Folgen - rekursiv!

Themenbereich	
Analysis	
Inhalte	Ziele
• Rekursiv definierte Folgen, explizit definierte Folgen • Betrachtung eines Erwärmungsvorganges • Gegenüberstellung von rekursiver und expliziter Folgendefinition	• Rekursiv definierte Folgen als mathematisches Modell eines iterativen Prozesses begreifen. • Rekursiv definierte Folgen zur Beschreibung von Zustandsänderungen verwenden. • Erlernen des TI-Handlings im Zusammenhang mit rekursiv bzw. explizit definierten Folgen.
Adressaten: Am Beispiel eines Erwärmungsvorganges (Newtonsches Gesetz) werden verschiedene Stufen in der Einführung rekursiv definierter Folgen im Unterricht der 10.Schulstufe dargestellt. Die Zusammenstellung richtet sich daher in erster Linie an SchülerInnen bzw. LehrerInnen der 10.Schulstufe und an solche die an der Umsetzung von Iterationsvorgängen mit dem TI92 interessiert sind.	

Rekursiv definierte Folgen

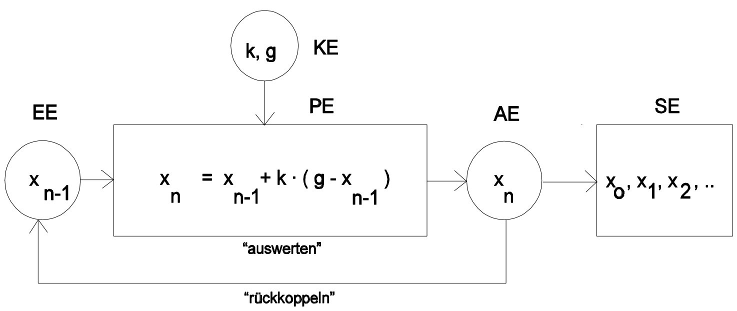
Rekursiv definierte Folgen stellen eine einfache Möglichkeit dar, Veränderungen in unserer Umgebung mathematisch zu beschreiben (zu „modellieren“). Dazu betrachten wir folgendes

Beispiel 1: *Ein Getränk wird aus dem Kühlschrank genommen. Zu Beginn hat es eine Temperatur von 6°C. Die Umgebung habe eine Temperatur von 20°C. Pro Minute nimmt die Temperatur um 30% der Differenz zwischen Umgebungstemperatur und Flüssigkeitstemperatur zu.*

Wir wollen uns ansehen wie der Erwärmungsvorgang abläuft. Die Erwärmung von einer Minute zur nächsten beschreiben wir mit Hilfe einer Rekursionsgleichung: $x_n = x_{n-1} + 0.3\,(20 - x_{n-1})$
Vereinfachen wir den Term auf der linken Seite, so erhalten wir:

$$\boxed{x_n = 0.7\, x_{n-1} + 6, \quad x_0 = 6°C}$$

Jede rekursiv definierte Folge kann man sich als iterativen bzw. als Rückkoppelungsprozeß vorstellen. In Fall von Beispiel 1 ergibt sich dabei folgendes Diagramm



EE .... Eingabeeinheit
KE .... Kontrolleinheit
PE .... Prozessoreinheit
AE .... Ausgabeeinheit
SE .... Sammeleinheit

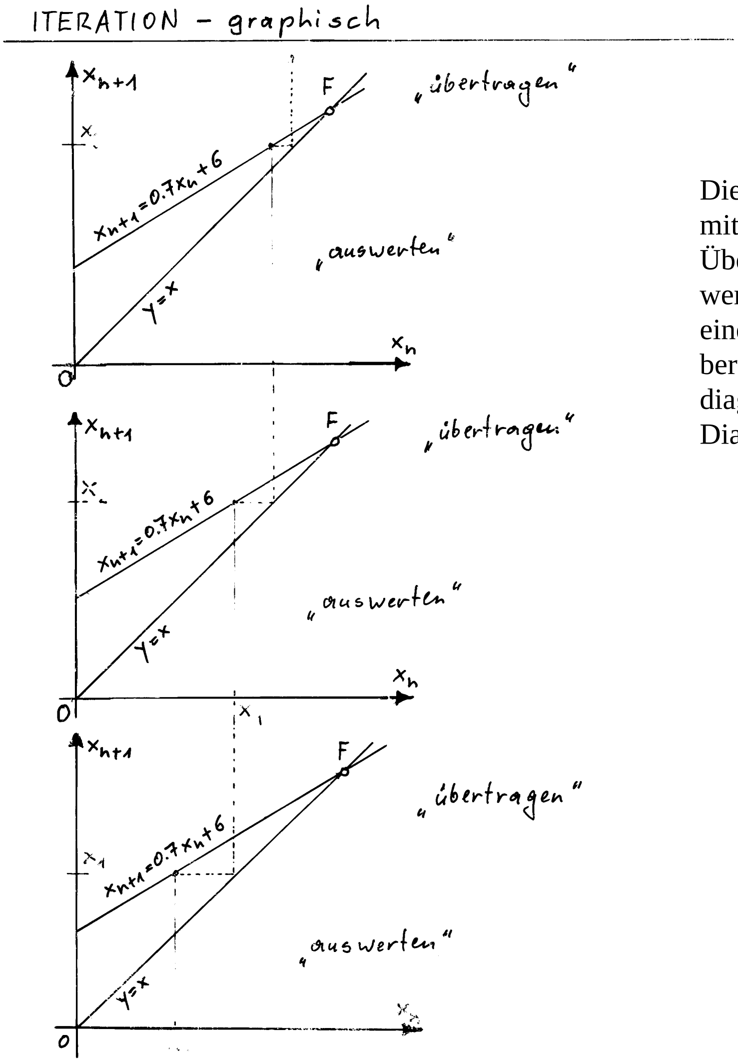
Abbildung 1: Die „Iterationsmaschine“

Ausführung der Iteration

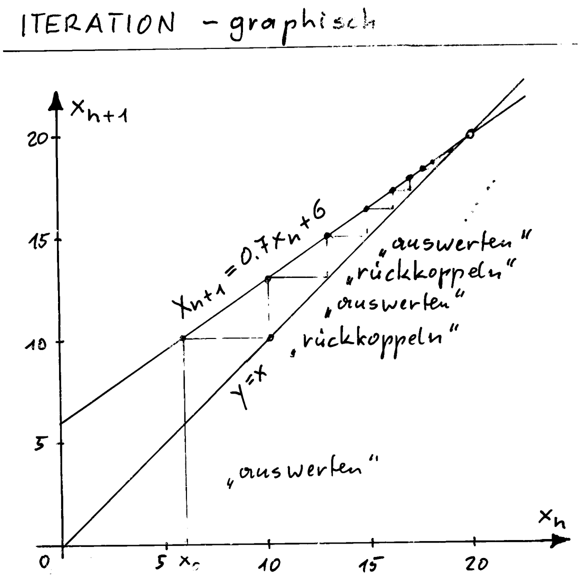
Im Unterricht empfiehlt sich ein abgestuftes Vorgehen zur Einführung rekursiv definierter Folgen. Beginnend bei der schrittweisen Ermittlung der Folgenwerte durch den Schüler (der in Stufe 1 selbst als „Prozessor“ fungiert), sowohl in numerischer wie auch in geometrischer Weise, wird der iterative Prozeß immer weiter automatisiert. Das Augenmerk richtet sich dabei zunächst darauf, wie man von „einem Zustand zum nächsten“ kommt. Mit zunehmender Automatisierung des Rechenvorganges soll der Prozeß „als Ganzes“ in den Mittelpunkt der Aufmerksamkeit treten. Durch die permanente Anwendung einer „lokal definierten“ Rechenvorschrift (nämlich: wie komme ich von einem Zustand zum nächsten) entsteht im Lauf der Zeit eine „globale Sicht“ (hier im Beispiel 1: „Wie läuft der Erwärmungsvorgang insgesamt ab?“)

Stufe 1: Der/Die SchülerIn führt den Iterationsprozeß handschriftlich durch. Dadurch merkt sie/er, wie die einzelnen Folgenwerte zustande kommen und wie ermüdend (und stumpfsinnig) es auf Dauer wäre, solche im Kreis laufenden Rechenverfahren selbst aufzuführen (von der damit verbundenen Fehleranfälligkeit bei komplizierteren Vorschriften einmal abgesehen).

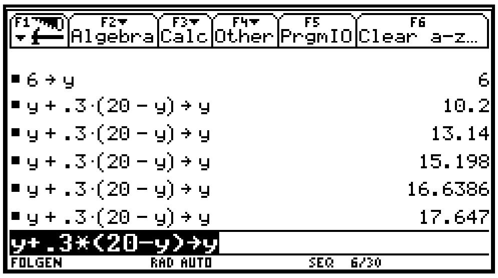
Wesentlich erscheint es auch, die Iteration geometrisch durchführen zu lassen:



Die einzelnen Folgenwerte werden geometrisch ermittelt. Der jeweilige Folgenwert wird durch die Übertragung auf die x_n-Achse wieder zum Ausgangswert. Nimmt man alle diese Einzeldiagramme zu einem Gesamtdiagramm zusammen so entsteht die berühmte Treppe (manchmal sieht dieses Iterationsdiagramm auch wie ein Spinnennetz aus –„Cobweb“-Diagramm).



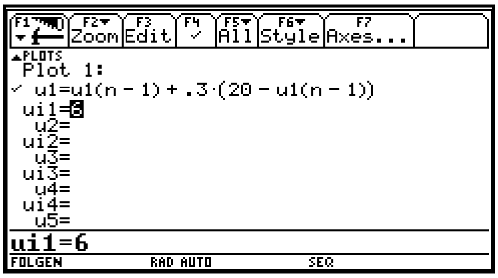
Stufe 2: Schrittweise mit Hilfe des TI

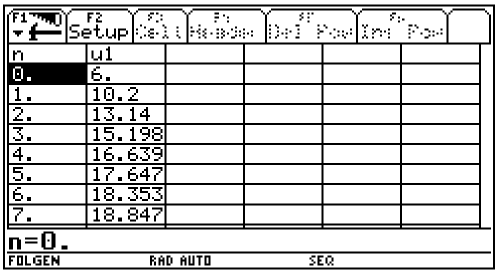


Da die Berechnungsvorschrift in der Eingabezeile stehen bleibt, genügt es, nur Enter zu drücken, um den nächsten Folgenwert berechnen zu lassen.

Stufe 3: Automatisiert mit Hilfe des TI

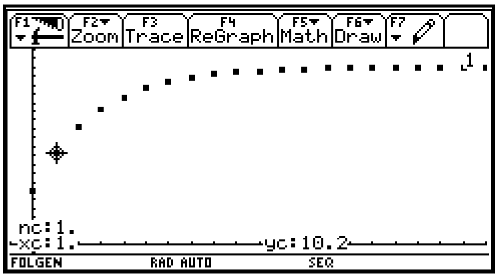
Die Auswertung der Iteration läßt sich weiter automatisieren, wenn wir die im Y-Editor (zuerst mit Mode auf Sequence umstellen) vorgesehen Möglichkeiten nutzen. Folgen werden hier immer mit u1(n), u2(n) usw. bezeichnet. Die zugehörigen Anfangswerte entsprechend mit u1i, u2i, ...
Ist der Folgenterm einmal definiert, erhält man sofort die entsprechende Wertetabelle.

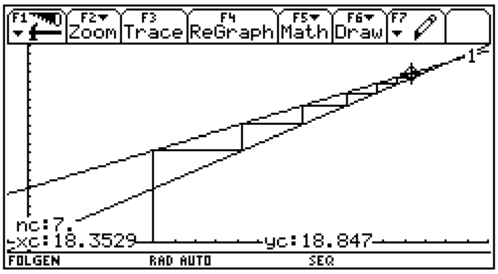




Stufe 4: Ausgabe graphischer Auswertungen

Je nach Einstellung im Y-Editor bei F7 (Axes) erhält man im Graphik-Window die zeitliche Entwicklung der Folge (n-x_n-Diagramm) oder auch die geometrische Darstellung (x_n-x_{n+1}-Diagramm).



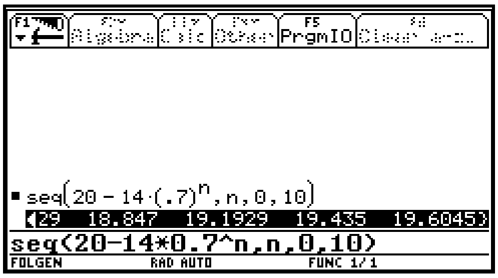


Explizit definierte Folgen

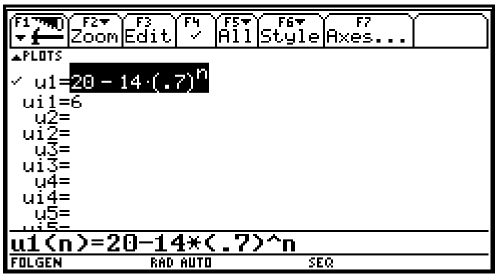
Befrachten wir Beispiel 1 nochmals und arbeiten wir mit dem zugehörigen expliziten Folgenterm.

Beispiel 1: *Ein Getränk wird aus dem Kühlschrank genommen. Zu Beginn hat es eine Temperatur von 6°C. Die Umgebung habe eine Temperatur von 20°C. Die Temperatur nach n Minuten läßt sich mittels folgendem Term angeben:*

Folgenterm: $x_n = 20 - 14 * 0.7^n$



Man kann die Folge entweder über *seq( )* oder wieder im *y= Editor* definieren.



Nun soll ein Beispiel betrachtet werden, bei dem die Iteration die beiden letzten Folgenglieder miteinbezieht. Auch hier sind wieder sowohl rekursive als auch explizite Darstellung bekannt. Wie im Beispiel 1 bzw. im Beispiel 2 aus der rekursiven auf die explizite Darstellung geschlossen werden kann, darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

Beispiel 2: Fibonacci-Folge
Diese Folge ist rekursiv definiert durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (n=2,3,4,...). Führe den Iterationsprozeß aus, erstelle eine Tabelle mit den Folgenwerten und stelle die Entwicklung auch graphisch dar.

Zeige für die ersten fünf Glieder, dass der folgende Term der explizite Funktionterm der Fibonacci-Folge ist.

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Nicht immer ist eine rekursive und eine explizite Darstellung für ein Problem in gleicher Weise möglich. Ein Beispiel dafür stellt die Ulamfolge dar, die ein reizvolles Experimentierfeld im Zusammenhang mit Folgen darstellt.

Beispiel 3: Ulam-Folge (Reichel, 6, Ex 691a)
Diese Folge wird rekursiv erklärt: a_1 sei irgendeine natürliche Zahl; a_{n+1} hängt davon ab, ob a_n gerade ist oder nicht. Falls a_n gerade ist, setze $a_{n+1} = a_n/2$; falls a_n ungerade ist, setze $a_{n+1} = 3\,a_n+1$.
Berechne die ersten 16 Glieder dieser Folge für (1) $a_1 = 3$, (2) $a_1 = 6$, (3) $a_1 = 52$, (4) für zwei beliebige Werte a_1 ($3 < a_1 \leq 20$). Was fällt auf?