

Themenbereich	
Gebrochen rationale Funktionen	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none"> • Interpretation von Graphen • Verständnis der Asymptotik von Funktionen 	TI-92 (E0313a), TI-Interactive (E0313b)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	
Lehrplanbezug (Österreich):	5./6. Klasse
Quelle: Markus Binder (nach einer Anregung von Dr. Thomas Himmelbauer)	

Stauprobleme

Angabe und Fragen

Es soll das Verhalten einer Fahrzeugkolonne auf einer einspurigen Fahrbahn untersucht werden. Die Fahrzeuge sollen mit einer konstanten, gleich großen Geschwindigkeit unterwegs sein und einen gleichbleibenden Abstand halten.

Fahrzeugdurchsatz:

Die folgenden Fragen sollen beantwortet werden:

- 1) Wie viele Fahrzeuge passieren pro Stunde einen bestimmten Punkt auf der Fahrbahn?
- 2) Hängt der Fahrzeugdurchsatz davon ab, wie die Lenker Abstand halten?
- 3) Gibt es eine optimale Fahrgeschwindigkeit, bei der eine größtmögliche Fahrzeuganzahl pro Sekunde die Fahrbahn passiert?

Modell 1: Konstanter Fahrzeugabstand

Bei einem konstanten Fahrzeugabstand d und einer Fahrzeuglänge L passieren pro Stunde

$$d_{\text{konst}}(v) = \frac{1000v}{L + d}$$

Fahrzeuge einen Kontrollpunkt an der Fahrbahn. Die Geschwindigkeit ist in km/h gegeben.

Modell 2: Abstand gemäß Reaktionsweg

Halten die Lenker einen Abstand zum Vorderfahrzeug ein, der dem Reaktionsweg bei der aktuellen Geschwindigkeit entspricht, so passieren pro Stunde

$$d_{\text{Reaktion}}(v) = \frac{1000v}{L + \frac{v}{3,6}}$$

Fahrzeuge den Kontrollpunkt. Die Reaktionszeit der Fahrer ist mit einer Sekunde veranschlagt.

Modell 3: Abstand gemäß Anhalteweg

Das Einhalten nicht nur des Reaktionswegs, sondern sogar des Anhaltewegs als Abstand zum Vorderfahrzeug ergibt eine Anzahl von

$$d_{\text{Anhalte}}(v) = \frac{1000v}{L + \frac{v}{3,6} + \frac{(v/3,6)^2}{2a}}$$

Fahrzeugen pro Stunde. Hier ist a die Verzögerung (üblicherweise 8 m/s^2 bei guten Bremsen an allen Fahrzeugen), L ist wiederum die Fahrzeuglänge.

Vergleich der Modelle

Nimm typische Werte für die Fahrzeuglänge L (wie lang ist ein PKW?), einen konstanten Abstand d sowie die Verzögerung a und beantworte die Fragen 1) bis 3).

- 4) Welches Modell ist bei großen Geschwindigkeiten besser, welches bei kleinen?
- 5) Was sagen die Modelle bei sehr großen Geschwindigkeiten ($v \rightarrow \infty$) voraus?
- 6) Wie werden sich Fahrzeuglenker eher verhalten: Einhalten eines konstanten Abstands, eines reaktionswegabhängigen Abstands oder eines anhaltewegabhängigen Abstands?

Stau bei Totalsperre

Unter der Annahme einer Totalsperre der einen benutzten Fahrspur lässt sich ermitteln, wie schnell sich ein Stau aufbaut, wie schnell er sich auflöst oder wie viele Fahrzeuge im Stau stecken.

Staulänge bei einer bestimmten Geschwindigkeit

Abstand gemäß Reaktionsweg

Bei einer Staulänge L_{Stau} gibt es in diesem Stau

$$n = \frac{L_{\text{Stau}}}{L + d_{\text{Stau}}}$$

Fahrzeuge. Hier ist L die Fahrzeuglänge und d_{Stau} der Abstand der Fahrzeuge bei Stillstand. Andererseits ist die Anzahl der Fahrzeuge innerhalb der Staulänge auch aus

$$n = \frac{v \cdot t_{\text{Stau}} + L_{\text{Stau}}}{L + v \cdot t_R}$$

berechenbar. Es ist v die Geschwindigkeit in m/s, t_{Stau} die Zeit in Sekunden, die die Straße gesperrt ist, und t_R die Reaktionszeit der Fahrer beim Bremsen in Sekunden. Hierin steckt die Annahme, dass ein Fahrzeug, das zum Zeitpunkt der Sperre noch ($v \cdot t_{\text{Stau}}$) Meter entfernt ist, das letzte Ende des Staus innerhalb von t_{Stau} gerade noch erreicht. Darüberhinaus halten die Fahrzeuge einen Abstand gemäß Reaktionsweg ein.

- 7) Berechne, wie lang ein Stau nach einer bestimmten Zeit wird, wenn die Fahrbahn komplett gesperrt ist und alle Fahrzeuge eine konstante Geschwindigkeit hatten.
- 8) Wie hängt die Staulänge bei einer konstanten Stauzeit (z.B. von einer Stunde) von der Geschwindigkeit der Fahrzeuge ab? Verwende eine Stunde Stauzeit, eine Fahrzeuglänge L von einem Meter, einen Parkabstand $d_{\text{Stau}} = 1$ m sowie eine Reaktionszeit beim Bremsen $t_R = 1$ s.
- 9) Wie sieht die Staulänge für große Fahrgeschwindigkeiten aus? Was passiert, wenn $v \rightarrow \infty$ geht?

Abstand gemäß Anhalteweg

Nimmt man an, dass die Fahrzeuge einen Abstand gemäß Anhalteweg einhalten, so ändert sich die Abhängigkeit der Staulänge von den anderen Größen etwas. Es kommt außerdem noch eine Abhängigkeit von der Verzögerung der Fahrzeuge hinzu.

Wie vorhin ist
$$n = \frac{L_{\text{Stau}}}{L + d_{\text{Stau}}}$$

Allerdings ist jetzt:
$$n = \frac{v \cdot t_{\text{Stau}} + L_{\text{Stau}}}{L + v \cdot t_R + \frac{v^2}{2a}}$$

- 10) Berechne die Staulänge in Abhängigkeit von der Staudauer und den anderen Größen.
- 11) Vergleiche die Staulänge bei konkreten Werten (Aufg. 8, zusätzlich $a = 8\text{m/s}^2$) mit der Staulänge des Reaktionsweg-Abstandsmodells.
- 12) Was sagt dieses Modell für große Geschwindigkeiten voraus?

Aufbau eines Staus

Abstand gemäß Reaktionsweg

Die Aufbaugeschwindigkeit eines Staus berechnet sich aus Staulänge durch Staudauer: $v_{\text{Aufbau}}(v) = \frac{L_{\text{Stau}}(v)}{t_{\text{Stau}}}$

- 13) Berechne die Aufbaugeschwindigkeit.
- 14) Was passiert bei großen Geschwindigkeiten? Von welchen Größen hängt es ab, wie schnell sich ein Stau aufbaut?

Abstand gemäß Anhalteweg

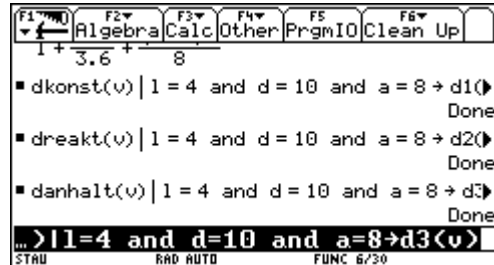
- 15) Berechne die Aufbaugeschwindigkeit.
- 16) Was passiert hier bei großen Geschwindigkeiten?

Vergleiche grafisch die Aufbaugeschwindigkeit der beiden Modelle, abhängig von der Geschwindigkeit. Verwende die konkreten Werte aus dem vorigen Abschnitt.

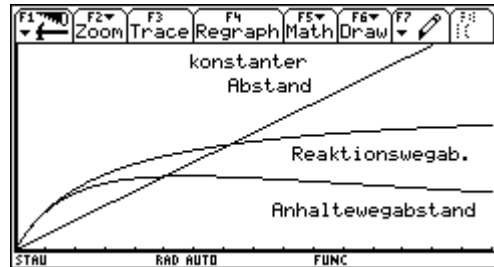
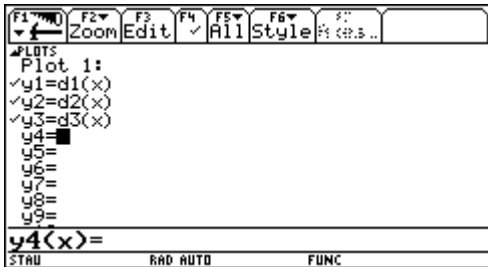
Ausarbeitung (System: TI-92 und TI-Interactive)

Fahrzeugdurchsatz

ad 1) Die Anzahl der passierenden Fahrzeuge pro Stunde ergibt für $L = 4$ m, $d = 10$ m und $a = 8$ m/s²:



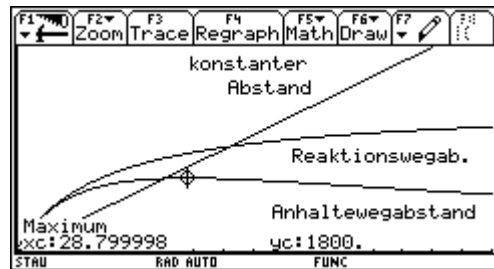
ad 2) Der Fahrzeugdurchsatz lässt sich für diese Werte grafisch darstellen:



ad 3) Die optimalen Fahrgeschwindigkeiten:

Bei konstantem Abstand sowie bei Abstand gemäß Reaktionsweg passieren umso mehr Fahrzeuge, je höher die Geschwindigkeit ist.

Bei Abstand gemäß Anhalteweg ergibt das Modell eine optimale Geschwindigkeit von ca. 20 km/h:

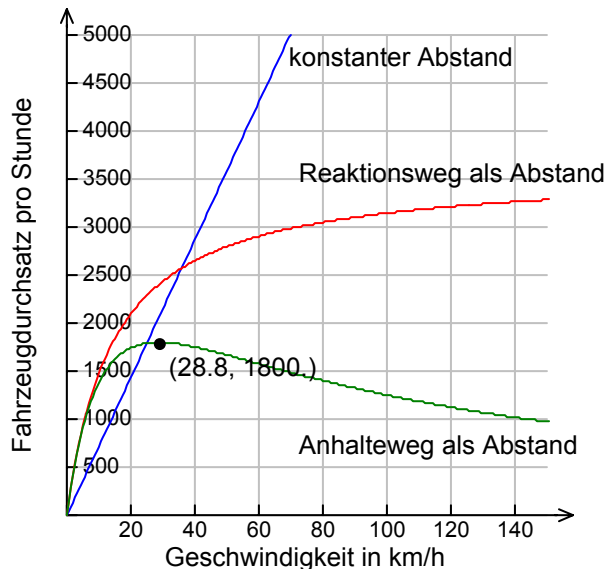


TI-Interactive kann diese Grafen ebenfalls erstellen und das Maximum berechnen:

$$\frac{1000 \cdot v}{L + d} \rightarrow d_{\text{konst}}(v)$$

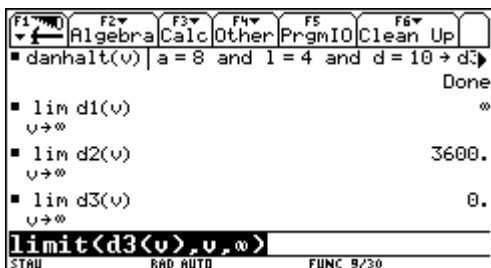
$$\frac{1000 \cdot v}{L + \frac{v}{3.6}} \rightarrow d_{\text{reakt}}(v)$$

$$\frac{1000 \cdot v}{L + \frac{v}{3.6} + \frac{\left(\frac{v}{3.6}\right)^2}{2 \cdot a}} \rightarrow d_{\text{anhalt}}(v)$$



ad 4) Bei kleinen Geschwindigkeiten ist der konstante Abstand ungünstig; allerdings sind die Fahrzeugabstände nicht sehr realistisch (bei sehr kleinem v müssten die Fahrzeuge regelrecht aneinander kleben). Der größte Fahrzeugdurchsatz ergibt sich, wenn die Fahrer einen Abstand gemäß Reaktionsweg einhalten.

ad 5) Bei sehr großen Geschwindigkeiten passiert – wie auch in den Grafen zu sehen – folgendes:



Bei konstantem Abstand erreicht man einen beliebig hohen Fahrzeugdurchsatz, bei einem Abstand gemäß Reaktionsweg nähert sich der Durchsatz asymptotisch einem Wert von 3600 Fahrzeugen pro Stunde, und bei einem Abstand gemäß Anhalteweg „erschlägt“ der quadratische Term alle anderen; der Fahrzeugdurchsatz geht mit wachsender Geschwindigkeit gegen Null.

ad 6)

Wenn man sich an die „Zwei-Sekunden-Abstand“-Regel aus der Fahrschule hält, dann ergibt das bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h einen Abstand von

$$d = v \cdot t = \left(100 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \cdot (2\text{s}) = \left(\frac{100}{3.6} \cdot 2\right) \text{m} \approx 56\text{m}.$$

Einen konstanten Abstand von 10 Metern bei dieser Geschwindigkeit einzuhalten ist also indiskutabel. Der Abstand gemäß Reaktionsweg ist hingegen:

$$d = \frac{v}{3.6} = \frac{100}{3.6} \text{m} \approx 28\text{m},$$

also die Hälfte des Zwei-Sekunden-Abstandes.

Bei einem Abstand gemäß Anhalteweg ergibt sich eine Länge von

$$d = \frac{v}{3.6} + \frac{(v/3.6)^2}{2a} = \frac{(100/3.6)^2}{16} \text{m} \approx 76\text{m}.$$

In der Realität halten Autofahrer bei 100 km/h wohl eher einen – zu geringen – Abstand von 28 Metern als einen von 76 Metern ein. Die Wahrheit spielt sich also wahrscheinlich zwischen „Abstand nach Reaktionsweg“ und „Abstand nach Anhalteweg“ ab.

Stau bei Totalsperre - Staulänge bei einer bestimmten Geschwindigkeit

Abstand gemäß Reaktionsweg

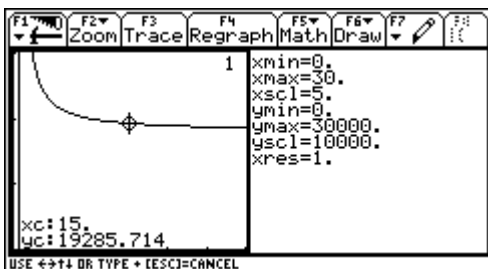
ad 7) Wir verwenden die beiden Formeln, um L_{Stau} explizit zu erhalten:

TI-84 Plus calculator screen showing the derivation of the formula for L_{Stau} . The screen displays the equation
$$\frac{L_{\text{Stau}}}{1 + \text{dstau}} = \frac{\text{tstau} \cdot v + L_{\text{Stau}}}{\text{trb} \cdot v + 1} \rightarrow g1$$
 and the resulting formula
$$L_{\text{Stau}} = \frac{(1 + \text{dstau}) \cdot \text{tstau} \cdot v}{\text{trb} \cdot v - \text{dstau}} \text{ or } \frac{(1 + \text{dstau}) \cdot \text{tstau} \cdot v}{(1 + \text{dstau})}$$
. The calculator is in the Algebra mode.

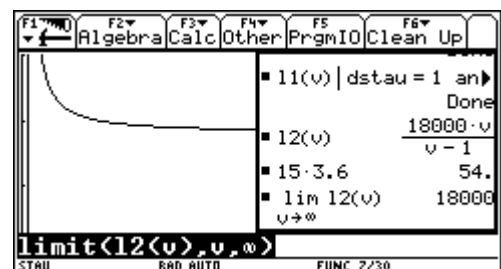
ad 8) Um die Formel leichter interpretieren zu können, verwenden wir die angegebenen konkreten Werte.

TI-84 Plus calculator screen showing the substitution of values into the formula. The screen displays the equation
$$L_{\text{Stau}} = \frac{(1 + \text{dstau}) \cdot \text{tstau} \cdot v}{\text{trb} \cdot v - \text{dstau}} \rightarrow 11(v)$$
 and the values $\text{trb} = 1$ and $\text{tstau} = 3600$ and $1 = 4 \rightarrow 12(v)$. The calculator is in the Algebra mode.

Geplottet sieht die Anhängigkeit der Staulänge von der Geschwindigkeit folgendermaßen aus:



Bei einer Geschwindigkeit von 15 m/s (= 54 km/h) beträgt die Staulänge innerhalb einer Stunde bereits fast 20 km. Im folgenden ändert sich bei wachsender Geschwindigkeit die Staulänge nicht mehr entscheidend. Der Stau wird also **mindestens** 18 Kilometer lang.



ad 9) Lässt man v beliebig groß werden, so ergibt sich:

TI-84 Plus calculator screen showing the limit of the function $L_{\text{Stau}}(v)$ as v approaches infinity. The screen displays the equation
$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{(1 + \text{dstau}) \cdot \text{tstau} \cdot v}{\text{trb} \cdot v - \text{dstau}} = \frac{(1 + \text{dstau}) \cdot \text{tstau}}{\text{trb}}$$
 and the result 18000 . The calculator is in the Algebra mode.

Die Staulänge ist also (erwartungsgemäß) proportional zur Stauzeit sowie zum endgültigen Fahrzeugabstand im Stau. Darüberhinaus spielt die Reaktionszeit der Fahrer eine Rolle: Je geringer diese, desto länger der Stau nach einer bestimmten Zeit.

Abstand gemäß Anhalteweg

ad 10) Durch Gleichsetzen der beiden Formeln erhält man:

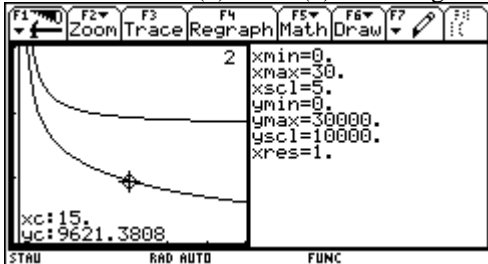
TI-84 Plus calculator screen showing the derivation of the reaction distance formula. The screen displays the equation $\frac{l_{\text{stau}}}{1 + \text{dstau}} = \frac{v \cdot t_{\text{stau}} + l_{\text{stau}}}{1 + v \cdot \text{trb} + \frac{v^2}{2 \cdot a}}$ and the resulting formula $\frac{l_{\text{stau}}}{1 + \text{dstau}} = \frac{2 \cdot a \cdot (t_{\text{stau}} \cdot v + l_{\text{stau}})}{v^2 + 2 \cdot a \cdot \text{trb} \cdot v + 2 \cdot a \cdot 1}$. The user has entered `solve(g1,lstau)`.

TI-84 Plus calculator screen showing the derivation of the stopping distance formula. The screen displays the equation $\frac{l_{\text{stau}}}{1 + \text{dstau}} = \frac{2 \cdot a \cdot (t_{\text{stau}} \cdot v + l_{\text{stau}})}{v^2 + 2 \cdot a \cdot \text{trb} \cdot v + 2 \cdot a \cdot 1}$ and the resulting formula $l_{\text{stau}} = \frac{2 \cdot a \cdot (1 + \text{dstau}) \cdot t_{\text{stau}} \cdot v}{v^2 + 2 \cdot a \cdot \text{trb} \cdot v - 2 \cdot a \cdot \text{dstau}}$. The user has entered `solve(g1,lstau)`.

ad 11) Im Vergleich zum Vormodell ergibt sich:

TI-84 Plus calculator screen showing the solution for v in the reaction distance model. The screen displays the equation $\frac{2 \cdot a \cdot (1 + \text{dstau}) \cdot t_{\text{stau}} \cdot v}{v^2 + 2 \cdot a \cdot \text{trb} \cdot v - 2 \cdot a \cdot \text{dstau}} = 13(v)$ and the resulting quadratic equation $v^2 + 16 \cdot v - 16 = 0$. The user has entered `14(v)`.

Plotten wir nun $l_2(v)$ und $l_4(v)$ zum Vergleich mit den gleichen Window-Werten wie zuvor:



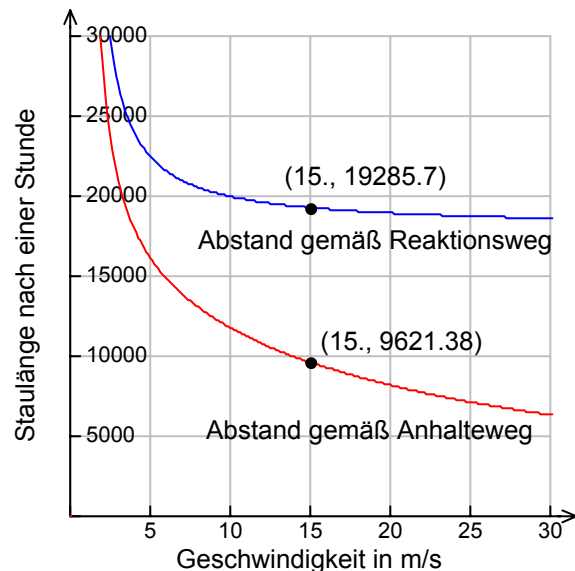
Das Anhalteweg-Modell ergibt eine wesentlich kleinere Staulänge – dies ist verständlich, da die Fahrzeuge einen größeren Abstand einhalten und somit in einer Stunde weniger Fahrzeuge zum Stau beitragen.

Bei kleinen Geschwindigkeiten sind die Staulängen groß, da die Abstände zwischen den Fahrzeugen gering sind und damit viele Fahrzeuge innerhalb einer Stunde in den Stau hineinkommen.

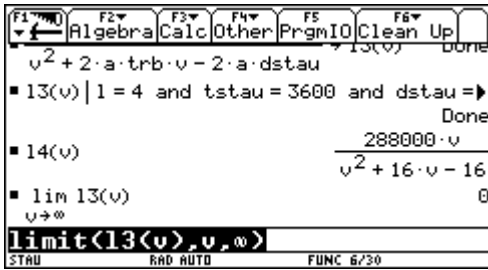
An dieser Stelle wiederum die Darstellung von TI Interactive:

$$\frac{18000 \cdot v}{v - 1} \rightarrow l_2(v)$$

$$\frac{288000 \cdot v}{v^2 + 16 \cdot v - 16} \rightarrow l_4(v)$$



ad 12) Bei großen Geschwindigkeiten erhalten wir:

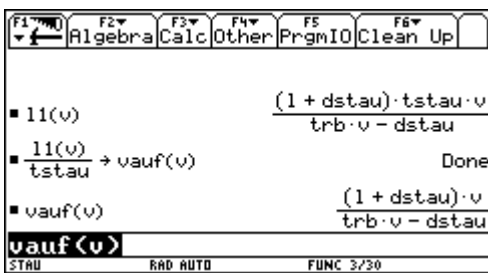


Dies klingt plausibel, da die Fahrzeuge bei einer unendlich großen Geschwindigkeit auch einen unendlich großen Sicherheitsabstand zum Vorderfahrzeug einhalten müssten.

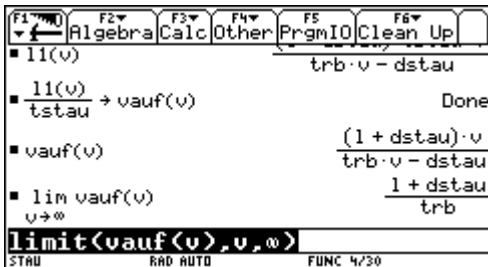
Aufbau von Staus

Abstand gemäß Reaktionsweg

ad 13) Durch Dividieren erhalten wir:



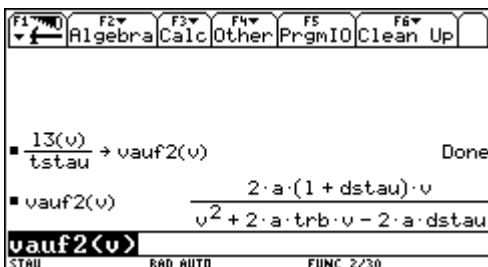
ad 14) Die Aufbaugeschwindigkeit hängt bei großen Geschwindigkeiten von der Fahrzeuglänge, dem Stauabstand der Fahrzeuge sowie der Reaktionszeit der Fahrer ab.



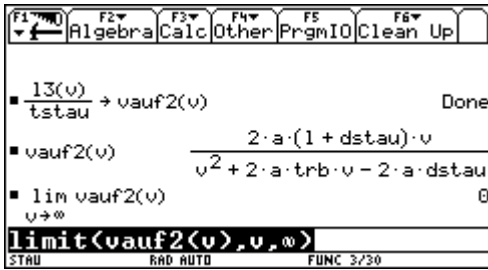
Je kürzer die Reaktionszeit, desto schneller baut sich der Stau auf. Auch dies klingt plausibel, da eine kürzere Reaktionszeit mehr Fahrzeuge bedingt, womit in der selben Zeit ein längerer Stau entsteht.

Abstand gemäß Anhalteweg

ad 15) Die Aufbaugeschwindigkeit lässt sich genauso wie in Nr. 13) berechnen:

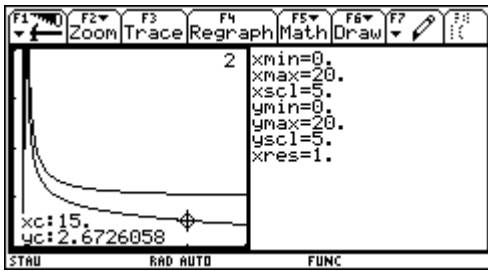
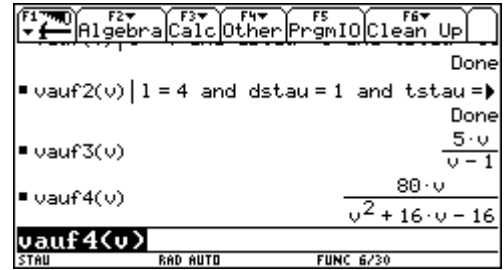
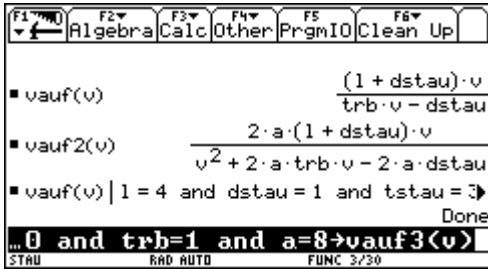


ad 16) Untersuchung der Aufbaugeschwindigkeit:



Bei großen Geschwindigkeiten geht die Aufbaugeschwindigkeit gegen Null. Hierfür ist der Grund der gleiche wie in Nr. 14): Es gibt keine Fahrzeuge mehr, die zum Stau betragen könnten, da der Abstand zwischen den Fahrzeugen unendlich groß sein müsste.

Wir verwenden wiederum $L = 4 \text{ m}$, $d_{\text{Stau}} = 1 \text{ m}$, $t_{\text{Stau}} = 1 \text{ h}$, $t_r = 1 \text{ s}$ und $a = 8 \text{ m/s}^2$.



TI Interactive kann auch diese beiden Grafen zeichnen:

