

Potenzschreibweise und die Rechenregeln

Themenbereich	
Algebra	
Inhalte	Ziele
<ul style="list-style-type: none"> • Die Potenzschreibweise • Potenzen negativer Zahlen • Multiplizieren und Dividieren von Potenzen • Potenzen – Vorrangregeln • Potenzen - Rechenregeln 	<ul style="list-style-type: none"> • Potenzschreibweise mit natürlichen Exponenten erkennen. • Rechenregeln erkennen und begründen können. • Umformungsschritte begründen können.
<p>Adressaten: Die folgenden Seiten eignen sich einerseits zum Einsatz bei der Erarbeitung der Kapitel Potenzschreibweise und Rechnen mit Potenzen als auch zur Festigung bzw. Wiederholung dieser Kapitel.</p>	

Voraussetzungen

Mathematische Voraussetzungen

Es ist nötig, dass die Schüler bereits das Rechnen mit ganzen und rationalen Zahlen beherrschen.

TI-92 Voraussetzungen

Die Schüler sollten bereits folgende Grundkenntnisse im Rechnen mit dem TI-92 besitzen: Grundrechnungsarten (inklusive Klammern), Brüche, Rechnen mit Variablen.

TI-92 Erweiterung

Im Laufe der Unterrichtssequenz erlernen die Schüler die Eingabe von Potenzen am TI-92. Außerdem ist es möglich, in diesem Kapitel das Erstellen einer Tabelle mit dem TI-92 zu erlernen. Es besteht aber nicht unbedingt die Notwendigkeit, die Tabellen an dieser Stelle durchzunehmen.

Unterrichtsmethode

An Hand der Arbeitsblätter können die Schüler das gesamte Kapitel selbständig erarbeiten. Es ist nur notwendig, die Reihenfolge der Arbeitsblätter vorzugeben, da diese aufeinander abgestimmt sind und spätere Blätter bereits auf den Erkenntnissen früherer Arbeitsblätter aufbauen.

Nur das Arbeitsblatt "Tabellen" ist an dieser Stelle nicht unbedingt nötig, andererseits bietet sich hier die Möglichkeit, die Tabellenfunktion des Ti-92 zu nutzen und zu erlernen. Sollte dies bereits in einem anderen Zusammenhang erwähnt worden sein und keine Wiederholung dieser Fähigkeit angestrebt werden, so kann dieses Arbeitsblatt ohne Auswirkung auf die restliche Unterrichtssequenz entfallen.

Genauere Erläuterungen

Beim Arbeitsblatt "**Potenzschreibweise**" sollten die ersten fünf Beispiele von den Schülern mit dem Ti-92 selbst berechnet werden. Anschließend sollte die definition von Potenzen besprochen werden und eventuell mit der Multiplikation als Kurzschreibweise der Addition verglichen werden.

Die restlichen Beispiele sollen danach von den Schülern selbst berechnet werden und - erst wenn alle Beispiele fertig sind - mit dem Ti-92 kontrolliert werden. Der Lehrer sollte dabei nur bei auftretenden Fragen klärend eingreifen.

Beim Arbeitsblatt "**Potenzen negativer Zahlen**" ist es wesentlich, dass die Schüler die Regel selbst erkennen. Daher sollten sie die ersten Beispiele zunächst rechnen, dann eine Vermutung aufstellen und diese anschließend an den restlichen Beispielen überprüfen. Erst am Ende sollte eine gemeinsame Besprechung der gefundenen Regel erfolgen. Die Tabelle kann entweder durch Berechnung im Kopf bzw. Ti-92 Home-Bildschirm durchgeführt werden, oder man bedient sich der im Arbeitsblatt "Tabellen" erklärten Weise. Auf jeden Fall sollte der Unterschied zwischen $2k$ und k^2 erkannt werden. Daher ist es wesentlich, diesen Unterschied auch in Worten zu formulieren.

Die beiden Arbeitsblätter "**Multiplizieren von Potenzen**" und "**Dividieren von Potenzen**" sind wieder in ähnlicher Weise, wie das erste Arbeitsblatt gedacht. Nachdem die Schüler die ersten Beispiele mit dem Ti-92 gerechnet haben, sollten sie in der Lage sein, die Regel zu formulieren. Zur Abwechslung kann eines dieser Arbeitsblätter in Partnerarbeit behandelt werden. Die restlichen Beispiele sollen wieder ohne Ti-92 berechnet werden und können gegebenenfalls auch als Hausübung gegeben werden.

Beim Arbeitsblatt "**Potenzen – Vorrangregeln**" sollte darauf hingewiesen werden, dass unbedingt eine Vorrangregel nötig ist, um ein eindeutiges Ergebnis zu erhalten. Möglicherweise finden die Schüler auch noch andere (ohne Regel noch mögliche) Varianten (z.B. $220 + 4 \cdot 6^2 = 220 + 24^2 = 244^2 = 59536$). Die folgenden Rechnungen sind wieder als Übung gedacht.

Das Arbeitsblatt "**Potenzen – Rechenregeln**" (2-seitig) enthält sehr viele Regeln. Man sollte daher darauf achten, dass die Schüler die Regeln sorgfältig sowohl mit Variablen als auch in Worten formulieren.

Das erste Beispiel der zweiten Seite bietet den Schülern die Möglichkeit, viele Varianten zu probieren. Dazu brauchen sie aber genügend Zeit. Im Anschluss kann besprochen werden, wie man leicht recht große Ergebnisse erzielt.

Potenzschreibweise

Berechne mit dem TR:

$$a \cdot a =$$

$$x \cdot x \cdot x =$$

$$b \cdot b =$$

$$d \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d =$$

$$h \cdot h \cdot h \cdot h =$$

r^2 ist eine Kurzschreibweise für Man spricht : "r hoch 2". (oder "r Quadrat")

$$\underbrace{r \cdot r \cdot \dots \cdot r}_{n\text{-mal}} =$$

Rechenausdrücke wie r^2, r^3, \dots, r^n bezeichnet man als **Potenzen**. Dabei heißt r **Grundzahl (Basis)**, und $2, 3, \dots, n$ heißen **Hochzahl (Exponent)**

Gib in Potenzschreibweise an:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 =$$

$$d \cdot g \cdot d \cdot d \cdot g =$$

$$5 \cdot r \cdot r \cdot 5 \cdot r \cdot 5 \cdot 5 \cdot r \cdot r =$$

$$f \cdot 7 \cdot h \cdot 7 \cdot f \cdot f \cdot h \cdot 7 \cdot f =$$

$$3 \cdot o \cdot 2 \cdot p \cdot 3 \cdot p \cdot 2 \cdot 2 \cdot o \cdot p \cdot 2 \cdot p \cdot p =$$

Berechne ohne TR, indem du die Basis entsprechend oft mit sich selbst multiplizierst, und überprüfe dann mit dem TR:

$$\text{Beispiel: } 7^3 = \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{49} = \underbrace{49 \cdot 7}_{343} = 343$$

Berechnung am TR durch folgende Eingabe: 7^3

$$1^2 =$$

$$1^3 =$$

$$1^7 =$$

$$2^6 =$$

$$7^3 =$$

$$5^3 =$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 =$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 =$$

Potenzen negativer Zahlen

Berechne ohne TR und überprüfe dann mit dem TR:

$$(-1)^2 =$$

$$(-1)^3 =$$

$$(-1)^4 =$$

$$(-1)^5 =$$

Berechne nun noch mit dem Taschenrechner:

$$(-1)^6 =$$

$$(-1)^7 =$$

$$(-1)^8 =$$

Man erkennt: Eine gerade Potenz einer negativen Zahl ergibt eineZahl.
Eine ungerade Potenz einer negativen Zahl ergibt eineZahl.

Berechne nun weiters wieder zunächst ohne TR und überprüfe dann mit dem TR:

$$(-7)^3 =$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 =$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^4 =$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^5 =$$

$$\left(-\frac{r}{s}\right)^2 =$$

Fülle die Tabelle ohne TR aus!

k	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
2k									
k ²									

Beachte den Unterschied zwischen 2k und k²! k² ist eine verkürzte Schreibweise für $k \cdot k$.
Wofür ist 2k eine verkürzte Schreibweise?

Tabellen

Fülle mit Hilfe des TI-92 die folgende Tabelle aus!

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
3x									
x ³									

Vorgangsweise mit dem TI-92 :

Mit dem TI-92 ist es möglich, Tabellen zu erstellen. Dazu wechselt man zunächst mit der Tastenkombination $\nu+W$ in den Y=Editor. (Hier kann man bereits vorhandene Einträge zunächst mittels CLEAR löschen)

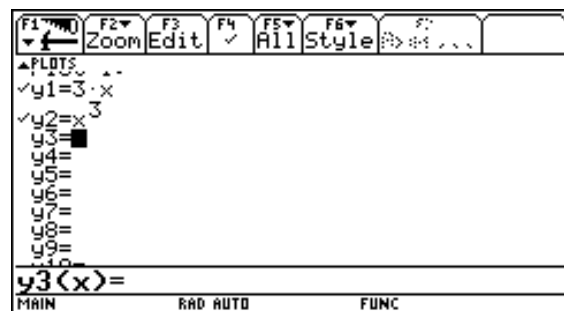
Hier kann man $y1(x)=3*x$ und $y2(x)=x^3$ definieren. (siehe Graphik 1)

Dann wechselt man mit $\nu+T$ in das TblSet - Fenster, um die Tabellenparameter einzugeben (siehe Graphik 2)

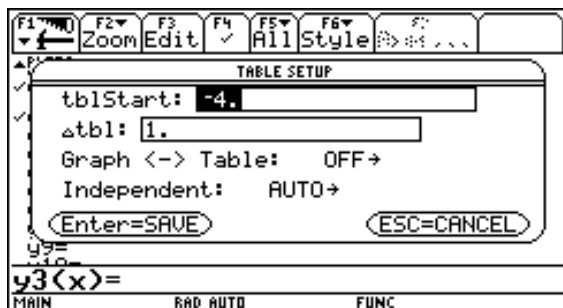
Anschließend kann bereits der Tabellenbildschirm mit $\nu+Y$ geöffnet und die entsprechenden Daten abgelesen werden. (siehe Graphik 3)

Dabei entspricht die zweite Spalte dem 3x und die dritte Spalte dem x³.

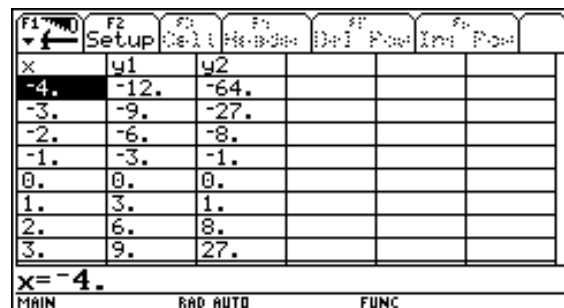
Mit Hilfe der Cursortasten kann man die Tabelle durchlaufen, um auch Werte ablesen zu können, die momentan nicht auf dem Bildschirm zu sehen sind.



Graphik 1 : Der Y=Editor



Graphik 2: Die Tabellenparameter



Graphik 3: Die fertige Tabelle

Fülle nun auch die folgende Tabelle aus:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
4x									
x ⁴									

Multiplizieren von Potenzen

Berechne mit Ti-92 und überlege, wie der Ti-92 zu diesem Ergebnis kommen kann!

$$a^2 \cdot a^3 =$$

$$x^5 \cdot x^7 =$$

$$z \cdot z = z^1 \cdot z^1 =$$

$$c^2 \cdot c \cdot c^4 =$$

$$a^2 \cdot b^3 \cdot a^5 \cdot b =$$

$$x \cdot z \cdot y^3 \cdot x^2 \cdot y^5 \cdot z^4 =$$

<p>Regel: $a^n \cdot a^m =$</p> <p>Werden zwei Potenzen gleicher Basis multipliziert,</p> <p>so.....</p>

Begründung: $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{n\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{m\text{-mal}}$

Wie oft wird a insgesamt mit sich selbst multipliziert?

Berechne nun ohne Verwendung des Ti-92!

$$p^9 \cdot p^{13} =$$

$$s^3 \cdot s^4 \cdot s^5 =$$

$$2 \cdot k^3 \cdot 5 \cdot k^5 =$$

$$2^3 \cdot x^4 \cdot 3 \cdot x^7 =$$

$$2c^2 \cdot c \cdot 7c^4 =$$

$$a^2 \cdot b^7 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot a^8 \cdot b^1 \cdot b^4 \cdot a^5 \cdot b =$$

$$x \cdot z \cdot y^3 \cdot x^2 \cdot y^7 \cdot z^4 \cdot y^4 \cdot x \cdot y^5 =$$

$$2a^2 \cdot 4b \cdot 3^2 \cdot a^4 \cdot a^8 \cdot 10b^4 \cdot a^2 \cdot b =$$

Dividieren von Potenzen

Berechne mit Ti-92 und überlege, wie der Ti-92 zu diesem Ergebnis kommen kann!

$$a^7 : a^3 =$$

$$b^9 : b^4 =$$

$$c^{14} : c =$$

$$d^5 : d^4 =$$

Regel: $a^m : a^n =$

Werden zwei Potenzen gleicher Basis dividiert,

so.....

Begründung: Betrachte z.B. $a^7 : a^3$ als Bruch: $\frac{a^7}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a}$

Von den 7 Faktoren im Zähler werden 3 "weggekürzt".

Achtung! Steht im Nenner eine höhere Potenz, wird der Zähler "weggekürzt".

Bsp.: $\frac{z^3}{z^5} = \frac{z \cdot z \cdot z}{z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z} = \frac{1}{z^2}$

Berechne nun ohne Ti-92!

$x^9 : x^2 =$ $y^{15} : y^6 =$ $\frac{s^8}{s^2} =$ $\frac{k^7}{k} =$ $\frac{x^3}{x^{10}} =$	$\frac{a^5 \cdot b^{11}}{a^3 \cdot b^2} =$ $\frac{s^5 \cdot s^7}{s^5} =$ $\frac{r^4 \cdot s^9}{s^3 \cdot r^6} =$ $\frac{x \cdot y}{x^5 \cdot y^9} =$ $\frac{e^2 \cdot f^{11} \cdot g}{f^3 \cdot g \cdot e^2} =$ $\frac{2x^2 \cdot 9y}{6x^5 \cdot 7y^7} =$
---	--

Für Spezialisten (Stoff der 6. Klasse):

Berechne nach der Regel: $z^4 : z^9 =$

Berechne durch Kürzen: $\frac{z^4}{z^9} =$

Was bedeutet also z^{-5} ?

Potenzen - Vorrangregeln

Berechne: $220 + 4 \cdot 6^2$!

Es sind zwei Rechengänge möglich:

1) Wir quadrieren zuerst und rechnen dann nach den alten Regeln weiter:

$$220 + 4 \cdot 6^2 = 220 + 4 \cdot 36 = 220 + 144 = 364$$

2) Wir multiplizieren zuerst 4 mit 6 und quadrieren erst dann:

$$220 + 4 \cdot 6^2 = 220 + 24^2 = 220 + 576 = 796$$

Berechne mit dem TR um herauszufinden, welcher Rechengang der richtige ist! Wir erkennen folgende Regel:

Das Potenzieren ist den Rechnungsarten zweiter (Multiplikation, Division) und erster (Addition, Subtraktion) Stufe durchzuführen. Daher bezeichnet man das Potenzieren als Rechnungsart dritter Stufe.

Damit ergibt sich eine neue Reihenfolge der Berechnung:

1. Klammern auflösen

2.....

3.....

4.....

Berechne nun ohne TR und überprüfe dann die Ergebnisse:

$$3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 3^2 =$$

$$-3^2 - (-3)^2 = -9 - (+9) = -9 - 9 = -18$$

$$5 \cdot 4^2 + 3 \cdot 2^3 =$$

$$4^3 - (-4)^3 =$$

$$(3+8) \cdot 3^2 =$$

$$-5^2 - (-5)^2 =$$

$$(8-3)^2 \cdot 9 =$$

$$-5^2 - 5^2 =$$

$$[(9-6) \cdot 3]^2 =$$

$$-2^3 + (-2)^3 =$$

Potenzen - Rechenregeln

Berechne mit dem TR:

$$(3 \cdot b)^2 =$$

$$(7 \cdot x \cdot y)^5 =$$

$$(a \cdot b)^3 =$$

$$(a \cdot b)^4 =$$

Regel (Distributivgesetz): $(a \cdot b)^n =$

Wird ein Produkt potenziert, so

.....

Die Formel gilt analog für die Division:

Berechne mit dem TR:

$$\left(\frac{3}{a}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{b}{7}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{z}{y}\right)^5 =$$

Regel (Distributivgesetz): $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$

Wird ein Quotient potenziert, so

.....

Achtung: Diese beiden Regeln gelten nicht für Addition und Subtraktion!

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

Berechne nun auch noch mit dem TR:

$$(a^2)^3 = \quad (w^4)^5 = \quad (t^6)^2 =$$

Regel: $(a^n)^m =$

Eine Potenz wird potenziert, indem.....

.....

Versuche nun jeweils die gegebenen Zahlen so durch Rechenzeichen zu verbinden, dass das Ergebnis möglichst groß ist! Schreibe verschiedene Varianten mit ihrem Ergebnis an!

z.B.: 1,2,3 : $1 \cdot 2^3$ oder $(1^2)^3$ usw.

-) 3,3,3,

-)3,4,5

-)9,9,9

Berechne nun ohne TR und überprüfe dann deine Rechnungen:

$$(3e)^2 - 3e^2 =$$

$$(5t)^3 + 5t^3 =$$

$$6u^3v \cdot (2uv)^2 =$$

$$3x^2y^3 \cdot (3xy)^3 =$$

$$(gh)^3 =$$

$$(g^2h^2)^3 =$$