Alle Körper fallen gleich schnell – fallen alle Körper gleich schnell?

Themenbereich	
Realitätsnaher Mathematikunterricht, Analysis	
Inhalte	Ziele
• Bewegungsgleichung der freien Falls mit Luftwiderstand • Beschleunigungs-, Geschwindigkeits-, Zeit-Wegfunktion beim freien Fall mit Luftwiderstand • Fallzeit als Funktion des Fallweges • Lösen von Differentialgleichungen • Darstellung des Geschwindigkeitsverlaufes im Richtungsfeld • Nutzung der Möglichkeiten des TI92-Plusmoduls	• Die Bewegungsgleichung für den freien Fall mit Luftwiderstand lösen. • Numerisches und analytisches Finden des Geschwindigkeitsverlaufes. • Erlernen des TI-Handlings im Zusammenhang mit einfachen Differentialgleichungen. • Lösen einer realitätsnahen Aufgabenstellung. • Demonstration des Einsatzes der Möglichkeiten des TI92+ im Rahmen des Physikunterrichtes.
Adressaten: Am Beispiel des freien Falles mit Luftwiderstand sollen einige Möglichkeiten des TI92+/TI89 gezeigt werden. Zielgruppe sind Schüler des Wahlpflichtfaches Mathematik oder Schüler eines Realgymnasiums im Fach Physik.	

Einleitung

Die Forderung nach einem realitätsnahen Mathematikunterricht wird in letzter Zeit immer häufiger erhoben. Realitätsnahe heißt aber, sich im Unterricht auch auf komplexere Modelle einzulassen. Als ein Beispiel soll der freie Fall mit Luftwiderstand [1] betrachtet werden, von dem in der Schule oft die Rede ist, der aber selten wirklich behandelt wird.

Die Bewegungsgleichung

Im Unterschied zum freien Fall im Vakuum ist in der Luft der frei fallende Körper nicht nur der anziehenden Schwerkraft, sondern auch einer bremsenden Widerstandskraft unterworfen, die durch die NEWTONsche Widerstandsformel $F_W = c_w A \frac{\rho v^2}{2}$ beschrieben wird. Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung

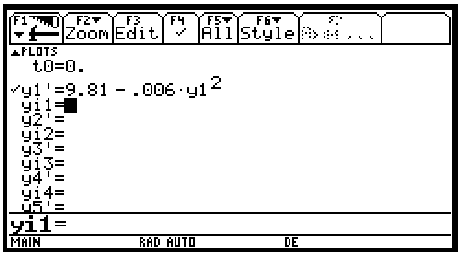
$$m \cdot a = m \cdot g - c_w A \frac{\rho \cdot v^2}{2}$$

$$a = g - \frac{c_w A \rho}{2m} v^2$$

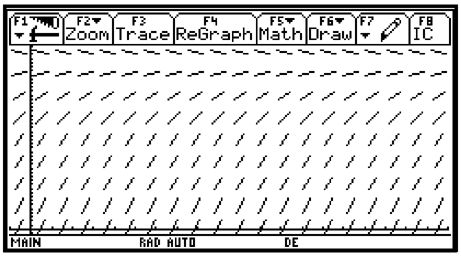
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_w A \rho}{2m} v^2 \qquad (1)$$

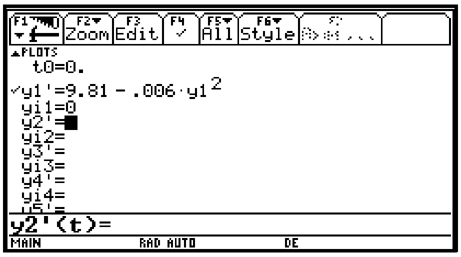
Der numerische Zugang

Wir können nun unter Einsatz des TI-92 (PlusModule) sehr schnell zu einer numerischen Lösung kommen. Geben wir nur die Bewegungsgleichung an, so erhalten wir im Graphikfenster für einen ersten überblick das zugehörige Richtungsfeld. (Bei einem Widerstandsbeiwert von $c_w = 0{,}8$, einer Querschnittsfläche des fallenden Körpers von $A = 0{,}8 m^2$, einer Luftdichte von $\rho = 1{,}3 \frac{kg}{m^3}$ und einer Masse von $70 kg$ ergibt sich als Koeffizient des quadratischen Terms 0,006.)



Als Anfangsbedingung nehmen wir an, daß $v(0)=0$ sei. Damit erhalten wir sofort den Zuwachs der Geschwindigkeit, der sich erwartungsgemäß abschwächt und sich schließlich einem konstanten Wert annähert.





Diese in der Lösungskurve sichtbare Endgeschwindigkeit tritt dann ein, wenn der Luftwiderstand die Größe der Schwerkraft erreicht. Durch Gleichsetzen von F_g und F_W erhält man also

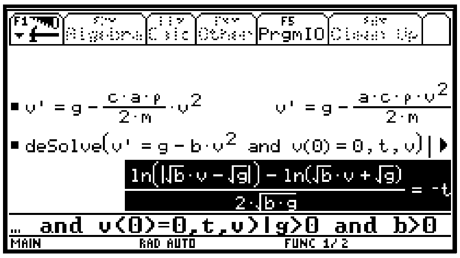
$$v_{end} = \sqrt{\frac{2mg}{c_W A\rho}}. \tag{2}$$

Im konkreten Fall ergibt sich somit:

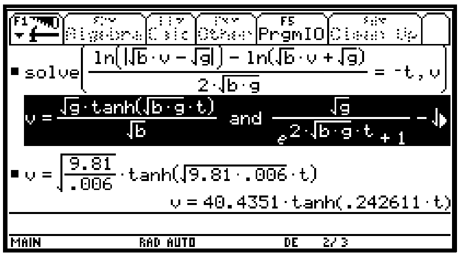
$$v_{end} \approx 40{,}4\frac{m}{s} \approx 146\frac{km}{h}.$$

Die Fallgeschwindigkeit als Funktions der Zeit

Um zu einer Termdarstellung der Geschwindigkeitsfunktion zu kommen, ist es notwendig, die Differentialgleichung zu lösen. Zu einer übersichtlicheren Behandlung setzen wir $b := \frac{c_W A\rho}{2m}$. Zur Lösung dieser Differentialgleichung steht nun das Kommando **desolve( )** zur Verfügung, das es ermöglicht, exakte Lösungen der meisten gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. und 2.Ordnung zu finden.



Mit Hilfe von **desolve( )** erhalten wir unter der Voraussetzung $g>0$ und $b>0$ auch den gewünschten Term, den wir schließlich nach v auflösen.



Wir erhalten somit die Lösung

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{b}}\cdot\tanh(\sqrt{bg}\cdot t).$$

Nach Rücksubstitution liefert das unter Berücksichtigung von

$$\sqrt{\frac{g}{b}} = \sqrt{\frac{g\cdot 2m}{c_W A\rho}} = v_{end}$$

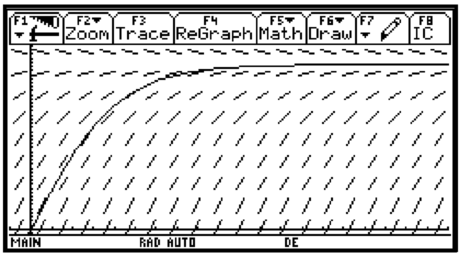
und

$$\sqrt{gb} = \sqrt{\frac{g\cdot c_W A\rho}{2m}} = \frac{g}{v_{end}}$$

die Geschwindigkeitsfunktion:

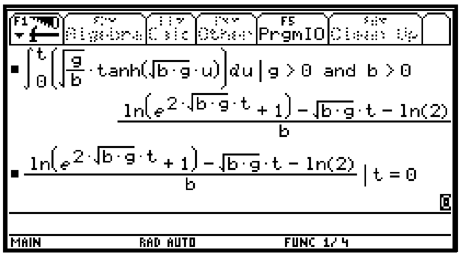
$$v(t) = v_{end}\cdot\tanh\left(\frac{g}{v_{end}}\cdot t\right) \tag{3}$$

Setzen wir die Daten unseres konkreten Falls ein, so liefert dies geplottet die bereits bekannt Kurve – nur diesmal auf exakter Grundlage.



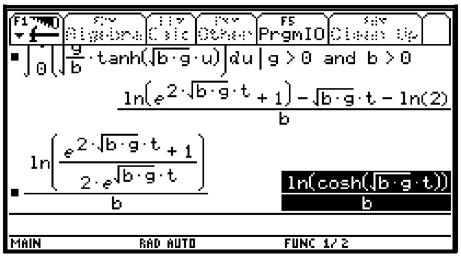
Der Fallweg und die wirkende Beschleunigung als Funktion der Zeit

Nun ist der Weg frei, um Fallweg (durch Integration) und Beschleunigung (durch Differentiation) zu bestimmen.
Die Integration der gefundenen Geschwindigkeitsfunktion liefert uns die Zeit-Weg-Funktion, für die $s(0)=0$ ist.



Das Zusammenfassen des Zählers zu einer Logarithmusfunktion ermöglicht eine etwas übersichtlichere und „schönere" Darstellung des Terms der gesuchten Funktion:

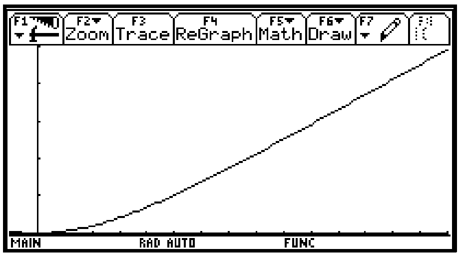
$$s(t) = \frac{1}{b}\cdot\ln\left(\frac{e^{2\sqrt{bg}\cdot t}+1}{2e^{\sqrt{bg}\cdot t}}\right).$$



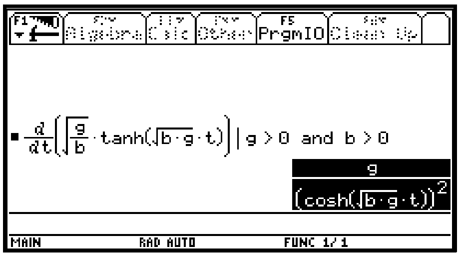
Nach Rücksubstitution und unter neuerlicher Verwendung von v_{end} erhalten wir:

$$s(t) = \frac{v_{end}^2}{g}\cdot\ln\left(\cosh\left(\frac{g}{v_{end}}\cdot t\right)\right) \qquad (4)$$

Die graphische Darstellung unseres konkreten Beispiels führt auf den typischen Verlauf der Wegfunktion bei Luftreibung: die anfangs linksgekrümmte Funktion geht in eine lineare über (wenn nämlich die Geschwindigkeit konstant wird).



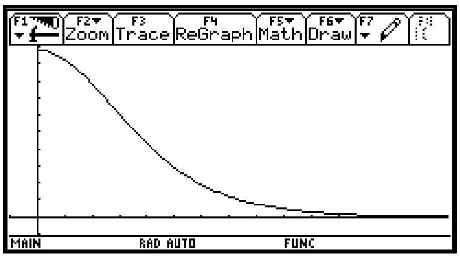
Die Beschleunigungsfunktion erhalten wir schließlich als Differentialquotienten der Geschwindigkeitsfunktion.



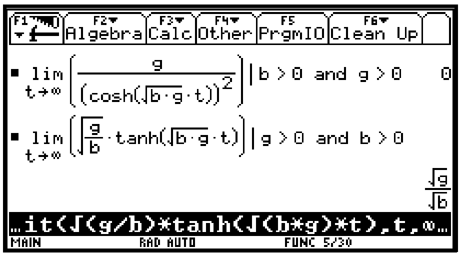
Wieder führen wir die Rücksubstitution unter Verwendung von v_{end} durch und erhalten:

$$a(t) = \frac{g}{\left(\cosh\left(\frac{g}{v_{end}}\cdot t\right)\right)^2} \qquad (5)$$

Auch hier ergibt sich mit unseren konkreten Daten wieder der erwartete Verlauf der Beschleunigung. Diese sinkt vom Wert der Erdbeschleunigung ziemlich rasch auf Null.

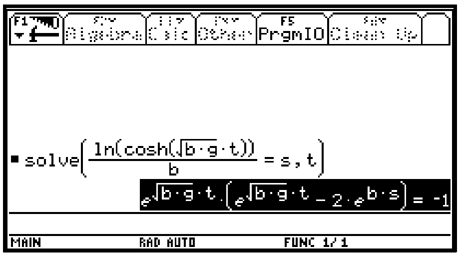


Endbeschleunigung a_{end} und Endgeschwindigkeit v_{end} lassen sich natürlich auch analytisch ermitteln.

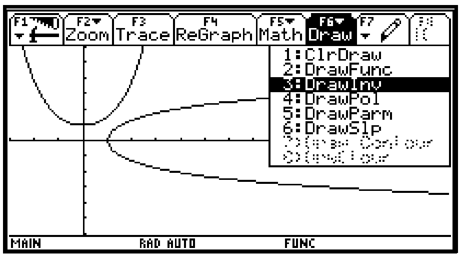


Die Fallzeit als Funktion der Fallhöhe

Die Bestimmung der Umkehrfunktion zur Zeit-Weg-Funktion führt zunächst nicht zum gewünschten Ergebnis.



die Ursache für dieses scheinbar unvollständige Auflösen liegt in der Zweideutigkeit des arccosh(x)
.



Hier müssen wir ein Stück weit selbst mithelfen: Entscheiden wir uns für den oberen Ast der arccosh--Funktion – negative Zeiten machen in unserem Modellzusammenhang wenig Sinn – dann gilt (für $x \geq 1$) : $arccosh(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.
Damit erhalten wir aus

$$\cosh(\sqrt{bg} \cdot t) = e^{b \cdot s}$$

$$\sqrt{bg} \cdot t = \ln(e^{b \cdot s}+\sqrt{e^{2b \cdot s}-1})$$

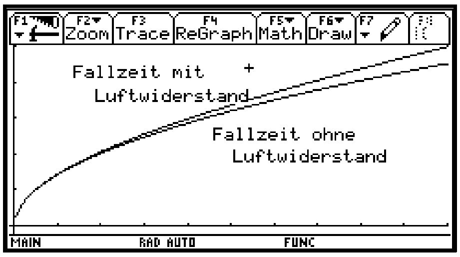
und schließlich

$$t(s) = \frac{1}{\sqrt{bg}} \cdot \ln(e^{b \cdot s}+\sqrt{e^{2b \cdot s}-1})$$

Nach Rücksubstitution ergibt sich schließlich die Beziehung:

$$t(s) = \frac{v_{end}}{g} \cdot \ln\left(e^{\frac{g}{v_{end}^2} \cdot s}+\sqrt{e^{\frac{2g}{v_{end}^2} \cdot s}-1}\right) \qquad (6)$$

Vergleichen wir noch im konkreten Fall die Graphen der Fallzeitfunktionen für Fallwege von 0 bis 100m.



Literatur:

[1] G.Hepperger, *Der freie Fall unter Einwirkung des Luftwiderstandes*, Wissenschaftliche Nachrichten, September 1991, BMUK, Wien.