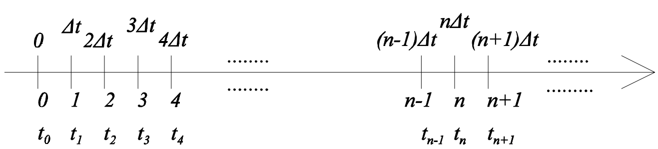
Wachstummodelle als Bausteine für systemdynamisches Modellieren

Themenbereich	
Analysis	
Inhalte	Ziele
• Lineares Wachstum • Exponentielles Wachstum • Begrenztes Wachstum • Logistisches Wachstum • Hyperbolisches Wachstum • Lösen von Rekursionsgleichungen • Lösen von Differentialgleichungen	• Diskrete und kontinuierliche mathematische Modelle für grundlegende Wachstums-erscheinungen angeben können. • Folgen und Funktionen zur Modellierung einsetzen können. • Für die einzelnen Modelle verschiedene Dar-stellungsformen angeben können. • Die Schrittweite bei diskreter Modellierung verkleiner können bzw. frei wählen können. • Prinzipielle Unterschiede zwischen diskreter und kontinuierlicher Modellierung erkennen.
Adressaten: Für die grundlegenden Wachstumsformen, wie sie von der 10. bis zur 12. Jahrgangsstufen behandelt werden können, werden gegenüberstellend die entsprechenden mathematischen Modellierungen angegeben. Die folgenden Seiten eignen sich so einerseits zum Einsatz bei der Entwicklung dieser Modelle als auch für ein vergleichendes Behandeln im Rahmen der Wiederholung von der Matura. Natürlich kann das Skriptum damit auch eine Unterstützung für eine Vertiefung der Behandlung von Wachstumsvorgängen bieten (z.B. durch die Betrachtung der Variation der Schrittweite bei den diskreten Vorgängen).	

Einige Grundbegriffe

Der Träger des Wachstumsvorganges soll hier grundsätzlich als *Bestand* bezeichnet werden. Dieser kann die Bevölkerung einer Stadt, eines Landes, eines Kontinentes oder auch die Erdbevölkerung sein. Der Begriff *Bestand* kann aber auch die Größe einer Tierpopulation, die Anzahl der Seerosen in einem Teich, ein im Laborversuch zu untersuchendes Präparat (Hefepilzkultur, chemische Substanzen) oder eine wirtschaftliche Größe (Sozialprodukt, Lohn, Guthaben) bedeuten.

Der Wachstumsprozeß findet im Laufe der Zeit statt. Für eine diskrete Modellierung ist es notwendig, die Zeit in einzelne Intervalle Δt (die gleich groß sein sollen) zu teilen:



Oft ist es günstiger, einfach die Nummer des Zeitpunktes zu verwenden. Für den Bestand zum Zeitpunkt $t = n.\Delta t$ ($= t_n$) schreibt man dann y_n . Der Index n und t hängen dann über die Gleichung

$$t = n.\Delta t \qquad \text{bzw.} \qquad n = \frac{t}{\Delta t}$$ zusammen.

Bei der Behandlung der Wachstumsmodelle muß sorgfältig auf eine präzise Sprache geachtet werden und klar zwischen folgenden Begriffen unterschieden werden:

Bestand (auch: Bevölkerung, Populationsgröße, Menge, Zustand, Anzahl)

y_n (nach dem n.Zeitschritt Δt, also zur Zeit $t = n.\Delta t = t_n$)

Absoluter Zuwachs (auch: absolutes Wachstum, absolute Änderungsrate)

$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

Zuwachsgeschwindigkeit (= Zuwachs in der Zeit Δt, auch: mittlere Änderungsrate)

$$\frac{\Delta y_n}{\Delta t} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = \frac{y_{t_n+\Delta t} - y_{t_n}}{\Delta t}$$

Zuwachsrate (= absolutes Wachstum pro Zeitdauer und Populationsgröße = Zuwachsgeschwindigkeit pro Bestand = Pro-Kopf-Zuwachsgeschwindigkeit, auch: prozentuelle mittlere Änderungsrate, relative Änderungsrate, auf den Zeitraum Δt bezogene relative Änderungsrate)

$$\frac{\Delta y_n}{\Delta t.y_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t.y_n}$$

Hinweis: Wenn Δt = 1Zeiteinheit(ZE) gesetzt wird, so ist die Zuwachsgeschwindigkeit = absoluter Zuwachs (bzw. mittlere Änderungsrate = absolute Änderungsrate)

Wachstumsrate (auch: Wachstumsfaktor)

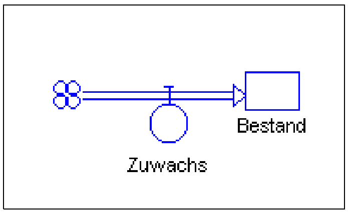
$$\frac{y_{n+1}}{y_n}$$

Lineares (additives) Wachstum

- Verbale Beschreibung:

Wachstum um gleiche Beträge b in gleichen Zeitabständen.
oder
Ein Wachstum, bei dem die Änderungsrate konstant ist, heißt *lineares Wachstum*.
oder
neuer Bestand = alter Bestand + Zuwachs und:
der Zuwachs ist konstant

- Flußdiagramm:



- Gleichungsdarstellung

α) Diskretes Modell

$y_{n+1} - y_n = k_{disk} \in \mathbb{R}$ mittlere Änderungsrate ⇒ Iterationsformel $\boxed{y_{n+1} = y_n + k_{disk}}$

$y_1 = k + y_0$

$y_2 = k + y_1 = k + (k + y_0) = 2k + y_0$

....

$\boxed{y_n = n.k + y_0}$

β) Kontinuierliches Modell

$\frac{dy}{dt} = k_{kont} \in \mathbb{R}$ momentane Änderungsrate

$\int dy = \int k\,dt$

$y = k.t + c$ und wegen $y_0 = k.0 + c$

$\boxed{y(t) = k.t + y_0}$

- Verwandte Begriffe: „Linearität“, „arithmetische Folgen“

- Typische Beispiele: einfache Verzinsung. Das Auftreten des linearen Wachstums ist in der Natur eher selten; vielmehr wird es häufig „normativ“ durch den Menschen festgelegt.

Beispiel 1: *Auf einer Insel leben 100 Kaninchen, pro Monat kommen 10 Kaninchen hinzu.*

Beispiel 2: *Frau Huber telephoniert seit Anfang November nur mehr in Supersparzeit (von 20h-6h) und führt überdies nur mehr Gespräche in der Regionalzone 1 (bis 50km). Sie hat die Wahl zwischen dem*
Minimumtarif: Grundentgelt pro Monat ATS 170,40 und Verbindungsentgelt ATS 0,42 pro Minute
Standardtarif: Grundentgelt pro Monat ATS 194,40 und Verbindungsentgelt ATS 0,40 pro Minute
Wie lange darf Frau Huber höchstens telephonieren, um mit dem Minimumstarif besser auszusteigen?

Beispiel 3: *Die Kosten für eine Dienstleistung betragen anfänglich ATS 2800,-/Monat. Man hat Grund anzunehmen, daß sich die Kosten monatlich um ca. 2% (Steigerungsrate) der Anfangskosten erhöhen werden.*

Beispiel 4: *Eine Person hat die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten, eine Maschine auszuleihen:*
Variante 1: Fixgebühr: ATS 1700,- + Gebühr für jede angefangene Stunde: ATS 140,-
Variante 2: Fixgebühr: ATS 2200,- + Gebühr für jede angefangene Stunde: ATS 115,-
Ab welcher Stundenzahl wird Variante 2 günstiger?
Arbeite mit zwei Modellen (kontinuierlich-Funktionen und diskret-Folgen)
Wie lauten beide Funktionen? Wie lauten die beiden Folgendefinitionen?
Warum ist das diskrete Modell hier besser angebracht?

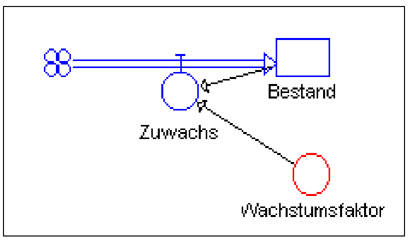
Beispiel 5: *Ein Objekt mit dem Anschaffungswert ATS 146000,- hat eine jährliche Abschreibungsrate von 5%. Erstelle das Funktions- und das Folgenmodell für die lineare Abschreibung.*
Wie lauten die letzten 5 Zeilen der Abschreibungstabelle?

Exponentielles (unbegrenztes) Wachstum

- Verbale Beschreibung

Wachstum um den gleichen Faktor in der gleichen Zeiteinheit.
oder
Ein Wachstum, bei dem die Änderungsrate proportional zum Bestand ist, heißt *exponentielles Wachstum*.
oder
neuer Bestand = alter Bestand + Zuwachs und:
der Zuwachs ist proportional zum jeweils letzten Bestand

- Flußdiagramm:



- Gleichungsdarstellung

α) Diskretes Modell

$y_{n+1} - y_n = k.y_n \quad k = k_{disk} \ \varepsilon \mathbb{R} \quad \Rightarrow$ Iterationsformel $\boxed{y_{n+1} = y_n.(1+k)}$

$$y_1 = y_0.(1+k) = y_0.q \qquad (q = 1+k = 1+\frac{p}{100})$$

$$y_2 = y_1.q = (y_0.q).q = y_0.q^2$$

....

$$\boxed{y_n = y_0.(1+\frac{p}{100})^n = y_0.(1+k)^n = y_0.q^n = y_0.e^{\ln q.n}}$$

β) Kontinuierliches Modell

$$\frac{dy}{dt} = k.y \qquad k_{kont} \ \varepsilon \mathbb{R}$$

$$\ln y = k.t + c$$

$$e^{\ln y} = e^{k.t+c}$$

$$y = e^{k.t}.e^{c} \quad \text{und wegen } y_0 = e^{c}$$

$$\boxed{y(t) = y_0.e^{k.t}}$$

Die hier entwickelte Iteration beliebig kann beliebig „fein“ sein, d.h.. durch entsprechende Wahl von Δt lassen sich pro Zeiteinheit beliebig viele Iterationsschritte unterbringen. Dazu ist es aber zuerst notwendig, die vom gewählten Zeitintervall Δt abhängige Zuwachsrate $k_{\Delta t}$ zu kennen. Dies erreichen wir mit folgendem Ansatz:

$$y_0.(1+k_{\Delta t}.\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = y_0.e^{k.t} \quad \text{(gilt strenggenommen nur für unendlich kleine } \Delta t \text{ !)}$$

$$(1+k_{\Delta t}.\Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}} = e^{k}$$

$$1+k_{\Delta t}.\Delta t = e^{k.\Delta t}$$

$$k_{\Delta t} = \frac{e^{k.\Delta t}-1}{\Delta t}$$

- Verwandte Begriffe: „freies Wachstum“, „geometrische Folgen“
- Typische Beispiele: Zinseszinsen, physikalische Beispiele wie Radioaktivität, Druckzu(ab)nahme, Absorption, Entladevorgänge etc., einfache Bevölkerungsmodelle

Beispiel 6: *Auf einer Insel leben 100 Kaninchen, pro Monat kommen 10 Prozent der Kaninchen des Vormonats hinzu.*

Beispiel 7: *In einer genügend großen Nährlösung befinden sich anfangs 100 Bakterien, die sich so schnell teilen, daß sich ihre Anzahl in jeweils 20 Minuten verdoppelt. Simuliere die zeitliche Entwicklung der Bakterienanzahl. Nach welcher Zeit wird eine kritische Zahl von 1 000 000 Bakterien überschritten?*

Beispiel 8: *Im Beispiel „Kaninchen mit exponentiellem Wachstum“ wird nun neben der Zunahme durch Geburten auch die Abnahme durch Todesfälle betrachtet. Diese seien proportional zur Anzahl der existierenden Individuen.*

Welche grundsätzlich verschiedenen Entwicklungen sind möglich? Gib die zugehörigen Zeitkurven aus.

Beispiel 9: *(Bevölkerungsmodell 1). In einem einfachen Bevölkerungsmodell wird angenommen, daß neben der Geburtenrate* $g_n = \frac{G_n}{B_n} = g$ *auch die Sterberate* $s_n = \frac{S_n}{B_n} = s$ *konstant sei (wobei G_n die Zahl der Geburten beim Übergang von n zu n+1 d.h.. vom Zeitpunkt t_n zu $t_n+\Delta t$ angibt und S_n entsprechend die Zahl der Sterbefälle, B_n sei der Bestand zum Zeitpunkt t_n).*

Da also $G_n = g.B_n$ (d.h.. die Geburtenzahl ist proportional zur Bevölkerungszahl) und $S_n = s.B_n$ (Sterbefälle proportional zur Bevölkerungszahl) ergibt sich somit

$$B_{n+1} - B_n = G_n - S_n \;\Rightarrow\; B_{n+1} = B_n + g.B_n - s.B_n \;\Rightarrow\; B_{n+1} = (1+g-s).B_n = w.B_n$$

Lösung: $B_n = B_0.w^n$

Beispiel 10: *Die Bevölkerung einer Stadt mit wachstender Industrie hatte im 1950 eine Einwohnerzahl von etwa 45 000. Beschreibe und verfolge die Bevölkerungsentwicklung bei einer annähernd konstanten Zuwachsrate von jährlich 2,5%.*

a) Wann wird die 100 000 - Einwohnerzahl überschritten sein?
b) Wieviele Jahre dauert es bis sich die Einwohnerzahl verdoppelt haben wird?
c) Wie groß ist die Bevölkerungszahl im Jahr 2000?

Beispiel 11: *Der Umfang einer Zellkultur wird zu zwei Zeitpunkten gemessen:*

Uhrzeit	*Zeitpunkt t =*	*Größe in mm²*
10 Uhr 30	*0*	*2400*
13 Uhr 15	*........... min*	*3260*

a) Wie lautet die Wachstumsfunktion in beiden Darstellungsarten?
b) Wachstumskoeffizient, Wachstumsrate?
c) Welchen Wert haben Wachstumsrate und Wachstumskoeffizient, wenn sie sich auf eine Stunde beziehen?

Beispiel 12: *Eine radioaktive Substanz zerfällt nach der Zerfallsgleichung*

$m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$. *dabei bedeuten m_0 die Ausgangsmasse*
t die Zeit in Minuten und
λ die „Zerfallsrate"

Momentan stellt man 57g Substanz fest. Vor 30 Minuten waren es noch 86,2g.

a) *Berechne die Zerfallskonstante λ.*
b) *Berechne die Halbwertszeit T (in Minuten). Welche Bedeutung hat diese Größe? (Ein Satz genügt).*
c) *Stelle die Zerfallsfunktion graphisch dar. Beantworte die folgenden Fragen zuerst an Hand des Graphen und anschließend rechnerisch.*
e) *Wieviel Substanz war es vor 1 ½ Stunden?*
f) *Wann werden bereits 53g der Substanz zerfallen sein?*

Beispiel 13: *Der Überlebensanteil u von technischen Bauelementen nach t Stunden Einsatzzeit wird beschrieben durch die Funktion*

$u(t) = 100 \cdot e^{-t/T}$ *u(t) in Prozent*

Dabei bedeutet T die durchschnittliche Lebensdauer in Stunden. Für gewisse Transistoren gilt der Wert T = 10000 Stn. Beantworte die Fragen a)-c) zuerst graphisch dann rechnerisch!

a) *Wie groß ist der Prozentanteil, der 12 000 Stunden überlebt?*
b) *Welche Einsatzzeit wird von 90% der Transistoren überdauert?*
c) *Von einer anderen Sorte überdauern ca. 70% 5000 Stunden. Welche durchschnittliche Lebensdauer T haben diese Bauteile?*
d) *Man möchte gerne, daß mehr als 80% mindestens 5000 Stunden überleben. Welche durchschnittliche Lebensdauer T muß angestrebt werden?*

Beispiel 14: *Ein Wald hatte 1986 einen Bestand von 48 000 m³. Im Verlauf von 15 Jahren war kein Holz gefällt worden, so daß sich der Bestand seit 1971 um 60% vermehren konnte.*

a) *Stelle für den Waldbestand das Wachstumsgesetz auf, wenn exponentielles Wachstum angenommen werden kann.*
b) *Wie groß war der Bestand 1976 und wie groß wird er 1998 sein?*
c) *Wann wird sich der Holzbestand von 1961 verdoppelt haben?*

Beispiel 15: *Ein Laserstrahl verliert mit zunehmender Eindringtiefe x (in mm) in ein Medium exponentiell an Intensität. Nach 1,65 mm ist bei einem bestimmten Stoff die Ausgangsintensität I_0 auf die Hälfte gesunken.*

a) *Drücke die Intensität I in Abhängigkeit von der Eindringtiefe x aus! Nimm I_0 als gegeben an. Gib beide Formen der Intensitätsgleichung an!*
b) *Nach dem Durchgang durch dieses Medium hat der Strahl 85% seiner Intensität verloren. Wie dick war die Schicht?*

Beschränktes (begrenztes) Wachstum

- Verbale Beschreibung

Wachstum um einen festen Anteil der Differenz zwischen einer Wachstumsgrenze und dem aktuellen Bestand (Wachstum proportional zum „Freiraum“, zur „Restkapazität“).

oder

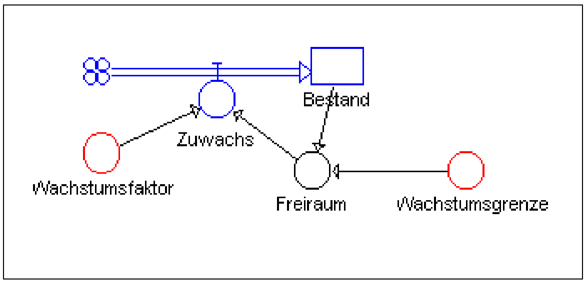
Ein Wachstum, bei dem die Änderungsrate proportional zum Freiraum ist, heißt *beschränktes Wachstum*.

oder

neuer Bestand = alter Bestand + Zuwachs und:

der Zuwachs ist proportional zum jeweils letzten Freiraum.

- Flußdiagramm



- Gleichungsdarstellung

α) Diskretes Modell

$y_{n+1} - y_n = k.(G - y_n) \qquad k = k_{disk} \in \mathbb{R}$ ⇒ Iterationsformel $\boxed{y_{n+1} = y_n + k.(G - y_n)}$

G=Sättigungsgrenze

$$y_1 = y_0 + k.(G - y_0) = y_0 - k.y_0 + k.G = y_0.(1-k) + k.G = a.y_0 + b \qquad (\, a = 1-k, \quad b = kG \,)$$

$$y_2 = a.y_1 + b = a.(a.y_0 + b) + b = a^2.y_0 + ab + b$$

$$y_3 = a.y_2 + b = a.(a^2.y_0 + ab + b) + b = a^3.y_0 + a^2b + ab + b$$

....

$\boxed{y_n = a^n.y_0 + b\frac{1-a^n}{1-a} = a^n.(y_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}}$ Lösung der Differenzengleichung $y_{n+1} = ay_n + b$

Nach einer Rücksubstitution ergibt sich:

$$y_n = (1-k)^n.(y_0 - \frac{kG}{1-(1-k)}) + \frac{kG}{1-(1-k)} = (1-k)^n.(y_0 - G) + G = G + (y_0 - G).(1-k)^n =$$

$$y_n = G + (y_0 - G).e^{\ln(1-k).n} \qquad \boxed{y_n = G + (y_0 - G).(1-k)^n}$$

β) Kontinuierliches Modell

$$\frac{dy}{dt} = k.(G-y) \qquad k_{kont}\ \varepsilon\mathbb{R}$$

$$\frac{dy}{G-y} = k.dt$$

$$\int\frac{dy}{G-y} = \int k.dt$$

$$-\ln|G-y| = k.t+c$$

$$|G-y| = e^{-kt-c} = e^{-kt}.e^{-c}$$

wegen $e^{-kt}.e^{-c} > 0$ und $G-y(0) = e^{-c}.1$

$$G-y = (G-y(0)).e^{-kx}$$

$$\boxed{y(t) = G+(y_0-G).e^{-kt}}$$

Die Beziehung zwischen der diskreten und kontinuierlichen Zuwachsrate folgt dann etwa aus

$$y_{n+1} - y_n = (G-y_n).(1-e^{-k\Delta t})$$

Betrachtet man auf Δt bezogene Wachstumsgeschwindigkeit

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = (G-y_n).\frac{1-e^{-k\Delta t}}{\Delta t} \text{ , so folgt}$$

$$y_{n+1} = y_n+(G-y_n).\frac{1-e^{-k\Delta t}}{\Delta t}.\Delta t = y_n+(G-y_n).k_{\Delta t}.\Delta t$$, daraus ist $k_{\Delta t}$ ablesbar:

$$\boxed{k_{\Delta t} = \frac{1-e^{-k\Delta t}}{\Delta t}}$$

- Verwandte Begriffe: Sättigung

- Typische Beispiele: In der Biologie bei Abbauvorgängen, bei der Nutzung von regenerierbaren Vorräten (z.B. Waldnutzung, Fischerei), bei der Ausbreitung von Krankheiten oder von Information, bei physikalischen oder chemischen Prozessen (z.B. Erwärmung, Abkühlung, Aufladevorgängen etc), in der Finanzmathematik bei der Tilgungsgleichung.

Beispiel 16: *In einer genügend großen Nährlösung befinden sich anfangs 100 Bakterien, die sich so schnell teilen, daß sich ihre Anzahl in jeweils 20 Minuten verdoppelt.*

Simuliere die zeitliche Entwicklung der Bakterienanzahl. Nach welcher Zeit wird eine kritische Zahl von 1.000.000 Bakterien überschritten?

Beispiel 17: *(J.Böhm, TI92-Skriptum: Wachstums- und Zerfallsprozesse)*

Ein Ökosystem verträgt maximal 2000 Exemplare einer Tiergattung. Der jährliche Zuwachs it ein fester Prozentanteil p der jeweils noch bestehenden Freiraumes (= 2000 - Bestand). Zoologen setzen 200 Individuen frei.

a) *Beschreibe anhand einer Tabelle die Entwicklung für die ersten 10 Jahre. Versuche eine Prognose. (Arbeite mit p = 5%).*

b) *Wie lautet ein geeignetes Folgenmodell?*

c) *Bilde das Folgenmodell für 2,5%, 5% und 10% und stelle die Graphen in einem gemeinsamen Fenster dar.*

Jahr n	**Freiraum am Anfang des Jahres**	**Zuwachs während des Jahres**	**Bestand am Ende des Jahres**
0			200
1	1800	90	290
2	1710	85.5	375.5
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9	922.3		

Beispiel 18: *(J.Böhm, TI92-Skriptum: Wachstums- und Zerfallsprozesse)*

Ein neues Produkt wird am Markt eingeführt. Man rechnet zu Beginn mit einer Nachfrage von annähernd 3000 Stk./Monat, wobei man aber annimmt, daß die Nachfrage mit der Zeit sinken wird. Längerfristig wird eine monatliche Absatzmenge von ca. 1200 Stk. erwartet. Die nachgefragte Menge sinkt monatlich um einen festen Prozentsatz der jeweiligen Differenz aus der monatlichen Absatzmenge und der Untergrenze von 1200 Stk.

a) *Beschreibe den monatlichen Absatz mit dem Folgenmodell für unterschiedliche Prozentsätze (p = 2,5%, 5% bzw.10%).*

b) *Warum spricht man hier von einer „gebremsten“ Abnahme?*

c) *Wie lauten die expliziten Absatzfunktionen für die vorliegenden Prozentsätze.*

d) *Durch geeignete Maßnahmen soll der Absatzrückgang so weit gebremst werden, daß nach Ablauf von 5 Jahren noch immer ca. 1800 Stk./Monat verkauft werden können. Welcher Prozentsatz p ist anzustreben? (Experimentiere mit geeigneten Werten bzw. löse die entsprechende Gleichung mit dem Funktionsmodell!)*

e) *Erstelle für p = 7,5% Tabelle und Graph für die monatliche Absatzmenge sowie für den monatlichen Absatzrückgang.*

Beispiel 19: *Newtonsches Abkühlungsgesetz (J.Böhm, TI92-Skriptum: Wachstums- und Zerfallsprozesse) Ein Körper der Temperatur T paßt sich an die Temperatur T_0 seiner Umgebung seiner Umgebung mit einer Geschwindigkeit an – Abkühlung oder Erwärmung – , die proportional ist zur Differenz seiner und der Temperatur seiner Umgebung.*

a) *Erläutere das Modell:* $T(n) = T(n-1) - k \cdot (T(n-1) - T_0)$

b) *Wie lautet die zugehörige „Abkühlungsfunktion“ ?*

c) *Ein Körper mit der Temperatur von 60°C wird der Raumtemperatur von 20°C ausgesetzt. Wird die Zeit in Sekunden gemessen, dann hat die Proportionalitätskonstante in diesem speziellen Fall den Wert $4{,}6.10^{-3}$.*

Wie lautet die Abkühlungsgleichung? Welchen Wert hat die „Abkühlungskonstante“? Zu welchem Zeitpunkt hat sich der Körper auf 30°C abgekühlt? Welche Temperatur hat der Körper nach 10 Minuten?

d) *Die Gußmasse einer Schiffsschraube kühlt sich in ihrer Form in 28 Tagen von 1000°C auf 100°C ab. Die Außentemperatur ist gleichbleibend 10°C. Bestimme die Abkühlungskonstante c. Eine Weiterbearbeitung des Rohlings ist erst bei 50°C möglich. Wann kann das frühestens sein?*

e) *Eine auf 2°C gekühlte Getränkeflasche wird aus dem Gefrierfach genommen, um bei einer Raumtemperatur von 22°C genossen zu werden. Nach 6 Minuten hat das Getränk eine Temperatur von 8°C. Wann sollte es getrunken werden, wenn 15°C seinen Geschmack am besten zur Geltung bringen?*

Beispiel 20: *An einem Gymnasium einer Kleinstadt soll unter Mitwirkung der örtlichen Feuerwehr ein streng geheimgehaltener Probealarm durchgeführt werden. Durch gute Beziehungen zur Feuerwehr erfahren zwei Schüler dieser Schule den Termin. Ab diesem Zeitpunkt erfahren pro Tag 15% der Leute, die den Termin noch nicht kennen, ebenfalls davon. Die Schule umfaßt insgesamt 800 Schüler, Lehrer und sonstige Bedienstete.*

a) *Stelle die Informationsausbreitung graphisch dar.*

b) *Wie viele Leute wissen nach einer Woche vom Termin?*

c) *Wann sind 90% der Schule informiert?*

d) *Ermittle die mittlere und die mittlere prozentuelle Änderungsrate zwischen dem elften und dem fünfzehnten Tag und beschreibe die Bedeutung dieser Werte mit Worten.*

Beispiel 21: *Jahresringe (R.Taschner, Mathematik 2)*

Das Alter einer Fichte (der in Mitteleuropa verbreitetsten Baumart) wird näherungsweise dadurch bestimmt, daß man den Durchmesser d des Stammes in 1,3 Meter Höhe mißt: Bezeichnen $x = \frac{1}{d}$ *den Reziprokwert des in Metern gemessenen Durchmessers und t das Alter der Fichte in Jahren, folgt ziemlich genau das empirische Abnahmegesetz* $x(t) = 1 + 20 \cdot e^{-t/20}$

a) *Wie groß sind Fichtenstammdurchmesser von Bäumen, die 10, 50 oder 80 Jahre alt sind?*

b) *Wie alt ist eine Fichte, deren Stamm einen Durchmesser von 50 Zentimeter hat?*

Beispiel 22: *(J.Böhm, TI92-Skriptum: Wachstums- und Zerfallsprozesse) Ein Stromkreis besteht aus einem Ohmschen Widerstand R und einen Kondensator mit der Kapazität C. Zum Zeitpunkt 0s wird eine konstante Gleichspannung U_0 eingeschaltet. Dem Kondensator wird Ladung zugeführt, wobei die Ladung Q von 0 auf den Maximalwert $Q_{max} = C \cdot U_0$ ansteigt. Die Ladung Q(t) zum Zeitpunkt t läßt sich durch* *gebremstes Wachstum mit der Wachstumskonstanten* $c = \frac{1}{R \cdot C}$ *beschreiben (c ist dabei auf die Zeiteinheit s bezogen).*

a) *Wie lautet die Gleichung, die die Ladungsmenge Q(t) des Kondensators beschreibt?*

b) *Berechne für C = 1000 µF und R = 500 Ω die Zeit* t_h *in der die Kondensatorladung auf ihre halbe Maximalladung angestiegen ist. Wovon hängt* t_h *ab?*

c) *Erstelle eine Tabelle und den Graphen mit der Ladungsmenge, dem Zuwachs/s und der freien Kapazität des Kondensators. Bestimme die zugehörige Wachstumsrate k.*

Beispiel 23: *(nach R. Taschner, Mathematik 2) Kondensator bei Gleichspannung: Sind ein ohmscher Widerstand R und ein Kondensator mit Kapazität C in Serie geschaltet, bewirkt das Anlegen einer konstanten Gleichspannung* U_0 *an den Kondensatorplatten einen Spannungsabfall U(t), der von der Zeit t nach der Formel* $U(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-t/RC})$ *abhängt.*

a) *Wie viele Sekunden nach dem Einschalten erreicht die Spannung bei R = 100Ω und C = 2µF 95% seines Endwertes?*

b) *Wie groß ist bei einem Widerstand von R=100Ω die Kapazität des Kondensators, wenn die Spannung U nach 10 Sekunden 95% des angelegten Spannungswertes* U_0 *erreicht hat?*

Logistisches Wachstum

- Verbale Beschreibung

Wachstum um einen festen Anteil der Differenz zwischen einer Wachstumsgrenze und dem aktuellen Bestand (Wachstum proportional zum „Freiraum“, zur „Restkapazität“).

oder

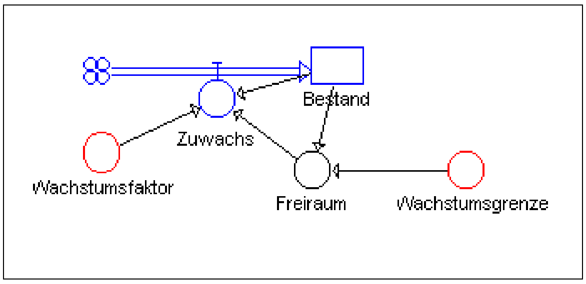
Ein Wachstum, bei dem die Änderungsrate proportional zum Bestand und zum Freiraum ist, heißt *logistisches Wachstum*.

oder

neuer Bestand = alter Bestand + Zuwachs und:

der Zuwachs ist proportional zum jeweiligen Bestand und zum jeweils letzten Freiraum.

- Flußdiagramm



- Gleichungsdarstellung

α) Diskretes Modell (G. ... Sättigungsgrenze)

$y_{n+1} - y_n = k.y_n.(G - y_n)$ $k = k_{disk} \in \mathbb{R}$ ⇒ Iterationsformel $\boxed{y_{n+1} = y_n + k.y_n.(G - y_n)}$

β) Kontinuierliches Modell

$$\frac{dy}{dt} = k.y.(G-y) \qquad k_{kont} \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{Gy-y^2}dy = \int kdt$$

$$\left[\text{ da } \frac{1}{y(G-y)} = \frac{1}{G}.\frac{1}{y}+\frac{1}{G}.\frac{1}{G-y}\right.$$

$$\frac{1}{G}\int\frac{1}{y}dy+\frac{1}{G}\int\frac{1}{G-y}dy = \int kdt$$

$$\frac{1}{G}\ln|y| - \frac{1}{G}\ln|G-y| = kt+c$$

$$\ln\left|\frac{y}{G-y}\right| = Gkt+Gc$$

$$\frac{y}{G-y} = e^{Gkt+Gc}$$

$$y = Ge^{Gkt+Gc} - ye^{Gkt+Gc}$$

$$y = \frac{Ge^{Gkt+Gc}}{1+e^{Gkt+Gc}}$$

$$\left[\text{ da } y(0) = \frac{G.e^{Gc}}{1+e^{Gc}} \Rightarrow y(0)+y(0).e^{Gc} = G.e^{Gc} \Rightarrow e^{Gc} = \frac{y(0)}{G-y(0)}\right.$$

$$y(t) = \frac{y(0).G.e^{Gkt}}{(G-y(0))+y(0).e^{Gkt}}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{y(0).G}{y(0)+(G-y(0)).e^{-Gkt}}}$$

Auch beim logistischen Wachstum läßt sich natürlich wieder die Beziehung zwischen der diskreten und der kontinuierlichen Zuwachsrate herstellen:

$$y_n+k_{\Delta t}.y_n.(G-y_n).\Delta t = \frac{Gy_n}{y_n+(G-y_n).e^{-kG\Delta t}}$$

$$k_{\Delta t}.y_n.(G-y_n).\Delta t = \frac{Gy_n-y_n^2-y_n.(G-y_n).e^{-kG\Delta t}}{y_n+(G-y_n).e^{-kG\Delta t}}$$

$$k_{\Delta t}.y_n.(G-y_n).\Delta t = \frac{(G-y_n).(1-e^{-kG\Delta t})}{y_n+(G-y_n).e^{-kG\Delta t}}$$

$$k_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}.\frac{1-e^{-kG\Delta t}}{y_n.(1-e^{-kG\Delta t})+G.e^{-kG\Delta t}}$$

$$k_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}.\frac{1}{y_n+\frac{G.e^{-kG\Delta t}}{1-e^{-kG\Delta t}}}$$

$$\boxed{k_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}.\frac{1}{y_n+\frac{G}{e^{kG\Delta t}-1}}}$$

Bemerkung: Im Vergleich zu den vorher behandelten diskreten Zuwachsraten ist hier die Zuwachsrate beim logistischen Wachstum vom aktuellen Wert von y_n , d.h. vom aktuellen Bestand abhängig!

- Verwandte Begriffe: Sigma-Kurve, Deterministisches Chaos, Feigenbaumszenario
- Typische Beispiele: Längenwachstum in der Biologie, Wachstum von Populationen in einem abgeschlossenen Biotop, Entwicklung von Populationen bei gegenseitiger Behinderung (Dichtestreß).

Beispiel 24: *Die Bären sind los! (B.Waits in einer Übersetzung von J.Böhm)*

1950 gab es im Jellystone Nationalpark – ein „geschlossenes Ökosystem – 10 Grizzlybären. Man weiß, daß der Park Raum für ca. 100 Bären bietet. Der jährliche Zuwachs ist etwa proportional zur jeweiligen Bärenpopulation, aber auch zur jeweils freibleibenden Restkapazität.

Biologen nennen uns einen Proportionalitätsfaktor von $\approx 0{,}001$

Wie viele Bären gibt es nach diesem Modell im Jahr 1980?

Wann kann man 99 Grizzlys erwarten?

Suche eine Erklärung für diesen Wachstumsverlauf!

Beispiel 25: *(nach G.Ossimitz: Materialien zur Systemdynamik, zitiert nach J.Böhm, TI92-Skriptum: Wachstums- und Zerfallsprozesse)) Verbreitung eines Produkts*

Wir nehmen an, daß sich ein Produkt auf einem Markt mit einer begrenzten Marktkapazität ausbreitet wie eine ansteckende Krankheit. Jeder potentielle Käufer erwirbt das Produkt nur einmal.

Als Kapazität werden 1500 Einheiten angenommen und man startet mit einer Verteilung von 20 Werbeexemplaren. Als Wachstumsrate/Monat (=k) schätzt man den Wert 0,0005. Das Wachstum der Verbreitung entspricht dem monatlichen Absatz.

a) Erstelle das diskrete Modell für die Verbreitung des Produkts mit den zugehörigen Absatzmengen.
b) Stelle die Verbreitung und die Absatzmengen in einer geeigneten Form graphisch dar.
c) Wann wird die halbe Marktkapazität erreicht sein?
d) Wann wird das Absatzmaximum erreicht?
e) Wann wird die 1000 Einheitengrenze übersprungen?
f) Ändern sich die Ergebnisse c) bis e) wesentlich, wenn man mit 50 Werbeexemplaren beginnen würde?
g) Wie lautet die entsprechende logistische Wachstumsfunktion?

Beispiel 26: *Steueraufkommen (J.Böhm, TI92-Skriptum: Wachstums- und Zerfallsprozesse)*

Die Steuereinnahmen S (in Mill. ATS) eines Wirtschaftszweiges wachsen nach der Formel:

$$s(t) = \frac{6}{1+4\cdot e^{-ct}}$$

Nach t=3 Jahren betragen die Einnahmen bereits 2,7 Millionen ATS.

a) Berechne die Wachstumskonstante c (auf drei Dezimalstellen genau).
b) Mit welchen Einnahmen wurde überhaupt begonnen.
c) Erzeuge den Funktionsgraphen in einem geeigneten Maßstab und skizziere den Graphen.
d) Zu welchem Zeitpunkt steigt das Steueraufkommen am raschesten? Markiere den Zeitpunkt am Graphen.
e) Wie hoch ist Deiner Meinung nach die obere Grenze der Steuereinnahmen? Begründe!

Hyperbolisches (explosives) Wachstum

- Verbale Beschreibung

Wachstum ist proportional zum Quadrat des Bestandes

oder

Ein Wachstum, bei dem die Änderungsrate proportional zum Quadrat des Bestandes ist, heißt *hyperbolisches Wachstum*.

oder

neuer Bestand = alter Bestand + Zuwachs und:

der Zuwachs ist proportional zum Quadrat des Bestandes

- Gleichungsdarstellung

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + k \cdot y_n^2}$$

- Verwandte Begriffe: Bevölkerungsexplosion, Wissensexplosion, Publikationsflut
- Typische Beispiele: Populationsentwicklung (wenn die einzelnen Individuen sich nicht – wie beim logistischen Wachstum behindern, sondern helfen, kommt es zu einer Verstärkung des Wachstums).