

Ein Zugang zur Iteration (Zyklische Maschine) Zinseszinsrechnung (mit und ohne KEST) und Ratenrückzahlungsmodell

Walter Klinger (BG/BRG Stockerau)
1998

Themenbereich	
Zinseszinsrechnung und Ratenrückzahlung	
Inhalte	Ziele
<ul style="list-style-type: none">• Geschlossene Zinseszinsformel• Iterativer Zugang zu diesem Thema• Zinseszinsen unter Berücksichtigung der KEST• Ratenrückzahlungsmodell	<ul style="list-style-type: none">• Vielschichtige Verwendung der möglichen Darstellungsformen durch den TI-92• Festigung iterativer Lösungsmodelle
<p>Anmerkung: Diese Sequenz ist in einer 4. Klasse Realgymnasium durchgeführt worden. Diese Klasse hat bereits in der dritten Klasse den TI-92 durchgängig den algebratauglichen Taschenrechner im Rahmen des Forschungsprojektes eingesetzt. Vor dieser Unterrichtssequenz wurde das HERON-Verfahren zur näherungsweise Berechnung von Wurzeln durchgeführt. Dadurch war das Modell der Iteration bekannt (siehe Unterrichtsmaterialien 4. Klasse)</p>	

Zinseszinsrechnung - mehrere Modelle geschlossene Formel oder Iteration (Zyklische Maschine)?

In der 2. Klasse werden die Formeln zur Berechnung von Prozentanteil, Grundwert und Prozentsatz hergeleitet. In der 3. Klasse werden diese Begriffe vertieft. Es werden speziell die Formeln für folgende Fragestellungen erarbeitet und gefestigt:

- (1) Vermehre (vermindere) einen Betrag G um p % und berechne den Betrag um den vermehrt (vermindert) wird

$$A = G \cdot \frac{p}{100}$$

- (2) Vermehre (vermindere) einen Betrag G um p % und berechne den Betrag, den Du nach der Vermehrung (Verminderung) erhältst

$$A = G \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Diese Begriffe werden nun mit den Begriffen des Bankwesens am Beispiel der Zinseszinsrechnung in Verbindung gebracht.

Zinsenrechnung	Prozentrechnung
(Anfangs-)Kapital K	Grundwert G
Zinssatz p	Prozentsatz p
Zinsen Z	Prozentanteil A

Die Zinseszinsformel wird hergeleitet und als Anfangskapital die Variable K_0 verwendet.

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

In der vierten Klasse werden diese Begriffe vertieft und erweitert:

Arbeitsblatt - Berechnung von Zinseszinsen

Beispiel:

Ein Kapital von 1000 Schilling wird mit einem Zinssatz von 5% p.a. auf die Bank gelegt und nach 10 Jahren abgehoben.

a) Wieviel Geld hat man nach 10 Jahren zur Verfügung?

b) Könnte ich das Kapital von 1000 S gleich um $5 \cdot 10\% = 50\%$ vermehren um das Endkapital zu erhalten?

- c) Um Wieviel Prozent wurde das Anfangskapital vermehrt, um das Endkapital zu erhalten?
 d) Nach wieviel Jahren wird dieses Kapital verdoppelt (vervierfacht) sein?

a) Mit dem MIT-Operator können in die Formel konkrete Zahlen eingesetzt werden:

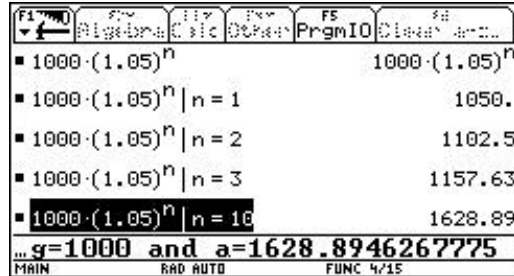


Abbildung 1

Antwort zu a) : _____

Weiters können die Fragen b) und c) beantwortet werden.

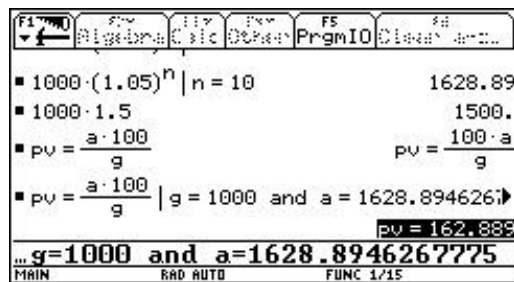


Abbildung 2

Antwort zu b) : _____

Antwort zu c) : _____

Nun wird die Frage d) beantwortet:

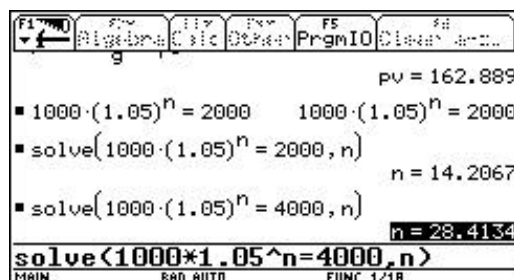


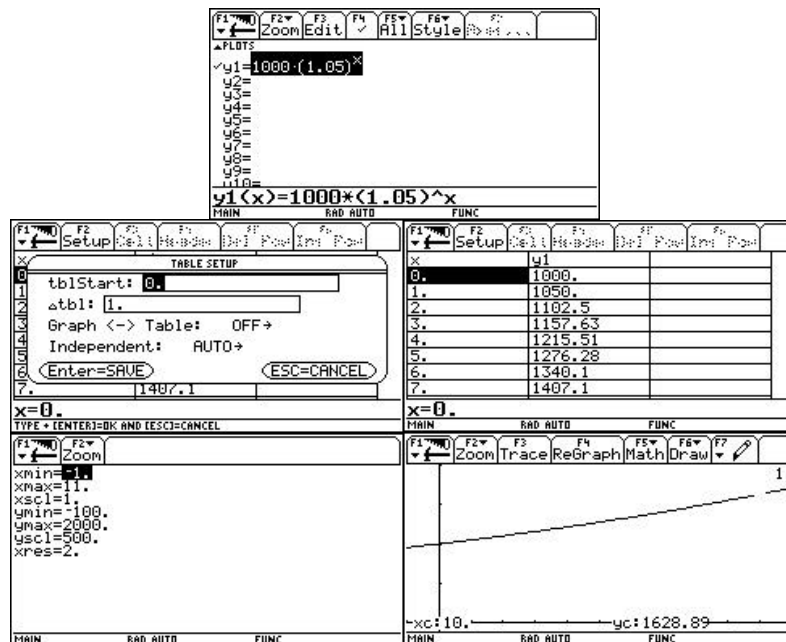
Abbildung 3

Antwort zu d) : _____

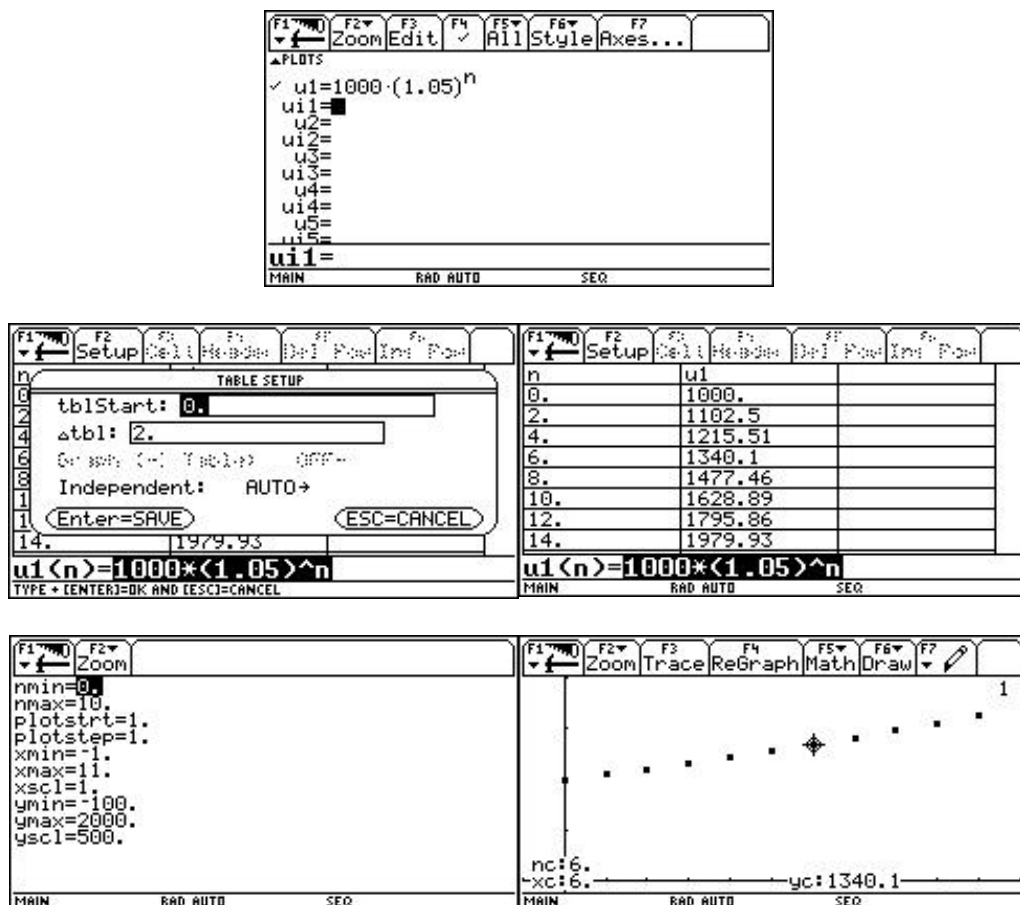
Darstellung in einer Tabelle und graphische Darstellung:

Mit dem TI-92 lassen sich die Kapitalstände auch leicht graphisch darstellen

a) Mit dem Y= Editor im Modus FUNCTION erhalten wir eine **durchgezogene Kurve**



b) Mit dem Y= EDITOR und SEQUENCE-Modus erhalten wir nur **Punkte**:



Zyklische Maschine

Die Zinseszinsberechnung entspricht dem Modell einer Iteration:

Der Kapitalsatnd des nächsten Jahres läßt sich aus dem Kapital des vorherigen Jahres berechnen

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} * \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

oder

$$K_n = K_{n-1} * \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$K_{n+1} = K_n * \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

oder durch die vom TI.92 gewünschte Formel

$$u_2(n) = u_2(n-1) * \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Im HOME-Fenster:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clear	a-z...	Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clear	a-z...
kn = ka · 1.05	ka = 1000			kn = 1050.		1000 → k					1000
kn = ka · 1.05	ka = 1050			kn = 1102.5		k · 1.05 → k					1050.
kn = ka · 1.05	ka = 1102.5			kn = 1157.63		k · 1.05 → k					1102.5
kn = ka · 1.05	ka = 1157.625			kn = 1215.51		k · 1.05 → k					1157.63
kn = ka · 1.05	ka = 1215.50625			kn = 1276.28		k · 1.05 → k					1215.51
				kn = 1276.28		k · 1.05 → k					1276.28
						k · 1.05 → k					1340.1
						k · 1.05 → k					1407.1
kn=ka*1.05 ka=1276.2815625						k*1.05→k					
MAIN RAD AUTO SEQ 5/30						MAIN RAD AUTO SEQ. B/B					

Abbildung 4 "Einsetzweg" Abbildung 5 "Definitionsweg"

Im Y= Fenster:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Zoom	Edit	All	Style	Axes...		
▲PLOTS						
✓ u1=1000·(1.05) ⁿ						
u1=						
✓ u2=u2(n-1)·1.05						
u2=1000						
u3=						
u3=						
u4=						
u4=						
u5=						
u5=						
u2(n)=u2(n-1)*1.05						
MAIN RAD AUTO SEQ						

Abbildung 6 "SEQUENCE-Weg"

In der Tabelle:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
Setup	Table	Head	Def	Pos	Int	Pos			
n	u1			u2					
0.	1000.			1000.					
1.	1050.			1050.					
2.	1102.5			1102.5					
3.	1157.63			1157.63					
4.	1215.51			1215.51					
5.	1276.28			1276.28					
6.	1340.1			1340.1					
7.	1407.1			1407.1					
u2(n)=u2(n-1)*1.05									
MAIN RAD AUTO SEQ									

Abbildung 7

Graphisch:

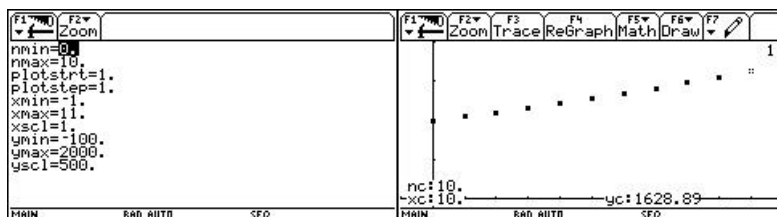


Abbildung 8

Abbildung 9

Definieren von Funktionen

Es werden die Formel allgemein und die konkreten Werte des Anfangskapitals und des Zinssatzes definiert (Abbildung 10)

The screenshot shows a calculator interface with a function editor. The function being defined is $k_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \rightarrow k(n)$. The values for k_0 and p are set to 1000 and 5, respectively. The function is then evaluated for $n=1, 2, 3$, yielding results of 1050, 1102.5, and 1157.63. The calculator's status bar at the bottom indicates 'MAIN', 'RAD AUTO', and 'FUNC 1/6'.

Input	Output
$k_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \rightarrow k(n)$	Done
$1000 \rightarrow k_0$	1000
$5 \rightarrow p$	5
$k(1)$	1050
$k(2)$	1102.5
$k(3)$	1157.63

Abbildung 10

Dadurch kann man sich leicht das Kapital $K(10)$ berechnen und man erhält ca. 1628,89 Schilling.

Berechnungen mit KEST und ohne KEST:

Von den Sparzinsen wird eine Kapitalertragssteuer (KESt.) in der Höhe von 25 % vom Geldinstitut einbehalten und an das Finanzamt abgeführt.

Dadurch tritt ein neuer Begriff auf: **Effektiver Zinssatz**, kurz p_{eff} !

Dieser effektive Zinssatz gibt an, wie viele Prozent man wirklich bekommt und damit kann man die effektiven Zinsen berechnen, also die Zinsen, die man wirklich erhält.

$$p_{\text{eff}} = p * 0.75$$

Dadurch verändert sich die Formel zur Berechnung des Guthabens nach einem Jahr in

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p_{\text{eff}}}{100} \right)^n$$

oder

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p * 0.75}{100} \right)^n$$

Ein Vergleich der Entwicklung der Kapitalstände mit und ohne KEST zeigt, daß dadurch das Guthaben der Sparer beträchtlich verändert wird (5% Zinsen heißt in Wirklichkeit 3,75%)

Auch die Iterationsformel ändert sich dadurch nur indem man p durch den effektiven Zinssatz ersetzt.

Beispiel:

1685 verkauften die Indianer die Insel Manhattan für 24 Dollar an die Weissen. Wieviel Geld wäre das heute, wenn sie das Geld zu 6% Zinsen auf die Bank gelegt hätten?

Durch die Formel $24 * 1,06^{313}$ erhalten wir 1.99962E9 also ca. 1999620000 Dollar. Wenn wir die Einstellung FIX 12 verwenden erhalten wir 1999618147,75 Dollar. Auch in der Tabelle läßt sich der Betrag ablesen (Abbildung 10). In der Graphik (Abbildung 12 - oberer Graph) erlebt man, daß am Beginn sich nicht viel verändert, jedoch wird dieses exponentielle Wachstum nach vielen Jahren sehr deutlich sichtbar.

Bei diesem Beispiel könnte man auch noch die KEST fiktiv berücksichtigen und die Auswirkung der Kest auf den Guthabenstand untersuchen. Für die Schüler ist der Unterschied einprägsam und überraschend (siehe Abbildung 13)! Die Rechenzeit und die Zeit für den Aufbau der Graphik ist jedoch schon beträchtlich!. In der Graphik verschwindet der Betrag ohne KEST gegenüber dem Betrag ohne KEST (siehe Abbildung 15)

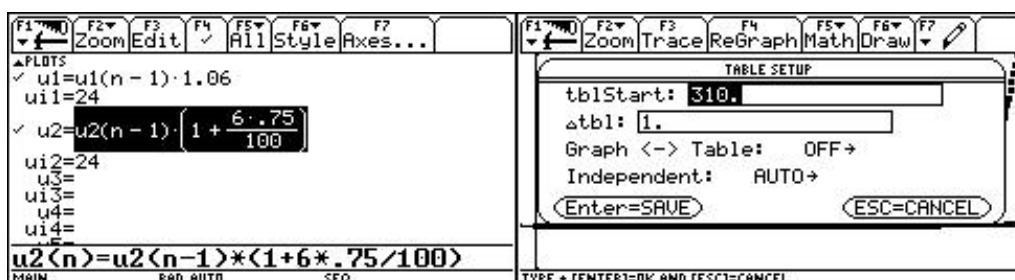


Abbildung 11

Abbildung 12

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F1	F2
Setup	Setup	Header	Header	Plot	Plot	Zoom	Zoom
n	u1	u2				nmin=0	
310.00000000	1678917955.6	20242366.339				nmax=313.	
311.00000000	1779653032.9	21153272.825				plotstrt=1.	
312.00000000	1886432214.9	22105170.102				plotstep=1.	
313.00000000	1999618147.7	23099902.756				xmin=-10.	
314.00000000	2119595236.6	24139398.380				xmax=315.	
315.00000000	2246770950.8	25225671.307				xsc1=10.	
316.00000000	2381577207.9	26360826.516				ymin=-500000000.	
317.00000000	2524471840.3	27547063.709				ymax=2000000000.	
u1(n)=1999618147.7494						ysc1=500000000.	
MAIN	RAD	AUTO	SEQ			MAIN	RAD

Abbildung 13

Abbildung 14

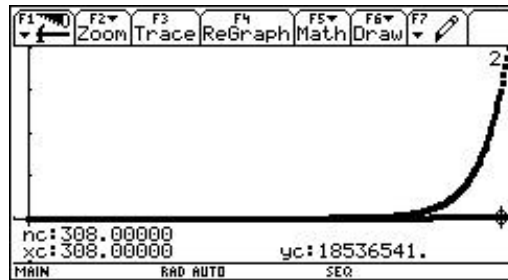


Abbildung 15

Kredite - Ratenrückzahlung - Schuldentilgung

Beispiel (Auszug aus einem Vortrag von H.Heugl (Klagenfurt 1998))

Ein Schuldentilgungsproblem:

Jemand nimmt sich einen Kredit von S 100.000,- bei einem Zinssatz von 9% und zahlt jährlich am Ende des Jahres eine Rate von S 15.000,-. Nach wieviel Jahren ist die Schuld getilgt?

Im traditionellen Unterricht können solche Aufgaben frühestens in der 10. Schulstufe bearbeitet werden, da man geometrische Reihen und das Rechnen mit Logarithmen benötigt. Durch den Computer stehen neue Modelle zur Verfügung, nämlich rekursive Modelle. Damit werden solche Probleme bereits in der 7. Schulstufe behandelt.

Der erste Schritt ist das Finden der Wortformel:

„Das Kapital wird verzinst und die Rate wird abgezogen“

oder in die Sprache der Mathematik übersetzt:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} \cdot (1 + p/100) - R$$

Durch die aktive Tätigkeit des Speicherns und wieder Abrufens werden die zwei wichtigen Schritte des iterativen Prozesses bewusst: Das Ausführen der Funktion und das Rückkoppeln (Abb. 16). Durch Diskussion der Wertetabelle werden die Eigenschaften exponentieller Wachstumsprozesse viel klarer als durch das Rechnen mit Logarithmen. Man erkennt die Problematik der Schuldentilgung: Am Anfang wird der größte Teil der Raten für die Tilgung der Zinsen verwendet (Abb. 17). Die experimentelle Lösung erfolgt durch Wiederholung der Tätigkeit bis zum ersten negativen Wert. Der mitlaufende Zähler gibt auch die Anzahl der Jahre wieder (Abb. 18)

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
$0 \rightarrow n : 100000 \rightarrow k$ 100000.						$0 \rightarrow n : 100000 \rightarrow k$ 100000.					
$n+1 \rightarrow n : 1.09 * k - 15000 \rightarrow k$						$n+1 \rightarrow n : k * 1.09 - 15000 \rightarrow k$					
MAIN RAD APPROX FUNC 1/30						MAIN RAD APPROX FUNC 7/30					

Abbildung 16

Abbildung 17

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
$n+1 \rightarrow n : 1.09 * k - 15000 \rightarrow k$ 64091.7					
$n+1 \rightarrow n : 1.09 * k - 15000 \rightarrow k$ 54860.					
$n+1 \rightarrow n : 1.09 * k - 15000 \rightarrow k$ 44797.4					
$n+1 \rightarrow n : 1.09 * k - 15000 \rightarrow k$ 33829.2					
$n+1 \rightarrow n : 1.09 * k - 15000 \rightarrow k$ 21873.8					
$n+1 \rightarrow n : 1.09 * k - 15000 \rightarrow k$ 8842.42					
$n+1 \rightarrow n : 1.09 * k - 15000 \rightarrow k$ -5361.76					
n 11.					
MAIN RAD APPROX FUNC 13/30					

Abbildung 18

Nach der Problematisierung dieser Modelle in einer White Box Phase kann das Simulieren dem CAS als Black Box durch Nutzen des Sequence Mode überlassen werden.

Dieses Beispiel läßt sich durch folgendes Beispiel erweitern:

Beispiel

Jemand nimmt sich einen Kredit von S 300.000,- bei einem Zinssatz von 8% und zahlt jährlich am Ende des Jahres eine Rate von a) S 24.000,- b) S 40.000 und c) S 15.000. Nach wieviel Jahren ist die Schuld getilgt?

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
Zoom Edit All Style Axes...
▲PLOTS
✓ u1=u1(n-1)·1.08 - 24000
u1=300000
✓ u2=u2(n-1)·1.08 - 40000
u2=300000
✓ u3=u3(n-1)·1.08 - 15000
u3=300000
u4=
u4=
u5=
u5=
u6=
u6=
u2<n>=u2(n-1)*1.08-40000
MAIN RAD AUTO SEQ
    
```

Abbildung 19

n	u1	u2	u3
0.000000	300000.0	300000.0	300000.0
1.000000	300000.0	284000.0	309000.0
2.000000	300000.0	266720.0	318720.0
3.000000	300000.0	248057.6	329217.6
4.000000	300000.0	227902.2	340555.0
5.000000	300000.0	206134.4	352799.4
6.000000	300000.0	182625.1	366023.4
7.000000	300000.0	157235.1	380305.2

n=0.

Abbildung 20

n	u1	u2	u3
8.000000	300000.0	129814.0	395729.6
9.000000	300000.0	100199.1	412388.0
10.000000	300000.0	68215.00	430379.1
11.000000	300000.0	33672.20	449809.4
12.000000	300000.0	-3634.02	470794.1
13.000000	300000.0	-43924.7	493457.7
14.000000	300000.0	-87438.7	517934.3
15.000000	300000.0	-134434.	544369.0

u2<n>= -3634.023363787

Abbildung 21

```

F1 F2
Zoom
nmin=0.
nmax=14.
plotstrt=1.
plotstep=1.
xmin=-2.
xmax=15.
xsc1=1.
ymin=-100000.
ymax=500000.
ysc1=100000.
MAIN RAD AUTO SEQ
    
```

Abbildung 22

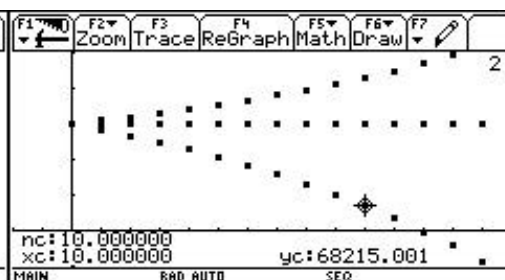


Abbildung 23

Die Diskussion in der Klasse sollte einerseits die Bedeutung der Rate im Bezug zu den Zinsen erarbeiten, andererseits ist eine schnelle Veränderung und Simulation neuer Daten ermöglichen. Man könnte auch in Partnerarbeit die Schüler dazu anhalten, daß einer die "Bank" spielt und der andere den Kreditnehmer. Der Kreditnehmer hat bestimmte Vorstellungen über die Höhe des Kredites und über sein Rückzahlungsvermögen. Der "Kreditvergeber" kann sofort die dazugehörigen Fragen beantworten. Weiters lassen sich auch sehr schnell die Veränderungen der Kreditzinsen simulieren und Auswirkung auf den Zeitpunkt der Schuldenfreiheit bestimmen.

Beispiel:

Jemand nimmt sich einen Kredit von S 300.000,- bei einem Zinssatz von a) 6%, b) 8%, c) 10% und zahlt jährlich am Ende des Jahres eine Rate von S 40.000. Nach wieviel Jahren ist die Schuld getilgt?

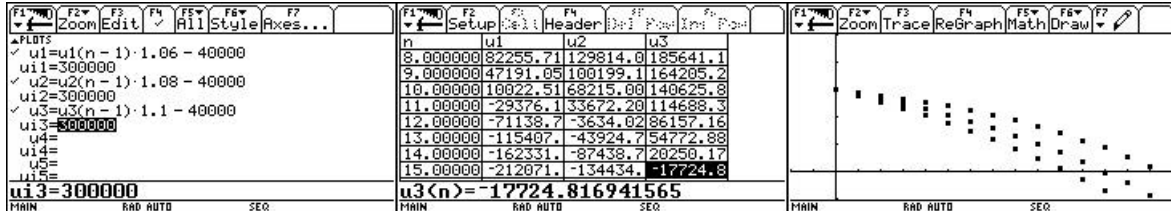


Abbildung 24

Abbildung 25

Abbildung 26

Auch die Fragen nach der gleichbleibenden Rückzahlungsrate, wenn der Zeitpunkt des ausgezahlten Kredites bekannt ist läßt sich experimentell lösen.

Beispiel:

Jemand nimmt sich einen Kredit von S 100.000,- bei einem Zinssatz von 9% und will den Kredit nach 10 Jahren ausbezahlt haben! Welche jährliche Rate muß dann zurückgezahlt werden?

Dieses Experimentieren erfordert aber auch immer einen Test, wobei dieser durch einen anderen Zugang mit dem TI-92 erfolgen sollte. Durch diese Vorgangsweise lassen sich Fehler beim Modellbilden oder Testen ausfindig machen und thematisieren.

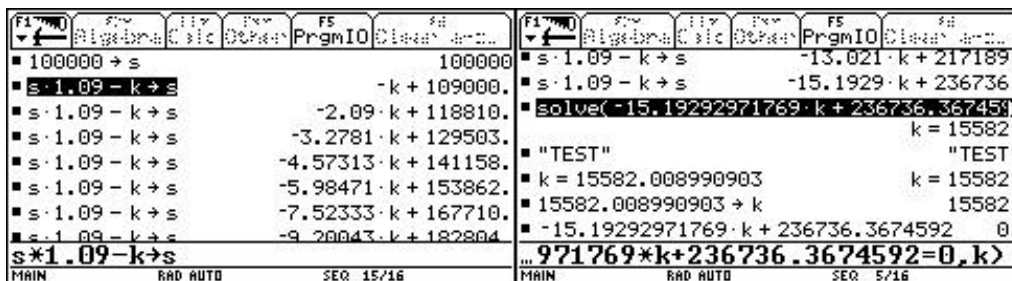


Abbildung 24

Abbildung 25

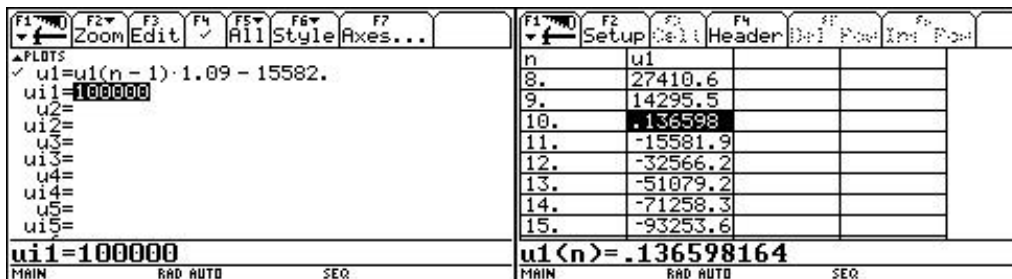


Abbildung 26

Abbildung 27