

Mag. Peter Nussbaumer

# Handzettel zur Vektorrechnung

Themenbereich	
Vektorrechnung, analytische Geometrie	
Inhalte	Ziele
<ul style="list-style-type: none"><li>• Winkel zwischen zwei Vektoren</li><li>• Geraden- und Ebenengleichung in Parameterform</li><li>• Aufgaben der analytischen Geometrie im <math>\mathbb{R}^3</math></li><li>• Programmbeispiel: Ebene durch zwei Punkte normal auf eine andere Ebene</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Winkel zwischen zwei Vektoren mit dem TI-92 berechnen können.</li><li>• Geraden- und Ebenengleichung in Parameterform mit dem TI-92 aufstellen können.</li><li>• Aufgaben der analytischen Geometrie im <math>\mathbb{R}^3</math> mit dem TI-92 lösen können.</li><li>• Eigene Programme zu typischen Aufgabenstellungen der analytischen Geometrie entwickeln können.</li></ul>
Aufgaben der räumlichen analytischen Geometrie mit Durchrechnung und einem Musterprogramm.	

## Winkel zwischen zwei Vektoren - Definition einer Funktion w(ab,ad)

**Wiederhole** die Berechnung des Winkels  $\alpha$ , den zwei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  einschließen

Die Formel  $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$ ,  $\cos^{-1}$  ... Umkehrfunktion zu  $\cos$ , lässt sich am TI -92 leicht programmieren. Dazu geben wir im HOME-Screen in der Editierzeile ein:

**define w(ab,ad) =  $\cos^{-1}(\text{dotp}(ab,ad)/(\text{norm}(ab)*\text{norm}(ad)))$**

und erhalten den folgenden Bildschirminhalt:

```

Define w(ab, ad) = cos⁻¹( dotP(ab, ad) / (norm(ab) · norm(ad)) )
Done

```

Zur Anwendung probieren wir:

```

w( [ [-1], [1], [1] ], [ [-3], [0], [5] ] )
37.6161
w( [ [-1;1;1], [-3;0;5] ]
MAIN DEG AUTO FUNC 2/30

```

Beachte: **DEG!**

## Geraden- und Ebenengleichung in Parameterform

Gegeben sind drei Punkte  $P(-2/1/3)$ ,  $Q(1/0/-4)$  und  $R(7/-3/0)$ .

Stelle die Gleichung der Ebene  $e [P,Q,R]$  auf!  
Überprüfe, ob  $S(-17/8/2)$  auf  $e$  liegt

```

[ -2 ]
[ 1 ] → p
[ 3 ]

[ 1 ]
[ 0 ] → q
[ -4 ]

[ 7 ]
[ -3 ] → r
[ 0 ]

x3 = p + t · (q - p) + u · (r - p)
      [ x = 3 · t + 9 · u - 2 ]
      [ y = -t - 4 · u + 1 ]
      [ z = -7 · t - 3 · u + 3 ]

[ -17 ]
[ 8 ] → s
[ 2 ]

s = p + t · (q - p) + u · (r - p) → e
      [ -17 = 3 · t + 9 · u - 2 ]
      [ 8 = -t - 4 · u + 1 ]
      [ 2 = -7 · t - 3 · u + 3 ]

solve(e[1, 1], t)          t = -3 · u - 5
solve(e[2, 1], u) | t = -3 · u - 5    u = -2
solve(e[2, 1], t) | u = -2          t = 1
solve(e[3, 1], t) | u = -2          t = 1
solve(e[3, 1], t) | u = -2
MAIN DEG AUTO FUNC 10/30
    
```

Eindeutige Lösung!  $S \in e!$

USW.

Voraussetzung:

```

[ x ]
[ y ] → x3
[ z ]

[x;y;z] → x3
MAIN DEG AUTO FUNC 14/30
    
```

Gegeben sind die vier Punkte  $A(2/1/3)$ ,  $B(5/4/2)$ ,  $C(4/2/1)$  und  $D(-1/-2/4)$ .

Stelle die Gleichungen der Geraden  $g [A,B]$  und  $h [C,D]$  auf

Bestimme den Schnittpunkt  $S$  der beiden Geraden

Stelle die Gleichung der Ebenen  $e [g,h]$  auf!

```

x3 = a + t · (b - a) → g
      [ x = 3 · t + 2 ]
      [ y = 3 · t + 1 ]
      [ z = 3 - t ]

x3 = c + u · (d - c) → h
      [ x = 4 - 5 · u ]
      [ y = 2 - 4 · u ]
      [ z = 3 · u + 1 ]

solve((g - h)[1, 1], t)          t =  $\frac{-(5 \cdot u - 2)}{3}$ 
solve((g - h)[2, 1], u) | t =  $\frac{-(5 \cdot u - 2)}{3}$ 
      u = 1
      t = -1
solve((g - h)[2, 1], t) | u = 1
g | t = -1          [ x = -1 ]
                   [ y = -2 ]
                   [ z = 4 ]
h | u = 1          [ x = -1 ]
                   [ y = -2 ]
                   [ z = 4 ]
h | u = 1
MAIN DEG AUTO FUNC 11/30
    
```

$S(-1/-2/4)$

```

[ -1 ]
[ -2 ] → s
[ 4 ]

x3 = s + t · (b - a) + u · (d - c) → e
      [ x = 3 · t - 5 · u - 1 ]
      [ y = 3 · t - 4 · u - 2 ]
      [ z = -t + 3 · u + 4 ]
x3 = s + t · (b - a) + u · (d - c) → e
MAIN DEG AUTO FUNC 13/30
    
```

$$\text{also: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Beispiele** (Szirucsek):

<p>924h)                      e: <math>4x + 3y - 2z = 7</math>  <math>P(2/-3/-4)</math>                      Ges.: <math>P \in e</math>?</p> <p><b>TI-92:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>4 \cdot x + 3 \cdot y - 2 \cdot z = 7 \rightarrow e</math>    <math>4 \cdot x + 3 \cdot y - 2 \cdot z = 7</math></li> <li>▪ <math>e   x=2 \text{ and } y=-3 \text{ and } z=-4</math>    <math>\text{true}</math></li> </ul>	<p>930a)  <math>g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}</math>                      e: <math>3x + 4y - 7z = 22</math>                      Ges.: <math>\{D\} = e \cap g</math></p> <p><b>TI-92:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow g</math>    <math>\begin{bmatrix} 3 \cdot t - 2 \\ -t - 3 \\ 2 \cdot t + 2 \end{bmatrix}</math></li> <li>▪ <math>3 \cdot x + 4 \cdot y - 7 \cdot z = 22 \rightarrow e</math>    <math>3 \cdot x + 4 \cdot y - 7 \cdot z = 22</math></li> <li>▪ <math>\text{solve}(e, t)   x = -2 + 3 \cdot t \text{ and } y = -3 - t \text{ and } t = -6</math></li> <li>▪ <math>g   t = -6</math>    <math>\begin{bmatrix} -20 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix}</math></li> </ul>
<p>926h)                      e: <math>x + 3y - 2z = 16</math>  <math>P(2/4/-3)</math>                      Ges.: <math>e' \cdot e</math> mit <math>P \in e'</math></p> <p><b>TI-92:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow p</math>    <math>\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}</math></li> <li>▪ <math>\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow n</math>    <math>\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}</math></li> <li>▪ <math>\text{dotP}(x3, n) = \text{dotP}(p, n)</math>    <math>x + 3 \cdot y - 2 \cdot z = 20</math></li> </ul>	<p>929a)  <math>g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}</math>  <math>P(-2/-6/3)</math>                      Ges.: <math>\overline{Pg}</math></p> <p><b>TI-92:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow g</math>    <math>\begin{bmatrix} t + 1 \\ 3 \cdot t + 3 \\ 1 \end{bmatrix}</math></li> <li>▪ <math>\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow p</math>    <math>\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}</math></li> <li>▪ <math>\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow n</math>    <math>\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}</math></li> <li>▪ <math>\text{dotP}(x3, n) = \text{dotP}(p, n) \rightarrow e</math>    <math>x + 3 \cdot y = -20</math></li> <li>▪ <math>\text{solve}(e, t)   x = 1 + t \text{ and } y = 3 + 3 \cdot t \text{ and } t = -3</math></li> <li>▪ <math>g   t = -3 \rightarrow d</math>    <math>\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}</math></li> <li>▪ <math>\text{norm}(d - p)</math>    <math>2</math></li> </ul>

### 978c) - Erstelle für diese Aufgabe ein Computerprogramm

Wir rechnen zuerst Beispiel 978a)

$$P(-3/1/-4)$$

$$Q(-1/4/-2)$$

$$e1: 3x + y + 2z = 9$$

$$\text{Ges.: } e2 [P, n1, p-q]$$

TI-92:

<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \rightarrow p</math></li> <li>▪ <math>\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow q</math></li> <li>▪ <math>\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow n1</math></li> <li>▪ <math>\text{crossP}(n1, p - q) \rightarrow n2</math></li> <li>▪ <math>\text{dotP}(x3, n2) = \text{dotP}(p, n2)</math> <math>4 \cdot x + 2 \cdot y - 7 \cdot z = 18</math></li> <li>▪ <math>\text{dotP}(x3, n2) = \text{dotP}(q, n2)</math> <math>4 \cdot x + 2 \cdot y - 7 \cdot z = 18</math></li> </ul>	$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$
---	---

Dabei wurde die zweite Gleichung „nur zur Kontrolle“ des Ergebnisses eingegeben ...

Es fällt auf, daß der Rechengang für beliebige Werte für P, Q und n1 automatisiert werden könnte. Wir schreiben daher die oben angeführten Befehle in eine Befehlsfolge um. Neu ist, daß wir dazu den Programmierer mit <APPS> <Program Editor> <New...> öffnen und im Editor die Eingabe der Werte durch **input** „text“, **var** und die Ausgabe durch **disp** **ergebnis** angeben.

The screenshot shows the TI-92 applications menu. The 'Program Editor' option is highlighted. Below the menu, the command `dotp(x3,n2)=dotp(q,n2)` is visible on the screen.

Beachte, daß das Programm mit de Variablen- = Programmnamen b978( ) und Prgm beginnt und mit EndPrgm endet.

```

b978(
:Prgm
:ClrIO
:input "P",P
:input "q",q
:input "n1",n1
:CrossP(n1,P-q)→n2
:Disp DotP(x3,n2)=DotP(p,n2)
:Disp DotP(x3,n2)=DotP(q,n2)
:EndPrgm
    
```

ClrIO löscht den Ein-/Ausgabe- (IO-) Bildschirm. Input dient zur Eingabe der Werte. Disp gibt das Ergebnis am IO-Bildschirm aus.

Zum Starten des Programms gibt man in der Editierzeile des HOME-Screens den Befehl b978( ) ein:

**b978( )**

Es ergibt sich der folgende Dialog:

The dialog box shows the following input values:
   
P: [-3; 1; -4]
   
q: [-1; 4; -2]
   
n1: [3; 1; 2]
   
Equations: 4 · x + 2 · y - 7 · z = 18 (displayed twice)

Mit <F5> schaltet man zwischen IO-Bildschirm und HOME-Screen um:

**b978( ) Done**

Das „Done“ zeigt an, daß das Progra ordnungsgemäß abgearbeitet und beendet wurde.

**Beachte:** Die Möglichkeit, den TI-92 zu programmieren, stellt ein mächtiges Werkzeug dar. „Übung macht den Meister“