

Themenbereich	
Quadratische Funktionen	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none"> Umformen von Formeln Vertiefung von Funktionen Fächerübergreifender Unterricht 	TI-92 (E0312a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	
Lehrplanbezug (Österreich):	6. Klasse
Quelle: Franz Hauser (nach einer Idee siehe http://www.eiba.uwien.ac.at/)	

Kurvenradien von Eisenbahnen

Angabe:

Beim Eisenbahnbau wird zur Erleichterung der Kurvenfahrt und zur Reduktion der Fliehkräfte eine Erhöhung der Außenschiene vorgenommen. Bei einer Fahrt eines ungefederten Wagens mit der Geschwindigkeit v (in km/h) auf einem Kreisbogen mit Radius r (in m) lautet die Formel für die theoretische Überhöhung \ddot{u}_{th} (in mm), bei der es zu einer vollständigen Kompensation der Fliehkraft kommt:

$$\ddot{u}_{th} = \frac{11,8 \cdot v^2}{r}$$

Wird diese Überhöhung nun für eine bestimmte Fahrgeschwindigkeit berechnet und eingebaut, so wird es schnellere Reisezüge – aber auch langsamere Güterzüge geben, die dann zentrifugalen bzw. zentripetalen Kräften beim Durchfahren dieses Kreisbogens ausgesetzt werden. Für den Reisenden hat dies zur Folge, dass man ihm eine gewisse freie Seitenbeschleunigung im Bogen zumutet, um schneller fahren zu können. Bei einer Überhöhung \ddot{u} wird diese freie Seitenbeschleunigung a (in m/s^2) wie folgt berechnet:

$$a = \frac{v^2}{12,96 \cdot r} - \frac{\ddot{u}}{153}$$

Fragen:

- Überhöhungen kleiner als 20 mm werden nicht eingebaut. Gib in einer Tabelle die Geschwindigkeiten, bei der es zu einer vollständigen Kompensation der Fliehkraft auf einem Kreisbogen kommt, für die Radien 200 m, 300 m, ..., 1000m bei einer Mindestüberhöhung von 20 mm an.
Auf welche Werte ändern sich diese Geschwindigkeiten, wenn eine Überhöhung von 150 mm eingebaut ist.
- Stelle interessante Abhängigkeiten der Größen \ddot{u}_{th} , v , r in der Formel $\ddot{u}_{th} = \frac{11,8 \cdot v^2}{r}$ durch Wertetabellen bzw. Funktionsgraphen dar.
- In einem Bogen wird bei einer Überhöhung von 10 cm die Geschwindigkeit, bei der es zur vollständigen Kompensation der Fliehkraft kommt, um 5%, 10%, ..., 50% überschritten. Berechne die freie Seitenbeschleunigung auf einen Reisenden für Bogenradien von 500m, 800m, 1000m.
- Als Grenzwert für ein erträgliches Maß an freier Seitenbeschleunigung wird ein Traditionswert von $a = 0,654 m/s^2$ angesehen, der bei höherer Gleisqualität bis zu $0,85 m/s^2$ ansteigen kann. Gib jeweils eine Formel an, mit der die dazu notwendige Überhöhung berechnet werden kann.
- Um im Regelbetrieb mit gemischtem Verkehr (Personen- und Güterverkehr) einen Anhaltspunkt für die zu wählende Überhöhung von Kreisbögen zu haben, wird zusätzlich der Begriff der Regelüberhöhung \ddot{u}_r eingeführt:

$$\ddot{u}_r = \frac{11,8 \cdot v^2}{r} - 20 \quad \text{für } v \leq 80 \text{ km/h}$$

$$\ddot{u}_r = \frac{75700}{r} \quad \text{oder mindestens } \ddot{u}_r = \frac{11,8 \cdot v^2}{r} - 100 \quad \text{für } v > 80 \text{ km/h}$$

Gib die zulässigen Geschwindigkeiten bei Regelüberhöhungen von 60 mm, 90 mm, 120 mm, 150 mm in Abhängigkeit des Radius (300 m – 1000 m) an.

Vielfach werden Eisenbahnfahrzeuge eingesetzt, die sich bei der Kurvenfahrt neigen. Aktive Neigesysteme erkennen im Voraus den Bogen im Gleis und neigen den Zug automatisch zB. beim schwedischen „X-2000“ oder beim italienischen „Pendolino“ ermitteln Sensoren im führenden Fahrzeug die wichtigsten Daten der Kurve und steuern die Neigung des Zuges über Hydraulikzylinder. Der X-2000 neigt sich bis zu $6,5^\circ$, der Pendolino bis zu 8° . Dadurch können in den Kurven höhere Geschwindigkeiten erreicht werden.

Ausarbeitung (System: TI-92)

ad a)

Aus der Formel $\ddot{u}_{th} = \frac{11,8 \cdot v^2}{r}$ erhält man nach Umformung $v = \sqrt{\frac{\ddot{u}_{th} \cdot r}{11,8}}$.

Eingabe der Formel für eine Überhöhung Festlegen des Startwertes und der Schrittweite von 20mm bzw. 150mm in den [y=]-Editor

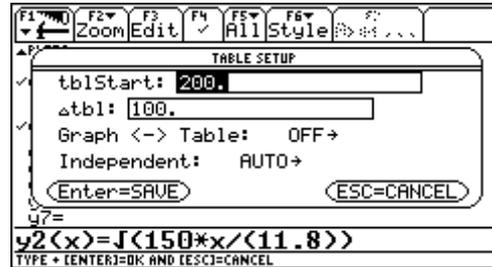
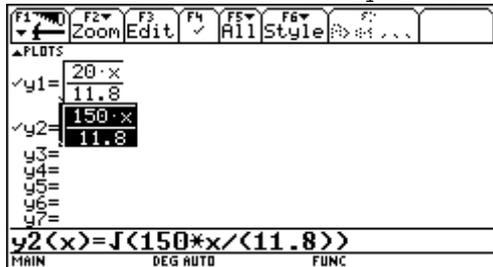


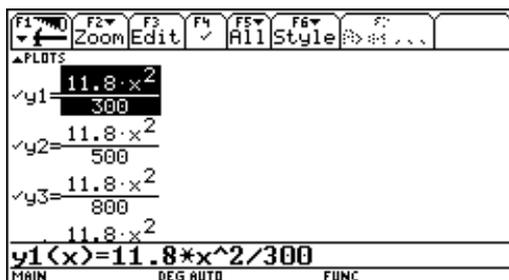
Tabelle die Geschwindigkeiten

x	y1	y2
300.	22.549	61.754
400.	26.038	71.307
500.	29.111	79.724
600.	31.89	87.333
700.	34.445	94.331
800.	36.823	100.84
900.	39.057	106.96
1000.	41.169	112.75

Wächst der Kurvenradius, so kann auch die Geschwindigkeit erhöht werden, bei der es zu einer vollständigen Kompensation der Fliehkraft auf dem Kreisbogen kommt.

ad b)

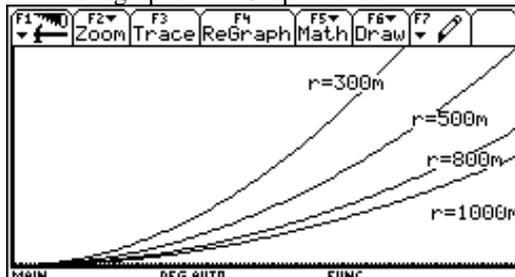
In der Formel $\ddot{u}_{th} = \frac{11,8 \cdot v^2}{r}$ gibt es einige interessante Abhängigkeiten der Größen \ddot{u}_{th} , v und r . Wir wählen zunächst die Abhängigkeit der Überhöhung von der Geschwindigkeit bei den Radien 300 m, 500 m, 800 m und 1000 m aus.



Wertetabellen

x	y1	y2	y3	y4
50.	98.333	59.	36.875	29.5
60.	141.6	84.96	53.1	42.48
70.	192.73	115.64	72.275	57.82
80.	251.73	151.04	94.4	75.52
90.	318.6	191.16	119.48	95.58
100.	393.33	236.	147.5	118.
110.	475.93	285.56	178.48	142.78
120.	566.4	339.84	212.4	169.92

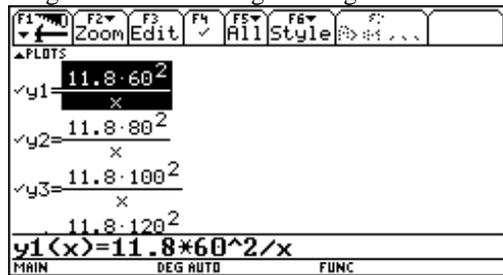
Funktionsgraphen im Graph-Fenster



Quadratische Funktionen, die bei größeren Kurvenradien umso flacher verlaufen

Nun zeigen wir die Abhängigkeit der Überhöhung vom Radius bei den Geschwindigkeiten 60 km/h, 80 km/h, 100 km/h und 120 km/h.

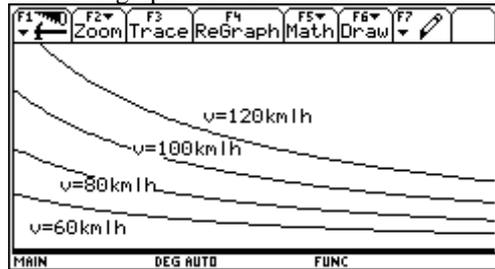
Eingabe der Funktionsgleichungen



Wertetabellen

x	y1	y2	y3	y4
300.	141.6	251.73	393.33	566.4
400.	106.2	188.8	295.	424.8
500.	84.96	151.04	236.	339.84
600.	70.8	125.87	196.67	283.2
700.	60.686	107.89	168.57	242.74
800.	53.1	94.4	147.5	212.4
900.	47.2	83.911	131.11	188.8
1000.	42.48	75.52	118.	169.92

Funktionsgraphen für r > 300 m



Typische Graphen für indirekte Proportionalitäten

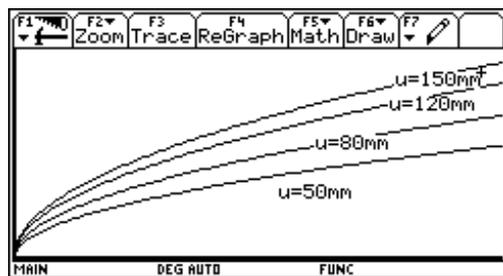
Zuletzt interessiert uns noch die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Kurvenradius bei Überhöhungen vom 50 mm, 80 mm, 120 mm und 150 mm. Durch Umformen der Formel $u_{th} = \frac{11,8 \cdot v^2}{r}$ erhalten wir $v = \sqrt{\frac{u_{th} \cdot r}{11,8}}$.

Eingabe der Funktionsgleichungen



Wertetabellen

x	y1	y2	y3	y4
300.	35.654	45.099	55.234	61.754
400.	41.169	52.076	63.779	71.307
500.	46.029	58.222	71.307	79.724
600.	50.422	63.779	78.113	87.333
700.	54.462	68.889	84.372	94.331
800.	58.222	73.646	90.198	100.84
900.	61.754	78.113	95.669	106.96
1000.	65.094	82.339	100.84	112.75



Funktionsgraphen der Wurzelfunktionen

ad c)

In einem Bogen wird bei einer Überhöhung von 10 cm die Geschwindigkeit, bei der es zur vollständigen Kompensation der Fliehkraft kommt, um 5%, 10%, ... , 50% überschritten. Die freie Seitenbeschleunigung a auf einen Reisenden errechnen wir aus der angegebenen Formel

$$a = \frac{v^2}{12,96 \cdot r} - \frac{ü}{153}$$

Zunächst setzen wir $r = 500\text{m}$

Eingabe der Geschwindigkeit in $y_1(x)$ und der freien Seitenbeschleunigung in $y_2(x)$ als Funktion des Prozentsatzes x der Geschwindigkeitserhöhung

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Zoom	Edit	✓	All	Style	...
▲PLOTS						
$\sqrt{y_1} = \sqrt{\frac{100 \cdot 500}{11.8} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)}$						
$\sqrt{y_2} = \sqrt{\frac{(y_1(x))^2}{12.96 \cdot 500} - 153}$						
y3=						
y4=						
y5=						
y6=						
y3(x)=						
MAIN DEG AUTO FUNC						

Tabelle der Geschwindigkeitswerte in y_1 und der zugehörigen Seitenbeschleunigung in y_2

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Setup	Cell	Header	Del	Pol	Int	Pol
x	y1	y2				
0.	65.094	.00031				
5.	68.349	.06733				
10.	71.604	.13763				
15.	74.859	.21119				
20.	78.113	.28802				
25.	81.368	.36813				
30.	84.623	.4515				
35.	87.878	.53814				
x=35.						
MAIN DEG AUTO FUNC						

Analog rechnen wir mit $r = 1000\text{m}$.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Zoom	Edit	✓	All	Style	...
▲PLOTS						
$\sqrt{y_1} = \sqrt{\frac{100 \cdot 1000}{11.8} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)}$						
$\sqrt{y_2} = \sqrt{\frac{(y_1(x))^2}{12.96 \cdot 1000} - 153}$						
y3=						
y4=						
y5=						
y6=						
y3(x)=						
MAIN DEG AUTO FUNC						

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Setup	Cell	Header	Del	Pol	Int	Pol
x	y1	y2				
15.	105.87	.21119				
20.	110.47	.28802				
25.	115.07	.36813				
30.	119.67	.4515				
35.	124.28	.53814				
40.	128.88	.62805				
45.	133.48	.72124				
50.	138.09	.81769				
x=50.						
MAIN DEG AUTO FUNC						

Wird die Geschwindigkeit, bei der es zur vollständigen Kompensation der Fliehkraft kommt, um 50% überschritten, so ergibt dies eine freie Seitenbeschleunigung von $0,82 \text{ m/s}^2$ auf einem Kreisbogen von 1000 m .

ad d)

Als Grenzwert für ein erträgliches Maß an freier Seitenbeschleunigung wird ein Traditionswert von $a = 0,654 \text{ m/s}^2$ angesehen, der bei höherer Gleisqualität bis zu $0,85 \text{ m/s}^2$ ansteigen kann. Die Formel, mit der die dazu notwendige

Überhöhung berechnet werden kann, ergibt nach Einsetzen der Werte für a in die Formel $a = \frac{v^2}{12,96 \cdot r} - \frac{\ddot{u}}{153}$ und

Umformung zu:

$$\ddot{u} \approx \frac{11,8 \cdot v^2}{r} - 100 \quad \text{für } a = 0,654 \text{ m/s}^2 \quad \text{bzw.}$$

$$\ddot{u} \approx \frac{11,8 \cdot v^2}{r} - 130 \quad \text{für } a = 0,85 \text{ m/s}^2.$$

ad e)

Für $v > 80 \text{ km/h}$ gilt für die Regelüberhöhung mindestens $\ddot{u}_r = \frac{11,8 \cdot v^2}{r} - 100$. Die zulässigen Geschwindigkeiten bei

bestimmten Regelüberhöhungen erhält man nach Umformung zu $v = \sqrt{\frac{\ddot{u}_r \cdot r + 100}{11,8}}$.

Wir rechnen im Data/Matrix-Editor.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	r	u=60mm				
	c1	c2	c3	c4	c5	
1	300	39.165				
2	400	45.193				
3	500	50.506				
4	600	55.311				
5	700	59.731				
6	800	63.846				
7	900	67.711				
c2=J((60*c1+100)/(11.8))						
MAIN DEG AUTO FUNC						

In der ersten Spalte c_1 geben wir die Radien in Hunderterwerten ein.

Dann schreiben wir in den Kopf der zweiten Spalte c_2 die Formel zur Errechnung der Geschwindigkeit.

Der TI-92 setzt dann die Werte für die Radien aus der Spalte c_1 ein und errechnet die zulässigen Geschwindigkeit für die Überhöhung von 60mm in der Spalte c_2 .

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	r	u=60mm	u=90mm	u=120...	u=150...	
	c1	c2	c3	c4	c5	
2	400	45.193	55.311	201.71	71.367	
3	500	50.506	61.823	225.51	79.777	
4	600	55.311	67.711	247.03	87.382	
5	700	59.731	73.126	266.82	94.376	
6	800	63.846	78.168	285.24	100.89	
7	900	67.711	82.903	302.55	107.	
8	1000	71.367	87.382	318.91	112.78	
r8c5=112.7844802402						
MAIN	DEG AUTO	FUNC				

Analog lassen wir die zulässigen Geschwindigkeiten in Abhängigkeit von den Radien für die Überhöhungen von 90 mm, 120 mm und 150 mm berechnen.