Koordinaten des Gleichgewichtsvektors lassen sich aus der Tabelle entnehmen, allerdings war auch hier eine Berechnung gefordert

- für d) geändertes Gleichungssystem konnten die meisten wiederum erstellen, allerdings die für ein Langzeitmodell notwendige Darstellung für den Zeitraum von z. Bsp. 20 oder mehr Jahren wurde von den Schülern nicht durchgeführt.

3. Beispiel

- Das dritte Beispiel wurde von fast allen Schülern zu 75 - 80 % richtig gelöst
- zwei Schülerinnen lösten das Beispiel vollständig richtig

- Beispiel besteht aus drei Teilen: im ersten Teil Bestimmung der Konstanten einer Exponentialfunktion bestimmen → nach richtigem Ansatz vom TI - 92 gelöst. Weiters waren bestimmte prozentuelle Abweichungen der vorgegeben Werte zu den von der Funktion beschriebenen Werten zu berechnen.

- Die Hälfte aller Schülerinnen und Schüler konnte diesen Teil der Aufgabe vollständig richtig lösen, ein weiteres Viertel immerhin fast vollständig richtig.

- zweiter Teil des Beispiels: Zusammenhang zwischen den vorgegebene Daten und einer vorgegebenen gebrochen rationalen Wurzelfunktion mit Hilfe der graphischen Darstellung eben dieser Funktion herzustellen, sowie prozentuelle Abweichungen für die verschiedenen Jahre zu berechnen und tabellieren, eine weitere Prognose zu erstellen und ein eventueller Maximalwert zu berechnen.

- drei Viertel der Schülerinnen und Schüler konnten die Aufgabe fast vollständig richtig lösen: die TI - 92 Grafik richtig übertragen und die vorgegebenen Werte richtig den einzelnen Jahren zuordnen. Die Prozentsätze wurden größtenteils richtig ermittelt, der Maximalwert mit Hilfe der Limit - Funktion des TI-92 ermittelt.

- dritter Teil des Beispiels: die für die Ermittlung des Zuwachses die vorgegebene Funktion differenzieren, sowie ein bestimmtes Integral lösen →TI - 92 .
- Die Interpretation des Integrals als Maß für die Gesamtzahl aller im vorgegeben Zeitraum fahrenden Fahrzeuge, die Schadstoffe erzeugen war meist falsch
- Text ist vielleicht etwas unglücklich gewählt, da die meisten das Integral als Maß für den Schadstoffausstoß aller in diesem Zeitraum fahrenden Fahrzeuge interpretierten.

- Gedanken auch abseits der Mathematik machte sich eine Schülerin und schrieb, dass diese Zahl nicht ganz real sein könne, da in den Jahren von 1970 - 1990 viel für die Abnahme des Schadstoffausstoßes getan wurde und diese Zahl daher nicht (linear) mit der Zunahme der PKW steigen muß.

4. Beispiel

- lineare Optimierungsaufgabe
- obwohl als relativ "leicht" angesehen erwies es sich für die meisten Schülerinnen und Schüler als schwieriger als erwartet.
- Aufgabe stellte sich etwas anders als die meisten der üblichen Transport - oder Produktions- bzw. Gewinn-optimierungsprobleme
- Schülerinnen und Schüler scheiterten meist am aufzustellenden Ungleichungssystem,
- Zwei Schülerinnen lösten das Beispiel dann doch annähernd richtig, die meisten konnten wenigstens einige der notwendigen Ungleichungen bestimmen, aber immerhin ein Viertel konnte mit der Angabe gar nichts anfangen.

RESUME

- Ergebnis der Matura entspricht den Noten der Oberstufe.

- einziges "Nicht genügend" hatte ein Schüler, der als Repetent mit dem TI - 92 noch nicht so vertraut war, wie die übrigen Schüler

- er scheiterte genau daran, da er das zweite Beispiel (System von Differenzengleichungen) versuchte "händisch" zu lösen und seitenweise Tabellen errechnete, die der TI - 92 ja automatisch erstellt.

- TI - 92 wurde von den übrigen Schülerinnen und Schülern wie gedacht eingesetzt, zum Teil wurden auch die notwendigen Eingaben dokumentiert.

- Möglichkeiten zur graphischen Darstellung wurden genutzt, ebenfalls die "Rechenerleichterungen" (Differentiationen und Integrationen).

- Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler mit Hilfe ähnlicher Aufgaben auf die Aufgabenstellungen der Beispiele ist aber etwas schwieriger als sonst.

- Finden von entsprechenden Beispielen und auch "Begleitbespielen" ist aufwendig.