Mag. Gabriele Bleier

Näherungsmethoden zum Lösen von Gleichungen

<table>
<tr><th colspan="2">Themenbereich</th></tr>
<tr><td colspan="2">Gleichungen, Differentialrechnung</td></tr>
<tr><th>Inhalte</th><th>Ziele</th></tr>
<tr><td>

Näherungsweises Lösen von Gleichungen
Untersuchen von Funktionen, insbesondere Ermitteln von Nullstellen
Methode der Intervallhalbierung
Regula Falsi (Sekantenverfahren)
Fixpunktmethode
Newtonsches Näherungsverfahren

</td><td>

Mindestens zwei Näherungsverfahren grafisch und rechnerisch durchführen können
Erkennen, dass sich bei entsprechenden Voraussetzungen ein Näherungswert mit beliebig vorgegebener Genauigkeit berechnen lässt.
Den Zusammenhang mit rekursiv definierten Folgen erkennen.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">4 Arbeitsblätter zu verschiedenen Methoden zur näherungsweisen Lösung von Gleichungen.</td></tr>
</table>

Voraussetzungen

- Berechnen von Funktionswerten
- Aufstellen von Geradengleichungen
- Ermitteln von Schnittpunkten mit der x-Achse
- Begriffe: Sekante, Tangente von Funktionen

Software

Die Programme

- `Bin_Such()` zur 6.Klasse und
- `NewtonNv()` zur 7.Klasse

von der Begleitdiskette zu *Reichel, Müller: Mathematik mit dem TI-92* werden den Schülern zur Verfügung gestellt.

Anmerkung

Die Differentialrechnung wird nicht vorausgesetzt. Tangentengleichungen werden dem GRAFIK-Fenster des TI-92 entnommen.

Arbeitsform

Schülerarbeit anhand der Arbeitsblätter 1 bis 4.

Anregungen habe ich entnommen aus:

- *Günter Schmidt: Viele Wege führen zur Lösung! - Lösen von Gleichungen.*
  In: Mathematik erleben.
- *Thomas Schmidt: Verfahren zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen.*
  In: Numerische Verfahren mit dem TI-92.

Näherungsmethoden zum Lösen von Gleichungen

Für die meisten Gleichungen lässt sich kein geschlossenes Lösungsverfahren in der Art, wie du es von linearen oder quadratischen Gleichungen kennst, angeben.
Im Folgenden werden drei Näherungsverfahren vorgestellt:

- Methode der Intervallhalbierung
- Sekantenverfahren (Regula falsi)
- Tangentenverfahren (NEWTON'sches Näherungsverfahren)

Eine Firma stellt kugelförmige Öltanks her, die 10 000 Liter fassen. Im Inneren der Tanks soll ein Kontakt angebracht werden, der bei nur noch 1 000 Liter Ölmenge ein Warnsignal als Aufforderung zum Nachfüllen gibt.
In welcher Höhe muss dieser Kontakt angebracht werden?

Zunächst bestimmen wir die Maße des Tanks.
Aus $V = (4r^3\pi)/3$ für das Kugelvolumen berechne den Radius r. Runde auf cm.

$r \approx$ ……… m

Skizziere den Kugeltank im Vertikalschnitt. Zeichne den Kugelradius r, den Flüssigkeitsstand und die entsprechende Höhe h ein.

Skizze:

Für das Volumen eines Kugelabschnittes gilt der folgende Zusammenhang: $V = \pi h^2(3r-h)/3$.
Setze für V und r ein (Einheit: m!).
Beachte: 1 000 Liter = 1 m^3.

Gleichung (1):

Ermittle mit dem TI-92 die Lösungen für h.
Welcher dieser Werte ist eine Lösung der Aufgabenstellung?
Überprüfe diese Lösung durch Einsetzen.

Lösungen:
$h_1 \approx$ ………
$h_2 \approx$ ………
$h_3 \approx -0.4616$
Höhe für den Kontakt: ………

Zur grafischen Ermittlung der Nullstellen forme die Gleichung (1) so um, dass eine Seite der Gleichung 0 beträgt. Forme die Gleichung mit Hilfe von EXPAND weiter um. Ersetze die Variable h durch x und definiere die Funktion y1(x).

0 = ...

DEFINE y1(x) = -1.047*x^3 + 4.21*x^2 - 1

- Zeichne die Funktion am Grafik-Bildschirm. Skizziere den Funktionsverlauf.

Skizze:

- Ermittle mit *F5: Math 2: Zero* die entsprechende Nullstelle, die Lösung der oben gestellten Aufgabe ist.

Zero: x = 0.522498 y = 0

Wähle *Zoom Std.* Ertaste mit *F3: Trace* die Nullstelle. Steigere die Genauigkeit durch mehrfaches *Zoom In.*
Wie viele Schritte brauchst du, damit die Nullstelle auf drei Nachkommastellen mit dem errechneten Wert übereinstimmt?

1. Näherung: $x_1 \approx$ ………
2. Näherung: $x_2 \approx$ ………

letzte Näherung: $x_{...} \approx$ ………

Methode der Intervallhalbierung

Vorgangsweise:

Wir bestimmen ein Startintervall [a;b], sodass gilt:
f(a) < 0 und f(b) > 0.

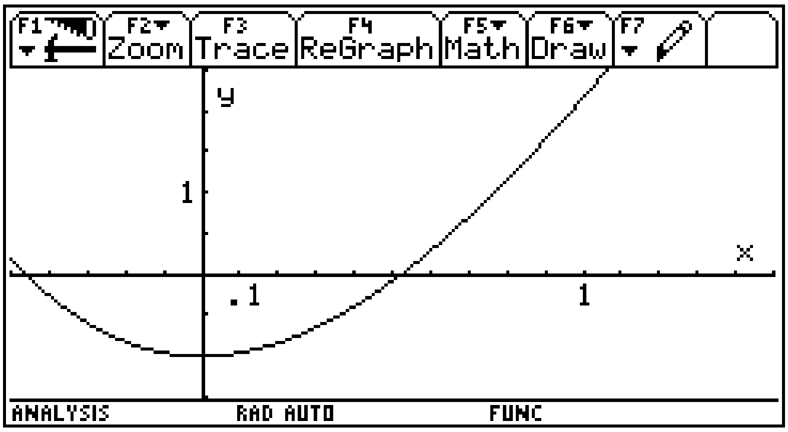
Halbiere das Intervall: (a+b)/2 = c.

Berechne f(c).
Überlege, ob c im neuen Intervall untere oder obere Grenze ist und ob es daher a oder b ersetzt.

Setze die Intervallhalbierung so lange fort, bis das Intervall kleiner als $\varepsilon = 0.005$ ist.
Ergänze die Tabelle rechts.
Wie viele Schritte sind notwendig?
Welche Nachkommastellen kennst du in diesem Fall sicher?

Zeichne die jeweiligen x-Werte und die zugehörigen Funktionswerte in der Abbildung ein.

Intervall	x	f(x)
	$x_0 = 0.2$	-0.839976
[0.2;1.0]	$x_1 = 1.0$	2.163
	$x_2 = 0.6$	0.289448



Programm `BIN_SUCH()` (= Binäres Suchen):

Gehe in den HOME-Screen.
Wähle im *VAR-LINK* das Programm *BIN_SUCH()* aus und bestätige mit *ENTER*.
Der Programmname erscheint nun in der Eingabezeile. Schließe die Klammer und bestätige mit *ENTER*. Das Programm wird damit aufgerufen. Alle weiteren Eingaben erfolgen interaktiv.

Eingabe:		Ausgabe (vergleiche die Werte mit deinen errechneten):	
für f(x)	y1(x)	$x_1 \approx$	*ENTER*
für ε <	0.005	$x_2 \approx$	
a	0.2		
b	1		

Beachte: Die Werte x_1, x_2, usw. ergeben eine Folge von Zahlen. Sie stellen Näherungswerte für die Nullstelle mit zunehmender Genauigkeit dar. Ist die gewünschte Genauigkeit ε erreicht, bricht das Näherungsverfahren ab.

Gehe zurück in den HOME-Screen.

Sekantenverfahren (Regula falsi)

Vorgangsweise (siehe auch Szirucsek: Mathematik 7, S. 246f.):

Wähle ein Intervall [a;b] so aus, dass $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt und genau eine Nullstelle in diesem Intervall liegt.
Berechne die Funktionswerte.

Beginne im Intervall [0.2;1.0].

$f(0.2) \approx$ ....
$f(1.0) \approx$ ....

Verbinde die entsprechenden Punkte am Graphen durch eine Sekante. Ermittle die Gleichung der Sekante.

(y1(1) - y1(0.2)) / (1 - 0.2) = k
solve(y=k*x+d | x=0.2 and y=y1(0.2) and k=...,d)

Sekante $s_1 \approx 3.75x - 1.59$

Schneide die Sekante mit der x-Achse und berechne den entsprechenden Funktionswert f(x). x_1 stellt die erste Näherung für die Nullstelle dar.

$x_1 \approx$ ....
$y_1 \approx$ ....

x_1 ersetzt nun die untere Grenze im ursprünglichen Intervall.

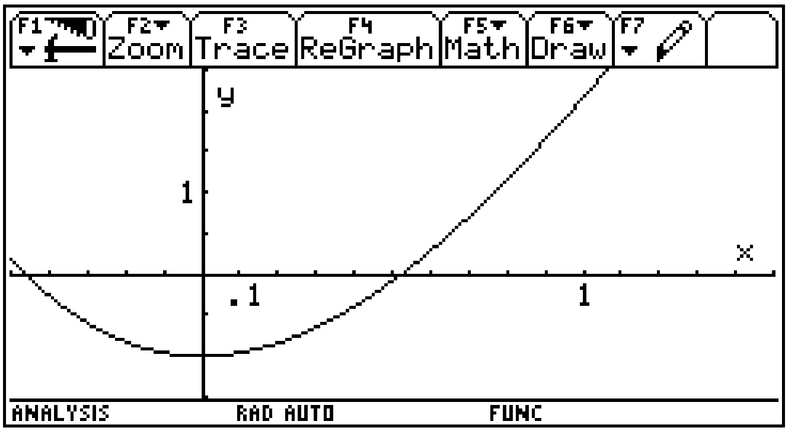
neues Intervall:
$f(0.424) \approx$ .... $f(1.0) \approx$ ....

Ermittle die Gleichung der Sekante s_2 usw.
(Eine allgemeine Formel und ihre Herleitung für x_{n+1} findest du im Buch Bsp. 1220.)

Setze das Verfahren so lange fort, bis der Unterschied zwischen letztem und vorletztem Näherungswert kleiner als $\varepsilon = 0.005$ ist.

Wie viele Näherungsschritte sind diesmal notwendig, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen?

Zeichne die Intervalle, die entsprechenden Sekanten und Schnittstellen mit der x-Achse für s_1, s_2 und s_3 in der Abbildung ein.



Tangentenverfahren (NEWTON'sches Näherungsverfahren)

Vorgangsweise:

Wir beginnen bei einem ersten Näherungswert x_1 nahe der gesuchten Nullstelle und zeichnen an dieser Stelle eine Tangente an den Graph der Funktion f.

Am TI-92:
Graph Zoom Standard
F5 Math A:Tangent
Tangente an der Stelle $x_1 = 0.2$
Tangentengleichung:
t_1: y ≈ ....

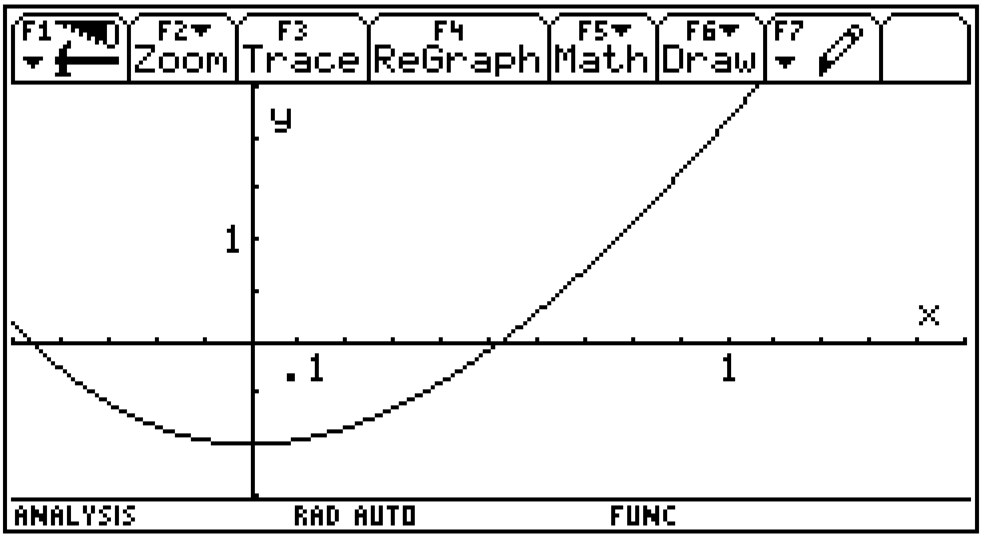
Der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ergibt den nächsten Näherungswert x_2 für die Nullstelle der Funktion.
An der Stelle x_2 wird wieder eine Tangente gelegt.
Setze fort.
Wie viele Näherungsschritte sind notwendig, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 0.005$ zu erreichen?

x_2 ≈ ....

Tangentengleichung:
t_2: y ≈

x_3 ≈ ....
t_3: y ≈

Zeichne die Stellen x_1, x_2 und x_3 sowie die Punkte T_1, T_2 und T_3 und die entsprechenden Tangenten in der Abbildung ein.



Programm `NEWTONVER()`:
Rufe das Programm im HOME-Screen auf.
Gib den Funktionsterm und den Startwert ein.
Bestätige jeden Näherungswert mit *Enter*.
Das Programm beendet das Näherungsverfahren automatisch.
Notiere die Näherungswerte bis zu einer Genauigkeit von $\varepsilon = 0.005$. Vergleiche die Werte mit jenen, die du ermittelt hast.

Eingabe:

f(x) =	y1(x)
Startwert =	0.2

Näherungswerte:

x_2 ≈	x_5 ≈
x_3 ≈	x_6 ≈
x_4 ≈	x_7 ≈