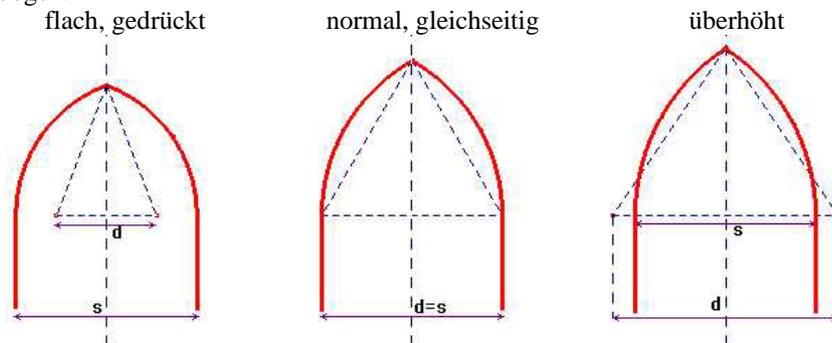


Themenbereich	
Trigonometrie, Geometrische Zusammenhänge	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none"> Geometriekenntnisse vertiefen 	TI-92 und Cabri (H0110a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	
Lehrplanbezug (Österreich):	6. Klasse
Quelle: Franz Hauser	

Gotische Spitzbögen und Kirchenfenster

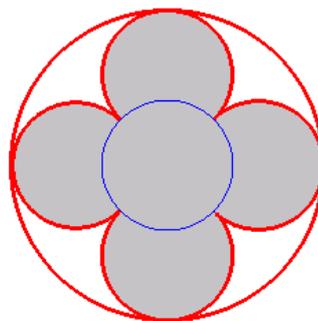
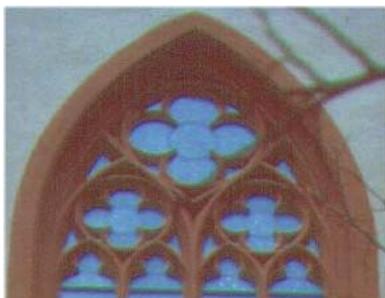
Angabe und Fragen:

Gotische Spitzbögen:



Nimm $s = 10$ an und stelle die Fläche des Spitzbogens für $5 \leq d \leq 15$ in einem Schaubild dar.

Gotische Kirchenfenster sind gekennzeichnet durch das sogenannte "Maßwerk", den ornamentalen Fensterschmuck, der das Fenster haltbar gegen Winddruck macht.

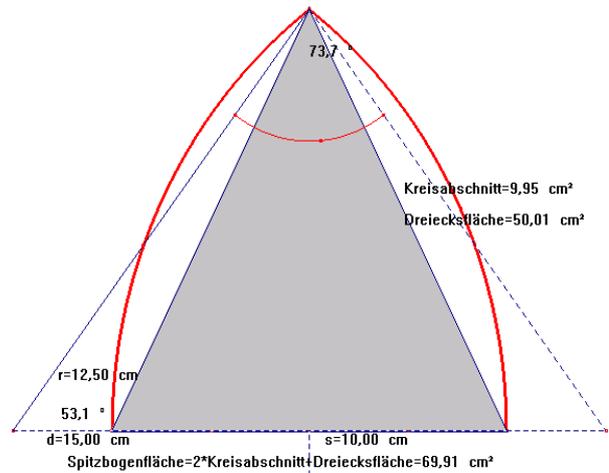
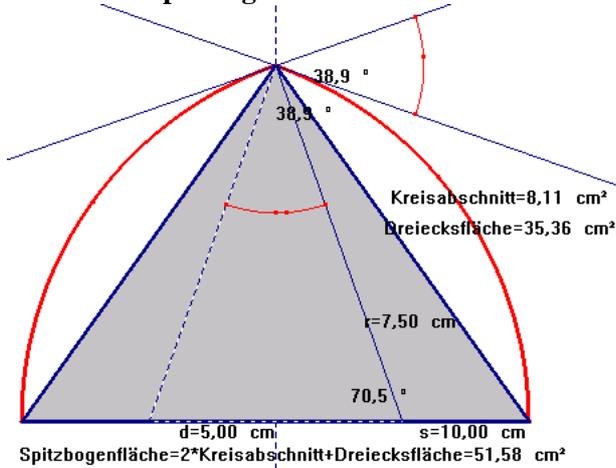


Typisch für gotische Kirchenfenster ist eine weitere Unterteilung mit Kreisflächen, sogenannten "Pässen".

Berechne die Fensterfläche im "Vierpaß" für $R = 1$.

Ausarbeitung (System: TI-92)

Fläche des Spitzbogens :



Lösung mit Cabri

$$r = \frac{s+d}{2}$$

$$\cos\left(\frac{d}{r}\right) \rightarrow \alpha$$

$$r^2 \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{360} - r^2 \cdot \frac{\sin(\alpha)}{2} \rightarrow as$$

$$s = \frac{\sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}}{2} \rightarrow ad$$

$$2 \cdot as + ad \mid s = 10 \text{ and } d = 5 \quad 51.5638$$

$$2 \cdot as + ad \mid s = 10 \text{ and } d = 15 \quad 69.8899$$

Für den Radius des Kreisbogens gilt: $r = \frac{s+d}{2}$

Weiters ist $\cos \alpha = \frac{d/2}{r}$.

Somit erhält man für die Fläche des Kreisabschnittes

$$A_{\text{Kreisabschnitt}} = A_{\text{Kreisabschnitt}} = \frac{r^2 \pi \alpha}{360} - \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2}$$

Die Dreiecksfläche errechnet sich aus

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{s \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}}{2}$$

Für die Fläche des Spitzbogens gilt:

$$A_{\text{Spitzbogen}} = 2 \cdot A_{\text{Kreisabschnitt}} + A_{\text{Dreieck}}$$

In der Fläche des Spitzbogens wird $s = 10$ und d durch x ersetzt, der Ausdruck dann markiert und in den [y=]-Editor kopiert.

$$2 \cdot as + ad \mid s = 10 \text{ and } d = 15 \quad 69.8899$$

$$2 \cdot as + ad \mid s = 10 \text{ and } d = x$$

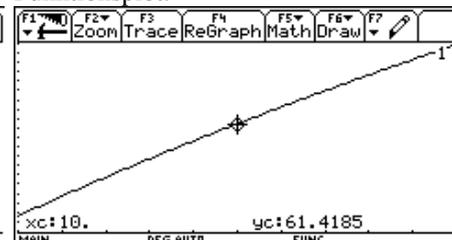
$$(x+10)^2 \cdot \sin\left(\frac{-180 \cdot \frac{\pi \cdot \cos^{-1}\left(\frac{x}{x+10}\right)}{180}}{\pi}\right) - \pi$$

$$y_1 = \frac{(x+10)^2 \cdot \sin\left(\frac{-180 \cdot \frac{\pi \cdot \cos^{-1}\left(\frac{x}{x+10}\right)}{180}}{\pi}\right) - \pi}{4}$$

Wahl der WINDOW-Koordinaten:

xmin=5
 xmax=15
 xscl=1
 ymin=50
 ymax=70
 yscl=1
 xres=2

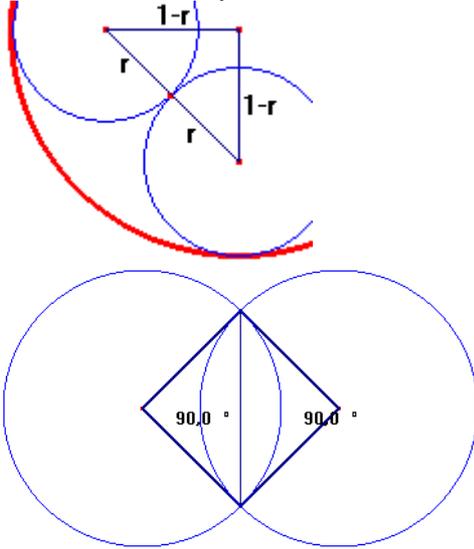
Funktionsplot:



Funktionstabelle:

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Setup	Cell	Mode	Del	Ins
x	u1				
8.	57.681				
9.	59.579				
10.	61.418				
11.	63.204				
12.	64.94				
13.	66.631				
14.	68.28				
15.	69.89				
x=8					
MAIN		DEG AUTO		FUNC	

Fensterfläche im "Vierpaß" für $R = 1$



Für das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck gilt:

$$(1 - r)^2 + (1 - r)^2 = (2r)^2$$

Durch Lösen der Gleichung erhält man für

$$r = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414$$

$$A_{\text{Kreisabschnitt}} = \frac{r^2 \pi}{4} - \frac{r^2}{2}$$

Fensterfläche in „Vierpaß“:

$$A = 5 \cdot r^2 \pi - 8 \cdot A_{\text{Kreisabschnitt}}$$

$$A \approx 2,3$$

Zusätzliches Übungsbeispiel

In den beiden Kirchenfenstern ist der Radius des Spitzbogens mit $R = 1$ gegeben. Berechne die Radien der Kreise und die Fensterfläche des "Dreipaß".

