

Themenbereich	
Integralrechnung	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none"> <li>Berechnung von Untersummen und Obersummen</li> </ul>	TI-92 (F0210a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	F0211
Lehrplanbezug (Österreich):	8. Klasse
<b>Quelle:</b> Dr. Thomas Himmelbauer	

## Obersumme und Untersumme

### Angabe und Fragen:

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^3$ . Berechne für  $\int_0^a f(x) \cdot dx$  zunächst eine Formel, die die Obersumme bzw. Untersumme in Abhängigkeit von der Obergrenze  $a$  und der Anzahl der Teilintervalle  $n$  berechnet. Danach ist  $\int_0^a f(x) \cdot dx$  dadurch zu berechnen, dass für Obersumme und Untersumme der Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  bestimmt wird.

Das Ergebnis ist durch direkte Berechnung von  $\int_0^a f(x) \cdot dx$  zu überprüfen.

Beschreibe, wie Ober- und Untersumme für  $a = 2$  und Teilungszahl  $n = 25$  in der Graphik des CAS dargestellt werden können.

## Ausarbeitung (System: TI-92)

Teil 1:

Zunächst definieren wir die Funktion. Dann berechnen wir die Rechtecksfläche mit der Breite  $\frac{a}{n}$  und der Höhe gleich dem Funktionswert  $f(i \cdot \frac{a}{n})$  am i-ten Teilungspunkt  $i \cdot \frac{a}{n}$ . Die Summe dieser Rechtecksflächen ergibt dann die Obersumme bzw. Untersumme.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
Define f(x)=x^3 Done
Define rf(i)=f(i*a/n)*a/n Done
Define rf(i)=f(i*a/n)*a/n
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
Define rf(i)=f(i*a/n)*a/n Done
Define o(n)=sum(rf(i),i,1,n) Done
Define u(n)=sum(rf(i),i,0,n-1) Done
define u(n)=sum(rf(i),i,0,n-1)
MAIN RAD AUTO FUNC 4/30
    
```

Der Grenzwert liefert dann den Wert des Integrals.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
Define u(n)=sum(rf(i),i,0,n) Done
o(n) a^4*(n+1)^2 / 4*n^2
u(n) a^4*(n^2-2*n+1) / 4*n^2
u(n)
MAIN RAD AUTO FUNC 6/30
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
u(n) a^4*(n^2-2*n+1) / 4*n^2
lim o(n) a^4 / 4
lim u(n) a^4 / 4
limit(u(n),n,inf)
MAIN RAD AUTO FUNC 8/30
    
```

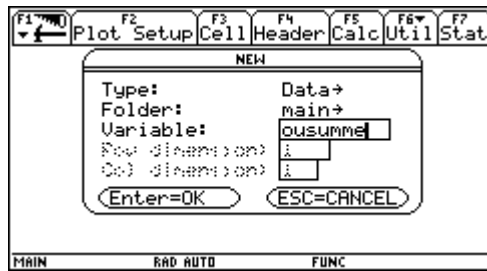
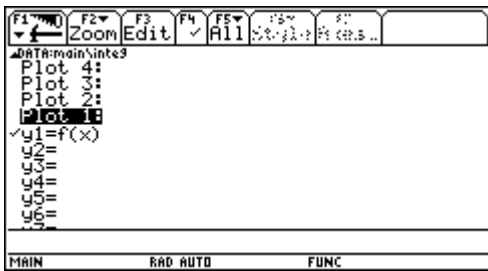
Das kann mit der eingebauten Rechnerfunktion überprüft werden.

```

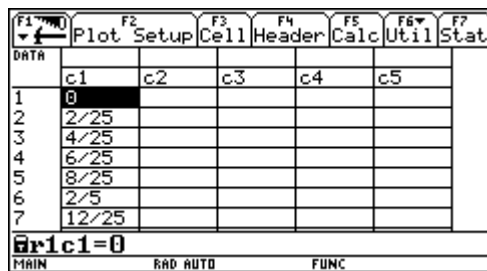
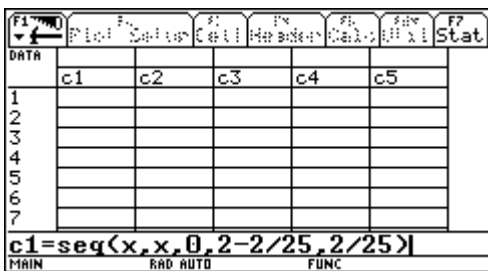
F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
lim o(n) a^4 / 4
lim u(n) a^4 / 4
int_a f(x) dx a^4 / 4
int(f(x),x,0,a)
MAIN RAD AUTO FUNC 9/30
    
```

Teil 2:

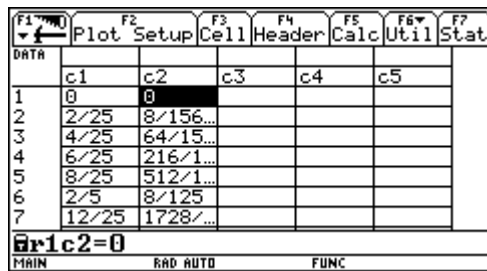
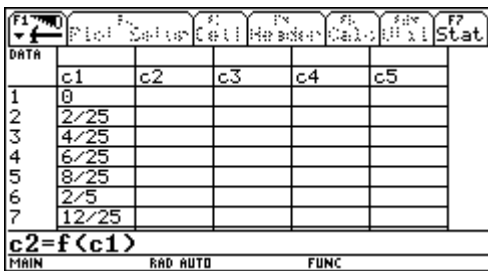
Zunächst definieren wir die Funktion im [y=]-Editor. Danach eröffnen wir ein neues Blatt im Data-Matrix-Editor.



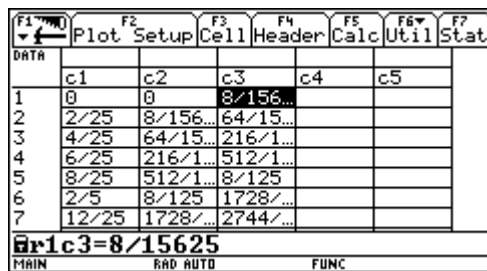
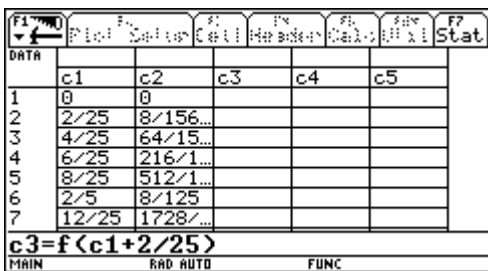
In die Spalte  $c1$  geben wir die Intervalluntergrenze und die Teilungspunkte des Intervalles ein (Intervall  $[0,2]$ ,  $n = 25$  Teilintervalle). Vor der Eingabe Cursor auf  $c1$  stellen und **[ENTER]** drücken.



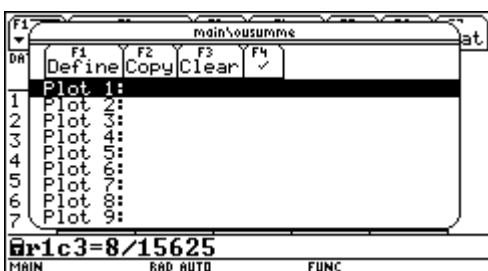
In der Spalte  $c2$  berechnen wir die Funktionswerte von  $c1$ . Das sind die Werte, die wir zur Darstellung der Untersumme benötigen. Vor der Eingabe Cursor auf  $c2$  stellen und **[ENTER]** drücken.

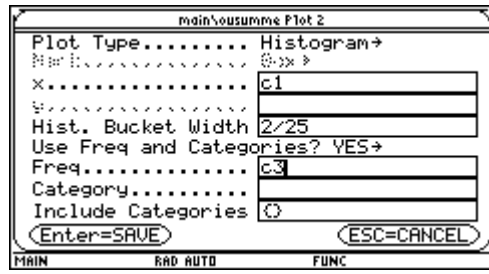
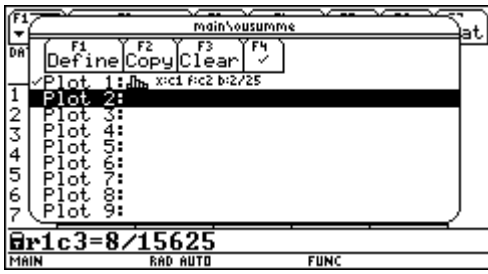


In der Spalte  $c3$  berechnen wir die Funktionswerte von  $c1$  jeweils um  $2/25$  erhöht. Das sind die Werte, die wir zur Darstellung der Obersumme benötigen. Vor der Eingabe Cursor auf  $c3$  stellen und **[ENTER]** drücken.



Dann definieren wir  $Plot1$  für die Untersumme und  $Plot2$  für die Obersummen.





Damit ergibt sich mit entsprechenden Windowvariablen folgendes Bild. (xmin muss ein Vielfaches der Länge der Teilintervalle 2/25 sein, sonst wird das Histogramm verschoben angezeigt)

