

■ Beispiel 11

Beispieltext

Bestimme den Funktionswert einer Lösungskurve der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = x y^2$ an der Stelle $x = 0.3$, wenn diese durch $P(0/1)$ verläuft. Ermittle die genaue Lösung und gib den prozentuellen Fehler der Näherung an.

Lösungsvorschlag

Lösung der Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $y[0] = 1$:

```
Clear[y, x]
DSolve[{y'[x] == x y[x]^2, y[0] == 1}, y[x], x]
{{y[x] -> -\frac{2}{-2 + x^2}}}
```

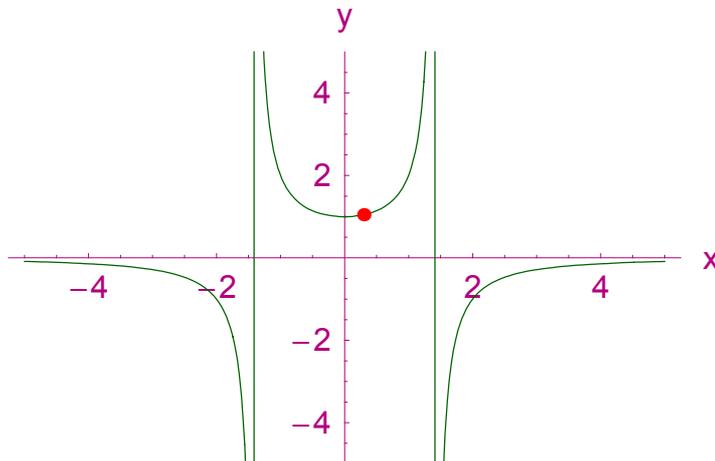
$$y[x_] := -\frac{2}{-2 + x^2}$$

Berechnung des Funktionswertes an der Stelle $x = 0.3$ und Abspeichern unter yexakt:

```
yexakt = y[0.3]
1.04712
```

Darstellung dieser Lösungsfunktion und des Wertes $y[0.3]$:

```
PlotE = Plot[y[x], {x, -5, 5}, PlotRange -> {-5, 5},
  Epilog -> {Red, PointSize[0.02], Point[{0.3, y[0.3]}]}];
```



Berechnung der Näherungslösung mit dem Befehl **NDSolve** im Intervall $[0, 1]$:

```
Clear[y, x]
NLösung = Flatten[NDSolve[{y'[x] == x y[x]^2, y[0] == 1}, y, {x, 0, 1}]]
{y -> InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>]}
```

Berechnung einiger Näherungswerte:

```
TableForm[Table[{x, y[x] /. NLösung}, {x, 0, 1, 0.1}],
  TableHeadings → {None, {"x", "y[x]"}}]
```

x	y[x]
0	1.
0.1	1.00503
0.2	1.02042
0.3	1.04713
0.4	1.08697
0.5	1.14287
0.6	1.21954
0.7	1.32453
0.8	1.47063
0.9	1.68073
1.	2.00009

An der Stelle $x = 0.3$ erhält man als Näherung $y = 1.04713$.

Abweichung von der exakten Lösung:

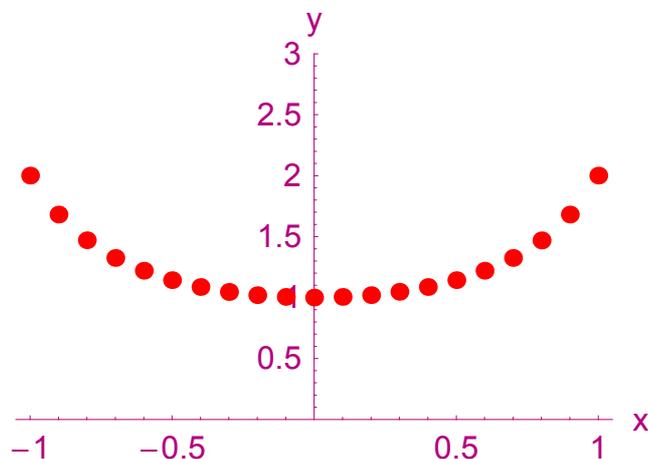
$$\frac{1.04713 - y_{\text{exakt}}}{y_{\text{exakt}}} * 100$$

0.000915

Die Abweichung beträgt ca. 0.09%.

Grafische Darstellung der berechneten Näherungswerte:

```
PlotN =
  ListPlot[Table[{x, y[x] /. NLösung}, {x, -1, 1, 0.1}], PlotRange → {0, 3}];
```



Vergleich der Näherungswerte mit der exakten Lösung:

```
Show[PlotE, PlotN, PlotRange -> {{-1, 1}, {0, 3}}];
```

