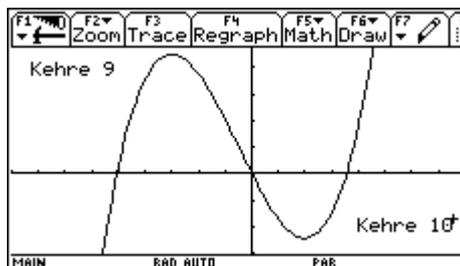
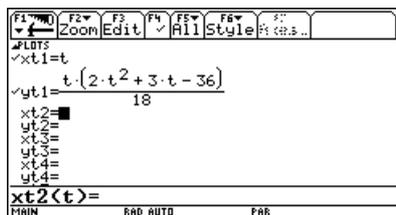


Themenbereich	
Differentialrechnung, Krümmung	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none"> Krümmungsradius 	TI-92 (F0012a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	F0010, F0011
Lehrplanbezug (Österreich):	8. Klasse
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer	

Wendekreis von Fahrzeugen

Angabe:

Durch die Parameterfunktion $x(t) = t$ und $y(t) = \frac{t \cdot (2t^2 + 3t - 36)}{18}$ werden die beiden engsten Kehren einer Passstraße beschrieben.



Fragen:

Welchen Wendekreis muss ein Fahrzeug besitzen, damit es diese Straße ohne Reversieren befahren kann?
Die Größe der Einheit ist 30 m.

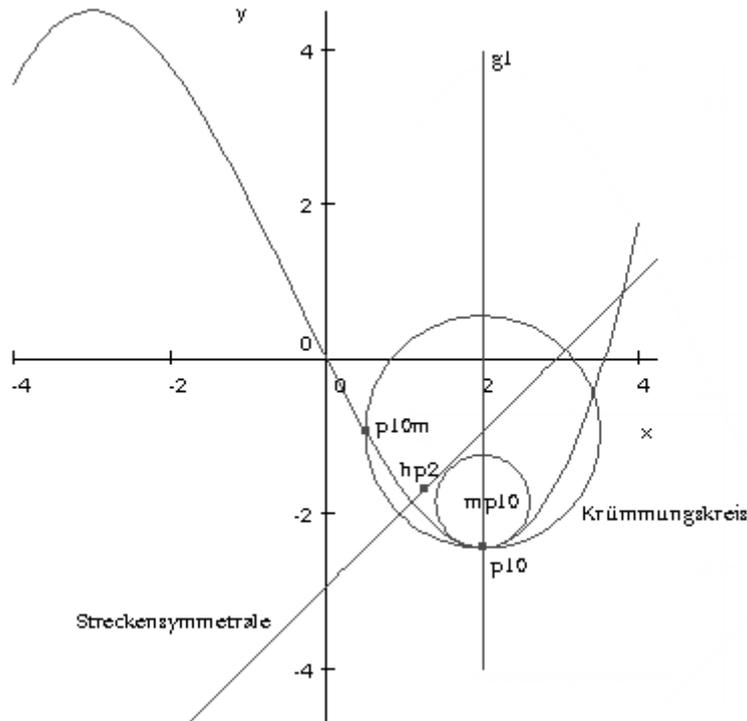
Anleitung:

Bestimme am Maximum und Minimum der die Straße beschreibenden Funktion 3. Grades den Mittelpunkt und Radius des Krümmungskreises. Diese Größen sollen nicht über die bekannten Formeln bestimmt werden, sondern dadurch, dass sich Kreise, die 2 Punkte mit der Kurve gemeinsam haben, dem Krümmungskreis nähern.

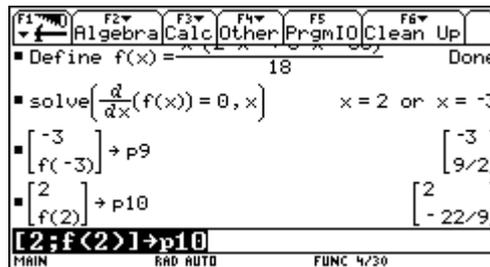
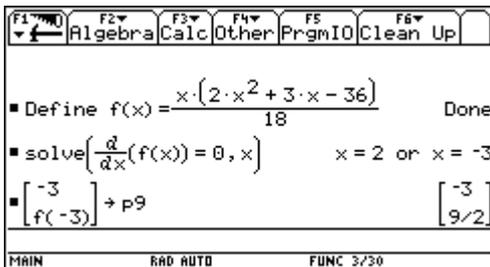
Ferner ist die Parameterdarstellung der beiden Krümmungskreise anzugeben.

Ausarbeitung (System: TI-92)

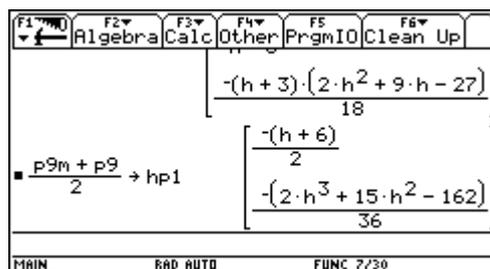
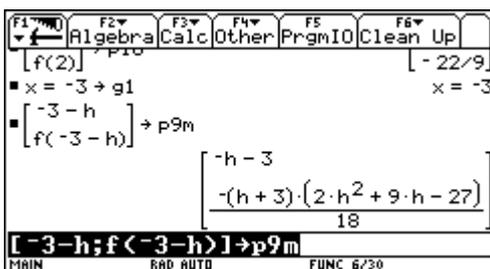
Skizze:



Zunächst werden die relativen Extremwerte der Funktion 3. Grades berechnet. Damit können die Punkte $p9$ und $p10$, in denen der Krümmungskreis bestimmt werden soll, eingegeben werden.



Dann beginnen wir die Berechnung für die Kehre 9. Wir legen einen Punkt $p9m$ des Graphen fest, dessen x -Koordinate sich nur um $-h$ von der x -Koordinate von $p9$ unterscheidet. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt nun sowohl auf einer Geraden $g1$, die normal zur Tangente in $p9$ steht (Tangente parallel zur x -Achse, weil relativer Extremwert, daher verläuft die gesuchte Gerade $g1$ parallel zur y -Achse $g1: x = -3$) als auch auf der Streckensymmetrale von $p9$ und $p9m$. Zunächst geben wir die Gerade $g1$ ein. Dann berechnen wir einen Punkt der Streckensymmetrale, den Halbierungspunkt zwischen $p9$ und $p9m$.



Dann stellen wir den Vektor von $p9m$ nach $p9$ auf. Er ist der Normalvektor der gesuchten Streckensymmetrale. Mit Hilfe des Inneren Produktes stellen wir die Streckensymmetrale in Normalvektorform auf.

Calculator screen showing the calculation of the normal vector for the perpendicular bisector of segment $p9m$. The screen displays the midpoint formula for $hp1$ and the vector $rv1$.

$$\frac{p9m + p9}{2} \rightarrow hp1$$

$$p9m - p9 \rightarrow rv1$$

Calculator screen showing the dot product of $rv1$ and a vector $[x; y]$, and the resulting normal vector form equation.

$$\text{dotP}(rv1, [x; y]) = \text{dotP}(rv1, hp1)$$

$$\left(\frac{-h^3}{9} - \frac{5 \cdot h^2}{6}\right) \cdot y - h \cdot x = h \cdot \left(4 \cdot h^5 + 60 \cdot h^4 + \dots\right)$$

$$\text{dotP}(rv1, [x; y]) = \text{dotP}(rv1, hp1)$$

Dann schneiden wir die Streckensymmetrale mit der Geraden $g1$. Dazu setzen wir einfach in der Streckensymmetrale $x = -3$.

Calculator screen showing the substitution of $x = -3$ into the normal vector form equation to solve for y .

$$\left(\frac{-h^3}{9} - \frac{5 \cdot h^2}{6}\right) \cdot y - h \cdot (-3) = h \cdot \left(4 \cdot h^5 + 60 \cdot h^4 + \dots\right)$$

$$24 \cdot h^2 - 2106 \cdot h + 1944 \over 648 \mid x = -3$$

Calculator screen showing the simplification of the equation after substituting $x = -3$.

$$\left(\frac{-h^3}{9} - \frac{5 \cdot h^2}{6}\right) \cdot y - h \cdot (-3) = h \cdot \left(4 \cdot h^5 + 60 \cdot h^4 + \dots\right)$$

$$\left(\frac{-h^3}{9} - \frac{5 \cdot h^2}{6}\right) \cdot y + 3 \cdot h = h \cdot \left(4 \cdot h^5 + 60 \cdot h^4 + \dots\right)$$

Dann lösen wir die Gleichung nach y auf und erhalten die y -Koordinate des gesuchten Kreises. Diese y -Koordinate ist natürlich abhängig von h , von der Lage des Punktes $p9m$.

Der Grenzwert für $h \rightarrow 0$ liefert die y -Koordinate des Mittelpunktes des Krümmungskreises. Die x -Koordinate ist -3 . Den Radius erhalten wir als Differenz zwischen y -Koordinate des Mittelpunktes des Krümmungskreises und dem Funktionswert an der Stelle -3 .

Calculator screen showing the solving of the equation for y .

$$\left(\frac{-h^3}{9} - \frac{5 \cdot h^2}{6}\right) \cdot y + 3 \cdot h = h \cdot \left(4 \cdot h^5 + 60 \cdot h^4 + \dots\right)$$

$$\text{solve}\left(\left(\frac{-h^3}{9} - \frac{5 \cdot h^2}{6}\right) \cdot y + 3 \cdot h = h \cdot \left(4 \cdot h^5 + 60 \cdot h^4 + \dots\right)\right)$$

$$y = \frac{-\left(4 \cdot h^4 + 60 \cdot h^3 + 225 \cdot h^2 - 324 \cdot h - 2106\right)}{36 \cdot (2 \cdot h + 15)}$$

Calculator screen showing the limit calculation as $h \rightarrow 0$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{right} \left(y = \frac{-\left(4 \cdot h^4 + 60 \cdot h^3 + 225 \cdot h^2 - 324 \cdot h - 2106\right)}{36 \cdot (2 \cdot h + 15)} \right)$$

$$\text{limit}(\text{right}(\text{ans}(1)), h, 0)$$

Calculator screen showing the calculation of the radius as the difference between the y -coordinate of the center and the function value at $x = -3$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{right} \left(y = \frac{-\left(4 \cdot h^4 + 60 \cdot h^3 + 225 \cdot h^2 - 324 \cdot h - 2106\right)}{36 \cdot (2 \cdot h + 15)} \right)$$

$$\left[\frac{-3}{39/10} \right] \rightarrow mp9$$

$$f(-3) - 39/10 \rightarrow rp9$$

Calculator screen showing the calculation of the radius as the difference between the y -coordinate of the center and the function value at $x = 2$.

$$f(-3) - 39/10 \rightarrow rp9$$

$$x = 2 \rightarrow g1$$

$$[2 - h] \rightarrow p10m$$

$$\frac{2 - h}{-(h - 2) \cdot (2 \cdot h^2 - 11 \cdot h - 22) \over 18}$$

In analoger Weise führen wir die Berechnung für die Kehre 10 durch.

Calculator screen showing the calculation of the normal vector for the perpendicular bisector of segment $p10m$.

$$\frac{p10m + p10}{2} \rightarrow hp2$$

$$p10m - p10 \rightarrow rv2$$

Calculator screen showing the calculation of the normal vector for the perpendicular bisector of segment $p10m$.

$$\frac{p10m + p10}{2} \rightarrow hp2$$

$$p10m - p10 \rightarrow rv2$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$p10m - p10 \rightarrow rv2$					$\frac{5 \cdot h^2}{6} - \frac{h^3}{9}$
$\text{dotP}(rv2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \text{dotP}(rv2, hp2) \mid x = 2$					
$\left(\frac{5 \cdot h^2}{6} - \frac{h^3}{9} \right) \cdot y - 2 \cdot h = h \cdot (4 \cdot h^5 - 60 \cdot h^4 + 2)$					
MAIN RAD AUTO FUNC 19/30					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\left(\frac{5 \cdot h^2}{6} - \frac{h^3}{9} \right) \cdot y - 2 \cdot h = h \cdot (4 \cdot h^5 - 60 \cdot h^4 + 2)$					
$\text{solve} \left(\left(\frac{5 \cdot h^2}{6} - \frac{h^3}{9} \right) \cdot y - 2 \cdot h = h \cdot (4 \cdot h^5 - 60 \cdot h^4 + 2) \right)$					
$y = \frac{-(4 \cdot h^4 - 60 \cdot h^3 + 225 \cdot h^2 + 176 \cdot h - 996)}{36 \cdot (2 \cdot h - 15)}$					
solve(ans(1),y)					
MAIN RAD AUTO FUNC 20/30					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\text{solve} \left(\left(\frac{5 \cdot h^2}{6} - \frac{h^3}{9} \right) \cdot y - 2 \cdot h = h \cdot (4 \cdot h^5 - 60 \cdot h^4 + 2) \right)$					
$y = \frac{-(4 \cdot h^4 - 60 \cdot h^3 + 225 \cdot h^2 + 176 \cdot h - 996)}{36 \cdot (2 \cdot h - 15)}$					
$\lim_{h \rightarrow 0} \text{right} \left(y = \frac{-(4 \cdot h^4 - 60 \cdot h^3 + 225 \cdot h^2 + 1)}{36 \cdot (2 \cdot h - 15)} \right)$					
limit(right(ans(1)),h,0)					
MAIN RAD AUTO FUNC 21/30					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\lim_{h \rightarrow 0} \text{right} \left(y = \frac{-(4 \cdot h^4 - 60 \cdot h^3 + 225 \cdot h^2 + 1)}{36 \cdot (2 \cdot h - 15)} \right)$					
$\left[-83/45 \right] \rightarrow \text{mp10}$					
$ f(2) - -83/45 \rightarrow \text{rp10}$					
abs(f(2)-(-83/45))>>rp10					
MAIN RAD AUTO FUNC 23/30					

Auch hier beträgt der Radius des Krümmungskreises $3/5$. Da die Größe der Einheit 30 m ist, beträgt der Radius des Krümmungskreises $3/5 \cdot 30 \text{ m} = 18 \text{ m}$. Das Fahrzeug muss also mindestens einen Wendkreis von 18 m besitzen.

Die Darstellung der Krümmungskreise erfolgt über die Parameterform mit Hilfe der Winkelfunktionen.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Zoom	Edit	All	Style	Ans	Del	...
APLOTS						
$\checkmark x1=t$						
$\checkmark y1 = \frac{t \cdot (2 \cdot t^2 + 3 \cdot t - 36)}{18}$						
$\checkmark x2 = -3 + 3/5 \cdot \cos(t)$						
$\checkmark y2 = 39/10 + 3/5 \cdot \sin(t)$						
$\checkmark x3 = 2 + 3/5 \cdot \cos(t)$						
$\checkmark y3 = -83/45 + 3/5 \cdot \sin(t)$						
$\checkmark x4 =$						
$\checkmark y4 =$						
xt4(t)=						
MAIN RAD AUTO PAR						

