

Themenbereich	
Quadratische Funktionen, Extremwertbeispiele	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none"> <li>Anwendung der beschleunigten Bewegung</li> <li>Parameterfunktion</li> </ul>	TI-92 (E0110a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	E0111, E0112
Lehrplanbezug (Österreich):	5. Klasse
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer	

## Schiefer Wurf ohne Luftwiderstand

### Angabe:

Für den schiefen Wurf ohne Luftwiderstand gilt als gleichmäßig beschleunigte Bewegung folgendes Weg-Zeit-Gesetz:

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a}}{2} \cdot t^2$$

Dabei ist  $\vec{s}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix}$  der Ort mit der Höhe  $h_0$ , wo der Abschuss zum Zeitpunkt  $t = 0$  erfolgt,  $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v \cdot \cos(wi) \\ v \cdot \sin(wi) \end{pmatrix}$  ist die

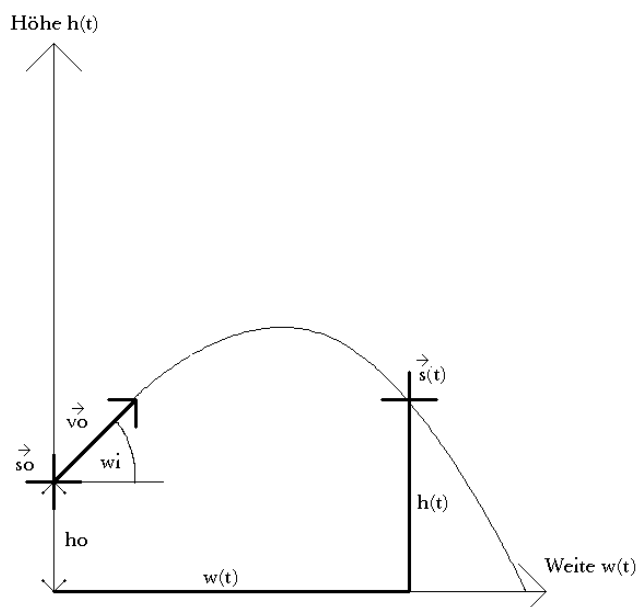
Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t = 0$ ,  $v$  ist die Größe der Geschwindigkeit,  $wi$  ist Abschusswinkel und  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$  ist die

Erdbeschleunigung mit  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

Damit ergibt sich folgende Bewegungsgleichung:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} v \cdot \cos(wi) \cdot t \\ h_0 + v \cdot \sin(wi) \cdot t - \frac{9,81}{2} \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

**Zeichnung:**



### Fragen:

- Berechne für gegebene Abschusshöhe  $h_0 = 0 \text{ m}$ , Abschussgeschwindigkeit  $v = 30 \text{ m/s}$  und Abschusswinkel  $wi = 30^\circ$  die Wurfdauer, Wurfweite und größte Wurfhöhe! Überprüfe dabei über die graphische Darstellung der Bewegung deine Berechnung!
- Berechne für Abschusshöhe  $h_0 = 0 \text{ m}$  und Abschussgeschwindigkeit  $v = 30 \text{ m/s}$  den Abschusswinkel  $wi$ , mit dem die größte Wurfweite erzielt wird!
- Berechne für Abschusshöhe  $h_0 = 100 \text{ m}$  und Abschussgeschwindigkeit  $v = 30 \text{ m/s}$  den Abschusswinkel  $wi$ , mit dem die größte Wurfweite erzielt wird!

## Ausarbeitung (System: TI-92)

Lösung:

ad 1)

Zunächst definieren wir die Funktionen für Höhe und Weite in Abhängigkeit von der Zeit. Dann setzen wir die gegebenen Anfangsbedingungen ein. Nun berechnen wir die Zeiten für welche die Höhe gleich Null ist. Das ist zu Beginn der Fall ( $t = 0$ ) und am Ende des Wurfes. Die so bestimmte Wurfdauer  $wdauer$  wird in die Funktion der Weite eingesetzt um die Wurfweite  $wweite$  zu erhalten.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6
Define w(t)=v*cos(wi)*t Done
Define h(t)=h0+v*sin(wi)*t-981/200*t^2 Done
0→h0:30→wi:30→v 30
0→h0:30→wi:30→v
EBENE DEG AUTO FUNC 3/40
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6
zeros(h(t),t) {0 1000/327}
{0 1000/327}[2]→wdauer 1000/327
w(wdauer)→wweite 5000*sqrt(3)/109
wdauer 3.05810397554
wweite 79.4518719068
wweite
EBENE DEG AUTO FUNC 8/40
    
```

Die maximale Höhe bestimmen wir durch Nullsetzen der 1. Ableitung der Funktion der Höhe. Da eine quadratische Funktion vorliegt, kann man die Überprüfung mit der 2. Ableitung auslassen. Nun stellen wir den MODE Graph auf PARAMETRIC.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6
w(wdauer)→wweite 5000*sqrt(3)/109
wdauer 3.05810397554
wweite 79.4518719068
zeros(d/dt(h(t)),t) {500/327}
h(500/327)→maxh 11.4678899083
EBENE DEG AUTO PAR 10/40
    
```

```

F1 MODE F2 F3 F4 F5 F6 F7
Page 1 Page 2
Graph.....
Current Folder.....
Display Digits....
Angle.....
Exponential Format
Complex Format....
Vector Format.....
Pretty Print.....
1:FUNCTION
2:PARAMETRIC
3:POLAR
4:SEQUENCE
5:3D
RECTANGULAR→
RECTANGULAR→
ON→
Enter=SAVE ESC=CANCEL
EBENE DEG AUTO FUNC 10/40
    
```

Für  $xt1(t)$  wählen wir die Funktion der Weite und für  $yt1(t)$  die Funktion der Höhe. Als Style wählen wir Path. Um eine Linie zur Kontrolle der maximalen Höhe zu erhalten, wählen wir für  $xt2(t)$  den Wert  $40 \cdot t$ , damit erhält die Linie bei einer Zeitdauer von rund  $3s$  eine Länge von  $120$ , und für  $yt2(t)$  die größte Höhe  $maxh$ .

```

F1 Zoom F2 Edit F3 All F4 Style F5 F6 F7
Style
1:Line
2:Dot
3:Square
4:Thick
5:Animate
6:Path
7:None
8:None
xt1(t)=w(t)
yt1=h(t)
xt2=
yt2=
xt3=
yt3=
xt4=
yt4=
xt5=
yt5=t
xt1(t)=w(t)
EBENE DEG AUTO PAR
    
```

```

F1 Zoom F2 Edit F3 All F4 Style F5 F6 F7
Style
1:Line
2:Dot
3:Square
4:Thick
5:Animate
6:Path
7:None
8:None
xt1=w(t)
yt1=h(t)
xt2=40*t
yt2=maxh
xt3=
yt3=
xt4=
yt4=
xt5=
yt5=t
yt2(t)=maxh
TYPE OR USE ←+1+ LENTER=OK AND (ESC)=CANCEL
    
```

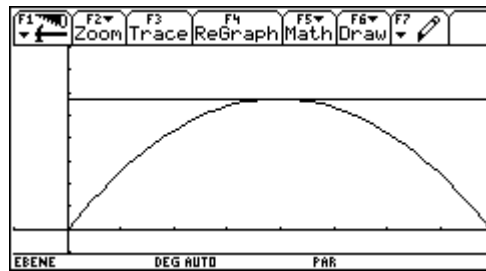
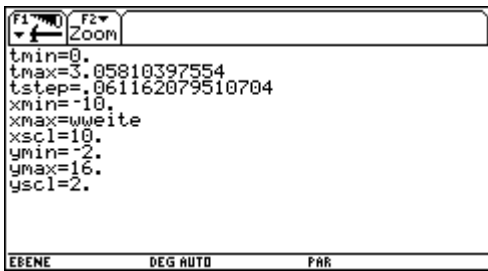
Zur Kontrolle der Wurfdauer setzen wir  $tmax = wdauer$  und zur Kontrolle der Wurfweite  $xmax = wweite$ .

```

F1 Zoom F2
tmin=0.
tmax=wdauer
tstep=.05
xmin=-10.
xmax=90.
xscl=10.
ymin=-2.
ymax=16.
yscl=2.
EBENE DEG AUTO PAR
    
```

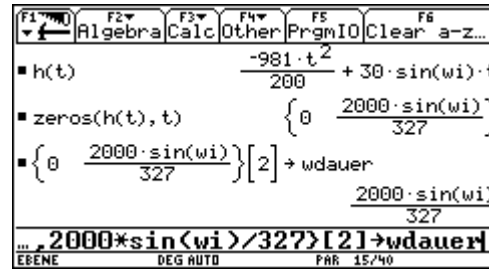
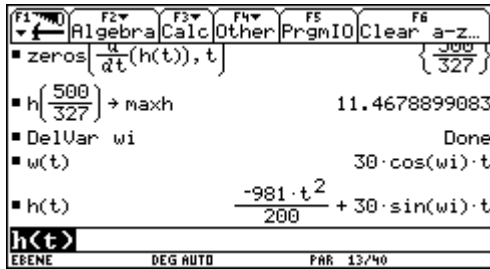
```

F1 Zoom F2
tmin=0.
tmax=3.05810397554
tstep=wdauer/50
xmin=-10.
xmax=90.
xscl=10.
ymin=-2.
ymax=16.
yscl=2.
EBENE DEG AUTO PAR
    
```

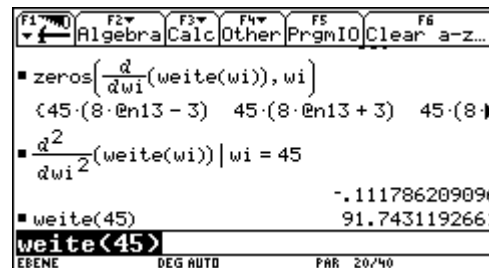
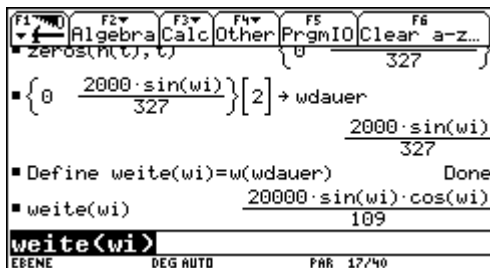


ad 2)

Mit DelVar löschen wir die Belegung für den Abschusswinkel  $w_i$ . Danach berechnen wir in gleicher Weise wie bei der Fragestellung a) die Wurfedauer und die Wurfweite.

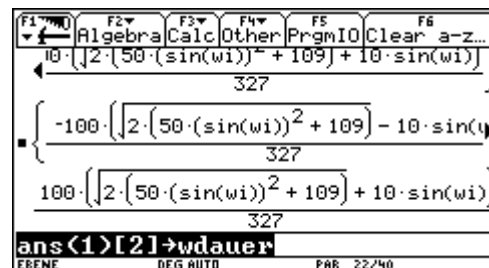
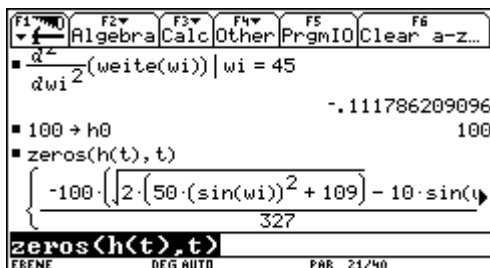


Die Wurfweite ist nun aber eine Funktion des Abschusswinkels  $w_i$ . Durch Nullsetzen der 1. Ableitung dieser Funktion erhalten wir die möglichen Extremwerte. Da es sich um eine Funktion handelt, die trigonometrische Funktionen enthält, erhalten wir eine Folge periodisch auftretender Lösungen. Für uns kommt nur die Lösung mit  $45^\circ$  in Frage. Mit Hilfe der 2. Ableitung kontrollieren wir, ob tatsächlich ein relatives Maximum vorliegt. Randextrema kommen aus physikalischen Überlegungen nicht in Frage. Für  $90^\circ$  liegt kein schiefer Wurf vor und für  $0^\circ$  kommt gar kein Wurf zustande.

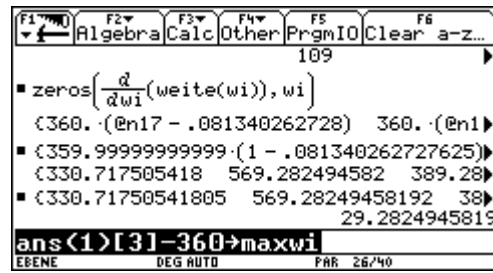
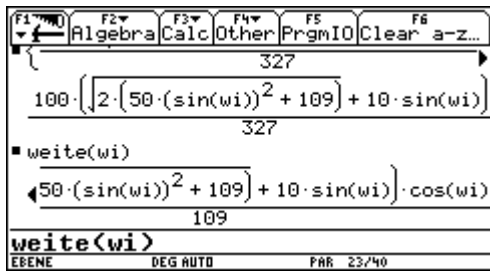


ad 3)

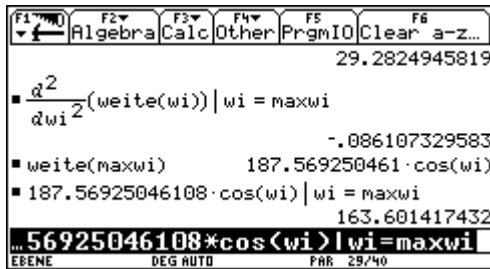
Nun belegen wir die Abschusshöhe mit dem Wert 100. Ansonsten verfahren wir gleich wie in Aufgabenstellung b).



Diesmal ist die Wurfweite als Funktion der Zeit eine sehr komplexe Funktion. Wieder erhalten wir eine Folge periodischer Lösungen. Wir setzen überall die Parameter für die Periodizität auf 1 und suchen uns jene Lösung, die zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  liegt. Es kommt nur die Lösung  $389, \dots^\circ$  in Frage. Sie liefert uns die Lösung  $29^\circ$ . Denn beide zuletzt genannten Winkel liefern den gleichen Wurf.



Beim Einsetzen des besten Winkels wird nicht in der ganzen Funktion die Variable  $wi$  durch den besten Winkel ersetzt. Wir müssen leider nacharbeiten und mit dem With-Operator nochmals  $wi$  mit dem besten Winkel belegen.



Hier leistet der TI-92 Plus mehr. Man kann die Lösungen für mögliche Extremwerte von vornherein auf einen sinnvollen Bereich einschränken und auch beim Einsetzen in die Funktion gibt es das oben angeführte Problem nicht.

