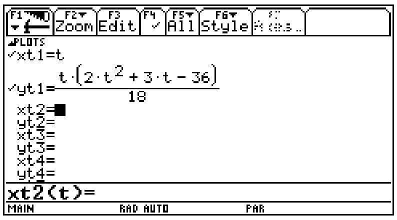
BspNr: F0012

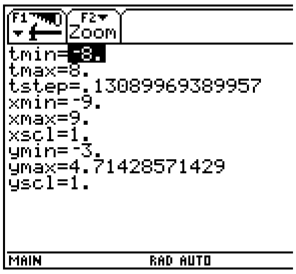
Themenbereich	
Differentialrechnung, Krümmung	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Krümmungsradius	TI-92 (F0012a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	F0010, F0011
Lehrplanbezug (Österreich):	8. Klasse
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer	

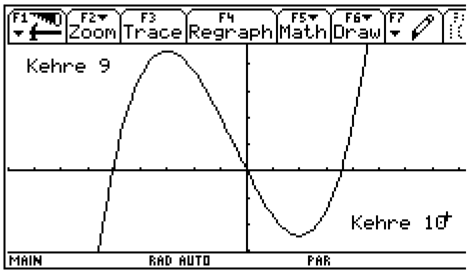
Wendekreis von Fahrzeugen

Angabe:

Durch die Parameterfunktion $xt1(t) = t$ und $yt1(t) = \dfrac{t \cdot (2t^2 + 3t - 36)}{18}$ werden die beiden engsten Kehren einer Passstraße beschrieben.







Fragen:
Welchen Wendekreis muss ein Fahrzeug besitzen, damit es diese Straße ohne Reversieren befahren kann?
Die Größe der Einheit ist 30 m.

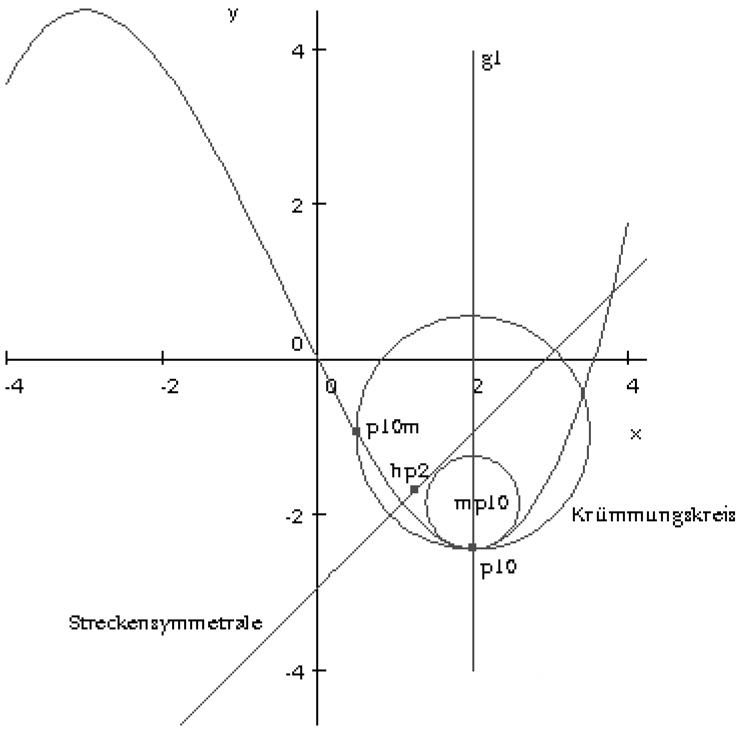
Anleitung:
Bestimme am Maximum und Minimum der die Straße beschreibenden Funktion 3. Grades den Mittelpunkt und Radius des Krümmungskreises. Diese Größen sollen nicht über die bekannten Formeln bestimmt werden, sondern dadurch, dass sich Kreise, die 2 Punkte mit der Kurve gemeinsam haben, dem Krümmungskreis nähern.

Ferner ist die Parameterdarstellung der beiden Krümmungskreise anzugeben.

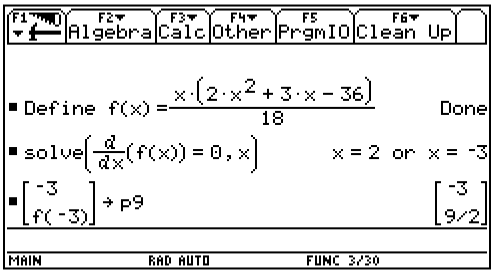
BspNr: F0012a

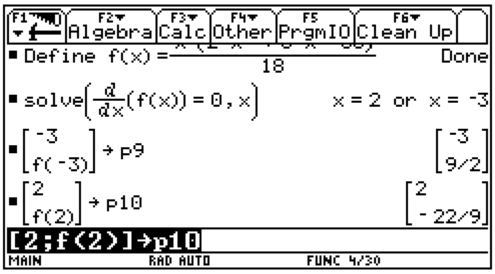
Ausarbeitung (System: TI-92)

Skizze:

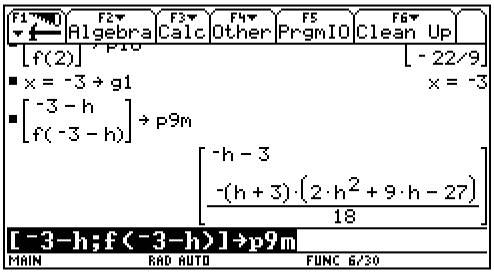


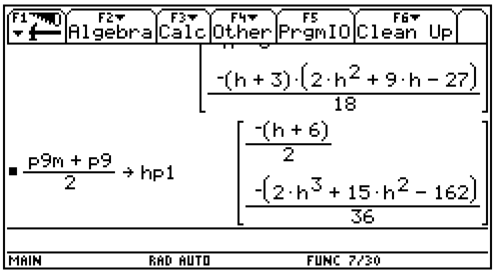
Zunächst werden die relativen Extremwerte der Funktion 3. Grades berechnet. Damit können die Punkte *p*9 und *p*10, in denen der Krümmungskreis bestimmt werden soll, eingegeben werden.



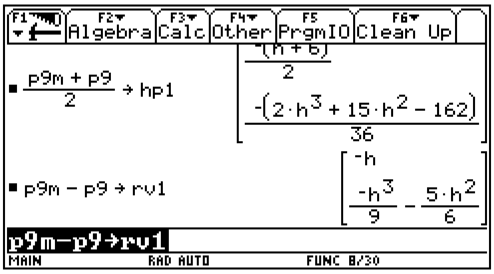


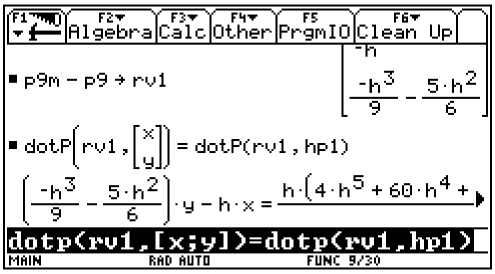
Dann beginnen wir die Berechnung für die Kehre 9. Wir legen einen Punkt *p*9*m* des Graphen fest, dessen *x*-Koordinate sich nur um –*h* von der *x*-Koordinate von *p*9 unterscheidet. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt nun sowohl auf einer Geraden *g*1, die normal zur Tangente in *p*9 steht (Tangente parallel zur *x*-Achse, weil relativer Extremwert, daher verläuft die gesuchte Gerade *g*1 parallel zur *y*-Achse *g*1:*x* = –3) als auch auf der Streckensymmetrale von *p*9 und *p*9*m*. Zunächst geben wir die Gerade *g*1 ein. Dann berechnen wir einen Punkt der Streckensymmetrale, den Halbierungspunkt zwischen *p*9 und *p*9*m*.



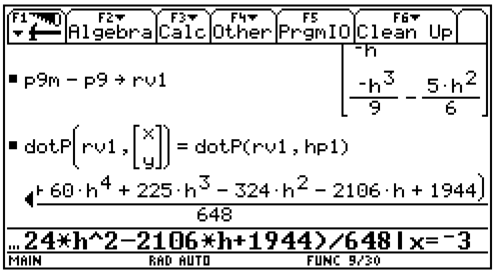


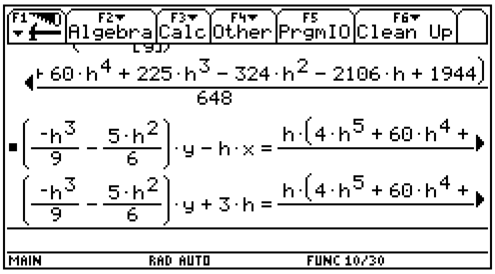
Dann stellen wir den Vektor von *p*9*m* nach *p*9 auf. Er ist der Normalvektor der gesuchten Streckensymmetrale. Mit Hilfe des Inneren Produktes stellen wir die Streckensymmetrale in Normalvektorform auf.





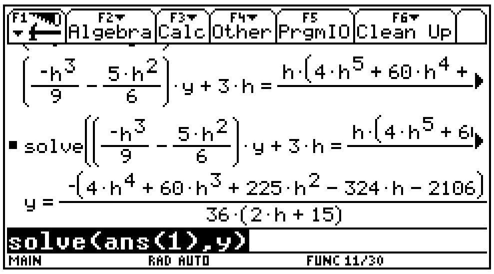
Dann schneiden wir die Streckensymmetrale mit der Geraden *g*1. Dazu setzen wir einfach in der Streckensymmetrale x = –3.

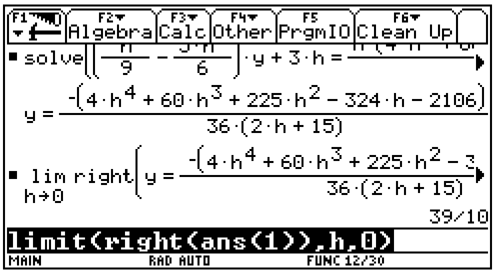


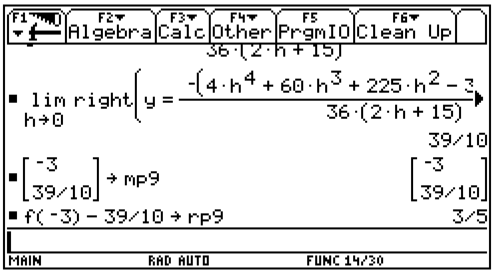


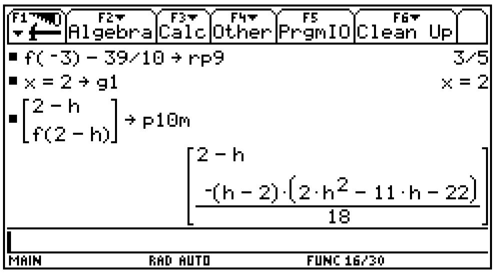
Dann lösen wir die Gleichung nach *y* auf und erhalten die *y*-Koordinate des gesuchten Kreises. Diese *y*-Koordinate ist natürlich abhängig von *h*, von der Lage des Punktes *p*9*m*.

Der Grenzwert für $h \to 0$ liefert die *y*-Koordinate des Mittelpunktes des Krümmungskreises. Die *x*-Koordinate ist –3. Den Radius erhalten wir als Differenz zwischen *y*-Koordinate des Mittelpunktes des Krümmungskreises und dem Funktionswert an der Stelle –3.

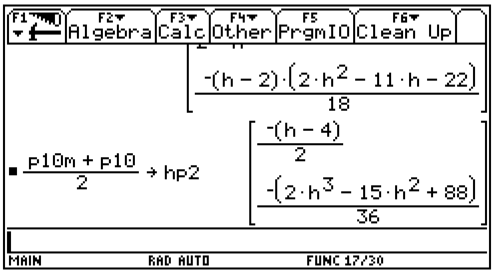


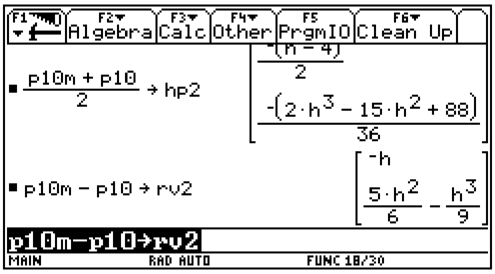


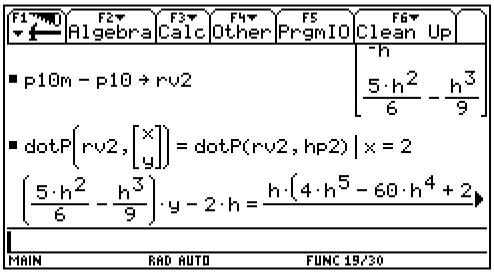


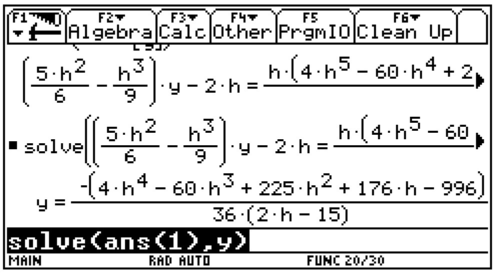


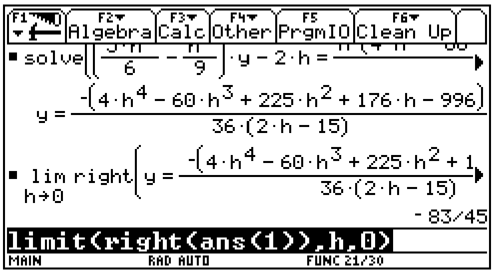
In analoger Weise führen wir die Berechnung für die Kehre 10 durch.

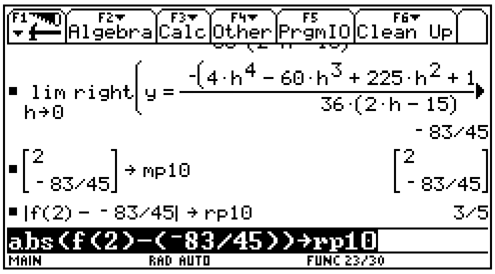












Auch hier beträgt der Radius des Krümmungskreises 3/5. Da die Größe der Einheit 30 m ist, beträgt der Radius des Krümmungskreises 3/5 · 30 m = 18 m. Das Fahrzeug muss also mindestens einen Wendkreis von 18 m besitzen.

Die Darstellung der Krümmungskreise erfolgt über die Parameterform mit Hilfe der Winkelfunktionen.