

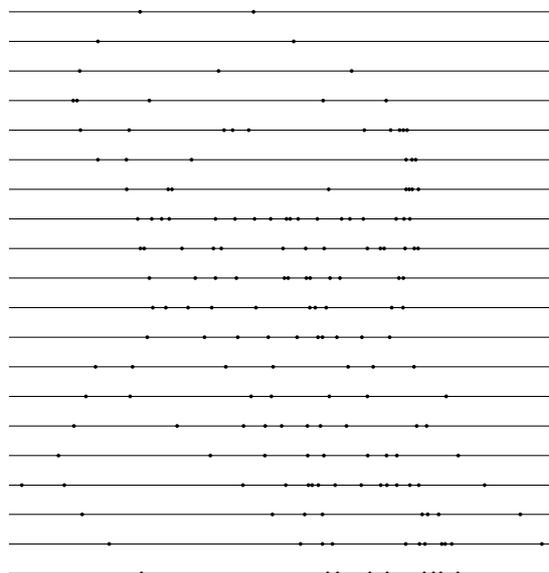
Mag. Gerhard Hainscho

Workshop komplexe Zahlen

Themenbereich	
Komplexe Zahlen, Fraktale und Funktionen	
Inhalte	Ziele
<ul style="list-style-type: none">• Geschichte der Mathematik: komplexe Zahlen und Gleichungen höheren Grades• Vorschlag zur Einführung der komplexen Zahlen im Unterricht• Darstellung der komplexen Zahlen am TI-92• Spezielle Befehle für komplexe Zahlen• Anwendung in der Physik: komplexe Widerstände im Wechselstromkreis• Fraktale: Mandelbrot- und Julia-Mengen, Newton-Fraktal mit Programmbeispielen• Visualisierung komplexer Funktionen mit Programmbeispiel• Formelsammlung• Zahlenbereichserweiterungen	<ul style="list-style-type: none">• Das Handling komplexer Zahlen am TI-92 beherrschen.• Die Lösung einer Gleichung 3. Grades "step by step" nachvollziehen können.• Den historischen Weg der Einführung komplexer Zahlen im Unterricht nachzeichnen.• Komplexe Widerstände im Wechselstromkreis bestimmen können.• Iterationsvorschriften zur Erzeugung bekannter Fraktale kennenlernen.• Komplexe Funktionen visualisieren können.• Reflexion über Zahlenbereiche und ihre Erweiterungen.
<p>Überblick über die Möglichkeiten, die der TI-92 im Umgang mit komplexen Zahlen bietet. Skriptum aus mehreren, voneinander relativ unabhängigen Teilen, die auch als Kopiervorlagen verwendbar sind.</p>	

Vorbemerkung

Komplexe Zahlen - wozu braucht man die?



„Bei vielen mathematischen Fragestellungen gleicht der nur mit reellen Zahlen Arbeitende einem, der Punkteverteilungen auf Linien studiert und kein System darin findet, während der mit komplexen Zahlen Arbeitende sofort sieht, worum es sich handelt. Die komplexen Zahlen ermöglichen oft entscheidende Einsichten in die Struktur und Wirkungsweise der 'reellen' Mathematik.“



Der historische Weg zu \mathbb{C}

Informationen über den Zusammenhang von komplexen Zahlen und der Lösung kubischer Gleichungen

1515: **Scipione del Ferro** (1465 - 1526) findet die Lösung für $x^3 + bx = c$ durch Wurzeln (*Radikale*). Er hält seine Lösungsmethode jedoch geheim und teilt sie lediglich einigen Freunden bzw. Schülern mit, unter anderem **Antonio Maria Fior**.

1535: Antonio Maria Fior stellt **Nicolo Fontana** (1499/1500 - 1557), **Tartaglia** („der Stotterer“) genannt wegen eines Sprachfehlers aufgrund einer Gesichtsverletzung bei der Einnahme von Brescia durch die Franzosen (1512), 30 Aufgaben, die auf solche Gleichungen führen. Tartaglia findet die Lösung und gibt sie (ohne Beweis) auf viele Bitten und dem Versprechen, sie nicht zu veröffentlichen, an **Girolamo Cardano** (1501 - 1576) in Form eines Sonetts weiter.

1545: Cardano bricht sein Versprechen und veröffentlicht die Lösung in seinem Hauptwerk *Ars magna sive de regulis algebraicis*. Er unterscheidet wahre und fiktive Lösungen (*verae & falsae* bzw. *fictae*), d.h. positive und negative, sowie verschiedene Typen von Gleichungen: $x^3 + bx = c$, $x^3 = bx + c$, $x^3 + c = bx$. Jeder Fall wird extra durch geometrische Überlegungen begründet, da noch keine geeignete Symbolik für algebraische Untersuchungen entwickelt war. Es kann vorkommen, daß im Zuge der Rechnung Wurzeln aus negativen Werten auftreten (*casus irreducibilis*), insgesamt jedoch eine positive reelle Lösung existiert. Cardano bezeichnet solche Größen als *quantitae sophisticae*, d.h. formale, an sich sinnlose Werte. Rechenregeln für solche Werte wurden erstmals von **Raffael Bombelli** (1526 - 1572) angegeben. Cardanos Buch enthält auch andere Aufgaben mit Lösungen in Form von *quantitae sophisticae* sowie eine Lösung für Gleichungen 4. Grades, die von seinem Schüler und Schwiegersohn **Luigi Ferrari** (1522 - 1565) gefunden wurde.

Andere Methoden zur Lösung von Gleichungen 3. und 4. Grades wurden später gefunden, etwa mit Hilfe von Kegelschnitten von **René Descartes** (1596 - 1650) oder **Pierre de Fermat** (1601 - 1665), sowie mit Hilfe goniometrischer Beziehungen von **François Viète** (1540 - 1603) oder **Albert Girard** (1595 - 1632). Descartes bezeichnet Wurzeln aus negativen Zahlen als *imaginär*.

1738: Veröffentlichung einer vereinfachten Herleitung der Cardanischen Formel durch **Leonhard Euler** (1707 - 1783). Später führt Euler auch die Bezeichnung i für die Wurzel aus -1 ein und erkennt den fundamentalen Zusammenhang $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$ (Sonderfall: $e^{i\pi} = -1$). Er hält die Lösung von Gleichungen höheren Grades für möglich, dagegen glaubt etwa **Carl Friedrich Gauß** (1777 - 1855) nicht an eine solche Möglichkeit. Gauß prägt schließlich die Bezeichnung *komplexe Zahl*, veranschaulicht komplexe Zahlen als Punkte einer Ebene und beweist 1799 endgültig den von Descartes formulierten Satz, daß jede algebraische Gleichung n -ten Grades genau n komplexe Lösungen besitzt.

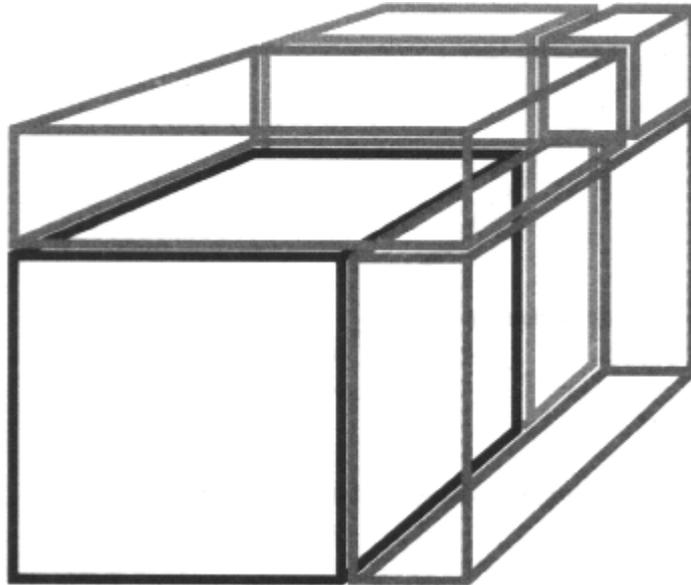
Niels Henrik Abel (1802 - 1829) gelingt der Beweis der Unmöglichkeit, die allgemeine Lösung von Gleichungen 5. Grades durch Wurzeln darzustellen.

Evariste Galois (1811 - 1832) gelingt der Beweis der Unmöglichkeit, die allgemeine Lösung von Gleichungen n -ten Grades ($n \geq 5$) durch Wurzeln darzustellen sowie die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen einer Gleichung und ihrer Gruppe: eine Gleichung ist genau dann in Radikalen auflösbar, wenn diese Gruppe eine Normalreihe mit abelschen Faktoren hat.

Benoît B. Mandelbrot (1924 -), **Heinz-Otto Peitgen** (1945 -) u.a. bewirken durch die Visualisierungsmöglichkeiten des Computers im Zusammenhang mit Fraktalen bzw. der Chaostheorie eine gewisse Popularisierung der komplexen Zahlen, wobei oft ästhetische Aspekte im Vordergrund stehen.

Kubische Gleichungen

Ein poetischer Hinweis



Wenn ein Kubus mit ein'gen seiner Seiten
Sich gleichmacht einer Zahl, find andere zwei,
Die dann dieselbe Differenz bestreiten.

Die Regel dann für alles weitere sei,
Mach jetzt das Produkt dieser neuen beiden
Gleich dem Würfel aus der Seitenzahl durch drei.

Kannst beide du zur Differenz verleiten
Ihrer richtig gewählten Würfelkanten,
So sind dies die gesuchten Kubusseiten.

Kubische Gleichungen

Eine radikale Lösung

- In jeder algebraischen Gleichung $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ lässt sich durch die Substitution $x = -\frac{a_{n-1}}{n} + t$ die zweithöchste Potenz eliminieren.
Kubische Gleichungen lassen sich daher immer auf die Form $t^3 + pt + q = 0$ reduzieren.

- $t^3 + pt + q = 0$

Idee: suchen eine Lösung der Form

$$t = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} ; \text{ ges.: } u, v \quad |^3$$

$$t^3 = u + 3 \cdot \sqrt[3]{u^2v} + 3 \cdot \sqrt[3]{uv^2} + v$$

$$t^3 = 3 \cdot \sqrt[3]{uv} \cdot \underbrace{(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v})}_t + u + v$$

$$t^3 - \underbrace{3 \cdot \sqrt[3]{uv}}_p \cdot t - \underbrace{(u+v)}_q = 0$$

Ein Vergleich mit der gegebenen Gleichung ergibt

$$p = -3 \cdot \sqrt[3]{uv} \Rightarrow \underline{uv = -\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$q = -(u+v) \Rightarrow \underline{-(u+v) = q}$$

Die quadratische „Ersatzgleichung“

$$z^2 - (u+v) \cdot z + uv = 0 \text{ hat die Lösungen } u, v$$

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \text{ hat die Lösungen } u, v$$

$$z_1 = u = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$z_2 = v = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$t = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$$

$$\underline{\underline{t_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}}$$

Kubische Gleichungen

Ein Beispiel

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$x^3 - 9 \cdot x^2 + 18 \cdot x + 28 = 0$ $x^3 - 9 \cdot x^2 + 18 \cdot x + 28 = 0$					
$x^3 - 9 \cdot x^2 + 18 \cdot x + 28 = 0 \mid x = 9/3 + t$ $t^3 - 9 \cdot t + 28 = 0$					
$\text{solve}(z^2 + 28 \cdot z - (-9/3)^3 = 0, z)$ $z = -1 \text{ or } z = -27$					
$t = (-1)^{1/3} + (-27)^{1/3}$ $t = -4$					
$x = 9/3 + t \mid t = -4$ $x = -1$					
$\frac{x^3 - 9 \cdot x^2 + 18 \cdot x + 28 = 0}{x + 1}$ $x^2 - 10 \cdot x + 28 = 0$					
$\text{solve}(x^2 - 10 \cdot x + 28 = 0, x)$ false					
$\text{cSolve}(x^2 - 10 \cdot x + 28 = 0, x)$ $x = 5 - \sqrt{3} \cdot i \text{ or } x = 5 + \sqrt{3} \cdot i$					
MAIN RAD AUTO FUNC B/30					

Substitution

quadratische „Ersatzgleichung“ lösen

Lösung für t berechnen

Lösung für x_1 berechnen

Polynomdivision

quadratische „Restgleichung“ lösen

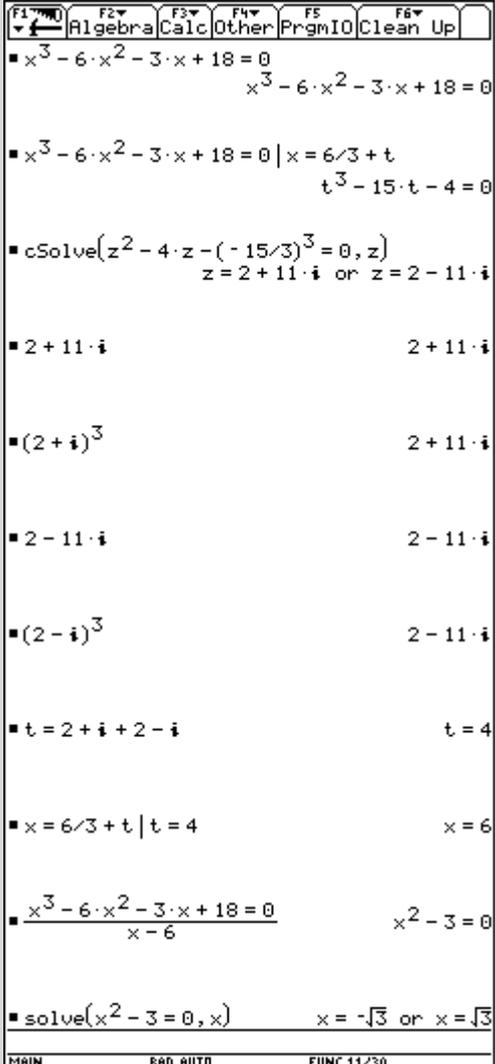
Kubische Gleichungen

1. Problem: Summe zweier Wurzeln

<pre> F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0 x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0 x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0 x = 6/3 + t t^3 - 2t - 4 = 0 solve(z^2 - 4z - (-2/3)^3 = 0, z) z = (2*(5*sqrt(3)+9))/9 or z = (-2*(5*sqrt(3)-9))/9 expand(z = (2*(5*sqrt(3)+9))/9) z = (10*sqrt(3))/9 + 2 (1 + sqrt(3)/3)^3 (10*sqrt(3))/9 + 2 expand(z = (-2*(5*sqrt(3)-9))/9) z = 2 - (10*sqrt(3))/9 (1 - sqrt(3)/3)^3 2 - (10*sqrt(3))/9 t = ((1 + sqrt(3)/3)^3)^(1/3) + ((1 - sqrt(3)/3)^3)^(1/3) t = 2 x = 6/3 + t t = 2 x = 4 (x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0) / (x - 4) x^2 - 2x + 2 = 0 solve(x^2 - 2x + 2 = 0, x) false cSolve(x^2 - 2x + 2 = 0, x) x = 1 + i or x = 1 - i </pre>	<p>Substitution</p> <p>quadratische „Ersatzgleichung“ lösen</p> <p>Z₁</p> <p>„geniale Idee“</p> <p>Z₂</p> <p>„geniale Idee“</p> <p>Lösung für t berechnen</p> <p>Lösung für x₁ berechnen</p> <p>Polynomdivision</p> <p>quadratische „Restgleichung“ lösen</p>
---	--

Kubische Gleichungen

2. Problem: Summe zweier *negativer* Wurzeln

	<p>Substitution</p> <p>quadratische „Ersatzgleichung“ lösen</p> <p>Z_1</p> <p>„geniale Idee“</p> <p>Z_2</p> <p>„geniale Idee“</p> <p>Lösung für t berechnen</p> <p>Lösung für x_1 berechnen</p> <p>Polynomdivision</p> <p>quadratische „Restgleichung“ lösen</p>
--	---

Der kurze historische Weg zu \mathbb{C}

Ein Vorschlag für die Einführung komplexer Zahlen im Unterricht

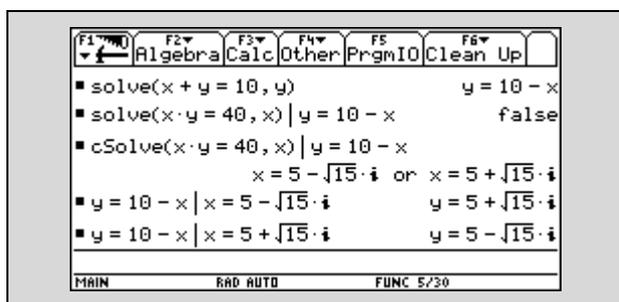
Girolamo Cardanos 1545 in Nürnberg gedrucktes Hauptwerk *Ars magna sive de regulis algebraicis* enthält die Aufgabe „Teile 10 in zwei Teile, deren Produkt 40 ist“. Wir stellen die Frage anders:

Beispiel: Die Summe zweier Zahlen beträgt 10, ihr Produkt 40. Wie lautet die Summe der Kehrwerte dieser Zahlen?

Die Frage läßt sich sofort beantworten:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

Andererseits scheint es keine Zahlen x, y zu geben, die die geforderten Bedingungen erfüllen:



Cardano schreibt: „Es ist sicher, daß diese Aufgabe unmöglich ist ...“, dennoch führt er die „Lösungen“ $5 \pm \sqrt{-15}$ an und setzt sie zur Probe in die gegebenen Gleichungen ein. Sein Wortspiel „*dimissis incruciationibus* ergibt sich 40“ wird gelegentlich mathematisch nüchtern mit „nach Weglassen der kreuzweise multiplizierten Glieder“, gelegentlich auch mit „von den Geistesqualen abgesehen“ übersetzt.

So ähnlich haben sich komplexe Zahlen tatsächlich in die Mathematik „eingeschlichen“: am Anfang steht ein Problem mit „harmlosen“ reellen Lösungen, einzelne Rechenschritte bzw. Zwischenergebnisse enthalten aber „sinnlose“ Wurzeln. Da es sich als nützlich erweist, mit solchen Werten zu hantieren, müssen sie auch in irgend einer Form „existieren“.

Da obiges Beispiel nur auf eine quadratische Gleichung führt, kann es dazu dienen, den historischen Weg der Einführung komplexer Zahlen anzudeuten, ohne auf die Formeln für Gleichungen höheren Grades eingehen zu müssen.

Literatur

Siegfried Gottwald, Hans-Joachim Ilgands, Karl-Heinz Schlote (Hrsg.): *Lexikon bedeutender Mathematiker*. Leipzig 1990 (1. Aufl.) <Bibliographisches Institut>.

Helmuth Gericke: *Mathematik im Abendland. Von den römischen Feldmessern bis zu Descartes*. Wiesbaden 1992 (4. Aufl., Sonderausgabe) <Fourier>. S 225 - 276.

Maximilian Miller: *Gelöste und ungelöste mathematische Probleme*. Leipzig 1973 <B. G. Teubner>. S 73 - 81.

Alfred S. Posamentier, Stephen Krulik: *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions. A Resource for the Mathematics Teacher*. Thousand Oaks, London, New Delhi 1998 <Corwin Press>. S 17 - 18.

Komplexe Zahlen am TI-92

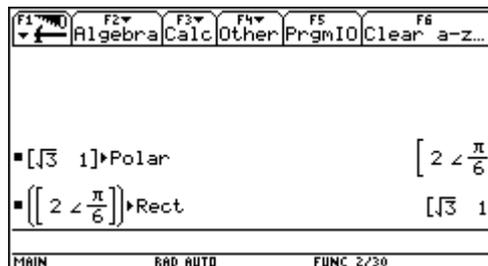
Eingabe und Darstellung

Für die Eingabe komplexer Zahlen ist jede der Formen $a + ib$ / $r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ / $r \cdot e^{i\varphi}$ möglich. Am *TI-92 Plus* können komplexe Zahlen auch in der „Versorform“ ($r \angle \varphi$) eingegeben werden. Die Darstellung der Ergebnisse hängt nicht von der Form der Eingabe, sondern nur von der mit **MODE** gewählten Grundeinstellung für Complex Format und Angle ab (Empfehlung: Angle = RADIAN).

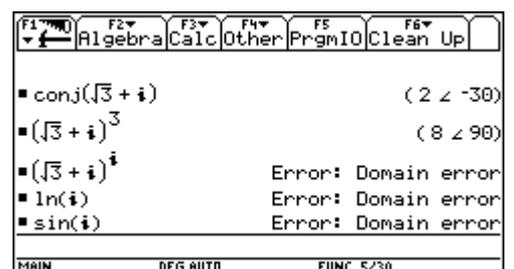
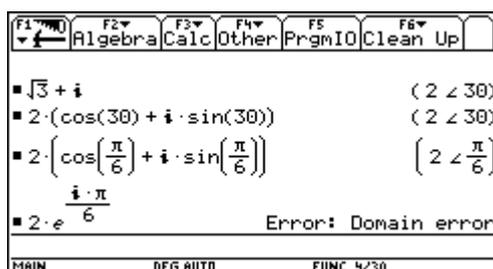
Nr	Eingabe	Darstellung		
		Real	Rectangular	Polar
1	$\sqrt{3}+i$	$\sqrt{3}+i$	$\sqrt{3}+i$	$e^{\frac{i \cdot \pi}{6}} \cdot 2$
	$2 * (\cos(\pi/6) + i * \sin(\pi/6))$	$\sqrt{3}+i$	$\sqrt{3}+i$	$e^{\frac{i \cdot \pi}{6}} \cdot 2$
	$2 * e^{i * \pi/6}$	$\sqrt{3}+i$	$\sqrt{3}+i$	$e^{\frac{i \cdot \pi}{6}} \cdot 2$
2	$\text{conj}(\sqrt{3}+i)$	$\sqrt{3}-i$	$\sqrt{3}-i$	$e^{-\frac{i \cdot \pi}{6}} \cdot 2$
	$\text{conj}(2 * (\cos(\pi/6) + i * \sin(\pi/6)))$	$\sqrt{3}-i$	$\sqrt{3}-i$	$e^{-\frac{i \cdot \pi}{6}} \cdot 2$
	$\text{conj}(2 * e^{i * \pi/6})$	$\sqrt{3}-i$	$\sqrt{3}-i$	$e^{-\frac{i \cdot \pi}{6}} \cdot 2$
3	$\text{real}(\sqrt{3}+i)$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
	$\text{real}(2 * (\cos(\pi/6) + i * \sin(\pi/6)))$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
	$\text{real}(2 * e^{i * \pi/6})$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
4	$\text{imag}(\sqrt{3}+i)$	1	1	1
	$\text{imag}(2 * (\cos(\pi/6) + i * \sin(\pi/6)))$	1	1	1
	$\text{imag}(2 * e^{i * \pi/6})$	1	1	1
5	$\text{abs}(\sqrt{3}+i)$	2	2	2
	$\text{abs}(2 * (\cos(\pi/6) + i * \sin(\pi/6)))$	2	2	2
	$\text{abs}(2 * e^{i * \pi/6})$	2	2	2
6	$\text{angle}(\sqrt{3}+i)$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
	$\text{angle}(2 * (\cos(\pi/6) + i * \sin(\pi/6)))$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
	$\text{angle}(2 * e^{i * \pi/6})$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
7	$R \rightarrow R_x(2, \pi/6)$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
8	$R \rightarrow R_y(2, \pi/6)$	1	1	1
9	$R \rightarrow P_r(\sqrt{3}, 1)$	2	2	2
10	$R \rightarrow P_\theta(\sqrt{3}, 1)$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$

Nr	Eingabe	Darstellung		
		Real	Rectangular	Polar
11	$(\sqrt{3}+i)^3$	$8 \cdot i$	$8 \cdot i$	$\frac{i \cdot \pi}{e^{\frac{\pi}{2}}} \cdot 8$
12	$(\sqrt{3}+i)^i$	$2^i \cdot e^{-\frac{\pi}{6}}$	$\cos(\ln(2)) \cdot e^{-\frac{\pi}{6}} + \sin(\ln(2)) \cdot e^{-\frac{\pi}{6}} \cdot i$	$2^i \cdot e^{-\frac{\pi}{6}}$
13	e^{i}	e^i	$\cos(1) + \sin(1) \cdot i$	e^i
14	$\ln(i)$	$\frac{\pi}{2} \cdot i$	$\frac{\pi}{2} \cdot i$	$\frac{i \cdot \pi}{e^{\frac{\pi}{2}}} \cdot \frac{\pi}{2}$
	$\ln(-1)$	Error: Non-real result	$\pi \cdot i$	$\frac{i \cdot \pi}{e^{\frac{\pi}{2}}} \cdot \pi$
15	$\sin(i)$	$\frac{(e^2-1) \cdot e^{-1}}{2} \cdot i$	$\frac{(e^2-1) \cdot e^{-1}}{2} \cdot i$	$\frac{i \cdot \pi}{e^{\frac{\pi}{2}}} \cdot \frac{e^2-1}{2 \cdot e}$
	$\sin(i)$ mit TI-92 Plus	$\sinh(1) \cdot i$	$\sinh(1) \cdot i$	$\frac{i \cdot \pi}{e^{\frac{\pi}{2}}} \cdot \sinh(1)$
16	$\cos(i)$	$\frac{(e^2+1) \cdot e^{-1}}{2}$	$\frac{(e^2+1) \cdot e^{-1}}{2}$	$\frac{(e^2+1) \cdot e^{-1}}{2}$
	$\cos(i)$ mit TI-92 Plus	$\cosh(1)$	$\cosh(1)$	$\cosh(1)$
17	$\tan(i)$	$\frac{e^2-1}{e^2+1} \cdot i$	$\frac{e^2-1}{e^2+1} \cdot i$	$\frac{i \cdot \pi}{e^{\frac{\pi}{2}}} \cdot \frac{e^2-1}{e^2+1}$
	$\tan(i)$ mit TI-92 Plus	$\tanh(1) \cdot i$	$\tanh(1) \cdot i$	$\frac{i \cdot \pi}{e^{\frac{\pi}{2}}} \cdot \tanh(1)$

Eine Umwandlung der Darstellungsform komplexer Zahlen kann auch durch Anwendung der Befehle ►Polar bzw. ►Rect auf entsprechende Vektoren der Form [a,b] bzw. [r,∠φ] erfolgen:



Am TI-92 Plus erzeugt die Einstellung Complex Format = POLAR und Angle = DEGREE für Eingaben der Form $a + bi$ bzw. $r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ Antworten der Form $(r \angle \varphi)$, für Eingaben der Form $r \cdot e^{i\varphi}$ sowie für bestimmte komplexe Funktionen allerdings die Fehlermeldung „Domain error“.



Komplexe Zahlen am TI-92

Spezielle Befehle für komplexe Zahlen

\mathbb{R}

Factor

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
<ul style="list-style-type: none"> factor($x^2 - a^2$) $(x + a) \cdot (x - a)$ factor($x^2 - 3$) $x^2 - 3$ factor($x^2 - 3, x$) $(x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$ factor($x^2 + 3, x$) $x^2 + 3$ 					
MAIN RAD AUTO FUNC 4/30					

Solve

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
<ul style="list-style-type: none"> solve($x^2 + x - 1 = 0, x$) $x = \frac{-(\sqrt{5} + 1)}{2}$ or $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ solve($x^2 + x + 1 = 0, x$) false 					
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30					

Zeros

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
<ul style="list-style-type: none"> zeros($x^2 + x - 1, x$) $\left\{ \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \frac{-(\sqrt{5} + 1)}{2} \right\}$ zeros($x^2 + x + 1, x$) \emptyset 					
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30					

\mathbb{C}

cFactor

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
<ul style="list-style-type: none"> cFactor($x^2 - a^2$) $(x + a) \cdot (x - a)$ cFactor($x^2 + a^2$) $(x + a \cdot -i) \cdot (x + a \cdot i)$ cFactor($x^2 + 3$) $x^2 + 3$ cFactor($x^2 + 3, x$) $(x + \sqrt{3} \cdot i) \cdot (x - \sqrt{3} \cdot i)$ 					
MAIN RAD AUTO FUNC 4/30					

cSolve

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
<ul style="list-style-type: none"> cSolve($x^2 + x - 1 = 0, x$) $x = \frac{-(\sqrt{5} + 1)}{2}$ or $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ cSolve($x^2 + x + 1 = 0, x$) $x = -1/2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$ or $x = -1/2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$ 					
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30					

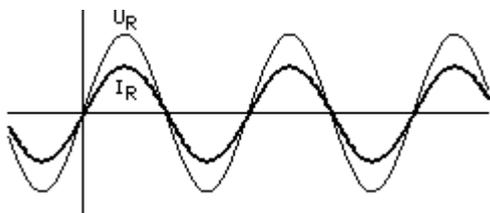
cZeros

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
<ul style="list-style-type: none"> cZeros($x^2 + x - 1, x$) $\left\{ \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \frac{-(\sqrt{5} + 1)}{2} \right\}$ cZeros($x^2 + x + 1, x$) $\left\{ -1/2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, -1/2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right\}$ 					
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30					

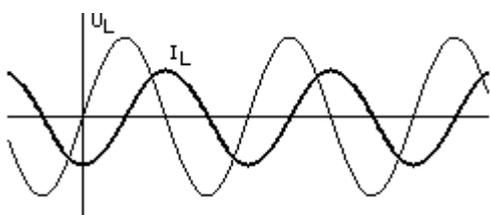
Komplexe Widerstände

Eine physikalische Anwendung bei Wechselströmen

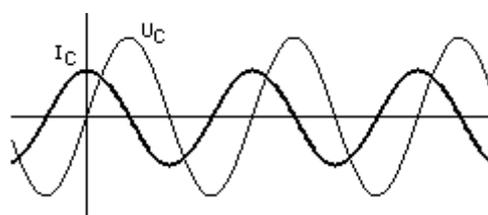
Sowohl die Spannung $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ als auch die Stromstärke $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ eines Wechselstroms schwanken periodisch.



„Phasengleich“ sind diese Schwankungen jedoch nur, solange ein reiner Leiterwiderstand vorliegt, d.h. ein Ohmscher Widerstand R ohne Induktion oder Kapazität (ein Stromkreis ohne Spule oder Kondensator).

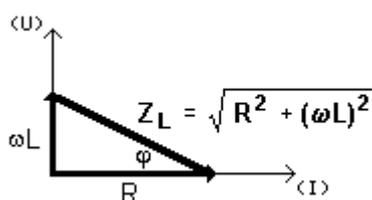


Enthält der Stromkreis eine Spule, d.h. einen induktiven Widerstand ωL , so hat der Strom gegenüber der Spannung eine Phasenverzögerung φ ; für $R = 0$ ist $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

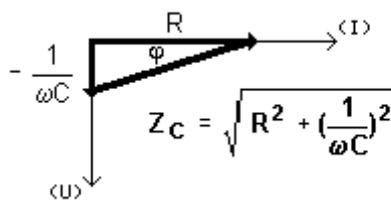


Enthält der Stromkreis einen Kondensator, d.h. einen kapazitiven Widerstand $\frac{1}{\omega C}$, so eilt der Strom gegenüber der Spannung um die Phase φ voraus; für $R = 0$ ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

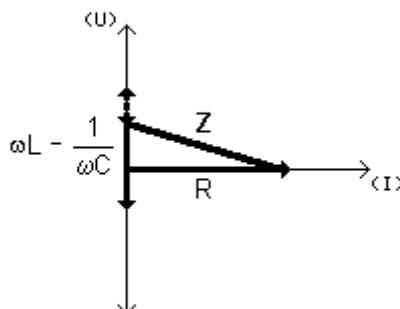
Den Gesamtwiderstand Z_L eines Wechselstromkreises mit Ohmschem und induktivem Widerstand in Serie erhält man durch vektorielle Addition:



Den Gesamtwiderstand Z_C eines Wechselstromkreises mit Ohmschem und kapazitivem Widerstand in Serie erhält man durch vektorielle Addition:



Auch der Widerstand von Wechselstromkreisen mit induktivem *und* kapazitivem Widerstand lässt sich so ermitteln:



Denkt man sich die Achsen des Diagramms als reelle bzw. imaginäre Achse einer komplexen Ebene, d.h. betrachtet man

- den induktiven Widerstand als $i \omega L$,
- den kapazitiven Widerstand als $-\frac{i}{\omega C}$,

so kann man mit diesen komplexen Widerständen wie mit Ohmschen Widerständen bei Gleichstrom rechnen:

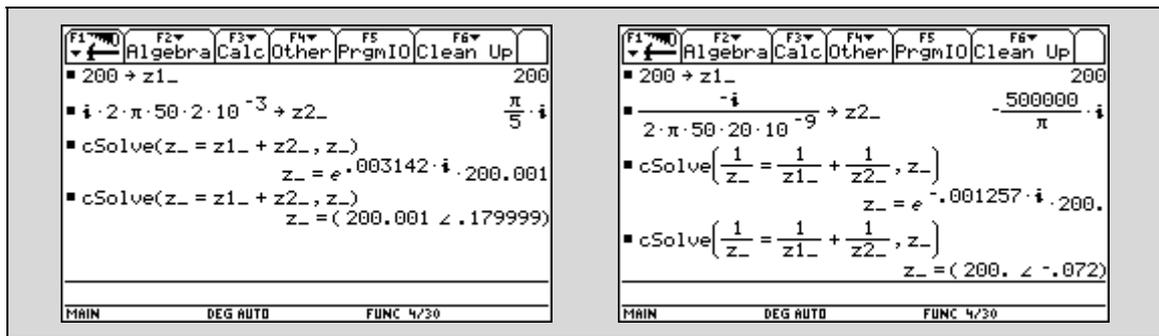
- Der Gesamtwiderstand bei Serienschaltung ist gleich der Summe der Einzelwiderstände, also $Z = Z_1 + Z_2$.
- Der Kehrwert des Gesamtwiderstandes bei Parallelschaltung ist gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelwiderstände, also

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}.$$

Vom komplexen Ergebnis ist sowohl der Betrag als auch der Phasenwinkel von Interesse - dieser wirkt sich entscheidend auf die Leistung $P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi$ des Stromes aus.

Beispiel: Bestimme die Impedanz Z

- einer RL-Reihenschaltung mit $R = 200 \Omega$ und $L = 2 \text{ mH}$.
- einer RC-Parallelschaltung mit $R = 200 \Omega$ und $C = 20 \text{ nF}$.



Achtung: die Einstellung von Complex Format wurde nach Eingabe der Daten auf POLAR geändert; die Kombination Complex Format = POLAR und Angle = DEGREE erzeugt aber nur am TI-92 Plus Antworten der Form $(r \angle \varphi)$.

Physikalische Bezeichnungen

- U ... Spannung
- I ... Stromstärke
- R ... Ohmscher Widerstand
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$... Kreisfrequenz mit Periodendauer T bzw. Frequenz $f = \frac{1}{T} = 50 \text{ Hz}$
- φ ... Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung
- ωL ... induktiver Widerstand einer Spule mit Induktivität L (Einheit: H = Henry)
- $\frac{1}{\omega C}$... kapazitiver Widerstand eines Kondensators mit Kapazität C (Einheit: F = Farad)
- Z ... Impedanz = Widerstand eines Wechselstromkreises (Einheit: $\Omega = \text{Ohm} \angle \varphi$)

Literatur

Bergmann - Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik. Bd. II: Elektrizität und Magnetismus. Berlin 1971 (6. Aufl.) <De Gruyter>.

Mandelbrot, Julia & Newton

Komplexe Iterationen für Geduldige

1979 entdeckte der in Polen geborene, seit seiner Kindheit aber in Frankreich lebende Mathematiker Benoit B. Mandelbrot (1924 -) - aufbauend auf den Arbeiten von Pierre Fatou (1878 - 1929) und Gaston Julia (1893 - 1978) - *seine* Menge.

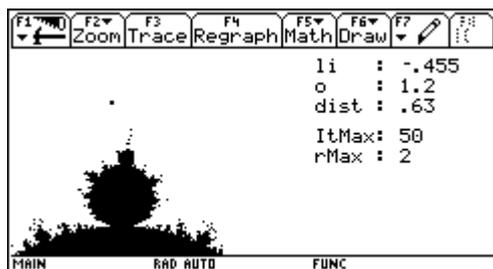
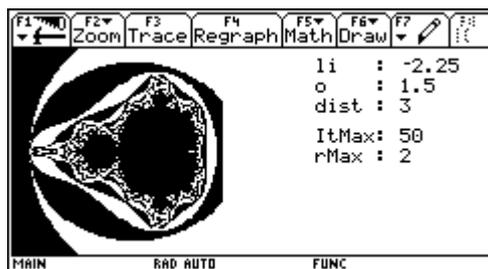
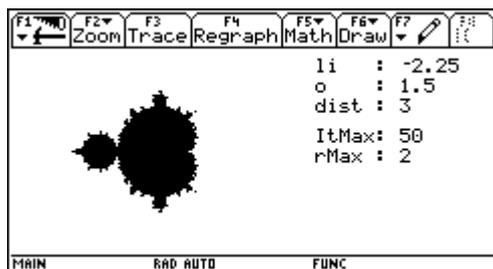
Unter der **Mandelbrot-Menge** (im deutschsprachigen Raum auch „Apfelmännchen“ genannt) versteht man die Menge aller Startwerte $z(0) \in \mathbb{C}$, die bei der Iteration

$$z(n) = z(n-1)^2 + z(0)$$

nicht nach Unendlich laufen.

Ein Bild dieser Menge läßt sich durch ein einfaches Programm erzeugen, wobei die Möglichkeit, komplexe Zahlen direkt in die Iterationsformel einzusetzen, die Programmierung wesentlich vereinfacht, aber leider nicht die Rechenzeit verkürzt (am TI-92 Plus 4 Stunden und mehr). Die Anzahl der Iterationsschritte, die erforderlich sind, um eine gegebene Schranke zu überschreiten (hier: rMax = 2), erzeugt interessante Bandstrukturen in Schwarzweiß. Ausschnittsvergrößerungen zeigen die typische Selbstähnlichkeit aller Fraktale.

Da am Grafik-Bildschirm des TI-92 nur 240 x 105 Pixel zur Verfügung stehen, sind die berechneten Ausschnitte jeweils 105 x 105 Pixel groß.



Andere Iterationsformeln - z.B. $z(n) = z(n-1)^3 + z(0)$ - erzeugen andere Mandelbrot-Mengen.



Julia-Mengen sind enge Verwandte der Mandelbrot-Mengen; der Unterschied in der Definition besteht lediglich darin, daß zu allen Startwerten $z(0)$ im Laufe der Iteration immer wieder *dieselbe* Konstante c addiert wird.

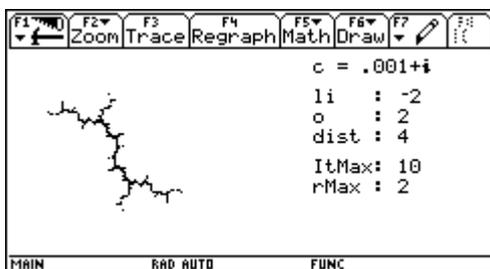
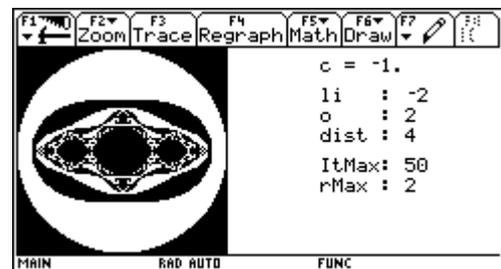
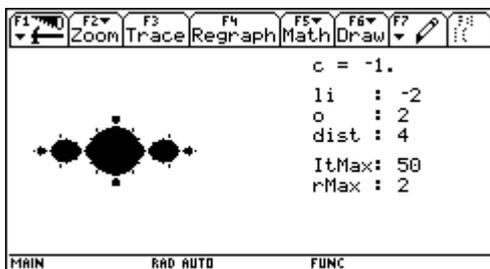
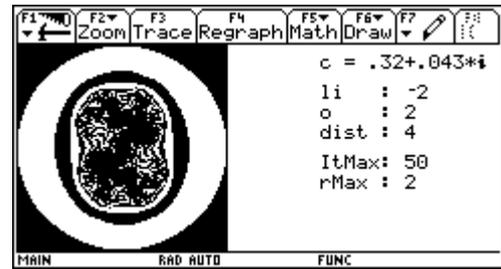
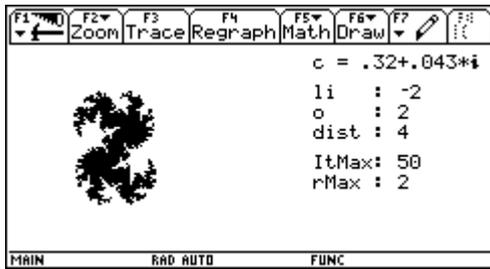
Unter einer **Julia-Menge** versteht man die Menge aller Startwerte $z(0) \in \mathbb{C}$, die bei Iteration nach einer gegebenen Formel *nicht* nach Unendlich laufen.

In der Literatur wird als Julia-Menge manchmal auch die Menge aller Startwerte $z(0) \in \mathbb{C}$ bezeichnet, die bei Iteration zu *keinem* Attraktor laufen, d.h. man sieht hier nur den Rand der „Gefangenenmenge“ als Julia-Menge. Genau dann, wenn die Iteration von 0 nicht nach Unendlich führt, ist die Julia-Menge zusammenhängend, andernfalls besteht sie aus einer „Staubwolke“.

Nimmt man als Iterationsformel beispielsweise

$$z(n) = z(n-1)^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}$$

so erhält man besonders interessante Strukturen für c -Werte in der Nähe des Randes der Mandelbrot-Menge.



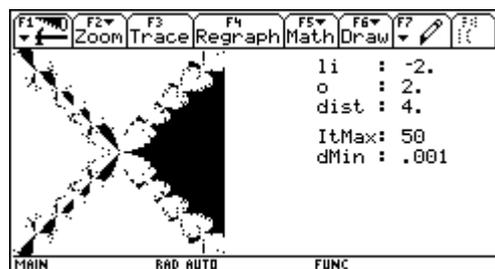
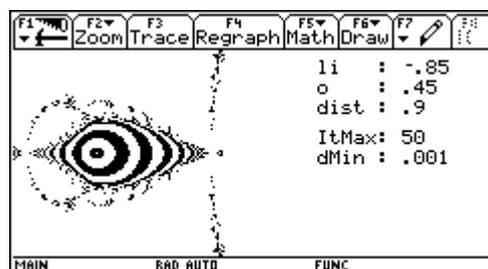
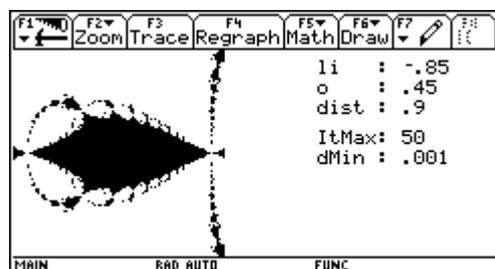
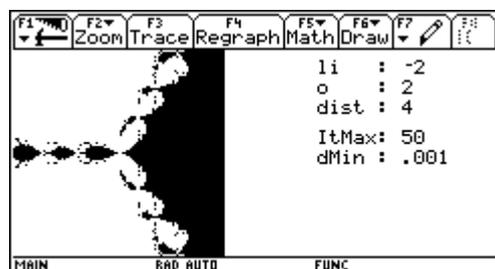
Ein weiteres, ebenfalls sehr bekanntes Fraktal wird durch das Newton-Verfahren

$$z(n) = z(n-1) - \frac{f(z(n-1))}{f'(z(n-1))}$$

zur Ermittlung von Nullstellen einer gegebenen Funktion erzeugt. Wie sieht beispielsweise die Menge aller komplexen Startwerte aus, die für die Gleichung $z^3 - 1 = 0$ zur reellen Lösung $z_0 = 1$ laufen? (Im Schwarzweiß-Modus läßt sich sinnvollerweise nur das Einzugsgebiet *eines* Attraktors darstellen.) Hier ist also

$$z(n) = z(n-1) - \frac{z(n-1)^3}{3 \cdot z(n-1)^2}$$

Diesmal stellen die Bandstrukturen die Anzahl der Iterationsschritte dar, die erforderlich sind, um „in die Nähe“ der gegebenen Lösung zu gelangen (Abstand $d_{\text{Min}} = 0,001$). Auch hier sind Ausschnittsvergrößerungen sowie Experimente mit anderen Gleichungen interessant (unten: $z^4 - 1 = 0$), auch hier müssen allerdings lange Rechenzeiten in Kauf genommen werden (am TI-92 Plus 6 Stunden und mehr).



Literatur

Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Saupe: *Chaos. Bausteine der Ordnung.* Berlin, Heidelberg, Stuttgart 1994 <Springer / Klett-Cotta>.

Herbert Zeitler, Wolfgang Neidhardt: *Fraktale und Chaos. Eine Einführung.* Darmstadt 1994 (2. Aufl.) <Wissenschaftliche Buchgesellschaft>.

Programm-Codes

```
:mbrot()
:Prgm
: Local li,o,dist,step,itmax,rmax
: Local x,y,z_,z0_,itanz,r
:
: ClrDraw
:
: ● Konstante festlegen
: -2.25>li
: 1.5>o
: 3>dist: dist/105>step
: 50>itmax
: 2>rmax
:
: ● Window festlegen
: li>xmin: li+240*step>xmax
: o>ymax: o-105*step>ymin
:
: ● Daten ausgeben
: PxlText "li : "&string(li),5,150
: PxlText "o : "&string(o),15,150
: PxlText "dist : "&string(dist),25,150
: PxlText "ItMax: "&string(itmax),40,150
: PxlText "rMax : "&string(rmax),50,150
:
: ● Startwert z0_ variieren
: 0>y
: While y<=105
:   0>x
:   While x<=105
:     li+x*step+i*(o-y*step)>z0_
:     z0_>z_
:     abs(z_)>r
:
:     ● z_ iterieren
:     0>itanz
:     While r<rmax and itanz<itmax
:       z_^2+z0_>z_
:       abs(z_)>r
:       itanz+1>itanz
:     EndWhile
:
:     ● z0_ darstellen
:     If r<rmax Then
:       PtOn real(z0_),imag(z0_)
:     Else
:       If mod(itanz,2)=0 Then
:         PtOn real(z0_),imag(z0_)
:       EndIf
:     EndIf
:
:     x+1>x
:   EndWhile
:
:   y+1>y
: EndWhile
:EndPrgm
```

ev. anpassen

ev. anpassen

ev. mit ● versehen

```

:julia()
:Prgm
: Local li,o,dist,step,itmax,rmax
: Local x,y,z_,z0_,c_,itanz,r
:
: ClrDraw
:
: ● Konstante festlegen
: .32+.043*i>c_
: -2.25>li
: 1.5>o
: 3>dist: dist/105>step
: 50>itmax
: 2>rmax
:
: ● Window festlegen
: li>xmin: li+240*step>xmax
: o>ymin: o-105*step>ymin
:
: ● Daten ausgeben
: PxlText "c = "&string(c_),5,150
: PxlText "li   : "&string(li),20,150
: PxlText "o    : "&string(o),30,150
: PxlText "dist : "&string(dist),40,150
: PxlText "ItMax: "&string(itmax),55,150
: PxlText "rMax : "&string(rmax),65,150
:
: ● Startwert z0_ variieren
: 0>y
: While y<=105
:   0>x
:   While x<=105
:     li+x*step+i*(o-y*step)>z0_
:     z0_>z_
:     abs(z_)>r
:
:     ● z_ iterieren
:     0>itanz
:     While r<rmax and itanz<itmax
:       z_^2+c_>z_
:       abs(z_)>r
:       itanz+1>itanz
:     EndWhile
:
:     ● z0_ darstellen
:     If r<rmax Then
:       PtOn real(z0_),imag(z0_)
:     Else
:       If mod(itanz,2)=0 Then
:         PtOn real(z0_),imag(z0_)
:       EndIf
:     EndIf
:
:     x+1>x
:   EndWhile
:
:   y+1>y
: EndWhile
:EndPrgm

```

ev. anpassen

ev. anpassen

ev. mit ● versehen

```

:newtn()
:Prgm
: Local li,o,dist,step,itmax,dmin
: Local z1_,z2_,z3_
: Local x,y,z_,z0_,itanz,d1,d2,d3
: ClrDraw
: ● Konstante festlegen
: -2>li
: 2>o
: 4>dist: dist/105>step
: 50>itmax
: .001>dmin
: 1.>z1_
: -.5+.86602540378445*i>z2_
: -.5-.86602540378445*i>z3_
:
: ● Window festlegen
: li>xmin: li+240*step>xmax
: o>ymin: o-105*step>ymin
:
: ● Daten ausgeben
: PxlText "li : "&string(li),5,150
: PxlText "o : "&string(o),15,150
: PxlText "dist : "&string(dist),25,150
: PxlText "ItMax: "&string(itmax),40,150
: PxlText "dMin : "&string(dmin),50,150
:
: ● Startwert z0_ variieren
: 0>y
: While y<=105
: 0>x
: While x<=105
: li+x*step+i*(o-y*step)>z0_
: z0_>z_
: abs(z1_-z_)>d1
: abs(z2_-z_)>d2
: abs(z3_-z_)>d3
:
: ● z_ iterieren
: 0>itanz
: While d1>dmin and d2>dmin and d3>dmin and itanz<itmax
: z_-(z_^3-1.)/(3*z_^2)>z_
: abs(z1_-z_)>d1
: abs(z2_-z_)>d2
: abs(z3_-z_)>d3
: itanz+1>itanz
: EndWhile
:
: ● z0_ darstellen
: If d1<=dmin Then
: PtOn real(z0_),imag(z0_)
: If mod(itanz,2)=0 Then
: PtOff real(z0_),imag(z0_)
: EndIf
: EndIf
:
: x+1>x
: EndWhile
: y+1>y
: EndWhile
:EndPrgm

```

3 Lösungen

ev. anpassen
1. ≠1

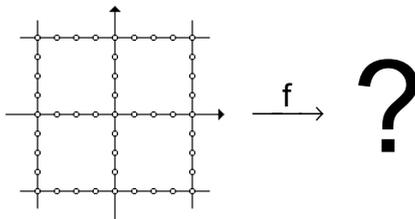
1. ≠1 / ev. anpassen

ev. mit ● versehen

Komplexe Funktionen

Der Versuch einer Visualisierung

Idee: man verbindet einige (möglichst nahe beieinanderliegende) Gitterpunkte z_i der komplexen Zahlenebene durch gerade Linien, ermittelt die Funktionswerte $f(z_i)$ dieser Gitterpunkte und verbindet die entsprechenden Bilder wieder durch gerade Linien, um so eine Vorstellung von der Wirkung von f zu erhalten (hier: Abstand der Linien = d ; Abstand der Punkte = $step$).



Es ist zweckmäßig, die Berechnung der Bildpunkte einem Programm zu überlassen, z.B. für

■ $f(z) = z^2$

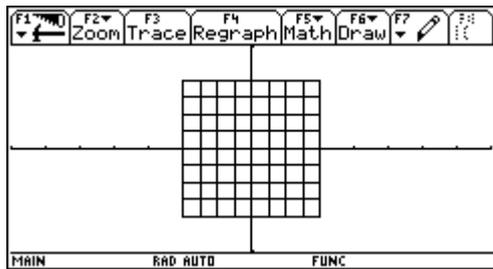
Das Programm wird mit `cf()` aufgerufen, die erforderlichen Grundeinstellungen - `Graph = FUNCTION` und `Angle = RADIAN` - sowie passende `WINDOW`-Einstellungen sind händisch zu tätigen. Eine Änderung der im Programm enthaltenen lokalen Funktion f ermöglicht auch die Darstellung anderer Beispiele.

Programm-Code

```
:cf()
:Prgm
: Local z1_,z2_,x,y,mi,ma,d,step
:
: Local f
: Define f(z_)=Func
:   z_^2
: EndFunc
:
: ClrDraw
: -2>mi: 2>ma: 0.5>d: 0.25>step
:
: ● horizontale Linien
: For y,ma,mi,-d
:   mi+y*i->z1_
:   For x,mi+step,ma,step
:     x+y*i->z2_
:     Line real(f(z1_)),imag(f(z1_)),real(f(z2_)),imag(f(z2_))
:     z2_->z1_
:   EndFor
: EndFor
:
: ● vertikale Linien
: For x,mi,ma,d
:   x+ma*i->z1_
:   For y,ma-step,mi,-step
:     x+y*i->z2_
:     Line real(f(z1_)),imag(f(z1_)),real(f(z2_)),imag(f(z2_))
:     z2_->z1_
:   EndFor
: EndFor
:EndPrgm
```

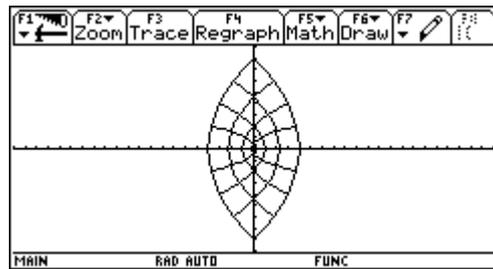
ev. anpassen |

ev. anpassen |



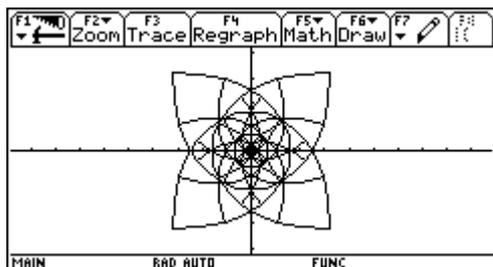
$$f(z) = z$$

$$x = -7 \dots 7 / y = -3 \dots 3$$



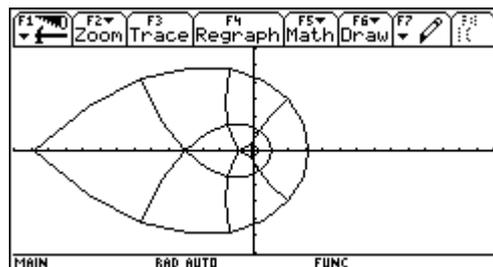
$$f(z) = z^2$$

$$x = -21 \dots 21 / y = -9 \dots 9$$



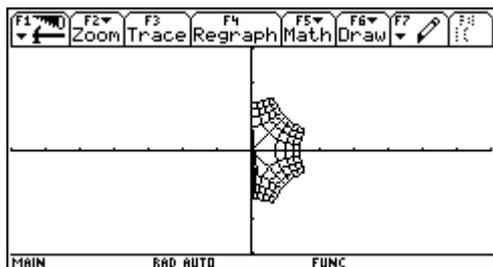
$$f(z) = z^3$$

$$x = -49 \dots 49 / y = -21 \dots 21$$



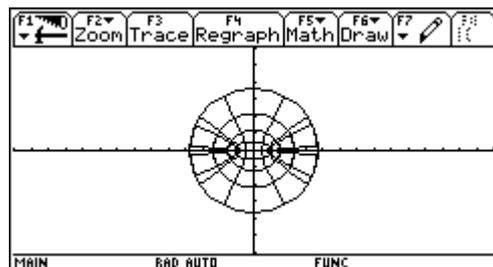
$$f(z) = z^4$$

$$x = -70 \dots 70 / y = -30 \dots 30$$



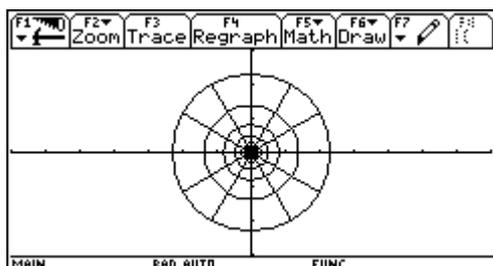
$$f(z) = \sqrt{z}$$

$$x = -7 \dots 7 / y = -3 \dots 3$$



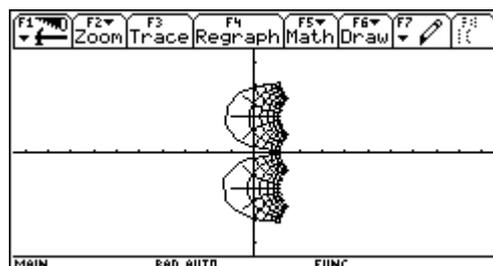
$$f(z) = \sin z$$

$$x = -14 \dots 14 / y = -6 \dots 6$$



$$f(z) = e^z / m_i = -\pi / m_a = \pi / d = \frac{\pi}{6} / \text{step} = \frac{\pi}{12}$$

$$x = -70 \dots 70 / y = -30 \dots 30$$



$$f(z) = \ln z / m_i = -\pi / m_a = \pi / d = \frac{\pi}{6} / \text{Achtung!}$$

$$x = -10.5 \dots 10.5 / y = -4.5 \dots 4.5$$

Literatur

Christoph Pöppe: Computer-Kurzweil. In: Spektrum der Wissenschaft 8/1989. S 8 - 13.

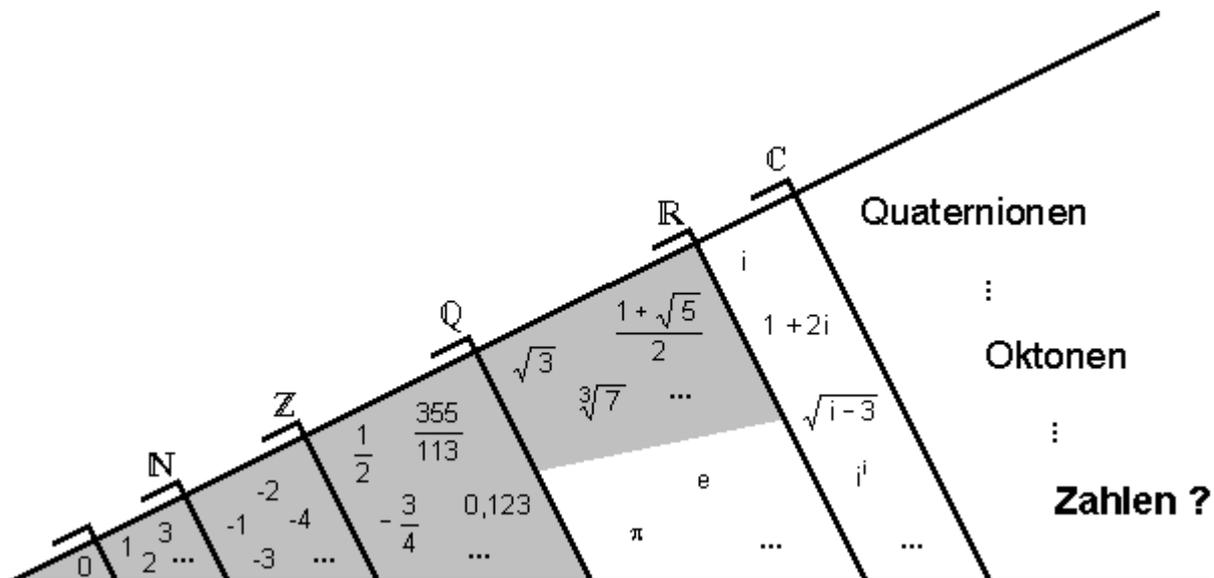
Komplexe Funktionen

Formelsammlung

z	a + ib a = r · cos φ b = r · sin φ	r · e^{iφ} $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\varphi = -\tan^{-1} \frac{a}{b} + \text{sign}(b) \cdot \frac{\pi}{2}$
\bar{z}	a - ib	r · e ^{-iφ}
z	$\sqrt{a^2 + b^2}$	r
$z_1 \pm z_2$	$(a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$	
$z_1 \cdot z_2$	$(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)$	$r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$	$\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
z^n		$r^n \cdot e^{in\varphi}$
e^z	$(e^a \cdot \cos b) + i(e^a \cdot \sin b)$	$e^a \cdot e^{ib}$
ln z	ln r + iφ	
sin z		$\frac{1}{2i} \cdot (e^{iz} - e^{-iz})$
cos z		$\frac{1}{2} \cdot (e^{iz} + e^{-iz})$
tan z		$\frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$
sinh z		$\frac{1}{2} \cdot (e^z - e^{-z})$
cosh z		$\frac{1}{2} \cdot (e^z + e^{-z})$
tanh z		$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$

\mathbb{C} und darüber hinaus

Eine Übersicht



komplexe Zahlen	hyperkomplexe Zahlen Quaternionen	
$i^2 = -1$	$i^2 = j^2 = k^2 = -1$ $ij = -ji = k$ $jk = -kj = i$ $ki = -ik = j$	