Projekt "Offenes Lernen": Wurzeln und Potenzen	
Inhalte:	*Ziele:*
• Potenzschreibweise für Wurzeln • Begriff der Potenz und der Wurzelfunktion • Wichtige Eigenschaften der Potenz- und Wurzelfunktion • Darstellung einer Funktion: Terme und Gleichungen • Grafische Darstellung einer Funktion • Begriff der Umkehrfunktion	• Arbeiten mit symbolischen Schreibweisen in der Mathematik • Eigenschaften der Funktion von Graphen ablesen • Erkennen des Unterschieds zwischen Argument und Funktionswert • Erkennen von Auswirkungen Parameteränderungen auf das Verhalten der Funktion • Zuordnung Funktionstyp – Term

Autoren:

Das Projekt wurde ursprünglich von **Mag. Gerhard Egger**, BG/BRG Stockerau, Unter den Linden 16, 2000 Stockerau für DERIVE zusammengestellt und von mir für den Taschenrechner TI-92 überarbeitet.

Voraussetzungen:

Vorkenntnisse beim Rechnen mit Potenzen und Wurzeln aus der 3.+4.Klasse (Unter Umständen kurze Wiederholung der wichtigsten Begriffe). Arbeiten mit dem TI-92. Arbeiten mit Funktionen: Verschieben der Graphen. Kennen der Begriffe Definitions- und Wertemenge.

Zur Vorgangsweise:

Es empfiehlt sich, einen Zeitrahmen für das Projekts vorzugeben (z.B. zehn Stunden), in denen zumindest die zwölf Pflichtstationen zu bearbeiten sind. Bei Bedarf sollte die Möglichkeit zu einer Ausweitung gegeben sein.

Für die Hausübungen wird ein absolut letzter Abgabetermin festgelegt, auch hier ist für den Schüler eine gleichmäßige Aufteilung sinnvoll.

Die Kontrollblätter für die Selbstkontrollen können verdeckt bei den Stationen oder gesammelt in einer Mappe liegen. Die Schüler sind auf ihre Eigenverantwortlichkeit hinzuweisen.

Nach der offenen Lernphase sollte die Möglichkeit für Rückfragen und Abklärungen im Plenum bestehen.

Anmerkungen zu einzelnen Stationen:

Alle Beispielangaben beziehen sich auf Reichel u.a.: "Lehrbuch der Mathematik 6".

Die Stationen 1, 6, 8, 9, 12, 13 und 15 sind zum Einstieg besonders geeignet.

1. Wiederholung bereits gelernter Rechenregeln.
3. Erkennen von Termstrukturen.
4. In dieser Komplexität für Schüler sehr umfangreich. Es ist eine nachträgliche Besprechung notwendig.
9. Das voreingestellte Graphikfenster verleitet zu einer falschen Vermutung. Erst durch geeignetes Zoomen lässt sich die Steigung der Funktionen richtig beurteilen.
11. Ein beim Arbeiten mit dem TR verzichtbarer Lehrinhalt, deshalb hier nur Wahlstation.

12. Der TR ermöglicht rasches Zeichnen vieler Graphen und selbständiges Experimentieren.

13. Bei ungeeignetem Zoomen können Verfälschungen auftreten.

14. Auf einem Karton sind Rechenbeispiele angegeben, auf den Kluppen die dazugehörigen Lösungen. Die Schüler müssen die richtige Kluppe auswählen und auf den Karton stecken. Sind alle Kluppen zugeordnet, dreht man den Karton um – dort stehen die Lösungen.

15. Lehrerkontrolle, weil Schüler zu oberflächlicher Argumentation neigen.

16. Der Begriff der Bijektivität ist zwar schon bekannt, macht aber erfahungsgemäß Schwierigkeiten.

17. Plotten mit dem TR bietet ein geeignetes Kontrollinstrument.

18. Einfaches Betrachten und Ausprobieren macht Spaß, eine genauere Beschäftigung mit dem Problem ist recht anspruchsvoll. Kopie aus dem Buch von Brian Bolt: Mathematische Fundgrube 2, Aufgabe 99.

19. Um Zeit zu sparen leider nur eine Wahlstation.

20. Erklärung siehe Station 14. Die Station basiert auf einem Ausdruck des Programms FUNCDI.

21.+22. Das Programm FUNCDI (+Arbeitsblätter) ist bei Mag.Walter Klinger, BG+BRG Stockerau, Unter den Linden 16, 2000 Stockerau um den Selbstkostenpreis (Anleitung, Arbeitsblätter, Folienvorlagen) von 100 öS erhältlich. In der Klasse wurde mit drei Laptop-Computer gearbeitet.

24. Spielregeln für Memory werden vorausgesetzt.

Lösungen:

Werden nur für die “Taschenrechner-relevanten” Stationen angeführt.

Abkürzungen im Arbeitsplan:

E … Einzelarbeit, P … Partnerarbeit, S … Schriftliches Arbeiten, TR … Arbeiten mit dem TR;
Z … Zeichnen, *… Schwierige Aufgabe, Comp … Arbeiten mit dem Computer

Arbeitsplan: Potenzen und Wurzeln

1	**Rechnen mit Potenzen**	Pflicht		S	**E**	**Arbeitsblatt:** Fülle es ohne Hilfe des TR aus! Hilfe im Buch S. 6 – 7	Selbstkontrolle Kontrollblatt
2	**Potenzrechnung Übungen**	Wahl	Voraussetzung: Station 1	S	**E**	**Berechne die Beispiele 50f / 61a / 65b / 68d**	Selbstkontrolle Kontrollblatt
3	**Monsterbeispiel**	Wahl	Voraussetzung: Station 1	S,TR ,*	**P**	**Berechne Bsp 71a mit und ohne TR!** Wie kann man mit dem TR möglichst übersichtlich arbeiten?	Selbstkontrolle Kontrollblatt
4	**Potenzdefinition Begriffserweiterung**	Pflicht		S,*	**P**	**Lies das Informationsblatt genau und bearbeite die Aufgaben!**	Lehrerkontrolle
5	**Gleitkommadarstellu ng**	Pflicht		S	**E**	**Arbeitsblatt:** Wandle ohne TR um!	Selbstkontrolle Kontrollblatt
6	**Rechnen mit Wurzeln 1.Teil**	Pflicht		S	**E**	**Arbeitsblatt:** Rechne händisch!	Selbstkontrolle Kontrollblatt
7	**Rechnen mit Wurzeln 2.Teil**	Pflicht	Voraussetzung: Station 4	S	**E**	**Arbeitsblatt:** Rechne händisch! Hilfe im Buch S. 22	Selbstkontrolle Kontrollblatt
8	**Potenzwahnsinn**	Wahl		TR	**P**	**Versuche mit dem TR, möglichst große Zahlen zu erhalten!**	Selbstkontrolle Kontrollblatt
9	**Drei Funktionen im Vergleich**	Pflicht		TR,Z	**P**	**Arbeitsblatt:** Vergleiche drei Funktionen mit dem TR!	Selbstkontrolle Kontrollblatt

10	**Wurzelrechnung Übungen**	Wahl	Voraussetzung: Stationen 6 + 7	S	**E**	**Berechne händisch 122c / 125d / 137b / 139b**	Selbstkontrolle Kontrollblatt
11	**Nenner wurzelfrei machen**	Wahl	Voraussetzung: Stationen 6 + 7	S	**P**	**Versuche den gegebenen Bruch händisch so umzuformen, dass im Nenner keine Wurzeln mehr vorkommen!**	Selbstkontrolle Kontrollblatt
12	**Die Potenzfunktion**	Pflicht		TR,Z	**P**	**Arbeitsblatt:** Betrachte Potenzfunktionen mittels TR!	Selbstkontrolle Kontrollblatt
13	**Wurzelfunktionen**	Pflicht		TR,Z	**P**	**Arbeitsblatt:** Betrachte mittels TR Wurzelfunktionen! Bestimme Definitions- und Wertemengen!	Selbstkontrolle Kontrollblatt
14	**Kluppenspiel Potenzen**	Wahl	Voraussetzung: Station 4	Spiel	**E**	**Ordne alle Kluppen richtig zu!**	Selbstkontrolle
15	**Gerade u. ungerade Funktionen**	Pflicht		S	**E**	**Arbeitsblatt:** Überprüfe, ob Funktionen gerade oder ungerade sind!	Lehrerkontrolle
16	**Bijektivität**	Pflicht		TR,Z	**P**	**Arbeitsblatt:** Untersuche mit Hilfe des TR die Bijektivität von Funktionen!	Selbstkontrolle Kontrollblatt
17	**Umkehrfunktionen**	Pflicht	Voraussetzung: Station 16	TR,Z	**P**	**Arbeitsblatt:** Ermittle Umkehrfunktionen!	Selbstkontrolle Kontrollblatt
18	**Eine ausgefallene Kette**	Wahl		S,TR ,*	**E**	**Untersuche eine merkwürdige Eigenschaft von natürlichen Zahlen!**	Selbstkontrolle Kontrollblatt
19	**Der binomische Lehrsatz**	Wahl		S,TR	**P**	**Arbeitsblatt:** Erarbeite dir den Binomischen Lehrsatz!	Selbstkontrolle Kontrollblatt

20	**Kluppenspiel Wurzelfunktionen**	Wahl	Voraussetzung: Station 13	Spiel	**E**	**Ordne die Funktionsgleichungen den richtigen Graphen zu!**	Selbstkontrolle
21	**Graphen von Potenzfunktionen**	Wahl	Voraussetzung: Station 12	Comp.	**E**	**Spiele FUNCDI:** Zuordnungen Term – Graph: Typ 6 Stufe 2 musst du fehlerfrei bewältigen.	Selbstkontrolle
22	**Funktionsgraphen**	Pflicht	Voraussetzung: Stationen 12+13	Comp.	**E**	**Spiele FUNCDI:** Zuordnungen Term – Graph mit den Typen 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 (Stufe 2)	Selbstkontrolle
23	**Wurzelgleichungen**	Pflicht	Voraussetzung: Station 13	S,TR	**E**	**Löse Wurzelgleichungen händisch und mit dem TR!**	Selbstkontrolle Kontrollblatt
24	**Potenzmemory**	Wahl	Voraussetzung: 4	Spiel	**2–4**	**Spiele Memory**!	Selbstkontolle

Pflichtstationen: Potenzen und Wurzeln

Klasse	1	**4 L**	5	6	7	9	12	13	**15L**	16	17	22	23

Offenes Lernen: Potenzen und Wurzeln Hausübungen

HÜ A (zu Station 1)

49 e, f; 50 h; 52 b, c, g; 53 a, e; 61 b; 65 a; 69 a (alle ohne TR)

HÜ B (zu Station 4)

87 d, e, f; 89 a, e, g; 145 (alle ohne TR)

HÜ C (zu Station 6)

117 a, c, e; 126 a, c, e; 128 b, e, f; 133 f; 137 a (alle ohne TR)

HÜ D (zu Station 7)

121 b, d, f; 122 a; 125 a, c (alle ohne TR)

HÜ E (zu Stationen 12 und 13)

E1 Gegeben ist die Funktion $y = x^4$. Bestimme maximale Definitions- und Wertemenge.
Verschiebe die Funktion
a) um 3 nach links
b) um 2 nach rechts,
c) um 4 nach oben,
d) um 5 nach unten.
Bestimme jeweils Definitions- und Wertemenge.

E2 Gegeben ist die Funktion $y = \sqrt{-x}$. Bestimme maximale Definitions- und Wertemenge.
Verschiebe die Funktion
a) um 3 nach links
b) um 2 nach rechts,
c) um 4 nach oben,
d) um 5 nach unten.
Bestimme jeweils Definitions- und Wertemenge.

E3 Gib eine Wurzelfunktion an mit
a) $D = [2;\infty[$ und $W =]-\infty; 5[$
b) $D =]-\infty;4]$ und $W = [3;\infty[$.

E4 a) Gib drei verschiedene Funktionen mit $D = R \setminus \{0\}$ und $W =]0;\infty[$ an.
Skizziere die typische Form der Graphen.

b) Gib eine Funktion mit $D = R \setminus \{0\}$ und $W =]1;\infty[$ an.

HÜ F (zu Stationen 15, 16 und 17)

F1 Überprüfe, ob es sich um eine gerade oder ungerade Funktion handelt!
a) $f(x) = x^7 - 4x^3$ b) $g(x) = 1/x^2$ c) $h(x) = x^8 + x$

F2 Bestimme zur Funktion $y = x^4/10$ mit $D = [1;5[$ die Wertemenge.
Ermittle die Umkehrfunktion und deren Definitions- und Wertemenge!

F3 Bestimme zur Funktion $y = \frac{1}{x} + 2$ mit $D = [-2;2]$ die Wertemenge.
Ermittle die Umkehrfunktion und deren Definitions- und Wertemenge!

F4 Ermittle zur Funktion $y = \dfrac{1}{x-3} + 5$ die Umkehrfunktion.

F5 Finde ein Intervall, auf dem die Funktion $y = (x-4)^2 + 1$ bijektiv ist!
Bilde die Umkehrfunktion und gib die zugehörige Definitions- und Wertemenge an!

HÜ G (zu Station 23)

174 e; 177 c (beide ohne TR); 180 b; 181 c (beide mit TR)

Rechnen mit Potenzen **Station 1**

$s^4 \cdot s^7 =$ ………… $a^m \cdot a^n =$ ………

Zwei Potenzen gleicher Basis werden multipliziert, indem man ……………………………………
……

$\frac{s^{10}}{s^6} =$……… $a^m : a^n =$ ………

Zwei Potenzen ……………………………. werden dividiert, indem man ………………………
……

$(2x)^3 =$ ……… $(a \cdot b)^n =$ ………

Ein Produkt wird potenziert, indem man …………………………………………………………

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 =$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$

Ein Bruch wird potenziert, indem man …………………………………………………………

$(a^5)^3 =$ $(a^n)^m =$

Eine Potenz wird potenziert, indem man …………………………………………………………

$\frac{a^5 \cdot b^7 \cdot c^0}{(a^3 \cdot b \cdot c)^2} =$ $\left(\frac{-2a^2}{a^4}\right)^3 =$

Definition: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^0 = 1$ $\forall\ a \in R\ ,\ n \in N$

Vereinfache und gib mit positiven Exponenten an!

$\frac{1}{a^{-3}} =$ $\left(\frac{m}{n}\right)^{-3} =$

Bei negativem Exponenten wird der Bruch ……………………………………………………………

$\left(\frac{-2a}{b^3}\right)^{-2} =$ $\frac{z^{-1} \cdot x^3 \cdot y^{-2} \cdot x^{-4}}{y^5 \cdot z^{-2}} =$

Übung Potenzrechnung Station 2

Berechne die Beispiele 50f, 61a, 65b, 68d

Monsterbeispiel Station 3

Berechne Beispiel 71a mit und ohne den TR.

Wie kann man mit dem TR möglichst günstig rechnen?

Potenzdefinition – Begriffserweiterung Station 4

Ein Begriff wird zuerst für einen Spezialfall definiert und soll dann auch allgemein gelten.

1.Schritt: Exponenten sind natürliche Zahlen

<u>Definition 1:</u> $a^x = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{x-mal}, \quad x \in \mathrm{N}, a \in \mathrm{R}$

Nun kann man Rechenregeln beweisen, z.B.:

$$a^x \cdot a^y \overset{\text{Def.1}}{=} \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{x-mal} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{y-mal} \overset{\text{AG}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(x+y)-mal} \overset{\text{Def.1}}{=} a^{x+y}$$

Bei der Regel $a^x : a^y = a^{x-y}$ hat man Schwierigkeitn, wenn x < y.

<u>Beispiel:</u> Rechne nach der Regel: $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$

Rechne als Bruch: $\frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}$

Folgerung: $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

2.Schritt: Exponenten sind ganze Zahlen

<u>Definition 2</u>: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ und $a^0 = 1$, $x \in \mathrm{N}$, $a \in \mathrm{R}$.

Man muss nun beweisen, dass alle Rechenregeln wie bei natürlichen Exponenten gelten.

Dabei braucht man Fallunterscheidungen. Bsp:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

1. Fall: (x = 0) oder (y = 0)
2. Fall: (x > 0) und (y > 0) im 1.Schritt schon bewiesen
3. Fall: (x > 0) und (y < 0)
4. Fall: (x < 0) und (y > 0)
5. Fall: (x < 0) und (y < 0)

<u>Beweis</u> des 3. Falls:

Der Exponent y ist eine negative ganze Zahl, die Regeln gelten aber bisher nur für positive Exponenten!

Man setzt y = –n mit n ∈ N

$$a^x \cdot a^y = a^x \cdot a^{-n} \overset{\text{Def.2}}{=} \underbrace{a^x \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^x}{a^n}}_{\text{alle Exponenten sind aus N}} \overset{\text{Rechenregel}}{=} a^{x-n} \overset{\text{Def.2}}{=} a^{x+(-n)} = a^{x+y}$$

3.Schritt: Exponenten sind rationale Zahlen

Die bekannten Rechenregeln sollen weiter gelten, also:

$$\overbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{1}{n}}}^{n-mal} = a^{\overbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}^{n-mal}} = a^{\frac{n}{n}} = a$$

Nach der Definition der Wurzel gilt aber: Wird eine Zahl n-mal mit sich selbst multipliziert und erhält man dabei a, so ist diese Zahl die n-te Wurzel von a.

(siehe Aufgabe 4!)

<u>Definition 3</u>: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, m,n $\in$ N\{0}, a $\in$ R

Wieder muss man beweisen, dass man mit rationalen Exponenten wie gewohnt rechen kann. Wenn das geschehen ist, kann man Rechenregeln für Wurzeln herleiten, z.B:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (\text{Def.3}) = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = (\text{Rechenregel}) = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (\text{Def.3}) = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Um exakt zu sein, müsste man den 2. Schritt erst beweisen, wir ersparen uns das aber.

Arbeitsaufgaben:

1) Zeige mit konkreten Zahlen für n und m: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $\forall$ a $\in$ R n, m $\in$ N \ { 0, 1 }
2) Begründe: $a^0 = 1$ $\forall$ a $\in$ R
3) Begründe: $a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a}$
4) Beweise durch Rückführung auf die Definition: $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a} = \sqrt[15]{a^8}$

Gleitkommadarstellung **Station 5**

$1{,}2 \cdot 10^7 = 12\,000\,000$

$8{,}3 \cdot 10^{-5} = 0{,}000\,083$

Die Zehnerpotenz zeigt an, um wie viele Stellen das Komma verschoben wird. Die Mantisse (= Zahl vor der Zehnerpotenz) muss zwischen 1 und 10 liegen, falsche Darstellung: $12 \cdot 10^6$

Schreibe als Dezimalzahlen:

$3{,}87 \cdot 10^9$ = ………………… $4{,}1 \cdot 10^{-4}$ = ………………………

Schreibe in Gleitkommadarstellung:

Alter der Erde: 4 500 000 000 Jahre = ……………………

Erdradius: 6 380 000 m = ……………………

Masse eines Pantoffeltierchens:1 μg = 1 Mikrogramm = 0,000 01 g = ……………………

Lichtgeschwindigkeit: 300 Millionen m/s = ……………………

Durchmesser eines Kohlendioxidmoleküls: 0,26 Nanometer = 0,000 000 000 26 m = …………

Masse der Sonne: 2 Quintillionen kg = ……………………………………… = ……………………

Beachte: bi - tri - quattro - quint (Achtung: im Englischen “one billion” = 1 Milliarde).

Beim folgenden Beispiel kannst du Taschenrechner verwenden.

(Einstellung MODE/Exponential Format = “SCIENTIFIC”)

<u>Beispiel:</u> 1988 wurden weltweit rund $1{,}4 \cdot 10^{13}$ S für militärische Zwecke ausgegeben.

a) Wie viel Schilling sind das pro Sekunde?

b) Damit jeder Mensch genügend sauberes Wasser trinken könnte, wären etwa $3{,}9 \cdot 10^{11}$ S notwendig. Welchem Zeitraum des Wettrüstens entspricht dies?

Rechnen mit Wurzeln – 1.Teil **Station 6**

Bei welchen der folgenden Rechnungen darf man unter eine Wurzel schreiben?

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}$ $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a}$ $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{4a}$ $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{8}$

Unter welchen Bedingungen darf unter eine Wurzel geschrieben werden?

1. ………………………………………………………………………………………
2. ………………………………………………………………………………………

Rechne händisch:

$\sqrt[4]{a^5b^2}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2}=$

$\sqrt[3]{\frac{54x^2}{2x^8}}=$

Oft kann die Wurzel nur teilweise (partiell) gezogen werden, manchmal kann man danach noch weiterrechnen:

$\sqrt{9a^3}+\sqrt{25a^3}=$

$3\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{24}=$

$\sqrt[5]{64x^{20}}=$

$\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=$

Fasse unter einer Wurzel zusammen:

$3\sqrt{2}=$

$a\sqrt{a}=$

$2x\cdot\sqrt[3]{5x^2}=$

Rechnen mit Wurzeln – 2. Teil Station 7

Schreibe die Wurzeln zuerst als Potenzen, vereinfache und schreib wieder als Wurzeln!

Zur Erinnerung: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} =$ ………………………………………

Regel:	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} =$ ………..

$\sqrt[3]{x^{12}} =$

$\sqrt[6]{x^9} =$

Regel:	$\sqrt[n\cdot x]{a^{n\cdot y}} =$

$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} =$

Regel:	$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} =$

$\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} =$

$\sqrt[3]{x\sqrt{x}} =$

$\sqrt[3]{x^{21}} =$

$\sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{x} =$

$\sqrt[20]{x^5} =$

$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[6]{x} =$

Potenzwahnsinn **Station 8**

Beispiel 1: Wie kann man mit den Zahlen 2, 3 und 4 eine möglichst große Zahl erhalten? Man darf beliebig viele Klammern und alle Rechenzeichen verwenden.

Beispiel 2: Gib den folgenden Term ein und vereinfache: 2 ^ 4 · 3 ^ 2 + 1. Als Ergebnis erhält man 145.

Was ist die größte Zahl, die man durch Setzen von Klammern erhalten kann? (♦ENTER!)

Frage: Wann erhält man beim Potenzieren ein möglichst großes Ergebnis? Bei großer Basis oder bei großem Exponenten?

Drei Funktionen im Vergleich Station 9

Gegeben sind 3 Funktionen: $y1(x) = 50 \cdot x$, $y2(x) = x^2$, $y3(x) = x^3/100$

Ergänze die Wertetabelle:

x	y1(x)	y2(x)	y3(x)
0	………	………	………
1	………	………	………
2	………	………	………
3	………	………	………
5	………	………	………
10	………	………	………

Zeichne nun die drei Funktionen mit dem TR (ZoomStd)!

Welche der drei Funktionen steigt am stärksten?

……

……

Berechne nun auch die drei Funktionswerte für x = 200

y1(200) = ……………… y2(200) = ……………… y3(200) = ………………

Zoome das Grafikfenster so, dass du den Verlauf der Funktionen auch für sehr große Argumente (x = 200) erkennen kannst! Schreibe deine Beobachtungen nieder!

……

……

……

……

Wurzelrechnung Übungen   Station 10

Berechne die Beispiele 122c, 125d, 137b und 139b!

Nenner wurzelfrei machen **Station 11**

Befreie den Nenner von der Wurzel und vereinfache!

Vergleiche Bsp. S (Seite 33)

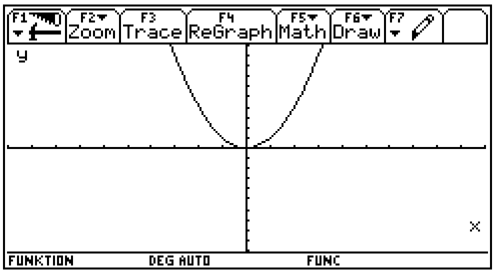
$$\frac{c^2 - d^2}{\sqrt{c} - \sqrt{d}} =$$

Die Potenzfunktion　　　　Station 12

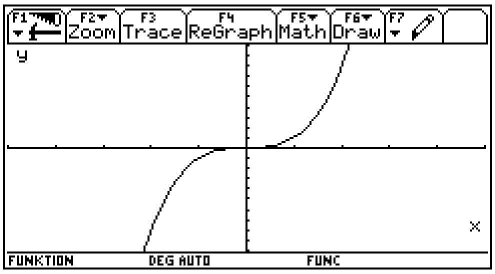
Definition: Eine Funktion f: $R \to R$ mit der Funktionsgleichung $y = x^r$ mit $r \in Z$ heißt **Potenzfunktion.**

Welche Funktionen erhält man für die Sonderfälle r = 0 und r = 1? ………………………………

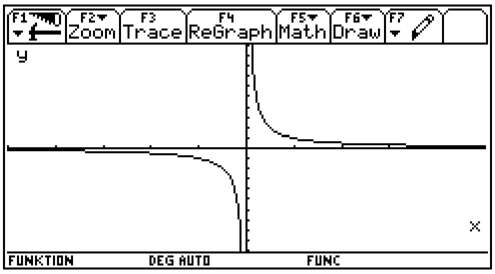
Wenn man r variiert, erhält man vier typische Fälle. Für welche r werden diese Fälle angenommen?



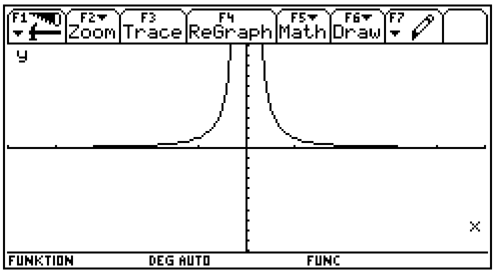
r ist ……………………………………………………………



r ist ……………………………………………………………



r ist ……………………………………………………………



r ist ……………………………………………………………

Zeichne x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, ……… Was haben alle diese Funktionen gemeinsam?

………………………………………………………………………………………………………

Gib jeweils die maximale Definitionsmenge und die zugehörige Wertemenge an!

$y = x^2$　　D = ………　　W = ………

$y = x^3$　　D = ………　　W = ………

$y = \frac{1}{x}$　　D = ………　　W = ………

$y = \frac{1}{x^2}$　　D = ………　　W = ………

Wurzelfunktionen **Station 13**

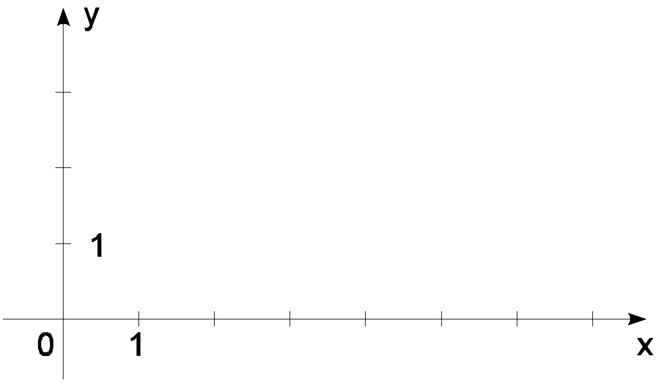
Definition: Eine Funktion f: $R_0^+ \rightarrow R$ mit der Funktionsgleichung $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N \setminus \{0\}$ heißt **Wurzelfunktion**.

Beispiel 1: Welche Funktion erhält man für n = 1? …………………

Zeichne Wurzelfunktionen für n = 2, 3, 4, 5, ...

Welche Punkte haben alle Funktionen gemeinsam? …………………

Skizziere die Form eines solchen Graphen!



Beispiel 2: Gib zu den folgenden Funktionen Definitionsmenge und Wertemenge an!

$y = \sqrt{x}$	D = ………..	W = ………..
$y = \sqrt{x-3}$	D = ………..	W = ………..
$y = 4\sqrt{x+7}$	D = ………..	W = ………..
$y = -2\sqrt{x-1}$	D = ………..	W = ………..
$y = \sqrt{-x}$	D = ………..	W = ………..
$y = \sqrt{3-x}$	D = ………..	W = ………..
$y = \sqrt{x} + 1$	D = ………..	W = ………..
$y = \sqrt{x} - 3$	D = ………..	W = ………..

Beispiel 3: Betrachte die Funktion $y = a \cdot \sqrt{bx}$

Setze für a und b positive und negative Zahlen ein! Wie wirken sich a und b auf die Form des Graphen aus?

Bei negativem a …………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Bei negativen b …………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Beispiel 4: Gib eine Wurzelfunktion an, für die gilt: D = [–5;∞[und W = [1;∞]: ……………………

Beispiel 5: Gib eine Wurzelfunktion an, für die gilt: D =]–∞;3] und W =]–∞;0]: ……………………

Kluppenspiel Potenzen

Station 14

Gerade und ungerade Funktionen Station 15

Lies im Buch (S.44), was man unter diesen Begriffen versteht!

Für jede gerade Funktion gilt:: ……………………………………………

Für jede ungerade Funktion gilt: ……………………………………………

<u>Beispiel 1:</u> Zeige, dass die Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2$ gerade ist!

$f(x) =$ ………………

$f(-x) =$ ………………………………………………………………………………………

Welche Regel aus der Potenzrechnung hast du dabei verwendet?

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

<u>Beispiel 2:</u> Zeige, dass die Funktion $g(x) = x^7 + 3x^3$ ungerade ist!

<u>Beispiel 3:</u> Zeige, dass die Funktion $h(x) = x^5 + 3x^2$ weder gerade noch ungerade ist!

<u>Beispiel 4:</u> Überprüfe, ob die Funktion $p(x)=\frac{1}{x^3}$ gerade, ungerade oder keines von beiden ist!

Bijektivität Station 16

Definition: Bei einer Funktion wird jedem Argument *genau ein* Funktionswert zugeordnet. Die Funktion heißt **umkehrbar (bijektiv)**, wenn auch jedem Funktionswert *genau ein* Argument zugeordnet wird.

Bei den folgenden Beispielen ist es immer günstig, die Funktionen zu zeichnen!

Beispiel1: Ermittle die Wertemenge zum gegebenen Definitionsbereich!

$y = (x - 3)^2 - 2$ D = [0;10] W = …………………

Die Funktion ist auf diesem Definitionsbereich nicht bijektiv. Begründe warum!

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

Beispiel 2: $y = 3x^2 + 18x$

Ermittle den Scheitel des Graphen! S (………/………)

Ermittle die Wertemenge zu den Definitionsbereichen!

D1 = [–3;1] W1 = ……………

Ist die Funktion in diesem Bereich bijektiv? ……………

D2 = [–7;1] W2 = ……………

Ist die Funktion in diesem Bereich bijektiv? ……………

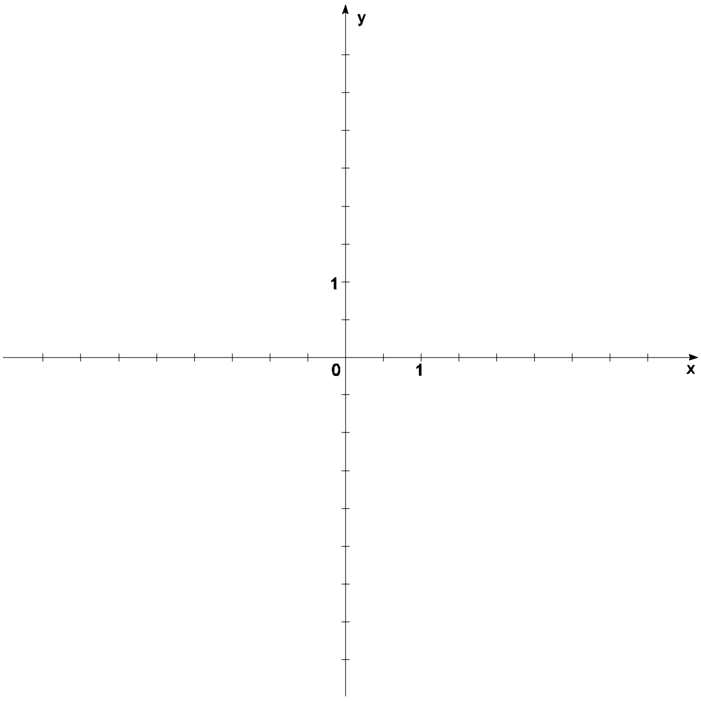
Beispiel 3: $y = 1/x$

Ermittle die Wertemenge zum Definitionsbereich D = [–2;2]!

Zeichne die Funktion und die Intervalle in nebenstehendes Koordinatensystem!

W = ………………………

Ist die Funktion bijektiv? ……………



Beispiel 4: $y = (x - 1)^2$

Was ist die maximale Definitionsmenge D, um die Wertmenge W =]9;25] zu erhalten?

D = ………………………. (Achtung! D besteht aus zwei Intervallen!)

Hinweis: Der TR besitzt den Befehl DrawInv (F6-3), mit ihm kann man die Umkehrfunktion zeichnen.

Umkehrfunktionen Station 17

Definition: Jede bijektive Funktion f besitzt eine **Umkehrfunktion f***. f* ordnet dem Funktionswert von f wieder das Argument zu.

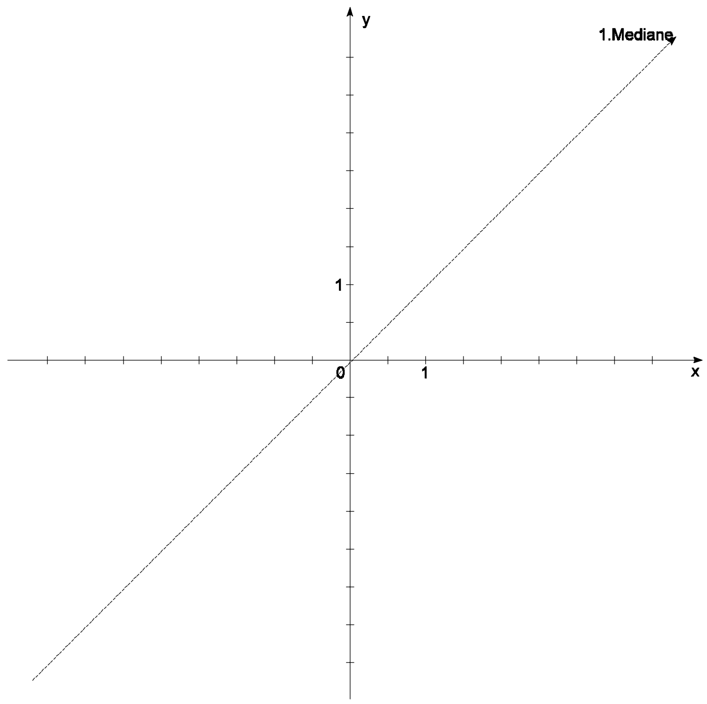
Beispiel 1: $f(x) = x^2$ $f^*(x) = \sqrt{x}$

$f(3) = 9$ $f^*(9) = 3$

Für welchen Definitionbereich ist diese Umkehrfunktion sinnvoll? D = …………………

Zeichne beide Graphen! Übertrage sie ins untenstehende Koordinatensystem! Was fällt dir auf?

……



Vorgangsweise beim Bestimmen der Umkehrfunktion

x wird explizit gemacht, dann werden Argument und Funktionswert vertauscht.

Beispiel 2: Ermittle die Umkehrfunktion, Definitions- und Wertemenge! Überprüfe durch eine Zeichnung! (Befehl DrawInv!)

f: $y = (x + 3)^2$ D = [–3 ; ∞[W = …………………

f*: ………………… D = ……………… W = ………………

Warum kann man keine Umkehrfunktion von f auf ganz R bilden?

……

Beispiel 3: Die folgenden Funktionen sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich bijektiv! Gib die maximalen Definitionsbereiche und die Umkehrfunktionen an! Zeichne die Graphen!

f: $y = 3x - 4$ D = ……………… f*: ……………………

g: $y = \frac{1}{x-2}$ D = ……………… g*: ……………………

Eine ausgefallene Kette

Station 18

Kopie aus dem Buch: Brian Bolt: Mathematische Fundgrube 2, Aufgabe 99

Der binomische Lehrsatz Station 19

Ergänze das sgn. “Pascal’sche Dreieck”:

n=0	1							
n=1	1	1						
n=2	1	2	1					
n=3	1	3	3	1				
n=4	1	4	_	_	_			
n=5	1	_	_	_	_	_		
n=6	1	_	_	_	_	_	_	
n=7	1	_	_	_	_	_	_	_

Multipliziere mit dem TR (“expand”) und vergleiche die Koeffizienten mit den Zeilen im Pascal’schen Dreieck!

$(a + b)^2$ = …………………………………………………………………………………………

$(a + b)^3$ = ………………………………………………………………………………………

$(a + b)^4$ = ………………………………………………………………………………………

Stelle nun selbst weitere binomische Formeln auf und überprüfe mit dem TR!

$(a + b)^5$ = ………………………………………………………………………………………

$(a + b)^{\cdots}$ = ………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Graphen von Potenzfunktionen Station 21

Wurzelgleichungen Station 23

Beispiel 1: $\sqrt{2-2x} = \sqrt{2x-6}$ G = R

Bestimme die Definitionsmenge:

Welche Bedingungen muss die Variable für die linke Seite der Gleichung erfüllen? …………

Welche Bedingungen muss die Variable für die rechte Seite der Gleichung erfüllen? …………

Die Definitionsmenge besteht aus jenen x, die beide Bedingungen erfüllen, also D = ………

Beispiel 2: Lies Beispiel V auf Seite 37 genau durch!

Löse durch schrittweise Umformungen mit dem TR!

(Verwende ^2! Die quadratische Gleichung kannst du “solven”.)

Beispiel 3: $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+5} = 7$ G = R

Löse im Heft händisch! (Ermittle die Definitionsmenge. Liegt die Lösung innerhalb von D? Führe eine Probe durch und gib die Lösungsmenge an!)

Beispiel 4: Löse Bsp 177a schrittweise mit dem TR! Führe eine Probe durch und gib die Lösungsmenge an! Überprüfe mit “solve”!

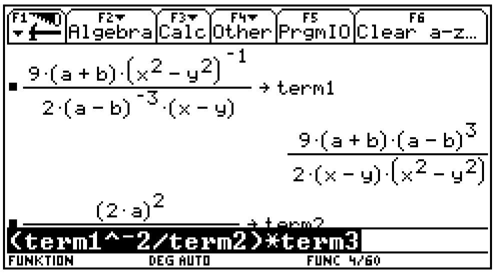
Beispiel 5: Löse das Beispiel 182 b zuerst schrittweise mit dem TR, dann mit dem Befehl “solve”!

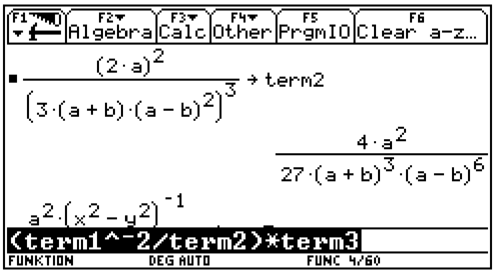
Potenzmemory

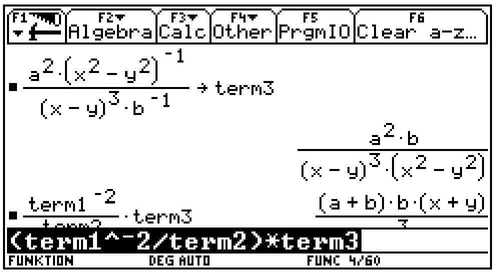
Lösung: Monsterbeispiel Station 3

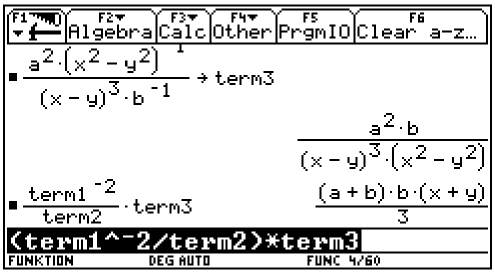
Berechne Beispiel 71a mit und ohne den TR.

Wie kann man mit dem TR möglichst günstig rechnen?



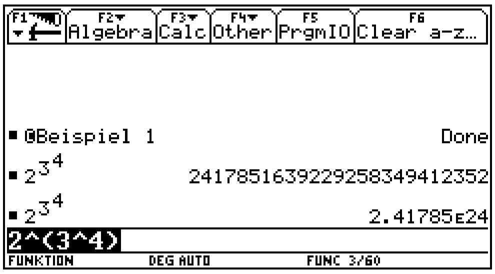






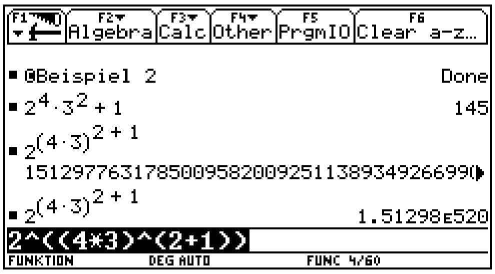
Lösung: Potenzwahnsinn Station 8

Beispiel 1: Wie kann man mit den Zahlen 2, 3 und 4 eine möglichst große Zahl erhalten? Man darf beliebig viele Klammern und alle Rechenzeichen verwenden.



Beispiel 2: Gib den folgenden Term ein und vereinfache: 2 ^ 4 · 3 ^ 2 + 1. Als Ergebnis erhält man 145.

Was ist die größte Zahl, die man durch Setzen von Klammern erhalten kann? (♦ENTER!)



Frage: Wann erhält man beim Potenzieren ein möglichst großes Ergebnis? Bei großer Basis oder bei großem Exponenten?

Der Exponent muss möglichst groß sein.

Lösung: Drei Funktionen im Vergleich **Station 9**

Gegeben sind 3 Funktionen: $y1(x) = 50 \cdot x$, $y2(x) = x^2$, $y3(x) = x^3/100$

Ergänze die Wertetabelle:

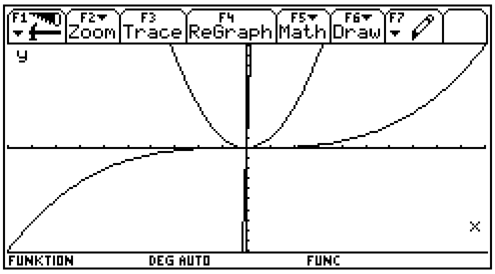
x	y1	y2	y3
0.	0.	0.	0.
1.	50.	1.	.01
2.	100.	4.	.08
3.	150.	9.	.27
4.	200.	16.	.64
5.	250.	25.	1.25
6.	300.	36.	2.16
7.	350.	49.	3.43

x=0.

x	y1	y2	y3
3.	150.	9.	.27
4.	200.	16.	.64
5.	250.	25.	1.25
6.	300.	36.	2.16
7.	350.	49.	3.43
8.	400.	64.	5.12
9.	450.	81.	7.29
10.	500.	100.	10.

x=10.

Zeichne nun die drei Funktionen mit dem TR (ZoomStd)!



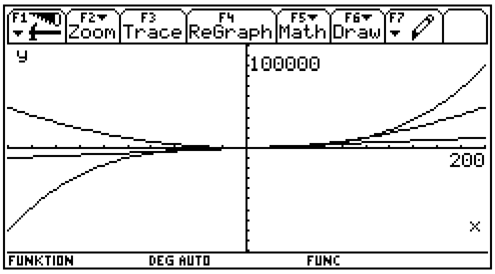
Welche der drei Funktionen steigt am stärksten?

Die Funktion y1(x).

Berechne nun auch die drei Funktionswerte für x = 200

y1(200) =10 000 y2(200) = 40 000 y3(200) = 80 000

Zoome das Grafikfenster so, dass du den Verlauf der Funktionen auch für sehr große Argumente (x = 200) erkennen kannst! Schreibe deine Beobachtungen nieder!



Für große Funktionswerte steigt die Funktion y3(x) am stärksten. Nur in der Nähe von Null, für kleine Argumente, schaut es so aus, als ob y1(x) am stärksten steigen würde.

Lösung: Wurzelgleichungen Station 23

Beispiel 1: $\sqrt{2-2x} = \sqrt{2x-6}$ G = R

Bestimme die Definitionsmenge:

Welche Bedingungen muss die Variable für die linke Seite der Gleichung erfüllen? $x \le 1$

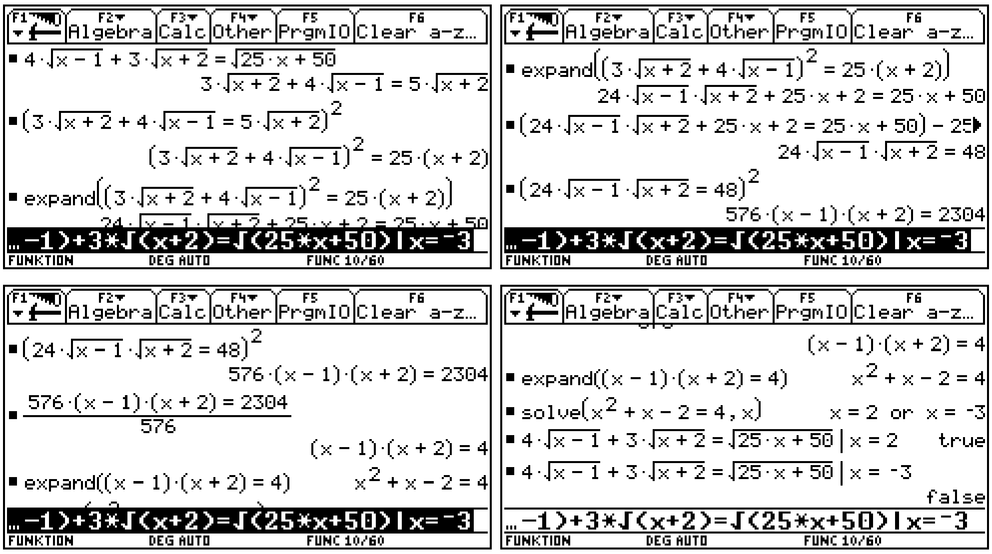
Welche Bedingungen muss die Variable für die rechte Seite der Gleichung erfüllen? $x \ge 3$

Die Definitionsmenge besteht aus jenen x, die beide Bedingungen erfüllen, also D = { }

Beispiel 2: Lies Beispiel V auf Seite 37 genau durch!

Löse durch schrittweise Umformungen mit dem TR!

(Verwende ^2! Die quadratische Gleichung kannst du “solven”.)



Beispiel 3: $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+5} = 7$ G = R

Löse im Heft händisch! (Ermittle die Definitionsmenge, liegt die Lösung innerhalb von D? Führe eine Probe durch und gib die Lösungsmenge an!)

Beispiel 4: Löse Bsp. 177a schrittweise mit dem TR! Führe eine Probe durch und gib die Lösungsmenge an!

```
C:√(10+x)/(12-√(10+x))+(12-√(10+x))/(√(10+x))=2
C:(-12/(√(x+10)-12)+12/(√(x+10))-2=2)^2
C:(4*(12*√(x+10)-x-82)^2/((x+10)*(√(x+10)-
12)^2)=4)*(x+10)*(√(x+10)-12)^2
C:(4*(12*√(x+10)-x-82)^2=4*(x+10)*(√(x+10)-12)^2)/4
C:expand((12*√(x+10)-x-82)^2=(x+10)*(√(x+10)-12)^2)
C:(-24*x*√(x+10)-1968*√(x+10)+x^2+308*x+8164=-24*x*√(x+10)-
240*√(x+10)+x^2+164*x+1540)-x^2-308*x-8164+24*x*√(x+10)
C:(-1968*√(x+10)=-240*√(x+10)-144*x-6624)+240*√(x+10)
C:(-1728*√(x+10)=-144*x-6624)/144
C:(-12*√(x+10)=-(x+46))^2
```

```
C:expand(144*(x+10)=(x+46)^2)
C:(144*x+1440=x^2+92*x+2116)-144*x-1440
C:solve(0=x^2-52*x+676,x)
C:√(10+x)/(12-√(10+x))+(12-√(10+x))/(√(10+x))=2|x=26
```

Beispiel 5: Löse das Beispiel 182 b zuerst schrittweise mit dem TR, dann mit dem Befehl “solve”!