

BspNr: F0110

Themenbereich	
Integralrechnung	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none">Anwendung der IntegralrechnungErstellung der Integrationsfunktion durch Regression	TI-92 (F0110a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	
Lehrplanbezug (Österreich):	8. Klasse
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer	

Staumauer

Angabe:

Im Aorolatal in 1800m Seehöhe soll ein Speicherkraftwerk errichtet werden. Über ein Kalenderjahr wurden die Wassermengen der zubringende Bäche pro Kalenderwoche bestimmt

Kalenderwoche	Wassermenge in Kubikmeter
1. Woche bis 17. Woche	0
18. Woche	50000
19. Woche	50000
20. Woche	100000
21. Woche	500000
22. Woche	1000000
23. Woche	1200000
24. Woche	1800000
25. Woche	2300000
26. Woche	2500000
27. Woche	2000000
28. Woche	1900000
29. Woche	2500000
30. Woche	3000000
31. Woche	3200000
32. Woche	3600000
33. Woche	4000000
34. Woche	3700000
35. Woche	3700000
36. Woche	3500000
37. Woche	3000000
38. Woche	3000000
39. Woche	2500000
40. Woche	2000000
41. Woche	1800000
42. Woche	1500000
43. Woche	1100000
44. Woche	800000
45. Woche	500000

Fragen:

- 1) Berechne die über das Kalenderjahr anfallende Menge an speicherbarem Wasser aus den diskreten Daten der Tabelle! Stelle die Daten als Histogramm dar!
- 2) Entwickle ein kontinuierliches Modell (eine stetige Funktion, die die anfallende Wassermenge in Abhängigkeit von der Kalenderwoche berechnet) und berechne mit ihrer Hilfe die über das Kalenderjahr anfallende Menge an speicherbarem Wasser!
- 3) Bestimme unter der Annahme, dass das Kraftwerk in jeder Woche des Jahres die gleiche Wassermenge benötigt und die Jahresmenge an Wasser verbraucht werden soll, in welcher Kalenderwoche am wenigsten bzw. am meisten Wasser im Stausee vorhanden sein wird. Unter der vereinfachten Annahme, dass das Staubecken ein Quader mit 2000 m Länge und 200 m Breite ist und der Wassertiefstand einem leeren Becken gleichkommt, ist die Mindesthöhe für eine Staumauer abzuschätzen!

BspNr: F0110a

Ausarbeitung (System: TI-92)

Zunächst werden in die Daten in den Data/Matrix-Editor eingegeben. Über die Funktion cumSum kann dann sofort die Jahresmenge bestimmt werden, 56 800 000 Kubikmeter.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	c1	c2	c3			
1	18	50000				
2	19	50000				
3	20	100000				
4	21	500000				
5	22	1000000				
6	23	1200000				
7	24	1800000				

c1=seq(x,x,18,45,1)

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	c1	c2	c3			
1	18	50000				
2	19	50000				
3	20	100000				
4	21	500000				
5	22	1000000				
6	23	1200000				
7	24	1800000				

c3=cumSum(c2)

Danach wählen wir über Plot Setup die Einstellungen für ein Histogramm.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	c1	c2	c3			
27	44	800000	56300000			
28	45	500000	56800000			
29						
30						
31						
32						
33						

r28c3=56800000

F1	F2	F3	F4
Define	Copy	Clear	✓
Plot 1:			
Plot 2:			
Plot 3:			
Plot 4:			
Plot 5:			
Plot 6:			
Plot 7:			
Plot 8:			
Plot 9:			

r28c3=56800000

Plot Type..... Histogram→
Mar.....
X..... c1
Y.....
Hist. Bucket Width 1
Use Freq and Categories? YES→
Freq..... c2
Category.....
Include Categories <input type="checkbox"/>

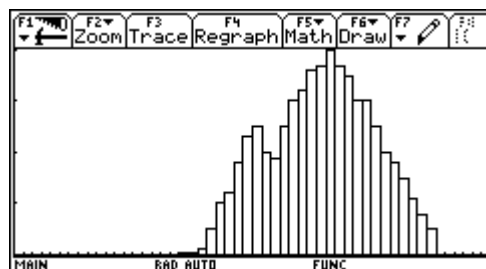
Enter=SAVE **ESC=CANCEL**

F1	F2	F3	F4
Define	Copy	Clear	✓
Plot 1:			
Plot 2:			
Plot 3:			
Plot 4:			
Plot 5:			
Plot 6:			
Plot 7:			
Plot 8:			
Plot 9:			

r28c3=56800000

Mit entsprechenden Windowvariablen erhalten wir das folgende Bild.

xmin=0.
xmax=52.
xsc1=1.
ymin=0.
ymax=4000000.
ysc1=1000000
xres=2.



Nun wollen wir das kontinuierliche Modell entwickeln. Wir wählen eine quadratische Regression, um unser Histogramm durch den Graphen einer Parabel zu ersetzen.

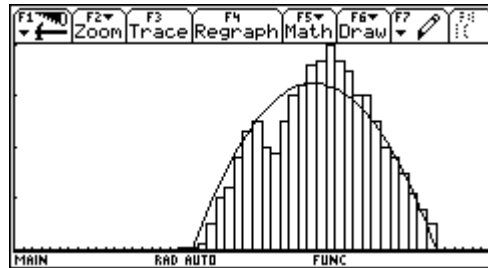
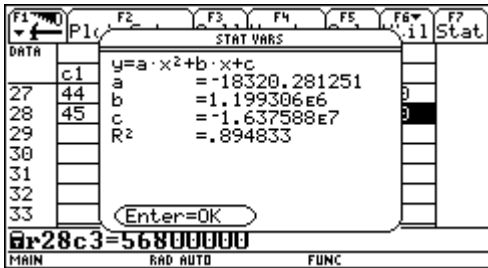
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	c1	c2	c3			
27	44	800000	56300000			
28	45	500000	56800000			
29						
30						
31						
32						
33						

r28c3=56800000

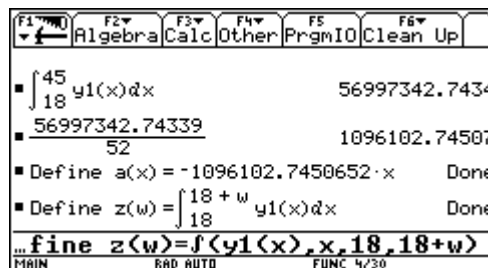
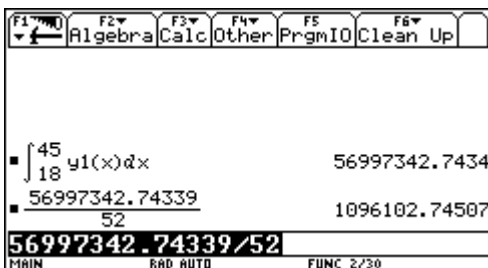
Calculation Type.. QuadReg →
X..... c1
Y..... c2
Store RegEQ to.... y1(x)→
Use Freq and Categories? NO→
Freq.....
Category.....
Include Categories <input type="checkbox"/>

Enter=SAVE **ESC=CANCEL**

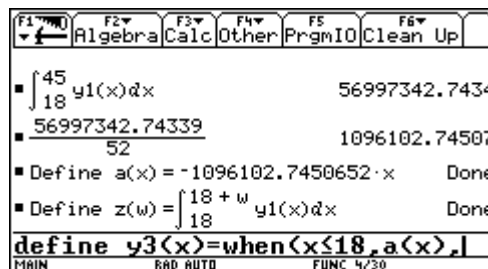
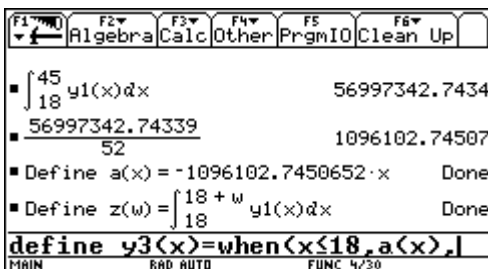
Die unter $y_1(x)$ abgespeicherte Regressionsparabel ergibt folgenden Graphen.



Das Integral liefert uns die jährlich anfallende Wassermenge, dividiert durch 52 erhalten wir die Menge, die pro Woche dem Kraftwerk geliefert werden kann. Dann definieren wir zwei Funktionen. Zunächst die Abflussmenge aus dem Staubecken innerhalb der ersten x -Kalenderwochen (Menge pro Woche mal Anzahl der Wochen). Dann die Zuflussmenge in das Staubecken innerhalb der ersten w Wochen nach der 18. Woche (vor der 18. Woche gibt es keine Zuflüsse) durch Integrieren der Parabel.

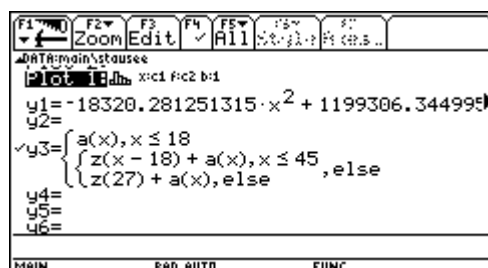
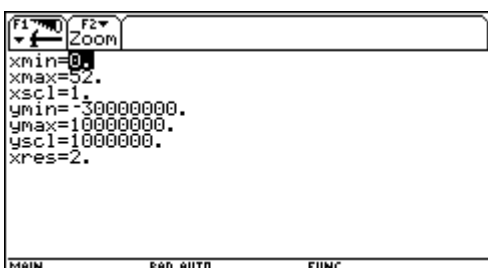
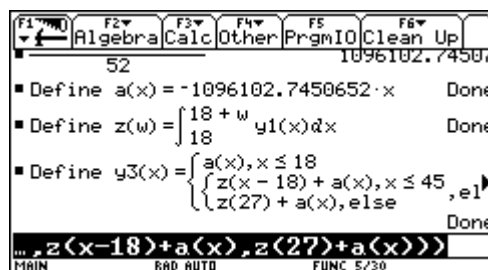
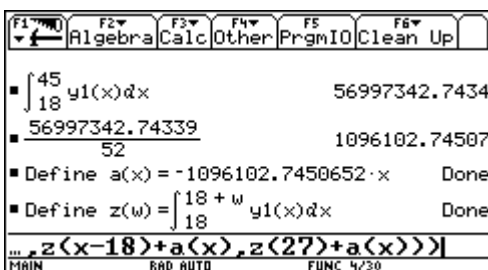


Nun wählen wir willkürlich (es kommt uns nur auf Unterschiede und nicht auf absolute Werte an), dass das Staubecken zu Beginn des Jahres leer wäre und berechnen uns die Wassermenge im Becken in Abhängigkeit von den verstrichenen Kalenderwochen mit der Funktion $y_3(x)$. Die ersten 18. Wochen $x < 18$ brauchen wir nur den Abfluss zu berücksichtigen, von der 18. Woche bis zur 45. Woche Zufluss und Abfluss, dann wieder nur den Abfluss.

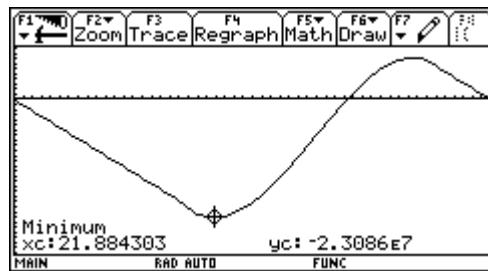
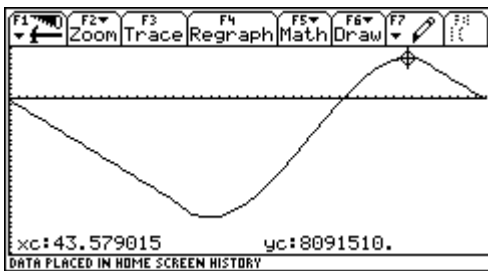
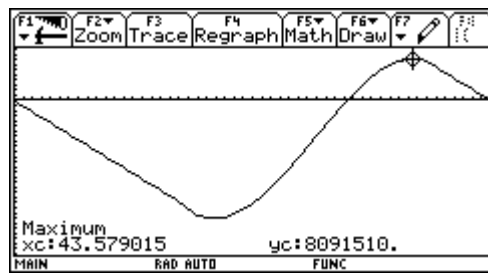
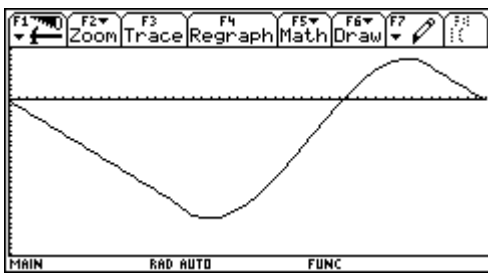


Die Eingabe für die stückweise definierte Funktion $y_3(x)$ lautet so:

$$\text{when}(x \leq 18, a(x), \text{when}(x \leq 45, z(18 - x) + a(x), z(27) + a(x)))$$



Mit entsprechenden Windowvariablen und nach deaktivieren von Plot und Parabel erhalten wir folgenden Funktionsverlauf. Wir bestimmen Maximum und Minimum und übertragen die Werte mit \diamond H in den Homebereich.



Die größte Wassermenge tritt in der 43. und die kleinste in der 21. Woche auf. Aus der Differenz der beiden Mengen können wir auf das Fassungsvermögen des Staubeckens schließen: 31 177 595 Kubikmeter. Damit muss die Staumauer wenigstens 78 m hoch sein, tatsächlich liegt die Krone der Staumauer natürlich einige Meter über dem Wasserspiegel.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
Define y3(x) = { a(x), x ≤ 18
                z(x-18) + a(x), x ≤ 45, e1
                z(27) + a(x), else
                Done
[43.579014538981 8091510.032293]
[43.579014539 8091510.03229]
[21.884302712973 -23086085.770704]
[21.884302713 -23086085.7707]
z(x-18)+a(x),z(27)+a(x)
MAIN RAD AUTO FUNC 7/30
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
z(x-18)+a(x),z(27)+a(x),e1
Done
[43.579014538981 8091510.032293]
[43.579014539 8091510.03229]
[21.884302712973 -23086085.770704]
[21.884302713 -23086085.7707]
[43.579014538981 8091510.032293][1,2]
31177595.803
ans(2)[1,2]-ans(1)[1,2]
MAIN RAD AUTO FUNC 8/30
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
[43.579014539 8091510.03229]
[21.884302712973 -23086085.770704]
[21.884302713 -23086085.7707]
[43.579014538981 8091510.032293][1,2]
31177595.803
31177595.802997
2000
200 77.9439895075
31177595.802997/2000/200
MAIN RAD AUTO FUNC 9/30
    
```