

BspNr: D0620

Themenbereich	
Dynamische Prozesse - Differentialgleichungen	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none">• Eine Näherungsmethode zum Lösen von Differentialgleichungen kennen• Fächerübergreifender Unterricht – Mathematik und Physik	TI-92+ (D0620a), DERIVE (D0620b), Mathematica (D0620c)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	D0610 – D0620
Lehrplanbezug (Österreich):	7. – 8. Klasse
Quelle: Dr. Alfred Eisler, Sonja Reitner, Günter Schödl	

Eingangsvoraussetzungen:

- Kenntnisse über Differentialrechnung, Integralrechnung und einfache Differentialgleichungen
- Exponentialdarstellung komplexer Zahlen, Formel von Euler
- CAS: sicherer Gebrauch der Grundfunktionen

Lösung einer Differentialgleichung - Näherung

Angabe und Fragen:

Bestimme den Funktionswert einer Lösungskurve der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y^2$$

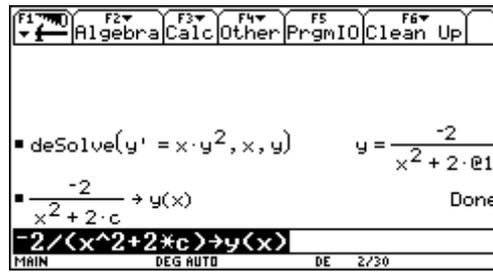
an der Stelle $x = 0,3$, wenn diese durch $P(0/1)$ verläuft. Ermittle eine genaue Lösung und auch eine Näherung. Gib den prozentuellen Fehler der Näherung an!

Literatur:

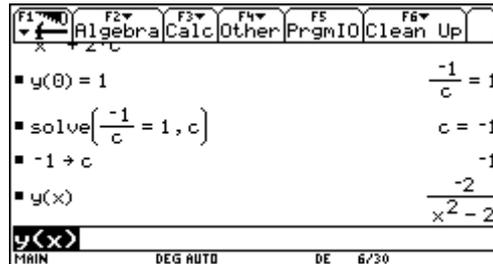
- Rüdiger Baumann : Analysis1, Ein Arbeitsbuch mit Derive, Klett Verlag, Düsseldorf 1998
- Fran Ayres Jr. : Differentialgleichungen, Schaums Outline, Mc Graw Hill Inc, London 1978

Ausarbeitung (System: TI-92+)

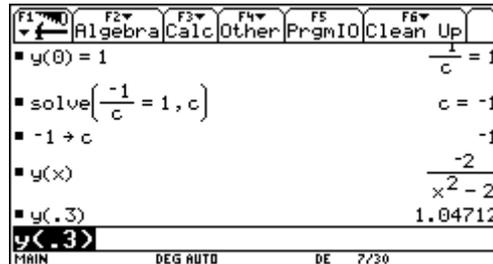
Zuerst bestimmen wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.



Mit der Anfangsbedingung (0/1) ergibt sich dann:



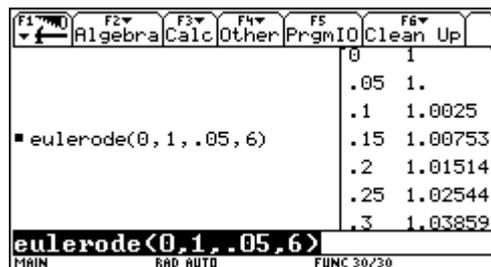
Der Funktionswert der partikulären Lösung an der Stelle 0,3 beträgt dann 1,047.



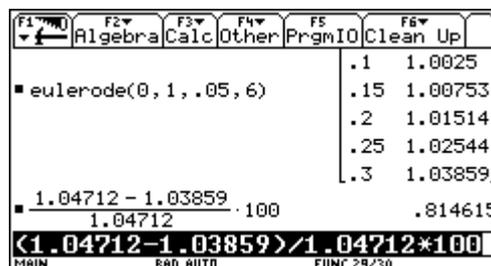
Für die Näherung verwenden wir wieder das Programm EULERODE und setzen für die Funktion

$$f(x, y) = x \cdot y^2 \text{ ein.}$$

Die Anwendung der Funktion liefert uns diesen Vektor. An der Stelle 0,3 ergibt sich die Näherungslösung 1,03859.



Wir erhalten einen Fehler von etwa 0,81%



Ausarbeitung (System: DERIVE)

```
LOAD(I:\Programme\DfW5\Math\Ode1.mth)
```

```
DSOLVE1_GEN(v3/2 - 10, 1, t, v, c)
```

```
DSOLVE1_GEN(- x·y2, 1, x, y, c)
```

$$\frac{x^2 \cdot y + 2}{y} = -2 \cdot c$$

```
SOLVE( (  $\frac{x^2 \cdot y + 2}{y} = -2 \cdot c, y, \text{Real}$  ) )
```

$$y = - \frac{2}{x^2 + 2 \cdot c}$$

$$f(x) := - \frac{2}{x^2 + 2 \cdot c}$$

$$f(0) = 1$$

```
SOLVE(f(0) = 1, c, Real)
```

$$c = -1$$

$$c := -1$$

$$f(x) := \frac{2}{2 - x^2}$$

$$f(0.3) = 1.047120418$$

Der Funktionswert der partikulären Lösung an der Stelle 0,3 beträgt 1,047.

Für die Näherung verwenden wir wieder die Funktion EULER_ODE und setzen für die Funktion $f(x,y) = x \cdot y^2$ ein.

```
LOAD(I:\Programme\DfW5\Math\Ode_appr.mth)
```

```
EULER_ODE(x·y2, x, y, 0, 1, 0.05, 6)
```

0	1
0.05	1
0.1	1.0025
0.15	1.007525031
0.2	1.015138331
0.25	1.025443389
0.3	1.038587566

An der Stelle 0,3 ergibt sich die Näherungslösung 1,03859

$$\frac{1.047120418 - 1.038587566}{1.047120418} \cdot 100$$
$$0.8148873666$$

Der prozentuelle Fehler beträgt etwa 0,8%.