

Themenbereich	
Quadratische Funktionen	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none"> <li>Extremwertaufgabe aus der Praxis</li> </ul>	TI-92 (E0311a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	E0310
Lehrplanbezug (Österreich):	5. Klasse
Quelle: H.-W. Henn, Realitätsnaher Mathematikunterricht mit DERIVE, Dümmler 1997	

## Verkehrsflussdichte

### Angabe und Fragen:

Bei sehr starkem Verkehrsaufkommen bildet sich auf der Autobahn Kolonnenverkehr. Alle Autos fahren mit der gleichen Geschwindigkeit  $v$  und halten etwa den gleichen Abstand  $d_a$  voneinander ein.

Bei welcher Geschwindigkeit  $v$  ist die Anzahl der Autos, die an einer Messstelle pro Stunde vorbeikommen am größten?

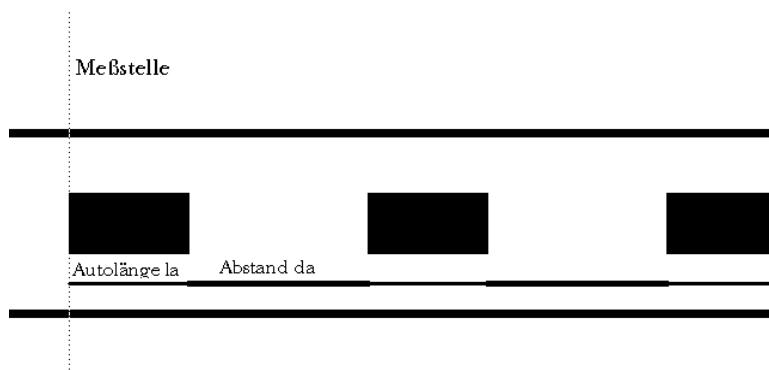
Man kann die Überlegung auf eine Spur der Autobahn beschränken. Diese Anzahl an Autos pro Stunde wollen wir als Durchsatz  $D$  bezeichnen. Dieser Durchsatz  $D$  hängt von mehreren Größen ab:

- von der Länge der Autos:  
Man soll eine einheitlichen Länge  $l_a$  von 5m pro Auto annehmen.
- vom Abstand  $d_a$ , den die Autos voneinander einhalten:  
Man soll den Abstand mit mehreren verschiedenen Modellen berechnen:  
 Modell 1: Der Abstand ist konstant:  $d_a = 8$  m  
 Modell 2: Der Abstand ist gleich dem Reaktionsweg  $s_r$ . Dieser ist gleich der Strecke, die das Auto in der Reaktionszeit zurücklegt also  $v \cdot t_r = s_r = d_a$   
 Modell 3: Der Abstand ist gleich dem Bremsweg  $s_b$ . Dieser berechnet sich aus der Geschwindigkeit  $v$  und der Bremsverzögerung  $a$  zu:  

$$s_b = \frac{v^2}{2 \cdot a} = d_a$$
  
 Modell 4: Der Abstand ist gleich dem Anhalteweg  $s_a = s_r + s_b = v \cdot t_r + \frac{v^2}{2 \cdot a}$
- von der Geschwindigkeit  $v$
- von der Reaktionszeit  $t_r$  des Fahrer: gesetzlich vorgegeben (rund)  $t_r = 1$  s
- und von der Bremsverzögerung  $a_r$  der Autos: gesetzlich vorgeschrieben:  $a = 4$  m/s<sup>2</sup>  
 üblicher Wert: für PKWs:  $a = 8$  m/s<sup>2</sup> für Rennwagen:  $a = 40$  m/s<sup>2</sup>

### Fragen:

Untersuche für alle Modelle des Abstandes  $d_a$ , für welche Geschwindigkeit  $v_{max}$  der Durchfluss  $D$  am größten ist und in welcher Form diese Geschwindigkeit  $v_{max}$  von der Reaktionszeit  $t_r$  und der Bremsverzögerung  $a$  abhängt. Beurteile und interpretiere die Ergebnisse!



## Ausarbeitung (System: TI-92)

Aufstellen der Formel für den Durchsatz:

Wenn die Kolonne mit der Geschwindigkeit  $v$  (in m/s) fährt und die Messstelle alle Autos zählt, die innerhalb der nächsten Stunde die Messstelle passieren, so ist das letzte Auto, das innerhalb dieser Stunde gezählt wird, zu Beginn der Stunde  $v \cdot 3600$  m von der Messstelle entfernt.

Wenn wir diese Strecke durch den Platzbedarf eines Autos  $l_a + d_a$  dividieren, erhalten wir die Anzahl der Autos, die in einer Stunde die Messstelle passieren – also den Durchsatz:

$$D = \frac{v \cdot 3600}{l_a + d_a}$$

Daher ergeben sich je nach Modell folgende Formeln für den Durchsatz:

Modell 1: 
$$D_1(v) = \frac{v \cdot 3600}{5 + 8} = \frac{v \cdot 3600}{13}$$

Der Durchsatz hängt nur von der Geschwindigkeit der Kolonne ab.

Modell 2: 
$$D_2(v, t_r) = \frac{v \cdot 3600}{5 + v \cdot t_r}$$

Der Durchsatz hängt von der Geschwindigkeit der Kolonne und der Reaktionszeit ab.

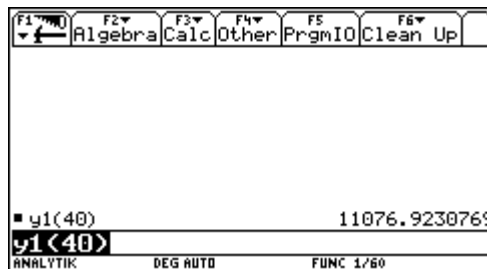
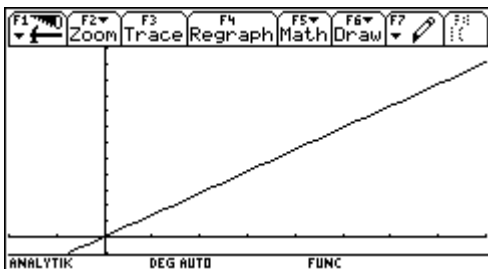
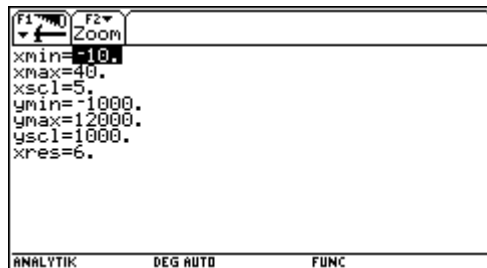
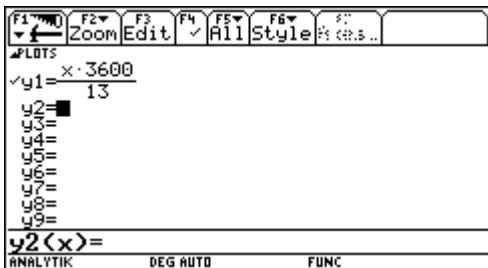
Modell 3: 
$$D_3(v, a) = \frac{v \cdot 3600}{5 + \frac{v^2}{2 \cdot a}}$$

Der Durchsatz hängt von der Geschwindigkeit der Kolonne und der Bremsverzögerung ab.

Modell 4: 
$$D_4(v, t_r, a) = \frac{v \cdot 3600}{5 + v \cdot t_r + \frac{v^2}{2 \cdot a}}$$

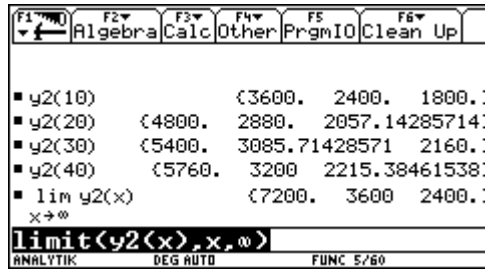
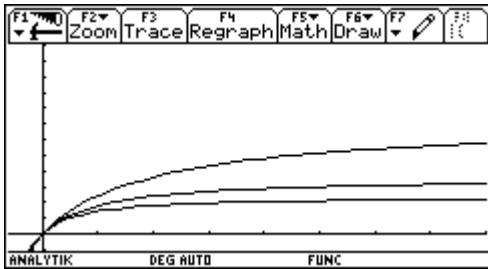
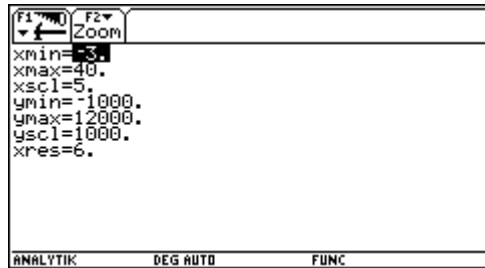
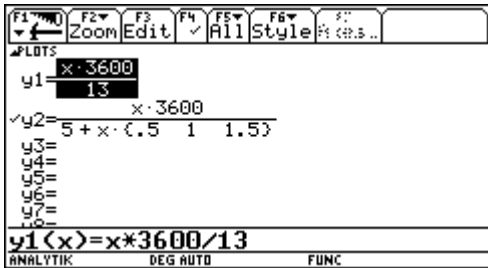
Der Durchsatz hängt von der Geschwindigkeit der Kolonne, der Reaktionszeit und der Bremsverzögerung ab.

Modell 1:



Der Durchlass wächst linear mit der Geschwindigkeit. Es gibt also keine beste Geschwindigkeit. Je schneller die Kolonne fährt, umso höher ist der Durchsatz. Von der Verkehrssicherheit ist es natürlich abzulehnen, dass Autos bei einer Geschwindigkeit von zB 40 m/s nur 8 m Abstand halten!

Modell 2:



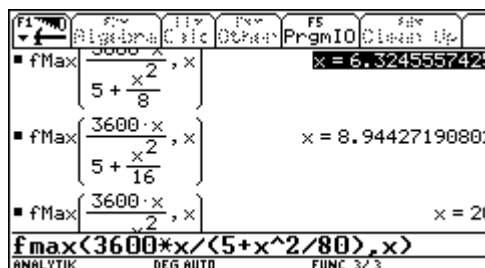
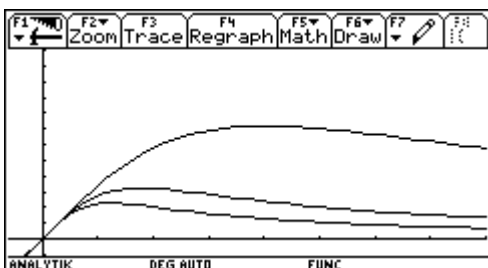
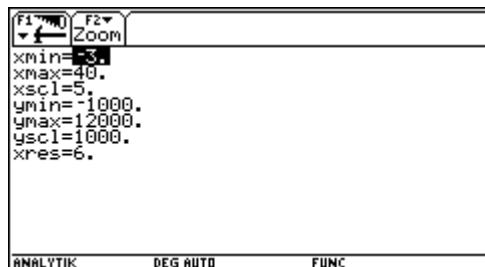
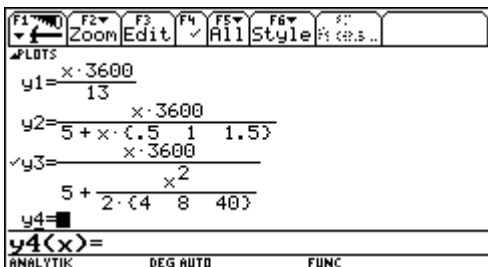
Der Durchlass wächst auch hier mit steigender Geschwindigkeit ständig an. Es gibt also auch in diesem Modell keine beste Geschwindigkeit. Aber der Zuwachs beim Durchlass wird im Verhältnis zum Zuwachs an Geschwindigkeit immer geringer.

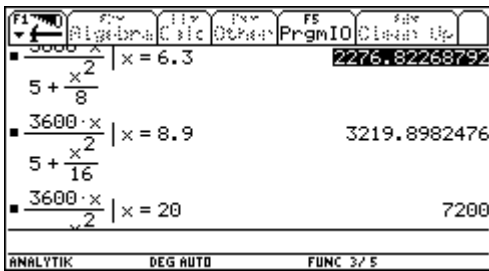
Bleiben wir im Modell mit  $t_r = 1,5$  s, so sehen wir, dass der Durchlass bei  $v = 20$  m/s rund 2060 Fahrzeuge beträgt, bei Verdoppelung der Geschwindigkeit auf  $v = 40$  m/s erhöht sich der Durchlass nur auf rund 2220 Fahrzeuge. Die Verbesserung steht also in keinem Verhältnis zur steigenden Unfallgefahr.

Natürlich erhöht sich der Durchsatz, wenn man die Reaktionszeit auf 1 s oder 0,5 s reduziert. Aber damit steigt das Unfallrisiko auch stark an.

Das Modell besitzt eine horizontale Asymptote. Das bedeutet, dass ein bestimmter Durchsatz nie überschritten werden kann. Für eine Reaktionszeit von 1,5 s ist diese Grenze bei 2400 Fahrzeugen pro Stunde.

Modell 3:

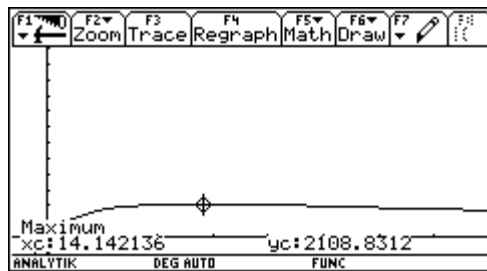
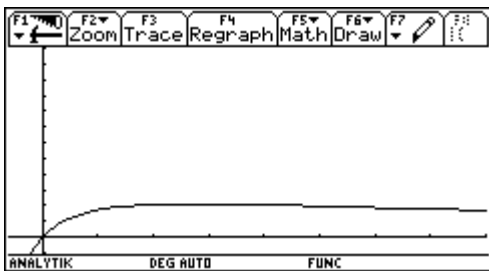
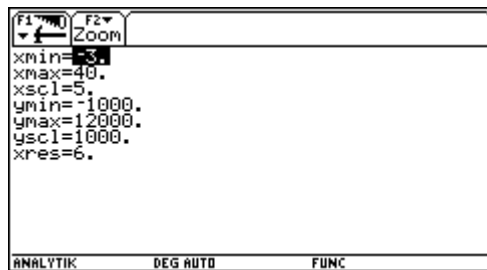
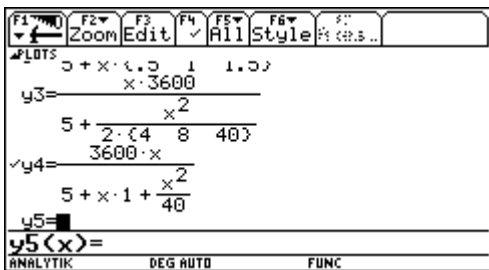
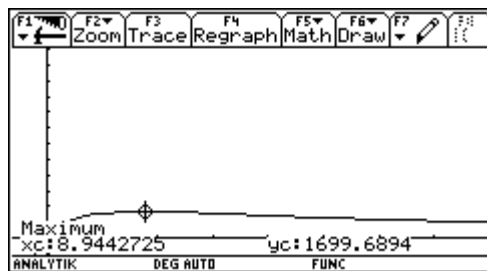
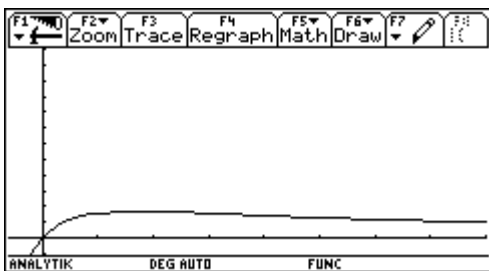
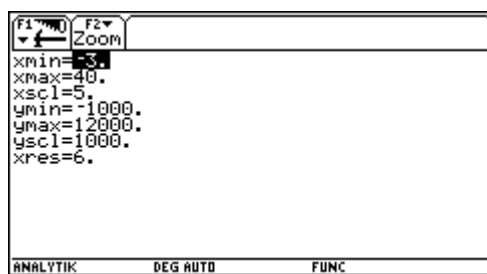
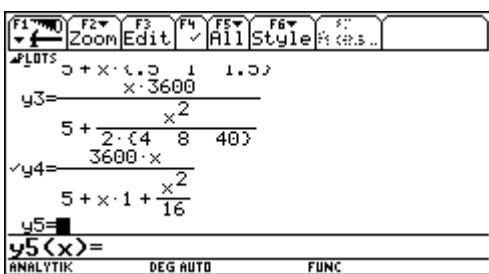




Nun besitzt der Durchsatz ein Maximum bei relativ kleinen Geschwindigkeiten. Für eine Bremsverzögerung von  $8 \text{ m/s}^2$  ergibt sich eine beste Geschwindigkeit von rund  $9 \text{ m/s} \approx 32 \text{ km/h}$ . Diese Geschwindigkeit scheint sehr klein zu sein. Aber bei sehr starkem Verkehrsaufkommen kommt man nicht schneller voran. Außerdem sieht man, dass der Durchsatz beim Absinken der Geschwindigkeit unter diesen günstigsten Wert stark abnimmt. Es kommt zum Stau.

Eine Verbesserung der Bremsverzögerung auf den Wert von Rennautos erhöht die beste Geschwindigkeit auch nur auf rund  $14 \text{ m/s} \approx 50 \text{ km/h}$ .

Modell 4:



Die zusätzliche Berücksichtigung des Reaktionsweges verändert den Wert der Geschwindigkeit mit maximalen Durchsatz bei üblicher Bremsverzögerung kaum, reduziert aber den Wert des Durchsatzes natürlich. Ansonsten gelten die Überlegungen von Modell 3.

Dass in der Praxis der Anhalteweg nicht als Abstand gewählt wird, erklärt nur die vielen Auffahrunfälle bei dichtem Verkehr.