Prof. Michael de Villiers hat an der Karasburg High School (Namibia) und an der Diamantveld High School, Südafrika, in Kimberley Mathematik und Physik unterrichtet. 1983 erhielt er einen Preis als "Physiklehrer des Jahres". Im Lauf von 1983 kam er an die Research Unit for Mathematics Education an der Universität von Stellenbosch (Südafrika). Seit 1991 ist er an der Universität von Durban-Westville, die seit 2004 Universität von KwaZulu-Natal genannt wird. Er gibt dort Vorlesungen in Mathematik und in Didaktik der Mathematik. Seine besondere Vorliebe gilt der (dynamischen) Geometrie, die er hauptsächlich mit Sketchpad und Cabri betreibt.

Prof. de Villiers hat mir eine seiner zahlreichen Publikationen geschickt, *Some Adventures in Euclidean Geometry*, und mir auf meine Anfrage gestattet, ein Kapitel für unsere Lehrer auf der ACDCA-Seite in einer deutschen Übersetzung zu veröffentlichen. Dafür sei ihm herzlich gedankt.

Ich möchte besonders auf seine website hinweisen, die eine Fundgrube für alle Freunde der Mathematik darstellt.

http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html

Prof. de Villiers hat noch im Besonderen auf die folgende Seite verwiesen:

http://math.kennesaw.edu/~mdevilli/JavaGSPLinks.htm

Im einem der nächsten DERIVE & CAS-TI Newsletter wird ein Aufsatz von ihm veröffentlicht, der sich mit dem Beweisen im Geometrieunterricht beschäftigt:

The Role and the Function of Proof

Josef Böhm

Eine Episode aus dem Klassenzimmer

Michael de Villiers, devilliers@ukzn.ac.za

"*Eine große Entdeckung löst ein großes Problem aber ein Körnchen von Entdeckung liegt in der Lösung jedes Problems. Dein Problem kann einfach sein, aber es ist eine Herausforderung für deine Erfindungsgabe und wenn du das Problem aus eigener Kraft gelöst hast, dann wirst du die Spannung erfahren und die Freude der Entdeckung empfinden können.*"

George Polya, 1973

Der Lehrer ist dabei, die Sehnenvierecke (*cyclic quadrilaterals*) zu wiederholen. Peter stellt plötzlich die Frage, ob es Sehnenvierecke gibt, die auch Deltoide (*kites*) sind und welche Eigenschaften diese im Fall ihrer Existenz haben.

LEHRER: Das ist eine ausgezeichnete Frage, Peter! Deine Frage ist eigentlich Teil der weit allgemeineren Frage, wo die Sehnenvierecke in unserem Klassifikationsschema der Vierecke einzuordnen sind. Um das feststellen zu können, werden wir dieses Schema wiederholen. Wer kann sich noch daran erinnern?

JAN: Ich kann das, Sir.

LEHRER: Okay Jan, bitte komm' zur Tafel und zeichne das Schema für uns auf.

Jan geht zur Tafel und fertigt das Schema an, das in Abbildung 1 zu sehen ist.

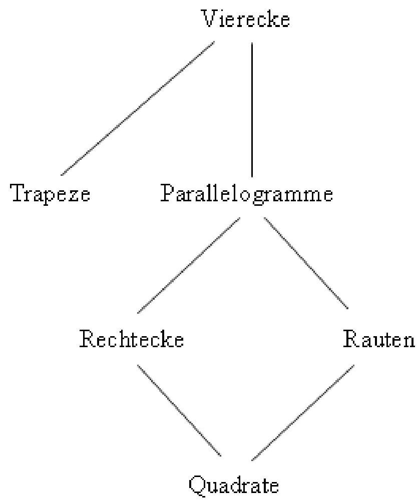


Abbildung 1
(wir verwenden generell *Raute* anstelle von *Rhombus*)

LEHRER: Na schön, was hält die Klasse davon? Seid ihr alle mit dieser Klassifizierung einverstanden?

SUSAN: Nein, Sir. Ich würde die Parallelogramme unter die Trapeze stellen. Und außerdem hat Peter die Deltoide überhaupt nicht berücksichtigt.

LEHRER: Warum sollten die Parallelogramme unter den Trapezen zu stehen kommen?

SUSAN: Ist ein Trapez nicht dadurch definiert, dass es ein Viereck mit mindestens einem Paar von gegenüberliegenden parallelen Seiten ist. Und das schließt doch sicherlich die Parallelogramme ein, bei denen zwei Paare von gegenüberliegenden Seiten parallel sind.

LEHRER: Aha. Jan, was sagst du dazu? Kannst du ihrer Definition der Trapeze zustimmen?

JAN: Nein, ist ein Trapez nicht ein Viereck mit nur einem Paar von parallelen gegenüberliegenden Seiten? Ich glaube mich daran zu erinnern, dass wir das damals so gelernt haben.

LEHRER: Ja und nein, Jan. Seht, ihr habt beide Recht, denn beide Definitionen sind in dem Sinn richtig, dass sie eine korrekte Beschreibung der Trapeze geben. Da unsere Wahl der Definition in einem gewissen Grad beliebig ist, können wir uns eine der beiden Definitionen aussuchen. Aber trotzdem hat Susans Definition den Vorteil, dass wir die Parallelogramme unter den Trapezen anordnen können. Damit können sie als Spezialfälle der Trapeze angesehen werden. Aus praktischen Gründen ist es nützlich, Vierecke über andere Vierecke zu definieren. Wenn wir zB ein Quadrat als ein spezielles Rechteck definieren, dann gelten alle Sätze, die für die Rechtecke gültig sind – wie zB gleich lange Diagonalen – auch für die Quadrate und man braucht sie nicht extra nochmals für Quadrate zu beweisen. Daher definieren und klassifizieren wir in der Mathematik geometrische Figuren gerne hierarchisch. Das heißt, dass wir sie so als Untermengen von allgemeineren Objekten definieren, dass die Verwandtschaften unter den Objekten hervorgehoben werden. Können wir uns auf die Definition von Susan einigen, da es im Weiteren unpraktisch wäre mit zwei Definitionen zu arbeiten?

Die Klasse nickt Beifall.

Aber Susan hat noch einen weiteren Punkt aufgeworfen, nämlich, dass die Deltoide in dem Schema vergessen worden sind. Wer erinnert sich daran, was ein Deltoid ist?

Einige Hände werden sofort gehoben.

LEHRER: Okay, Peter, komm' an die Tafel und zeichne ein Deltoid.

Peter geht zur Tafel und zeichnet die Figur nach Abbildung 2.

LEHRER: Gut. Wo würdest du die Deltoide in unserem Klassifikationsschema von vorhin einordnen?

Peter zeichnet das Diagramm von Jan nochmals und fügt die Deltoide ein (Abbildung 3).

LEHRER: Was sagt ihr dazu? Seid ihr alle seiner Meinung? Anne?

ANNE: Sir, ich kann mich zwar nicht mehr so genau zurück erinnern, aber weder ein Quadrat noch eine Raute sieht mir nach einem Deltoid aus.

LEHRER: Peter, kannst du bitte Anne erklären, warum ein Quadrat und eine Raute ein Deltoid sind?

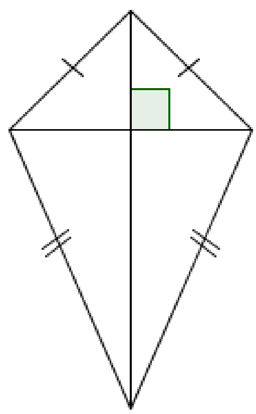


Abbildung 2

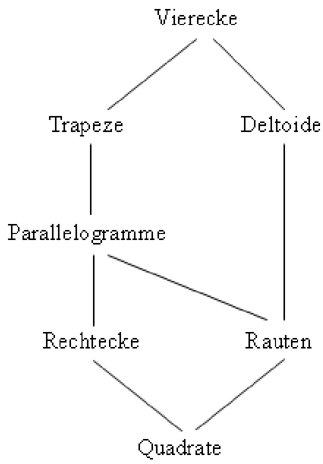


Abbildung 3

PETER: Ja. Sowohl die Raute als auch das Quadrat haben *alle* charakteristischen Eigenschaften eines Deltoids: zwei Paare von aneinander liegenden Seiten sind gleich lang, die Diagonalen stehen auf einander senkrecht und diese Figuren haben eine Symmetrieachse durch ein Paar von gegenüberliegenden Winkeln. Natürlich sind Quadrate und Rauten *besondere* Deltoide, weil sie noch *zusätzliche* Eigenschaften aufweisen, wie zB, dass alle Seiten gleich lang sind, weil sie zwei Symmetrieachsen durch beide Paare von gegenüberliegenden Winkeln besitzen usw.

LEHRER: Hast du das verstanden, Anne?

ANNE: Ja, Sir. Jetzt kann ich mich wieder daran erinnern.

LEHRER: Gut, das bringt uns zurück zur ursprünglichen Frage von Peter, wo in diesem Schema die Sehnenvierecke unter zu bringen sind? Bevor wir das versuchen, wer kann uns eine Definition der Sehnenvierecke geben? Ja, bitte, Susan?

SUSAN: Ein Sehnenviereck ist ein Viereck, bei dem alle vier Ecken auf einem Kreis liegen.

LEHRER: Gut, Susan. Kann jemand noch weitere Eigenschaften der Sehnenvierecke nennen? Jan?

JAN: Ihre gegenüberliegenden Winkel sind supplementär, d.h., sie ergänzen sich auf 180°, und ihre Außenwinkel sind jeweils gleich wie die gegenüberliegenden Innenwinkel.

LEHRER: Ganz richtig. Ihr werdet euch daran erinnern, dass wir das schon bewiesen haben. Welche der Vierecke in unserem Diagramm passen in einen Kreis oder haben die von Jan genannten Eigenschaften? Ja, Safa?

SAFA: Oh, das weiß ich. Rechtecke und Quadrate. Alle ihre Winkel sind 90°, daher sind die gegenüberliegenden Winkel Supplementärwinkel und darum sind das Sehnenvierecke.

LEHRER: Das stimmt genau, Safa! Wo muss man den Zirkel einstechen, um den Umkreis eines Rechtecks oder Quadrats zu zeichnen, Jan?

JAN: Das ist ganz leicht, im Schnittpunkt der Diagonalen.

LEHRER: Warum kannst du das so sagen?

JAN: Die Diagonalen sind gleich lang und teilen einander in gleiche Teile. Wenn man daher den Zirkel in ihrem Schnittpunkt einsetzt und ihn zu einer Ecke öffnet, kann der Umkreis leicht konstruiert werden.

ANNE: Aber wie ist das bei einem Parallelogramm? Lässt sich da kein Umkreis zeichnen, wenn man den Zirkel im Diagonalenschnittpunkt einsetzt?

Der Lehrer bleibt stumm und schaut zu Jan.

JAN: Nein, das geht nicht. Die Abstände vom Schnittpunkt der Diagonalen zu den Ecken sind hier nicht alle gleich, weil die Diagonalen unterschiedlich lang sind.

Jan geht zur Tafel und macht eine Skizze.

ANNE: Ah ja, jetzt sehe ich das auch …

SAFA: Man kann das auch auf eine andere Weise erkennen: die gegenüberliegenden Winkel eines Parallelogramms sind gleich. Wenn sie auch noch Supplementärwinkel sein sollen, dann müssen sie beide 90° sein. Daher können das nur Rechtecke oder Quadrate sein.

LEHRER: Das ist eine ausgezeichnete Erklärung, Safa. Jetzt können wir die Sehnenvierecke in unser Diagramm eintragen.

Der Lehrer geht zur Tafel und ergänzt das Diagramm (Abbildung 4).

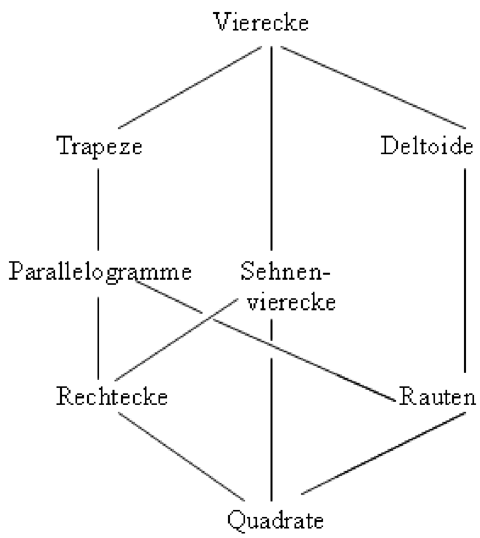


Abbildung 4

LEHRER: Aus dem Diagramm ist jetzt ersichtlich, dass die Durchschnittsmenge der Parallelogramme (parallele Seiten) und der Deltoide (zwei Paare von anliegenden Seiten sind gleich lang) die Rauten sind. Mit anderen Worten, die Rauten haben alle Eigenschaften der Parallelogramme verbunden mit denen der Deltoide. Ganz ähnlich haben die Quadrate die kombinierten Eigenschaften der Rechtecke und der Rauten (gleich lange Seiten und gleich große Winkel). Wie das Diagramm momentan aussieht, lässt es den Schluss zu, dass es keinen Durchschnitt zwischen den Sehenvierecken und den Deltoiden gibt. Das bringt uns schon wieder zur Frage von Peter zurück. Wer kann sich ein Viereck vorstellen, das kein Quadrat ist, aber sonst alle Eigenschaften eines Sehnenvierecks und eines Deltoids aufweist?

Nach einer Weile …

PETER: Ich habe da eine Idee. Darf ich die Figur auf die Tafel zeichnen?

Der Lehrer nickt und Peter skizziert ein Viereck (Abbildung 5).

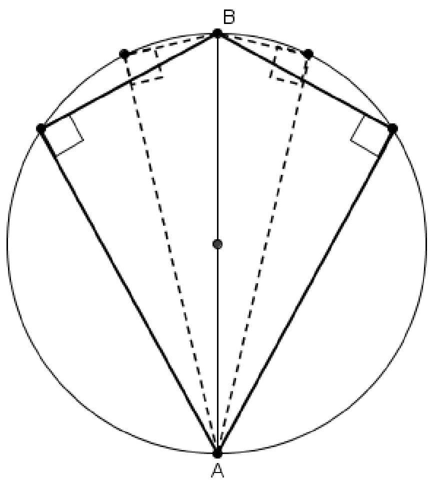


Abbildung 5

LEHRER: Das ist sehr schön, Peter. Beachte, dass *AB* ein Durchmesser ist, daher sind die Winkel im Halbkreis alle rechte Winkel. Wie könnte man diese Klasse von Figuren bezeichnen, Anne?

ANNE: Das sind Deltoide mit nur einem Paar von gegenüberliegenden rechten Winkeln.

SUSAN: Nein, Sir. Damit bin ich nicht einverstanden. Eine hierarchische Definition würde sie als Deltoide mit mindestens einem Paar von gegenüberliegenden rechten Winkeln definieren. So lassen sich dann die Quadrate als Sonderfall berücksichtigen.

SAFA: Ich bin einer Meinung mit Susan. Aber ich bin nicht sicher, ob diese Figuren alle Möglichkeiten der Durchschnittsmenge von Sehnenvierecken und Deltoiden einschließen. Ist das immer so, dass zumindest ein Paar von gegenüberliegenden Winkeln 90° betragen? Gibt es da nicht noch andere Möglichkeiten?

LEHRER: Eine gute Frage, Safa. Was glaubt ihr in der Klasse? Können wir beweisen, dass ein Deltoid, das auch ein Sehnenviereck ist, mindestens ein Paar von gegenüberliegenden rechten Winkeln aufweisen muss?

JAN: Aber Sir, das ist doch aus der Skizze ersichtlich. Wenn dieses eine Paar keine rechten Winkel hätte, dann wäre es kein Sehnenviereck.

PETER: Gut, warum definieren wir sie nicht als Deltoide, bei denen die gegenüberliegenden Winkel supplementär sind? Wenn zumindest ein Paar von gegenüberliegenden Winkeln gleich ist, – ich glaube, das haben wir schon in einer früheren Stunde bewiesen – dann folgt ja aus der Forderung, dass diese Winkel supplementär sind unmittelbar, dass hier zumindest ein Paar von gegenüberliegenden rechten Winkeln auftritt.

LEHRER: Das ist ein guter Vorschlag, Peter. Bleiben wir vorerst dabei. Wer hat einen passenden Namen für diese Vierecke, die wir eben entdeckt haben?

ANNE: Nennen wir sie doch *rechtwinkelige Deltoide*, da sie rechte Winkel haben.

LEHRER: Gut, das ist keine schlechte Idee. Gibt es sonst noch Vorschläge? Nein, ok, dann schauen wir weiter. Was denkt ihr über die Möglichkeit der Durchschnittsmenge von Trapezen und Sehnenvierecken? In anderen Worten, gibt es Figuren, die die kombinierten Eigenschaften beider Klassen haben, nämlich die Parallelität von mindestens einem Paar gegenüberliegender Seiten und die Ergänzung auf 180° von gegenüberliegenden Winkeln?

Nach einer Weile des Nachdenkens

SUSAN: Ja, Sir! *Gleichschenkelige Trapeze*. Ich erinnere mich, die hatten wir schon einmal.

LEHRER: Ausgezeichnet, Susan! Bitte komm zur Tafel, zeichne ein Beispiel und erkläre uns, warum das ein Sehnenviereck ist.

Susan folgt der Aufforderung und zeichnet (Abbildung 6).

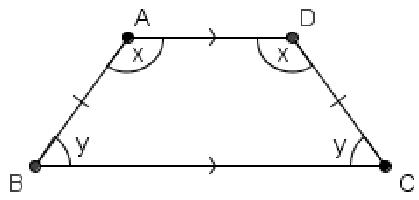


Abbildung 6

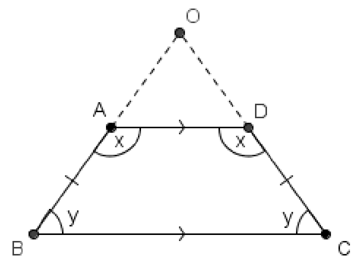


Abbildung 7

SUSAN: Ich erinnere mich, dass zumindest ein Seitepaar parallel und das andere gleich lang sein muss. Außerdem sind zwei Paare von nebeneinander liegenden Winkeln gleich. Wenn wir die Winkel bei B und C mit y und jene bei A und D mit x bezeichnen, dann gilt wegen $AD \parallel BC$, dass $\angle A + \angle B = 180°$. Damit ist das gleichschenkelige Trapez ein Sehnenviereck, weil gegenüberliegende Winkel supplementär sind.

LEHRER: Das hast du gut gemacht, Susan. Aber wie können wir sicher sein, dass die gleichschenkeligen Trapeze die einzigen Vierecke sind, die die Eigenschaften von Trapezen und Sehnenvierecken verbinden? Gibt es da nicht noch andere Möglichkeiten?

Nach einer Weile.

PETER: Nein, Sir, da gibt es nichts anderes mehr. Zum Beispiel (Peter geht zur Tafel und ergänzt die Zeichnung – siehe Abbildung 7) können wir einfach folgendes beweisen: Wenn $ABCD$ ein Sehnenviereck mit $AD \parallel BC$, dann ist $AB = DC$, weiters sind $\angle A = \angle D$ und $\angle B = \angle C$; mit anderen Worten, $ABCD$ ist ein gleichschenkeliges Trapez. So ist zB $\angle A + \angle C = 180°$, weil $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, aber auch $\angle A + \angle B = 180°$, weil $AD \parallel BC$. Daher ist $\angle B = \angle C$ und auch $\angle A = \angle D$. Da die Winkel $\angle OAD$ und $\angle ODA$ Supplementärwinkel der gleichen Winkel bei A und D sind, sind sie gleich. Aus diesem Grund sind beide Dreiecke ΔOAD und ΔOBD gleichschenkelig und es ergibt sich, dass $OB - OA = OC - OD$ und daraus weiters $AB = DC$.

LEHRER: Sehr gut, Peter. Wer von euch hat einen Vorschlag für die Definition von gleichschenkeligen Trapezen? Ja, Safa?

SAFA: Ein gleichschenkeliges Trapez ist ein Viereck mit mindestens einem Paar von parallelen gegenüberliegenden Seiten bei dem mindestens ein Paar von gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind.

ANNE: Nein, Sir, denn da sind auch die Parallelogramme mit eingeschlossen …

Anne geht zur Tafel und macht die folgenden Skizzen (Abbildung 8):

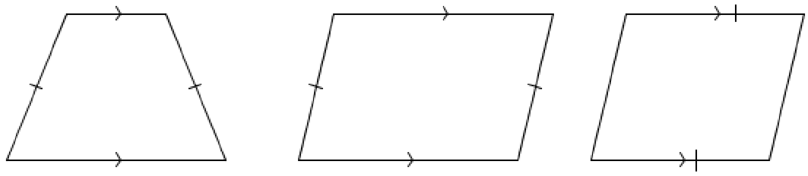


Abbildung 8

ANNE: Alle diese Figuren sind bei ihrer Definition eingeschlossen, aber die letzten beiden sind Parallelogramme und die haben keinen Umkreis. Ihre Definition könnte so geändert werden, dass es sich um Vierecke mit mindestens einem Paar von gegenüberliegenden parallelen Seiten handelt, bei dem zumindest das andere Seitenpaar gleich lang aber nicht parallel ist. Dann sind die Parallelogramme ausgeschlossen.

SUSAN: Das gefällt mir nicht– diese Definition ist mir zu lang und außerdem werden damit auch die Quadrate und Rechtecke ausgeschlossen, die wohl Parallelogramme aber doch auch Sehnenvierecke sind. Ich würde vorschlagen, dass wir die gleichschenkeligen Trapeze als Sehnenvierecke mit zumindest einem Paar von gegenüberliegenden parallelen Seiten oder aber als Trapeze mit gegenüberliegenden Supplementärwinkeln definieren. Dann wären ganz deutlich die allgemeinen Parallelogramme ausgeschlossen, nicht aber die Rechtecke und Quadrate. Außerdem lassen sich dann, wie Peter gezeigt hat, ihre anderen Eigenschaften aus dieser Definition herleiten.

LEHRER: Was meinen die anderen dazu? Sollen wir diese Definition so annehmen? Ja? Gut, dann werden wir die rechtwinkeligen Deltoide und die gleichschenkeligen Trapeze in unser Klassifikationsschema aufnehmen.

Der Lehrer geht zur Tafel und zeichnet das Diagramm neu (Abbildung 9).

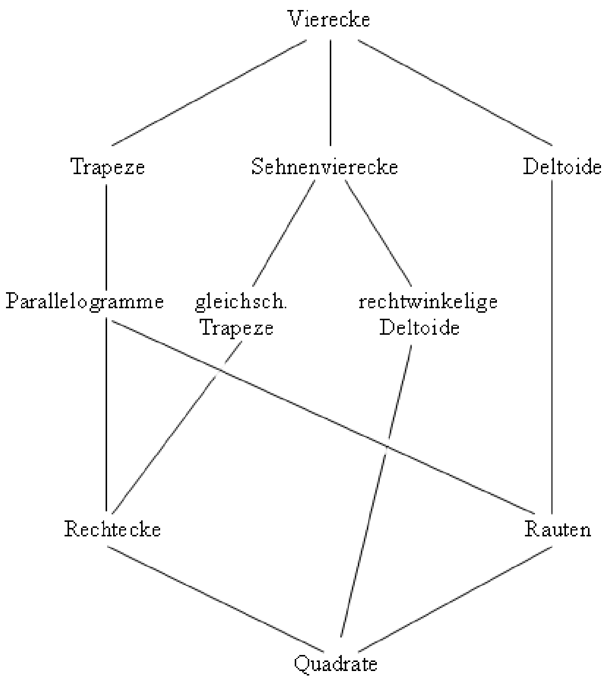


Abbildung 9

ANNE: Aber, Sir, warum haben sie die gleichschenkeligen Trapeze nicht mit den Quadraten und die rechtwinkeligen Deltoide nicht mit den Rauten verbunden?

LEHRER: Was meint ihr? Soll ich sie verbinden?

SAFA: Nein, es ist sicher nicht notwendig, die gleichschenkeligen Trapeze mit den Quadraten zu verbinden, denn aus dem Diagramm geht klar hervor, dass die Rechtecke Spezialfälle sind, und das gilt auch für die Quadrate. Ich kann aber nichts zur anderen Verbindung sagen.

JAN: Dafür habe ich eine Antwort. Wir dürfen sie sicht verbinden, weil ein rechtwinkeliges Deltoid mit gleich langen Seiten ist das gleiche wie eine Raute mit nur rechten Winkeln, und das ist ja ein Quadrat. Daher gibt es keine Rauten – außer den Quadraten – die rechtwinkelige Deltoide sind.

LEHRER: Das ist vollkommen richtig! Betrachten wir das Diagramm nochmals. Zuerst stellen wir fest, dass die Figuren und ihre Eigenschaften immer spezieller werden, wenn wir es von oben nach unten verfolgen. So benötigen zum Beispiel die Trapeze nur ein Paar von gegenüberliegenden parallelen Seiten, bei den Parallelogrammen sind es schon zwei derartige Paare. Bei den Rechtecken kommt dann noch die Eigenschaft der supplementären gegenüberliegenden Winkel von den gleichschenkeligen Trapezen hinzu, während die Quadrate die gleich langen Seiten von den Rauten erhalten. Man kann dasselbe für andere Eigenschaften beobachten wie gleich lange oder senkrecht stehende Diagonalen, Symmetrieachsen, gleich große gegenüberliegende Winkel usw. So hat zum Beispiel ein Trapez im Allgemeinen keine gleich langen Diagonalen, das gleichschenkelige Trapez hingegen schon. So ergibt die Durchschnittsmenge aus gleichschenkeligen Trapezen und Parallelogrammen die Rechtecke mit gleich langen (einander halbierenden) Diagonalen.

Umgekehrt werden die Figuren immer allgemeiner wenn wir uns im Diagramm von unten nach oben bewegen. So ist eine Raute allgemeiner als ein Quadrat und ein Deltoid wieder allgemeiner als eine Raute. Wenn man nun die übliche Definition eines Deltoids als Viereck mit zwei Paaren von benachbarten gleich langen Seiten betrachtet, kann man sich fragen, ob sich das Konzept *Deltoid* noch weiter verallgemeinern lässt. Wer von euch möchte die eine oder andere Bedingung, die ein Deltoid beschreibt, nennen, die wir weglassen könnten um damit eine neue Art von Vierecken zu definieren, von der das Deltoid einen Sonderfall bildet?

SAFA: Wie ist das mit einem Viereck, bei dem mindestens ein Paar von benachbarten Seiten gleich lang sind?

LEHRER; Sehr gut, Safa. Wir wollen diese Figuren *schiefe Deltoide* nennen. Damit stellt sich die Frage, ob die Berücksichtigung dieser Figuren unser Schema von oben verändert. Worauf sollten wir also im Besonderen achten? Ja, Susan?

SUSAN: Wir müssen sorgfältig die Möglichkeit der Existenz neuer Durchschnittsmengen zwischen den schiefen Deltoiden, den Sehnenvierecken und den Trapezen prüfen und dann unser Diagramm anpassen.

LEHRER: Ganz richtig, Susan. Wie könnten wir eine Figur definieren, die die Eigenschaften von Trapez und schiefem Deltoid vereinigt?

SAFA: Wie wäre es damit: das sind jene schiefen Deltoide, die zumindest ein Paar von gegenüberliegenden parallelen Seiten haben?

LEHRER: Das klingt ja ganz gut. Kannst Du uns einige Beispiele dafür aufzeichnen?

Safa begibt sich zur Tafel und zeichnet die Figuren, die in Abbildung 10 zu sehen sind.

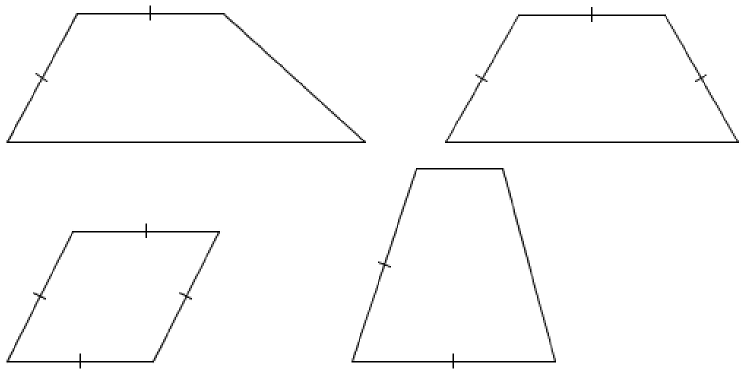


Abbildung 10

LEHRER: Gut, was meint die Klasse? Hat sie alle möglichen Beispiele hingezeichnet?

ANNE: Nein, das hat sie nicht. Sie hat die Quadrate ausgelassen, die auch dazu gehören.

JAN: Und die letzte Figur und die erste sind eigentlich gleich, Sir.

LEHRER: Okay, welchen Namen könnten wir diesen Vierecken geben?

ANNE: Wir könnten sie als *schiefe Trapeze* bezeichnen.

Der Rest der Klasse nicht zustimmend.

LEHRER: Anscheinend haben wir allgemeine Zustimmung. Sehen wir uns die schiefen Trapeze noch etwas genauer an. Was ist nach eurer Meinung der Durchschnitt zwischen den schiefen Trapezen und den Deltoiden – wenn es überhaupt einen gibt? Ja bitte, Jan!

JAN: Das kann man leicht aus den Zeichnungen von Safa erkennen. Das müssen die Rauten sein.

LEHRER: Bist du dir da ganz sicher? Oder doch nicht! Ich möchte, dass ihr als Hausübung nachweist, dass ein Deltoid mit mindestens einem Paar von gegenüberliegenden parallelen Seiten eine Raute ist.
Lassen wir das jetzt und schauen wir weiter! Was ist mit rechtwinkeligen Deltoiden? Was ist der Durchschnitt zwischen ihnen und den schiefen Trapezen?

SAFA: Sind das die Quadrate?

LEHRER: Gut, und zwischen den schiefen und den gleichschenkeligen Trapezen? Peter?

PETER: Das ist die Figur rechts oben in der Skizze. Ich würde das *dreiseitiges Trapez* nennen.

LEHRER: Ja, und natürlich auch die Quadrate als Spezialfälle. Wer traut sich zu, eine Definition der dreiseitigen Trapeze zu formulieren? Du, Jan?

JAN: Ich möchte sie als gleichschenkelige Trapeze mit mindestens drei gleich langen Seiten definieren, denn das würde die Quadrate einschließen, nicht aber die Rauten, denn diese sind keine gleichschenkeligen Trapeze.

PETER: Warum sagen wir nicht einfach, dass es Trapeze mit mindestens drei gleich langen Seiten sind?

SUSAN: Das wäre nicht richtig, denn das würde die Rauten mit einbeziehen. Denk daran, dass die gesuchte Definition alle Eigenschaften der gleichschenkeligen Trapeze umfassen muss, wie auch die der schiefen Trapeze. Mein Vorschlag als Alternative zur Definition von Jan ist: ein Sehnenviereck mit mindestens drei gleich langen Seiten.

SAFA: Susan, enthält deine Definition wirklich genügend Information, um zB zu beweisen, dass zumindest ein Paar gegenüberliegender Seiten auch parallel ist?

SUSAN: Ich glaube schon – das ist doch logisch, aber momentan fällt mir dazu kein Beweis ein.

LEHRER: Susan, dann komm doch zur Tafel und wir versuchen, den Beweis zu führen.

SUSAN: Na gut, ich werde es probieren.

Susan geht zur Tafel und zeichnet zuerst das Diagramm laut Abbildung 11. Dann denkt sie eine Weile nach.

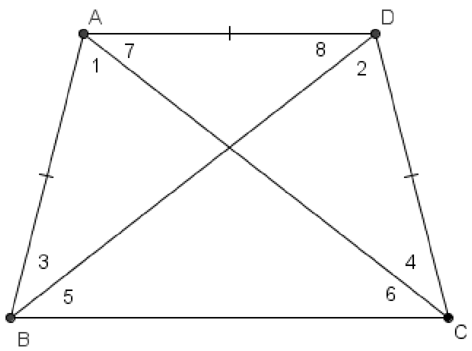


Abbildung 11

SUSAN: Ja, so muss es gehen. Weil *ABCD* ein Sehnenviereck ist, gilt $\angle 1 = \angle 2$ und $\angle 3 = \angle 4$ weil sie an den gleichen Sehnen liegen. Daher sind die Dreiecke ΔOAB und ΔODC kongruent (WWS-Satz), woraus folgt, dass $OB = OC$. Daraus folgt $\angle 5 = \angle 6$, aber auch $\angle 5 = \angle 7$, da sie an der gleichen Sehne *DC* liegen. Dann sind aber $\angle 6 = \angle 7$ Gegenwinkel, woraus folgt, dass $AD \parallel BC$.

SAFA: Ja, jetzt sehe ich das auch. Aber du hast nicht die Tatsache verwendet, dass *AD* gleich lang ist wie *AB* und *DC*. Mit anderen Worten heißt das, dass wir vorher ein gleichschenkeliges Trapez auch als ein Sehnenviereck mit zumindest einem gegenüberliegenden Seitenpaar mit gleichen Längen hätten definieren können. Dann hätten wir mit dem gleichen Beweis zeigen können, dass zumindest ein Paar gegenüberliegender Seiten parallel sein muss. Oder nicht, Sir?

LEHRER: Ganz recht, Safa. Erinnere dich daran, dass ich schon einmal gesagt habe, dass es für ein und denselben Begriff verschiedene Definitionen geben kann, die zu einfacheren Beweisen der weiteren Eigenschaften verhelfen können. Das ist ein wichtiger Gesichtspunkt, den die Mathematiker üblicherweise nicht aus den Augen verlieren, wenn sie Definitionen formulieren. Damit wollen wir uns morgen näher beschäftigen. Jedenfalls ist eine weitere Durchschnittsmenge offensichtlich, nämlich jene zwischen schiefen Deltoiden und den Sehnenvierecken, die ich als *schiefe Sehnenvierecke* bezeichnen will. Wer kann dafür eine Definition geben?

Anne meldet sich.

ANNE: Die schiefen Sehnenvierecke sind schiefe Deltoide, bei denen gegenüberliegende Winkel supplementär sind, oder wir sagen, es sind Sehnenvierecke, bei denen zumindest zwei benachbarte Seiten gleich lang sind.

LEHRER: Sehr gut, welche anderen Figuren, die wir schon kennen, bilden ebenfalls Untermengen der schiefen Sehnevierecke?

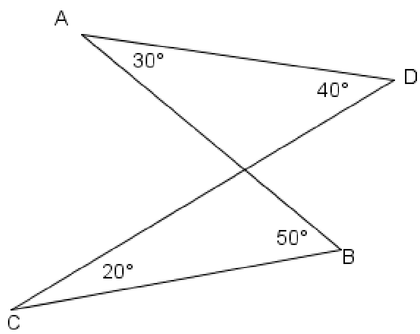
JAN: Die rechtwinkeligen Deltoide und die dreiseitigen Trapeze und dann natürlich auch die Quadrate als deren Schnittmenge.

Die Glocke läutet und beendet die Doppelstunde.

LEHRER: Ja, leider ist die Zeit wieder einmal davon gelaufen. Aber wir sind mit den Vierecken noch nicht fertig – da werden wir wahrscheinlich noch ein paar Stunden brauchen. Für morgen untersucht bitte den Durchschnitt von schiefen Trapezen und Deltoiden. Außerdem ergänzt unser Diagramm um die schiefen Deltoide, die schiefen und die dreiseitigen Trapeze und die schiefen Sehnenvierecke. Passt gut auf, dass ihr dabei alle Durchschnitte und die hierarchische Ordnung berücksichtigt.

Fragen und Aufgaben

1. Bestimme die Durchschnittsmengen zwischen den folgenden Gruppen von Vierecken? Versuche auch die zugehörigen Beweise. (Es könnte nützlich sein, die Aufgaben 1 und 2 parallel zu bearbeiten).
    a) Parallelogramme und Deltoide
    b) Parallelogramme und gleichschenkelige Dreiecke
    c) Schiefe Trapeze und Deltoide
    d) Schiefe Trapeze und schiefe Sehnenvierecke
    e) Dreiseitige Trapeze und rechtwinkelige Deltoide
    f) Trapeze, Sehnenvierecke und schiefe Deltoide
    g) Trapeze, Sehnenvierecke und Deltoide
2. Zeichne das Diagramm aus Abbildung 9 neu und füge die schiefen Deltoide, Trapeze und Sehnenvierecke sowie die dreiseitigen Trapeze ein. Überprüfe das Diagramm auf die Ergebnisse von Aufgabe 1.
3. Untersuche sorgfältig die Eigenschaften der Winkel im dreiseitigen Trapez durch eine genaue Konstruktion und Messung oder durch Überlegung. Kannst du etwas Interessantes dabei entdecken?
4. Untersuche sorgfältig die Eigenschaften der Diagonalen im gleichschenkeligen Trapez durch eine genaue Konstruktion und Messung oder durch Überlegung. Kannst du etwas Interessantes dabei entdecken?
5. Hat ein Viereck mit einem Paar von gegenüberliegenden parallelen Seiten, bei dem das andere Seitenpaar gleich lang – aber nicht parallel – ist, notwendigerweise zwei Paare von gleichen nebeneinander liegenden Winkeln? Wenn nein, kannst du ein Gegenbeispiel angeben? Wenn ja, kannst du das beweisen?
6. Ist die folgende Figur ein Viereck? Begründe deine Antwort.



7. Stelle die Klassifikationen, die in den Abbildungen 1, 3, 4, 9 und in Aufgabe 2 gegeben sind mit Hilfe von Venn-Diagrammen (Mengendiagrammen) dar. Was fällt dir dabei auf?

Lösungen

1. a) Die Rauten. Ein Deltoid mit parallelen gegenüberliegenden Seiten muss wegen der Parallelogrammeigenschaft gleich lange gegenüberliegende Seiten haben. Beim Deltoid sind benachbarte Seiten gleich lang, daher sind alle Seiten gleich lang.

   b) Die Rechtecke. Ein Viereck mit gleichen benachbarten Winkeln (Eigenschaft des gleichschenkeligen Trapezes) und gleichen gegenüberliegenden Winkeln (Parallelogramm) muss lauter gleich große Winkel (= 90°) haben.

   c) Die Rauten. Beweise, dass ein Deltoid, bei dem ein Paar gegenüberliegender Seiten parallel ist, eine Raute sein muss. Betrachte dazu die Abbildung 1.1. Die Winkel $\angle BAC$ und $\angle DAC$ sind gleich (Deltoid), aber wenn $AD \parallel BC$ sein soll, dann haben wir auch $\angle BCA = \angle DAC$ woraus wiederum folgt, dass $\angle BAC = \angle BCA$. Daher ist das Dreieck ΔABC gleichschenkelig und aus der Symmetrie bezüglich AC wird geschlossen, dass alle Seiten gleichlang sind.

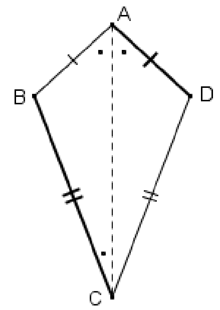


Abbildung 1.1

   d) Die dreiseitigen Trapeze. Zeige, dass ein schiefes Sehnenviereck mit einem Paar von parallelen gegenüberliegenden Seiten ein dreiseitiges Trapez ist (siehe Abbildung 1.2). Wenn $AD \parallel BC$, dann $\angle BCA = \angle CAD$. Da aber die die Sehnen AB und AD gleiche Länge haben, gilt auch $\angle BCA = \angle ACD$. Daraus folgt aber weiter $\angle CAD = \angle ACD$, was zur Folge hat, dass $AD = CD$. Damit haben wir ein gleichschenkeliges Trapez mit drei gleich langen Seiten, w.z.b.w.

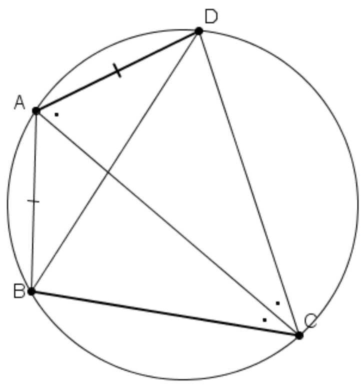


Abbildung 1.2

   e) Die Quadrate. Wenn ein rechtwinkeliges Deltoid drei gleich lange Seiten hat (dreiseitiges Trapez), dann muss es eine Raute sein (alle Seiten sind gleich lang). Eine Raute mit einem rechten Winkel ist ein Quadrat.

f) Die dreiseitigen Trapeze. Nach der Definition sind die schiefen Trapeze der Durchschnitt zwischen den Trapezen und den schiefen Deltoiden und die schiefen Sehnenvierecke der Durchschnitt zwischen den Sehnenvierecken und den schiefen Deltoiden. Aber der Durchschnitt zwischen den schiefen Trapezen und den schiefen Sehnenvierecken sind die dreiseitigen Trapeze (siehe 1d).

g) Die Quadrate. Der Durchschnitt zwischen den Trapezen und den Sehnenvierecken sind die gleichschenkeligen Trapeze (wurde im Text behandelt). Ein gleichschenkeliges Trapez mit einem Paar von gleichen gegenüberliegenden Winkeln (Deltoid) muss ein Rechteck sein (alle vier Winkel sind gleich). Ein Rechteck mit einem Paar von gleichen benachbarten Seiten (Deltoid) ist ein Quadrat.

2. Siehe Abbildung 1.3. (aus dem englischen Original)

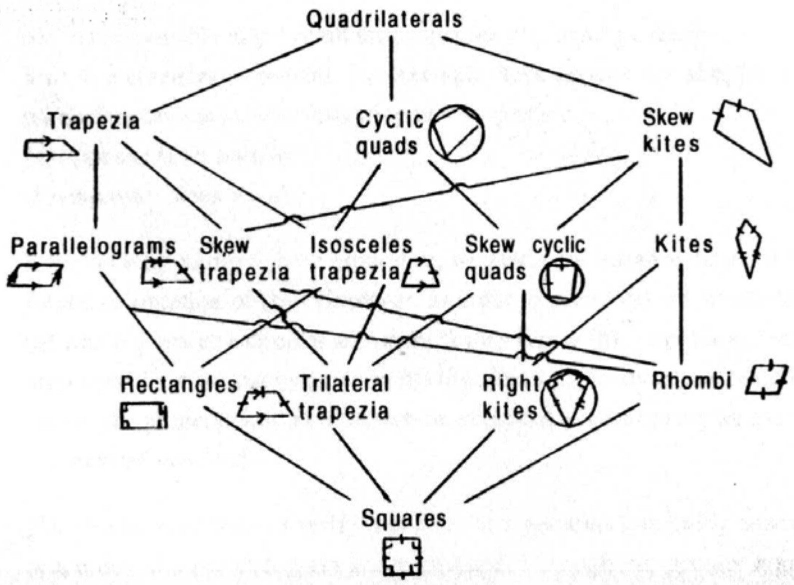


Abbildung 1.3

3. Die Diagonalen eines dreiseitigen Trapezes halbieren die beiden Basiswinkel. (Jene, die der vierten – nicht gleich langen – Seite anliegen). Betrachte dazu Abbildung 1.4.

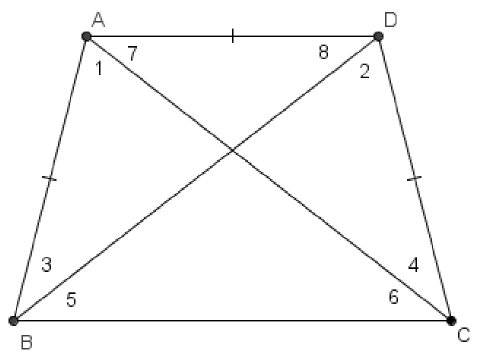


Abbildung 1.4

Die Winkel $\angle 3$ und $\angle 8$ sind gleich, da das Dreieck ΔABD gleichschenkelig ist. Wegen $AD \parallel BC$ ist auch $\angle 8 = \angle 5$ und daher weiters $\angle 3 = \angle 5$; damit halbiert BD den Winkel $\angle ABC$. Auf die gleiche Weise können wir zeigen, dass die Diagonale AC den Winkel bei C halbiert und weil $\angle B = \angle C$ werden sie in gleiche Hälften geteilt. (Aus diesem Grund folgt auch, dass einer der Basiswinkel eines schiefen Trapezes immer durch eine Diagonale halbiert wird).

4. Die Diagonalen eines gleichschenkeligen Trapezes sind gleich lang. Betrachte dazu Abbildung 1.5. $AC = BD$ weil $ABCD$ ein Sehnenviereck ist und $\angle ABC = \angle BCD$ (gleiche Winkel am Umkreis haben gegenüberliegende gleich lange Sehnen). Oder, anders betrachtet, die Dreiecke ΔABC und ΔDCB sind kongruent (nach dem SWS-Satz).

5. Gegeben sei ein Viereck mit den Eigenschaften wie in Abbildung 1.6 gezeigt wird. Konstruiere DO parallel zu AB mit O auf BC. Dann ist $ABOD$ ein Parallelogramm was auf $AB = DO$ schließen lässt. Da auch $AB = DC$, folgt, $DO = DC$ und für die Winkel $\angle DOC = \angle OCD$. $\angle DOC$ ist gleich $\angle ABO$, weil $AB \parallel DO$ und daher $\angle ABO = \angle OCD$. Da die Winkel bei A und D Supplementärwinkel der Winkel bei B und C sind, folgt schließlich dass $\angle BAD = \angle ADC$.

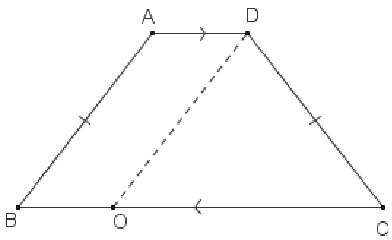


Abbildung 1.6

6. In einer ersten natürlichen Reaktion könnte man ein derartiges "*Monster*" als ein Viereck ganz einfach zurückweisen, da es nicht unserer üblichen Ansicht eines Vierecks entspricht. Weiters ließe sich argumentieren, dass es sich nicht um ein *Viereck* handelt, da die Winkelsumme nicht 360° beträgt. Man wird daher versuchen, den Begriff *Viereck* so zu definieren, dass derartige Figuren ausgeschlossen sind.

   Auf der anderen Seite könnte man aber doch überlegen, diese Figur als ein Viereck zu bezeichnen. Dies soll im nächsten Kapitel auch geschehen.[1]

7. Es wird dann immer schwieriger, Venn-Diagramme zu zeichnen sobald die Anzahl der Vierecksarten und deren Durchschnitte steigen. Daher wurde in dem Text diese Form des Klassifikationsschemas gewählt. Damit lassen sich komplexere Klassifikationen wesentlich einfacher darstellen.

[1] In der Kinematik werden derartige Vierecke als *durchschlagende* (*Gelenk-*)*Vierecke* bezeichnet und haben in der Getriebelehre ihre Bedeutung. Böhm