1. Schularbeit 6C / RG 28.10.1997

1a) Beweise die Regel $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ für $a,b \in R$ und $n \in N$.

Als bekannt ist vorauszusetzen: Rechengesetze für das Rechnen mit reellen Zahlen in den 4 Grundrechnungsarten; Definition von Potenzen mit natürlichen Exponenten.

Begründe jeden Umformungsschritt.

1b) Vereinfache soweit wie möglich und gib das Ergebnis auf zwei Arten an:

- ohne negative Hochzahlen
- ohne Bruchstrich

$$\left(\frac{3x^{-4}}{ya^{-2}}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{y^{-1}x^2}{3a^3}\right)^3 =$$

(12P.)

2. Ein Natriumatom hat einen Radius von etwa 0,2 Nanometer.

a) Berechne das Volumen V eines solchen Atoms unter der Annahme, dass es kugelförmig ist, und drücke V in m^3 aus.

(Volumen einer Kugel mit Radius r: $V = \frac{4r^3\pi}{3}$)

b) Gib eine Schätzung für das Volumen an, die sich im Kopf berechnen lässt.

c) Wie viele Natriumatome füllen einen Raum von 1 cm^3 aus, wenn sie dicht gepresst werden?

(6P.)

3. $1 + \sqrt{x+5} = \sqrt{3x+4}$ (G = R)

a) Bestimme rechnerisch (ohne TI-92) die Lösungsmenge.

b) Ermittle graphisch mit TI-92 die Lösungsmenge. Erkläre und begründe deine Vorgangsweise.

(14P.)

4. $f(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$

Skizziere die Funktion so, dass sie an den Stellen $x = 1$ und $x = -1$ richtige Lage hat. Gib Definitions- und Wertemenge sowie ihre Eigenschaften an. Zeige anhand eines speziellen x-Wertes, warum die Funktion gerade oder ungerade ist.

(10P.)

5. Gib einen Funktionsterm $f_2(x)$ an, der im Vergleich zum Graphen der Funktion $f_1(x) = \sqrt{x}$ flacher verläuft, um 3 Einheiten nach links und 2 Einheiten nach oben verschoben ist.

Skizziere den Verlauf von f_1 und f_2 in einem Koordinatensystem.

Erkläre, welche Erweiterung in f_2 welche Auswirkung hat.

(6P.)

2. Schularbeit 6C / RG 2.12.1997

1a) Der Höhenmesser eines Flugzeuges ist ausgefallen. Es fliegt in konstanter Flughöhe auf das Richtfeuer eines Leuchtturmes zu. Vom Flugzeug zum Richtfeuer misst Fips Flieger den Tiefenwinkel 24°. Nach etwa 5500 m überfliegt das Flugzeug das Richtfeuer. In welcher Flughöhe befindet sich Fips?

1b) Aus einer Landkarte entnimmt Rudi Radler die Seehöhe von Ollersdorf (160 m) und von Heidenberg (231 m) sowie die Straßenlänge zwischen den beiden Orten, nämlich 1,6 km. Mit welchem Winkel steigt die Straße im Mittel an? Rudi würde viel lieber ohne Steigung radeln: Wie groß wäre denn die horizontale Entfernung zwischen den beiden Orten?

(12P.)

2a) Wie hängen die Definitionen des Sinus eines Winkels am Einheitskreis und in einem beliebigen rechtwinkeligen Dreieck zusammen? Gib Definitionen, Formeln, Herleitung, Skizzen, ... an. Erkläre in Worten.

2b) Erkläre mit Hilfe von Sinus und Cosinus für Winkel im Intervall [0°;360°], wann die Tangensfunktion positives bzw. negatives Vorzeichen annimmt. Zeige dies auch am Funktionsgraphen.

(12P.)

3. Stelle die angegebenen Winkelfunktion mit Hilfe eines Winkels aus dem Intervall [0°;90°] dar. Begründe alle Umformungsschritte (Formel, Rechenansatz oder Worte).

$\sin(-611{,}6°)$ $\cos(550{,}3°)$ $\tan(1031{,}2°)$

(12P.)

4. Gegeben ist die Funktion $f(\varphi) = 3 \cdot \cos(0{,}75 \cdot \varphi)$.

a) Gib zur Funktion $f(\varphi)$ folgende Eigenschaften an:
- Definitions- und Wertemenge
- primitive Periodenlänge
- Nullstellen
- Extremstellen
- Symmetrie
- Monotonie

b) Skizziere den Funktionsgraphen und beschrifte ihn ausreichend.

c) Formuliere in Worten, welche Eigenschaften $f(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$ gemeinsam haben.

(12P.)

Zusatzbeispiel:

Zeige, dass in jedem **allgemeinen** Dreieck ABC folgender Zusammenhang gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Hinweis: Zerlege das Dreieck in zwei rechtwinkelige Dreiecke.

3. Schularbeit 6C / RG 13.1.1998

1a) Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seitenlängen 101 mm, 29 mm und 120 mm.

1b) Vom Fußpunkt eines an der Meeresküste stehenden Leuchtturmes mit der Höhe h = 37,5 m sieht man die beiden Schiffe A und B unter einem Winkel von 166°. Vom Schiff A aus sieht man die Spitze des Turmes unter dem Höhenwinkel von 27,6°, vom Schiff B aus unter dem Höhenwinkel von 36,5°. Wie weit sind die beiden Schiffe voneinander entfernt?
Beachte, dass der Fußpunkt des Turms und die beiden Schiffe in derselben Horizontalebene liegen.

(12P.)

2. Die Entfernung zweier unzugänglicher Punkte C und D ist zu bestimmen.
Eine Standlinie AB mit der Länge 64 m wird abgesteckt und die Winkel $\angle DAC = 83{,}5°$, $\angle CAB = 41{,}8°$, $\angle ABD = 30{,}0°$ und $\angle DBC = 72{,}2°$ gemessen.
Die Beschriftung der Punkte A, B, C und D erfolgt im Kreis.

(12P.)

3. Bei einem geraden Drehkegel misst man den Radius des Basiskreises $r \approx 3{,}0$ cm und die Länge der Mantellinie $s \approx 10{,}3$ cm.

a) Berechne Oberfläche und Volumen dieses Drehkegels.

b) Zeige mit Hilfe von Schranken, auf welche Genauigkeit die Körperhöhe h berechnet werden kann.

(12P.)

4a) Was bedeutet die Angabe $\varphi = \frac{\pi}{6}$ rad für einen Winkel?

Erkläre, wie Grad- und Bogenmaß zusammenhängen.

4b) Gegeben sind die Punkte A(-4/-5) und B($\sqrt{2}$ /135°).

Trage die Punkte in ein Koordinatensystem ein. Bestimme die Polarkoordinaten von A bzw. die Kartesischen Koordinaten von B.

4c) Zeige anhand einer Skizze, wie sich bei gegebenen Polarkoordinaten (r;φ) die Kartesischen Koordinaten (x/y) berechnen lassen.

(12P.)

Zusatzbeispiel:

Leite den Cosinussatz her.

4. Schularbeit (zweistündig) 6C / RG 31.3.1998

1a) Ein Förderwagen kann sich nur auf einer Schiene in Richtung des Vektors s = (220;310;4) bewegen. Er wird von einem Stahlseil mit einer schräg angreifenden Kraft F = (125;80;95) gezogen. (Die Koordinaten von s sind in Meter gegeben, die Koordinaten von F in Newton.)

- Welchen Weg legt der Wagen zurück?
- Wie groß ist die Kraft F?
- Welche Arbeit wird dabei verrichtet?
- Unter welchem Winkel (= Winkel zur xy-Ebene) steigt die Schiene an?

1b) Leite eine vektorielle Flächenformel für das Parallelogramm her. Die trigonometrische Flächenformel und die Formel für den Winkel zwischen zwei Vektoren seien als bekannt vorausgesetzt.

(8P.)

2. Untersuche die Lage der folgenden drei Ebenen zueinander:

e_1: x = (1;3;-2) + t·(3;-3;7) + u· (-3;2;2)
e_2: 4x - y + 32 = 6
e_3: geht durch die Punkte A(1/0/2), B(-2/-9/3), C(4/6/0)

(12P.)

3. Der folgende Körper ist eine gerade, quadratische Pyramide:
A(12/13/2), B(16/19/14), C(4/15/20), D(0/9/8), S(x/y/z), Körperhöhe h = 7

a) Berechne die Koordinaten der Spitze S.
b) Berechne den Flächeninhalt der Seitenfläche ABS.
c) Berechne den Neigungswinkel der Seitenkante AS zur Grundfläche.

(12P.)

4. Ein zweistufiger Produktionsprozess wird durch die Produktionsmatrizen A und B beschrieben. Aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden die Zwischenprodukte Z_1 bis Z_4 hergestellt. Diese wiederum verwendet man zur Herstellung der Endprodukte E_1 und E_2.

A	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	2	1	1	0
R_2	1	2	2	1
R_3	1	2	0	3

B	E_1	E_2
Z_1	5	0
Z_2	0	2
Z_3	2	6
Z_4	1	3

Gib die beiden Produktionsmatrizen A und B an.

Beantworte die folgenden Fragen mit Hilfe <u>geeigneter</u> Matrizenoperationen:

a) Gib die Matrix C der Gesamtverarbeitung an. Was bedeuten die Werte in den Zeilen bzw. Spalten?
b) Welche Mengen werden von den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 benötigt?
c) Der Rohstoff R_1 kostet 120 S pro Mengeneinheit, der Rohstoff R_2 65 S und der Rohstoff R_3 90 S. Wieviel kostet die Herstellung des Endproduktes E_1 bzw. E_2?

(8P.)

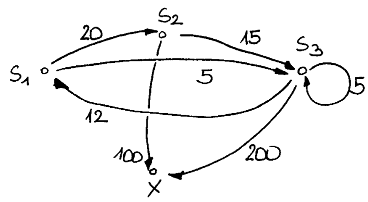
5. Wähle entsprechend deinem Schwerpunkt eine der folgenden Aufgaben aus:

a) Ermittle die Rangordnung in der Gruppe mit folgender einstufiger Dominanztabelle:

Paar	AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CE	DE
davon dominiert	A	A	A	E	B	B	B	D	C	E

Stelle die Dominanzen grafisch dar.

b) Bestimme aus der grafischen Darstellung für die **Produktionszweige** S_1, S_2 und S_3 die Inputmatrix, den Zwilschennachfragevektor, den Outputvektor und den Endnachfragevektor. Gib die verwendeten Zusammenhänge an und erkläre die Bedeutung der verwendeten Vektoren.



c) Führe die Strecke AB mit A(4/1) und B(1/-3) durch die beiden zentrischen **Streckungen** mit den Faktoren k_1 = 2,5 und k_2 = -0,5 aus dem Zentrum Z(1/-2) zuerst schrittweise und dann unter Verwendung einer einzigen Abbildung in die Bildfigur A"B" über.

Gib alle Abbildungsgleichungen an.

Was bewirken die Streckungsfaktoren k>0, k<0, k>1 bzw. 0<k<1?

d) Drehe die Strecke AB mit A(4/0) und B(1/3) um den Koordinatenursprung als Zentrum hintereinander um den Winkel $\alpha = 60°$ und $\beta = 45°$. Stelle das Ergebnis durch eine einzige Drehung dar.

Gib alle Abbildungsgleichungen an.

Welche Abbildungsmatrix erzeugt eine Punktspiegelung am Koordinatenursprung?

Ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ die Abbildungsmatrix einer Drehung? Gib allenfalls den Drehwinkel an.

(8P.)

Zusatzbeispiel:

Beweise, dass für den Abstand d eines Punktes P von der Geraden g mit dem Normalvektor n und dem Geradenpunkt X_1 in der Ebene R^2 folgende Formel gilt: $d = \left| n_0 \cdot (p - x1) \right|$

(3ZP.)

5. Schularbeit 6C / RG 8.6.1998

1. Mat und Harry trainieren für den Wien-Marathon. Beide beginnen mit einem wöchentlichen Trainingspensum von 20 km in der Woche. Mat läuft jede Woche um 8 km mehr, Harry steigert seine Leistung wöchentlich um 20%.
   a) Berechne für beide das Laufpensum in der 5. Trainingswoche.
   b) Wie groß ist für jeden der beiden der mittlere prozentuelle Streckenzuwachs von der 6. bis zur 10. Trainingswoche?
   c) Wann haben die beiden (annähernd) die gleiche wöchentliche Trainingsleistung?
   d) Durch welche Eigenschaften ist der Wachstumsprozess von Mats wöchentlicher Trainingsleistung gekennzeichnet?

(14P.)

2. Jemand zahlt zu Beginn jedes Jahres 4000,- auf ein Sparbuch ein und erhält am Ende jedes Jahres 5,5% Zinsen.
   a) Betrachte die Kapitalentwicklung und skizziere den Graphen für die ersten 6 Jahre.
   b) Wieviel besitzt er zu Beginn des 8. Jahres?
   c) Wann hat sich das Anfangskapital verdreifacht?
   d) Mit welchem Wachstumsmodell lässt sich die Kapitalentwicklung beschreiben?

(14P.)

3. Ein zunächst weitgehend unbekannter Politiker kandidiert in einer Stadt mit 25 000 Wahlberechtigten für das Bürgermeisteramt. Zur Überprüfung der im Wahlkampf eingesetzten Werbemaßnahmen werden wöchentlich die Anzahl der Wahlberechtigten erhoben, denen der Politiker bereits bekannt ist. Dabei ergibt sich folgende Tabelle der ersten Wochen:

Woche	Anzahl
1	200
2	300
3	450
4	675
5	
6	
7	

   a) Wähle einen geeigneten Modelltyp und begründe deine Wahl.
   b) Gib die Modellgleichung mit einer geeigneten Wachstumsrate an.
   c) Ergänze die Werte in der Tabelle.
   d) Der Kandidat möchte am Ende des Wahlkampfes mindestens 90% der Wahlberechtigten bekannt sein. In welcher Woche sollte dann frühestens die Wahl sein?
   e) Welche Wachstumsrate ist bei deinem Modell mindestens notwendig, um diesen Bekanntheitsgrad von 90% in Woche 13 zu erreichen?

(14P.)

4. 30 dag Zucker werden in einer großen Menge Wasser aufgelöst. Der Prozess der Auflösung kann näherungsweise durch die Rekursion $m(t) = m(t-1)\cdot 0{,}9$ beschrieben werden. Dabei ist $m(t)$ die Menge des noch ungelösten Zuckers nach t Sekunden.
   a) Wieviel Prozent des Zuckers lösen sich in einer Sekunde auf?
   b) Wie lange dauert es, bis mehr als die Hälfte des Zuckers aufgelöst ist?
   c) Wie lange dauert es, bis der Zucker zur Gänze aufgelöst ist, wenn man annimmt, dass diese Formel den Auflösungsprozess genau wiedergibt? Was sagst du dazu?

(6P.)