

Themenbereich	
Differential- und Integralrechnung	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none"> <li>Bogenlänge und Krümmung</li> </ul>	TI-92 (F0010a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	F0011, F0012
Lehrplanbezug (Österreich):	8. Klasse
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer	

## Formel 1 - Rennen am Tiongring

### Angabe:

Die Start-Ziel Gerade des Tiongrings geht in eine gefürchtete S-Kurve über. Die Funktion

$s(t) = \begin{pmatrix} xt1(t) = t \\ yt1(t) = \frac{(t-1) \cdot (t-4) \cdot (t-8)}{10} \end{pmatrix}$ 
 beschreibt die Bahnkurve eines Boliden in diesem Bereich für den Zeitraum

$t = 0$  s bis  $t = 8,5$  s. Die Größe der Einheit beträgt 25 m.

### Fragen:

Während des Rennens wurden bei der TV-Übertragung vom Kommentator Reinz Hüller folgende Aussagen gemacht.

- Die Länge dieses Streckenabschnittes beträgt 2 km.
- Die Durchschnittsgeschwindigkeit in diesem Bereich beträgt 200 km/h.
- Die Höchstgeschwindigkeit in diesem Bereich beträgt 400 km/h.
- Die kleinste Geschwindigkeit in diesem Bereich beträgt 90 km/h.
- Die größte Zentripetalbeschleunigung beträgt das Fünffache der Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ .

Überprüfe diese Aussagen durch eigene Berechnungen.

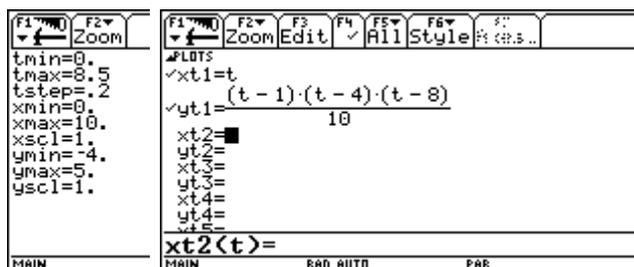
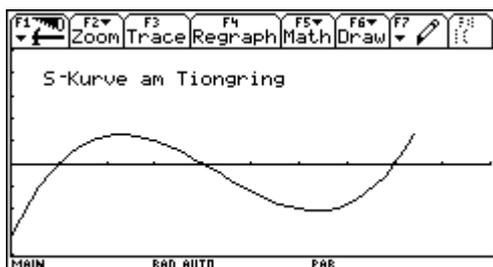
Die Zentripetalbeschleunigung  $a_n$  ist sowohl mit Hilfe der Formel  $a_n = \frac{v_a^2}{\rho}$  als auch als Normalkomponente der Beschleunigung zu berechnen.

$v_a$  absoluter Betrag der Geschwindigkeit

$\rho$  Krümmungsradius

$$\rho(x) = \left| \frac{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)} \right| \text{ ist der Radius des Krümmungskreises an der Stelle } x$$

(wenn die Kurve in der Form  $y = f(x)$  vorliegt)



## Ausarbeitung (System: TI-92)

Wir geben die Gleichungen für  $xt1$  und  $yt1$  in den  $y$ -Editor ein und definieren im Homebereich die Gleichung der Bahnkurve und durch Ableiten die Geschwindigkeit.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
Zoom Edit All Style
PLOTS
✓xt1=t
✓yt1=
      (t-1)·(t-4)·(t-8)
      -----
      10
xt2=
yt2=
xt3=
yt3=
xt4=
yt4=
xt5=
yt5=
xt2(t)=
MAIN RAD AUTO PAR
  
```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
Define s(t)=[xt1(t)
            yt1(t)] Done
Define v(t)=d/dt(s(t)) Done
Define v(t)=d(s(t),t)
MAIN RAD AUTO PAR 2/30
  
```

Dann definieren wir den absoluten Betrag der Geschwindigkeit und geben die entsprechenden Funktionen in den Funktionseditor als  $xt2$  und  $yt2$  ein.

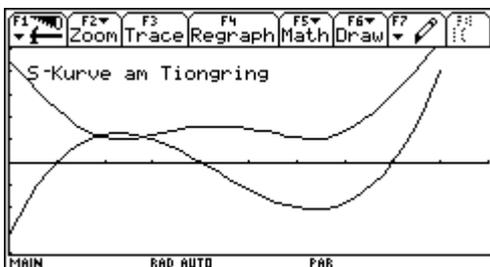
```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
Define s(t)=[xt1(t)
            yt1(t)] Done
Define v(t)=d/dt(s(t)) Done
Define va(t)=norm(v(t)) Done
define va(t)=norm(v(t))
MAIN RAD AUTO PAR 3/30
  
```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
Zoom Edit All Style
PLOTS
✓xt1=t
✓yt1=
      (t-1)·(t-4)·(t-8)
      -----
      10
✓xt2=t
✓yt2=va(t)
xt3=
yt3=
xt4=
yt4=
xt3(t)=
MAIN RAD AUTO PAR
  
```

Die Graphik bringt keine große Überraschung. Die Geschwindigkeit erreicht jeweils in den Kurven ein relatives Minimum. Um das Maximum zu bestimmen müssen wohl die Ränder des Bereiches untersucht werden. Durch Nullsetzen der 1. Ableitung bestimmen wir uns die möglichen Kandidaten für Extremwerte.



```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
[yt1(t)]
Define v(t)=d/dt(s(t)) Done
Define va(t)=norm(v(t)) Done
zeros(d/dt(va(t)),t)→ke
      { 13/3  -(√37-13)/3  (√37+13)/3 }
zeros(d(va(t),t),t)→ke
MAIN RAD AUTO PAR 4/30
  
```

Durch Einsetzen in die 2. Ableitung können wir den 2. und den 3. Kandidaten als relatives Minimum festlegen. Das Einsetzen in die Funktion zur Bestimmung der Geschwindigkeiten scheitert leider über die Kandidatenliste und wird daher einzeln vorgenommen.

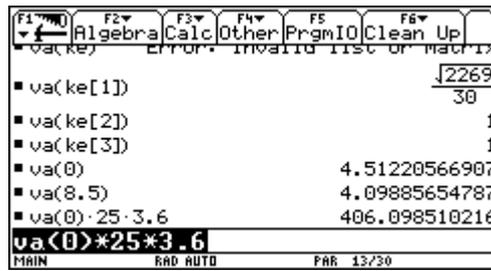
```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
zeros(d/dt(va(t)),t)→ke
      { 13/3  -(√37-13)/3  (√37+13)/3 }
d^2/dt^2(va(t))|t=ke
      { -111·√2269/11345  37/25  37/25 }
d(va(t),t,2)|t=ke
MAIN RAD AUTO PAR 5/30
  
```

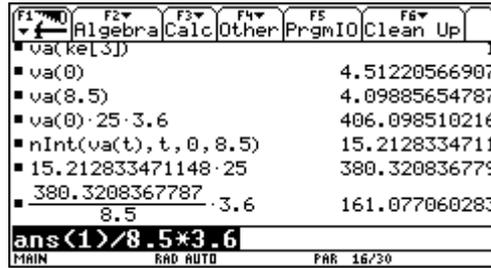
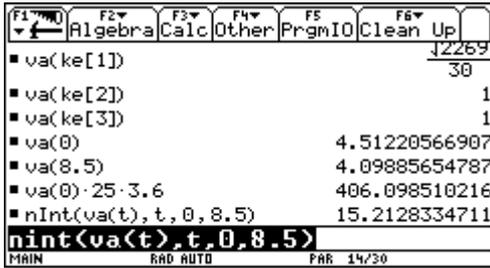
```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
d^2/dt^2(va(t))|t=ke
      { -111·√2269/11345  37/25  37/25 }
va(t)|t=ke
      Error: Invalid list or matrix
va(ke)
      Error: Invalid list or matrix
MAIN RAD AUTO PAR 7/30
  
```

Unter Berücksichtigung der Größe der Einheit beträgt die kleinste Geschwindigkeit also  $25 \text{ m/s} = 90 \text{ km/h}$ . Zur Bestimmung des Maximums müssen wir die beiden Ränder betrachten. Die größte Geschwindigkeit wird am Anfang des Bereiches mit  $406 \text{ km/h}$ .



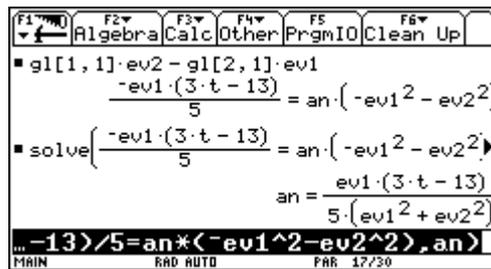
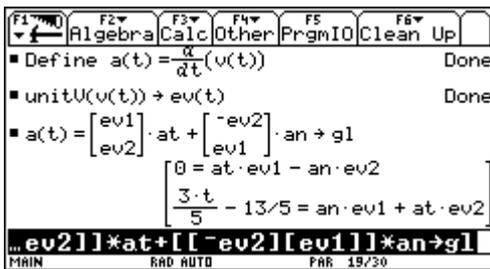
Das Integral der Geschwindigkeit über die Zeit liefert uns die Länge des Streckenabschnittes. Diese Berechnung benötigt etwas Zeit. Also Geduld! - die Länge beträgt also rund 380 m. Die Durchschnittsgeschwindigkeit erhalten wir, indem die Streckenlänge durch die Zeit dividiert wird. Sie beträgt rund 161 km/h.



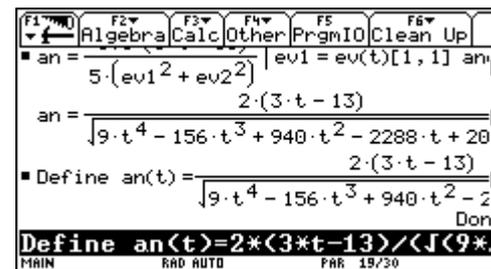
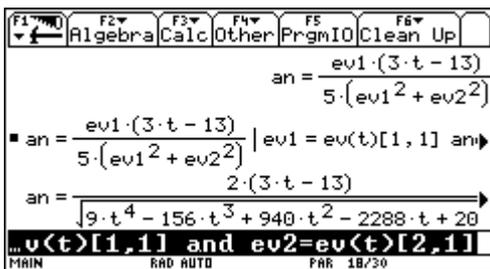
Nun wenden wir uns der Berechnung der Zentripetalbeschleunigung zu.

Zunächst bestimmen wir durch Ableitung der Geschwindigkeit die Beschleunigung. Dann bestimmen wir den Einheitsvektor der Geschwindigkeit, also den Einheitsvektor in Richtung der Tangente an die Kurve. Da der Einheitsvektor der Geschwindigkeit  $ev$  recht komplexe Terme als Koordinaten besitzt, kürzen wir seine Koordinaten auf folgende Weise ab  $ev = \begin{pmatrix} ev1 \\ ev2 \end{pmatrix}$ .

Nun wollen wir den Beschleunigungsvektor  $a(t)$  in eine Komponente  $at$  tangential zur Kurve (in Richtung von  $ev$ ) und in eine Komponente  $an$  normal zur Tangente zerlegen. Dazu stellen wir die entsprechenden Gleichungen auf. Aus diesen Gleichungen lässt sich mit Hilfe der Methode der gleichen Koeffizienten leicht die Variable  $at$  eliminieren. Wir erhalten eine Gleichung für  $an$ . Diese lösen wir auf .



Durch Substituieren von  $ev1$  und  $ev2$  durch die entsprechenden Koordinaten von  $ev$ , erhalten wir die gesuchte Zentripetalbeschleunigung  $an$  und definieren sie als Funktion der Zeit.



Wir geben diese Funktion in den  $y=-$ Editor ein und stellen die Funktion mit entsprechenden Windowvariablen dar.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Zoom Edit All Style
PLOTS
√xt1=t
√yt1=(t-1)·(t-4)·(t-8)
10
xt2=t
yt2=va(t)
√xt3=t
√yt3=an(t)
xt4=
yt4=
xt4<t>=
MAIN RAD AUTO PAR

```

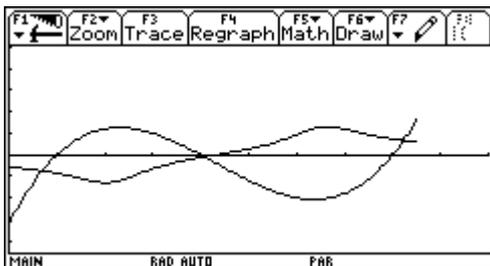
```

F1 F2
Zoom
tmin=0
tmax=8.5
tstep=.05
xmin=0.
xmax=10.
xsc1=1.
ymin=-4.5
ymax=5.
ysc1=1.
MAIN RAD AUTO PAR

```

Ihr Verlauf bestätigt unsere Intuition. Die Zentripetalbeschleunigung ist in der Nähe der Punkte mit der stärksten Krümmung am größten. Beim Übergang von der Rechts- in die Linkskurve ist die Zentripetalbeschleunigung gleich Null.

Die Extremwerte dieser Funktion durch Nullsetzen der Ableitung zu bestimmen, überfordert unseren Rechner etwas (Die Berechnung nimmt kein Ende).



```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
an =
ERROR
Break
Defin
ESC=CANCEL
solve(d(an(t)),t)=0,t)
MAIN RAD AUTO PAR 23/30

```

Daher setzen wir numerische Methoden ein. Leider liefert `nsolve` nur eine Lösung. Die zweite Lösung holen wir uns über die Graphik. Wir stellen den Mode `Graph` auf `Function`.

```

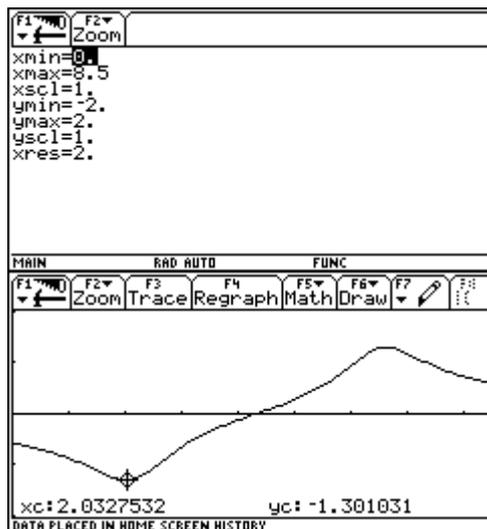
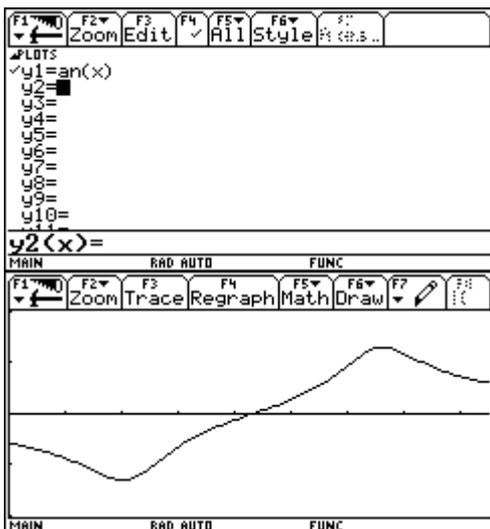
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
Define an(t)=
2·(3·t-13)
√9·t^4-156·t^3+940·t^2-2
Done
solve(d(an(t))=0,t) Error: Break
nsolve(d(an(t))=0,t) 2.03275317812
nsolve(d(an(t)),t)=0,t)
MAIN RAD AUTO PAR 21/30

```

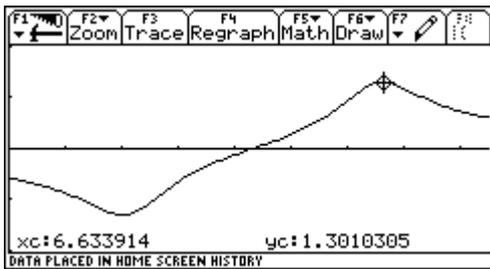
```

MODE
Page 1 Page 2 Page 3
Graph...
Current Folder... main
Display Digits... FLOAT
Angle... RADIAN
Exponential Format... NORMAL
Complex Format... REAL
Vector Format... RECTANGULAR
Pretty Print... ON
Enter=SAVE ESC=CANCEL
USE ← AND → TO OPEN CHOICES

```



Wir bestimmen mit den Funktionen von `F6 Math` relatives Maximum und relatives Minimum und übertragen die Werte mit `H` in den Homebereich.



```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
└─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
■ solve(d/dt(an(t)) = 0, t) Error: Break
■ nSolve(d/dt(an(t)) = 0, t) 2.03275317812
■ [2.0327531723829 -1.3010305258168]
  [2.03275317238 -1.30103052582]
■ [6.6339139573038 1.3010305258216]
  [6.6339139573 1.30103052582]
■ nsolve(d(an(t), t) = 0, t)
MAIN RAD AUTO FUNC 23/30
  
```

Kleinste und größte Zentripetalbeschleunigung unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen voneinander. Berücksichtigt man die Größe der Einheit, so liegt eine Beschleunigung von  $32,5 \frac{m}{s^2}$  vor. Das ist ungefähr das Dreifache der Erdbeschleunigung.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
└─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
■ nSolve(d/dt(an(t)) = 0, t) 2.03275317812
■ [2.0327531723829 -1.3010305258168]
  [2.03275317238 -1.30103052582]
■ [6.6339139573038 1.3010305258216]
  [6.6339139573 1.30103052582]
■ [6.6339139573038 1.3010305258216][1, 2]
  32.5257631455
■ ans(1)[1, 2]*25
MAIN RAD AUTO FUNC 24/30
  
```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
└─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
■ [2.0327531723829 -1.3010305258168]
  [2.03275317238 -1.30103052582]
■ [6.6339139573038 1.3010305258216]
  [6.6339139573 1.30103052582]
■ [6.6339139573038 1.3010305258216][1, 2]
  32.5257631455
■ 32.52576314554
  9.81
  3.31557218609
■ 32.52576314554/9.81
MAIN RAD AUTO FUNC 25/30
  
```

Nun kontrollieren wir unsere Berechnung mit der angegebenen Formel. Zunächst berechnen wir den Radius des Krümmungskreises mit Hilfe der angegebenen Formel. In unserem Fall ist  $f(x)$  durch  $yt1(t)$  zu ersetzen.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
└─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
■ (1 + (d/dt(yt1(t)))^2)^(3/2)
  d^2/dt^2(yt1(t))
  (9*t^4 - 156*t^3 + 940*t^2 - 2288*t + 2036)^3
  200*(3*t - 13)
■ K1+d(yt1(t), t)^2)^(3/2)/d(yt1...
MAIN RAD AUTO FUNC 26/30
  
```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
└─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
■ (1 + (d/dt(yt1(t)))^2)^(3/2)
  d^2/dt^2(yt1(t))
  (9*t^4 - 156*t^3 + 940*t^2 - 2288*t + 2036)^3
  200*(3*t - 13)
■ ...t), t)^2)^(3/2)/d(yt1(t), t, 2)
MAIN RAD AUTO FUNC 1/26
  
```

Dann setzen wir den entsprechenden Zeitpunkt ein und erhalten den Krümmungsradius.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
└─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
■ 200*(3*t - 13)
  (1 + (d/dt(yt1(t)))^2)^(3/2)
  d^2/dt^2(yt1(t)) | t = 2.03275317238
  -.865196556163
■ ans(1)[1, 2]|t=2.0327531723829
MAIN RAD AUTO FUNC 27/30
  
```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
└─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
■ (1 + (d/dt(yt1(t)))^2)^(3/2)
  d^2/dt^2(yt1(t)) | t = 2.03275317238
  -.865196556163
■ |-.86519655616316| + p .865196556163
■ abs(-.86519655616316) + p
MAIN RAD AUTO FUNC 28/30
  
```

Zuletzt brauchen wir nur noch das Quadrat der Geschwindigkeit zum entsprechenden Zeitpunkt durch den Krümmungsradius dividieren.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
└─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
■ d^2/dt^2(yt1(t)) | t = 2.03275317238
  -.865196556163
■ |-.86519655616316| + p .865196556163
■ (va(2.0327531723829))^2
  p
  1.30103052582
■ va(2.0327531723829)^2/p
MAIN RAD AUTO FUNC 29/30
  
```