BspNr: F0212

Themenbereich	
Integralrechnung	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Berechnung von Untersummen und Obersummen	TI-92 (F0212a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	
Lehrplanbezug (Österreich):	8. Klasse
Quelle: Walter Wegscheider (nach einer Idee von Josef Böhm)	

Durchflussmenge bei einem Gebirgsbach

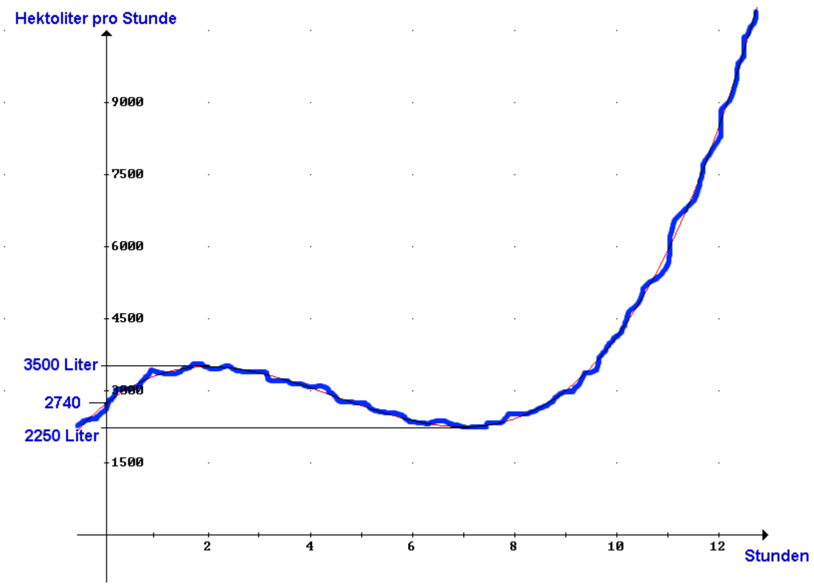
Angabe:
Bei einem Gebirgsbach wird die Durchflussmenge in Hektoliter pro Stunde bestimmt. Die Messungen werden auf einem Datenschreiber graphisch notiert (siehe Abb.). Mit Hilfe der Graphik soll die Gesamtdurchflussmenge der letzten 12 Stunden ermittelt werden.

Fragen:
a) Bestimmen Sie brauchbare Näherungsfunktionen für eine weitere mathematische Aufbereitung. Besprechen Sie zwei dafür geeignete Methoden.

b) Geben Sie Möglichkeiten für eine Näherung der Gesamtdurchflussmenge für Intervalle von 30, 15 und 5 Minuten an! Begründen Sie, warum man über eine Verkürzung der Intervalle zu besseren Näherungswerten kommt.

c) Die Intensität des Durchflusses ändert sich nicht diskret sondern kontinuierlich – was bedeutet das für die Wahl der Intervalle? Wie kann man zu einem möglichst exakten Ergebnis kommen? Berechnen Sie das – bezüglich der gewählten Funktion – exakte Ergebnis.

Abb.:



BspNr: F0212a

Ausarbeitung (System: TI-92)

ad a) Bestimmen Sie brauchbare Näherungsfunktionen für eine weitere mathematische Aufbereitung. Besprechen Sie zwei dafür geeignete Methoden.

Methode 1 – mit Regression über den TI-92 (DATA/MATRIX Editor, kubische Regression)

Im DATA/MATRIX Editor werden folgende Datenpunkte eingegeben
A(0 / 2740) B(2 / 3500) C(7 / 2250) D(12 / 9000)

Über [F5-Calc] [Calculation Type: CubicReg] [x: c1] [y: c2] [Store RegEQ to y1(x)] wird die Gleichung der Kurve bestimmt.

Das Ergebnis lautet: $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a = 20.83333$; $b = -277.5$; $c = 851.66667$; $d = 2740$
$\mathbf{y = 20.83333 \cdot x^3 - 277.5 \cdot x^2 + 851.66667 \cdot x + 2740}$

Eine Überprüfung mit Hilfe von [GRAPH] und passenden [WINDOWS] – Einstellungen zeigt eine passende Kurve.

Methode 2 – umgekehrte Kurvendiskussion
Hochpunkt H(2 / 3500)
Tiefpunkt T(7 / 2250)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ H: $f(2) = 3500$ und $f'(2) = 0$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ T: $f(7) = 2250$ und $f'(7) = 0$

Gleichungssystem:

I:	$3500 = 8a + 4b + 2c + d$	Lösung mit Hilfe des Rechners - zB. Funktion RREF:
II:	$0 = 12a + 4b + c$	RREF([8,4,2,1,3500;12,4,1,0,0;343,49,7,1,2250;147,14,1,0,0]) ergibt
III:	$2250 = 343a + 49b + 7c + d$	**f(x):** $\mathbf{y = 20x^3 - 270x^2 + 840x + 2740}$
IV:	$0 = 147a + 14b + c$	

ad b) Geben Sie Möglichkeiten für eine Näherung der Gesamtdurchflussmenge für Intervalle von 30, 15 und 5 Minuten an! Begründen Sie, warum man über eine Verkürzung der Intervalle zu besseren Näherungswerten kommt.

Über die Einpassung von Rechtecken (Untersummen) bzw. die Umschreibung von Rechtecken (Obersummen) kann versucht werden, die vorhandene Fläche (= Gesamtdurchflussmenge) durch mehrere Rechtecke zu approximieren. Dabei kann über eine Verkleinerung der Rechtecke = Verkürzung der Zeitintervalle eine bessere Näherung erzielt werden. Je kleiner die Intervalle gewählt werden, desto genauer wird die Näherung.

Untersummen:
f(x): $y = 20x^3 - 270x^2 + 840x + 2740$

$$\sum_{i=0}^{23} \frac{1}{2} \cdot f\left(i \cdot \frac{1}{2}\right) = 40125$$

$$\sum_{i=0}^{12 \cdot 4 - 1} \frac{1}{4} \cdot f\left(i \cdot \frac{1}{4}\right) = 40811.25$$

$$\sum_{i=0}^{143} \frac{1}{12} \cdot f\left(i \cdot \frac{1}{12}\right) = 41281.25$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{12 \cdot n - 1} \frac{1}{n} \cdot f\left(i \cdot \frac{1}{n}\right) = 41520$$

ad c) Die Intensität des Durchflusses ändert sich nicht diskret sondern kontinuierlich – was bedeutet das für die Wahl der Intervalle? Wie kann man zu einem möglichst exakten Ergebnis kommen? Berechnen Sie das – bezüglich der gewählten Funktion – exakte Ergebnis.
Bei einer Verkleinerung auf „unendlich klein“ kann die Fläche exakt berechnet werden. Dieser Übergang zu unendlich kleinen Rechtecken kann über das bestimmte Integral beschrieben (berechnet) werden.

$$\int_0^{12} \left(20x^3 - 270x^2 + 840x + 2740\right) \cdot dx = 41520$$

$$\frac{20x^4}{4} - \frac{270x^3}{3} + \frac{840x^2}{2} + 2740x + c \Big|_0^{12} =$$

$$= 5 \cdot 12^4 - 90 \cdot 12^3 + 420 \cdot 12^2 + 2740 \cdot 12 = 41520$$

Die Gesamtdurchflussmenge des Baches beträgt innerhalb der gemessenen 12 Stunden 41520 Hektoliter.