BspNr: G0011

Themenbereich	
Finanzmathematik (Tilgungsplan)	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Textanalyse • Anwendung der Methoden der dynamischen Inv.Rechung, numerische Methoden	TI-83/92 (G0011a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	G0010, G0012, G0013, G0014, G0015 (Anhang)
Lehrplanbezug (Österreich):	6. bis 8. Klasse
Quelle: Josef Böhm	

Finanzmathematik (2)

Angabe:
Die Firma MagicPlast plant die Anschaffung einer neuen Spritzgussmaschine zur Herstellung von Kunststoffteilen. Eine Anlage zum Anschaffungspreis von ca. 150 000 € steht zur Disposition.
In den ersten 5 Jahren wird durch den Einsatz dieser Anlage ein Mehrertrag von jährlich ca 35 000 € erwartet, der in den darauffolgenden beiden Jahren auf 25 000 € sinken dürfte. Man schätzt, die Anlage nach 7 Jahren um ca 12 000 € verkaufen zu können.

Fragen:
a) Soll die Anlage angeschafft werden, wenn ein Kalkulationszinsfuß von 10% eingesetzt wird?
b) Wie hoch ist der interne Zinsfuß, wenn die Annahmen zutreffen? In welchem Bereich bewegt sich dieser Zinsfuß unter der Annahme, dass die geschätzten Zahlen einen Spielraum von ± 5% haben? Das gilt auch für den Anschaffungspreis.
c) Wie ändert sich die effektive Verzinsung, wenn für die Anschaffung ein Kredit über 50000 € aufgenommen wird, der innerhalb von 7 Jahren durch nachschüssige halbjährige Raten getilgt wird? Der Kreditzins beträgt 7,5% per anno. (Rechne mit den geschätzten Daten!)

Für eine zweite dringend notwendige Maschine, die jetzt 300 000 € kostet, hat man vor drei Jahren bereits eine Investitionsrücklage in der Höhe von 30 000 € gemacht, die alle drei Monate um jeweils 15 000 € nachschüssig aufgestockt werden konnte. Diese Rücklagen wurden zu i = 6% angelegt.

d) Wie viele volle Raten wären noch notwendig, um die Anlage anschaffen zu können – wenn man annehmen muss, dass sich die Anlage pro Jahr um ca 8% verteuert.
e) Wie groß ist der Restbetrag auf die volle Summe 2 Monate nach Rücklage der letzten Vollrate, wenn die Anlage dann um 330 000 € angeboten wird? (Rechne mit theoretischer Verzinsung!)
f) Welcher Betrag wäre heute aufzubringen, wenn die Maschine bei Sofortkauf um 290 500 € zu haben wäre?

BspNr: G0011a

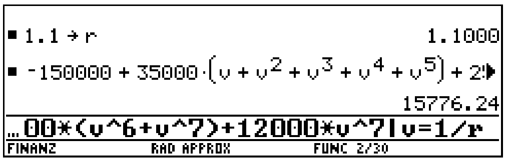
Ausarbeitung (System: TI-92)

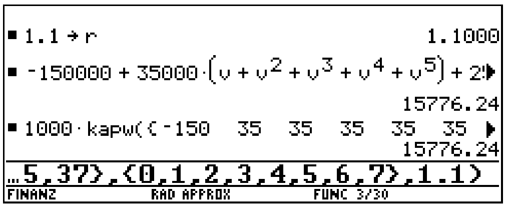
ad a)
Bei Entscheidung über die Anschaffung oder Nichtanschaffung nur beu nur einer Investitionsalternative kann die *Kapitalwertmethode* als Entscheidungsgrundlage herangezogen werden. (Siehe zum Unterschied Aufgabe Finanzmathematik 5)

Der Kapitalwert ist der Barwert aller geschätzten Erträge aus der Investition vermindert um den Barwert aller Kosten für die Investition zu einem vom Investor festgesetzten Kalkulationszinsfuß (= Alternativrendite, Mindestrendite). Bei einem nichtnegativen Kapitalwert wird die angestrebte Verzinsung des eingesetzten Kapitals zumindest erreicht, daher ist die Investition durchzuführen.

Nach dem oben gesagten ergibt sich der Kapitalwert als:

$Kap = -150\,000 + 35000\,(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5) + 25000(v^6 + v^7) + 12000\,v^7$ mit $v = 1/1{,}10$

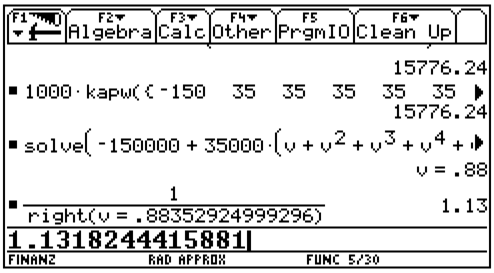




Falls Investitionsrechnung intensiver behandelt wird, kann es sinnvoll sein, eine Funktion *kapw*(*Zahlungsliste*,*Faelligkeitsliste*,*Aufzinsungsfaktor*) oder ähnlich mit den Schülern zu entwickeln (siehe Anhang).

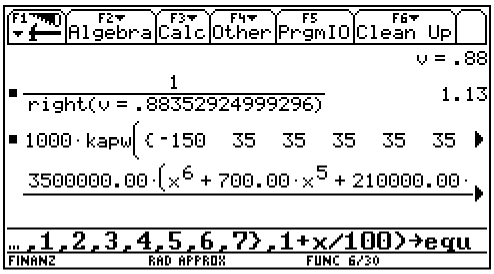
Der Kapitalwert beträgt 15776,24 €. Daher wird die angestrebte Rendite von 10% sicher erreicht werden. Die tatsächliche Rendite ergibt sich als Antwort auf b).

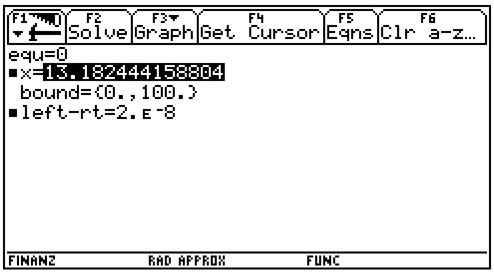
ad b)
Die **effektive Verzinsung** oder der **interne Zinsfuß** ist jener Jahreszinsfuß zu dem der Kapitalwert genau den Wert 0 annimmt.
Die Auflösung der Gleichung kann manchmal länger dauern oder überhaupt kein vernünftiges Ergebnis liefern. Da muss man in die Trickkiste greifen.



Ein Trick ist zB für v den Ausdruck $1/(1+x/100)$ zu substituieren. Dann wird der Zinsfuß x eine „handlichere“ Größe und auch für die Maschine leichter erreichbar. Sinnvolle Einschränkungen mit dem |-Operator sind hilfreich. Schließlich kann man den Kapitalwert als Funktion des Zinsfußes x definieren und grafisch über die Nullstellensuche zu einem brauchbaren Ergebnis kommen.

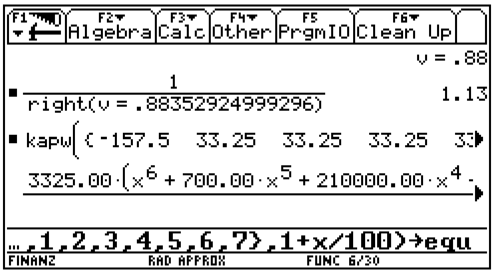
Der Numeric Solver ist ein probates Mittel für komplexe Gleichungen. Ich definiere den Kapitalwert mit einem unbekannten Zinsfuß x als *equ* und löse *equ* dann im Solver nach x:

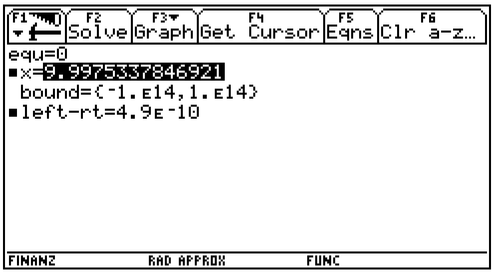


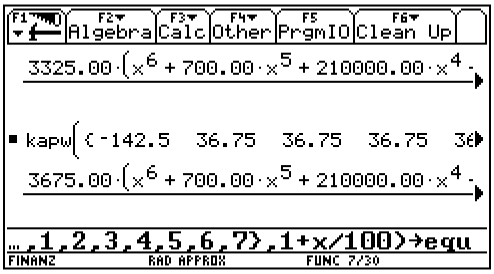


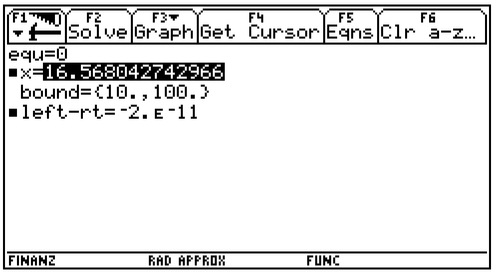
Der interne Zinsfuß beträgt demnach 13,18%.

Der schlechtestmögliche Fall tritt ein, wenn die Kosten um 5% steigen und alle Erträge um 5% geringer ausfallen, als angenommen. Diese Änderungen werden bei den Zahlungsströmen berücksichtigt. Die Rendite liegt hier bei ca 10%. Der Kapitalwert mit i = 10% liegt bei –0,01.



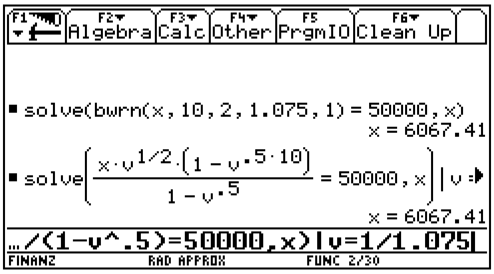


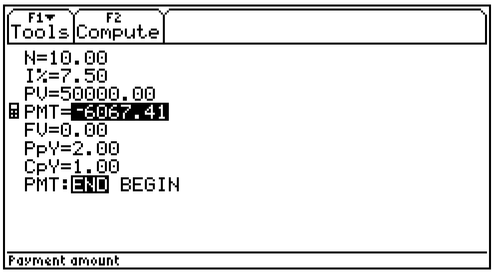




Im bestmöglichen Fall steigt die Rendite auf 16,57%. Damit liegt *i* zwischen 10% und 16,57%.

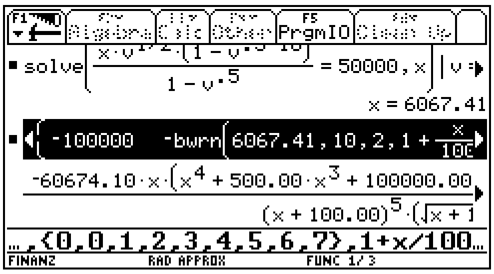
ad c)
Zuerst sind die Kreditraten zu ermitteln -auf drei Arten durchgeführt. Die Raten sind 6067,41 €)

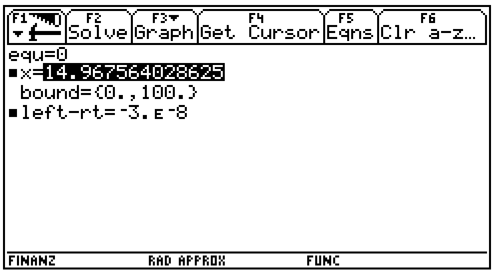




Bei der Bestimmung des Kapitalwerts kann der Anschaffungspreis um 50 000 € herabgesetzt werden – das zahlt die Bank für den Investor – dafür sind aber die Rückzahlungen unter Berücksichtigung des Kalkulationszinsfußes in die Berechung aufzunehmen. Welcher Zinsfuß ergibt nun den Kapitalwert 0?

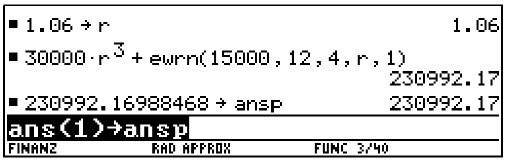
Hier wird die Lösung mit der *kapw*()- und der *bwrn*-Funktion gezeigt.





Beachte, dass beim Einsatz des Solvers die Lösungsvariable mit dem Wert belegt bleibt. Sie ist im Homescreen abrufbar, sollte aber dann mit `DelVar` gelöscht werden.
Trotz der Kreditaufnahme steigt die interne Verzinsung auf fast 15%. Ein Widerspruch? Nein, da das geborgte Geld mit 7,5% billiger ist als der Kalkulationszinsfuß wird der Kapitalwert steigen und damit auch die Rendite.

ad d)
Welcher Betrag ist bereits angespart worden?

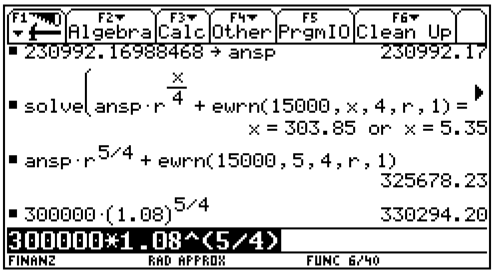


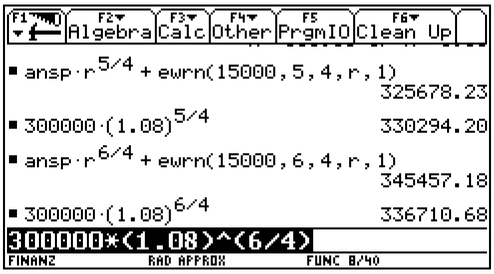
Es sind 230 992,17 und dieser Wert wird unter ansp gespeichert.

Die Frage nach der Laufzeit führt zu einer Gleichung höheren Grades, bei der darauf geachtet werden muss, dass die Zeit in der gleichen Größenordnung eingeführt wird – entweder durchgehend in Jahren, oder in Vierteljahren:

ansp*r^(x/4) + ewrn(15000,x,4,r,1) = 300000*1.08^(x/4) | r = 1.06

Hier wurde in Vierteljahren gerechnet. Das Ergebnis sind 5 ganze Vollraten. Zur Sicherheit wird die Probe durchgeführt, indem man die Ansparsumme mit dem geschätzten – gestiegenen – Anschaffungspreis nach 5, bzw. nach 6 Vierteljahren vergleicht.





Man sieht sehr schön, dass mit der 5.Vollrate der Kaufpreis noch über dem angesparten Kapital liegt, während mit der 6. Rate der Kaufpreis bereits übertroffen wird.

ad e) Es fehlen noch 4143,54 €

ad f) Es wären 59507,83 € nötig.