

BspNr: D0619

Themenbereich	
Dynamische Prozesse - Differentialgleichungen	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none">• Eine Näherungsmethode zum Lösen von Differentialgleichungen kennen	TI-92+ (D0619a), DERIVE (D0619b), Mathematica (D0619c)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	D0610 – D0620
Lehrplanbezug (Österreich):	7. – 8. Klasse
Quelle: Dr. Alfred Eisler, Sonja Reitner, Günter Schödl	

Eingangsvoraussetzungen:

- Kenntnisse über Differentialrechnung, Integralrechnung und einfache Differentialgleichungen
- Exponentialdarstellung komplexer Zahlen, Formel von Euler
- CAS: sicherer Gebrauch der Grundfunktionen

Fallschirmspringer

Angabe:

Ein Fallschirmspringer fällt in dem Augenblick, in dem sich der Schirm öffnet, mit $v = 20$ m/s. Seine Geschwindigkeit ändert sich wie

$$\frac{dv}{dt} = 10 - v^{\frac{3}{2}}.$$

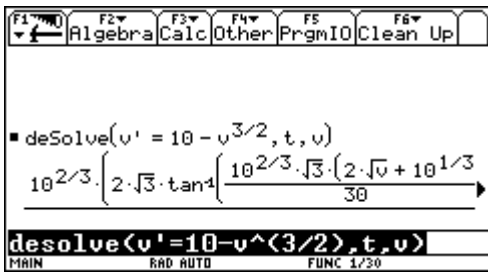
Fragen:

Welche Endgeschwindigkeit erreicht der Springer?

Literatur:

- Rüdiger Baumann : Analysis1, Ein Arbeitsbuch mit Derive, Klett Verlag, Düsseldorf 1998
- Fran Ayres Jr. : Differentialgleichungen, Schaums Outline, Mc Graw Hill Inc, London 1978

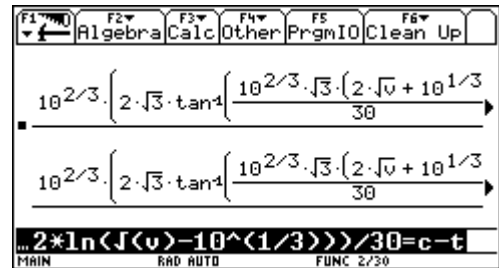
Ausarbeitung (System: TI-92+)



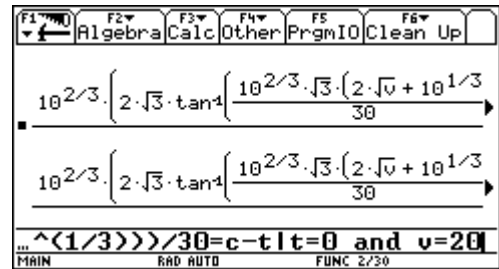
Wir versuchen die Differentialgleichung direkt lösen zu lassen.

Der TI scheint etwas überfordert, man darf sich jedoch nicht abschrecken lassen.

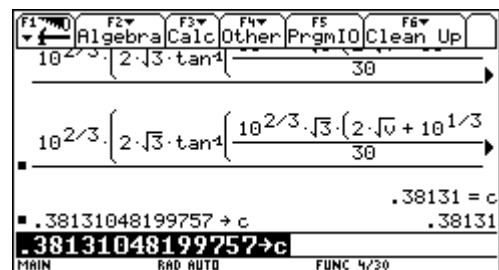
Im Ergebnisterm ersetzen wir den allgemeinen Parameter @1 durch die Variable c .



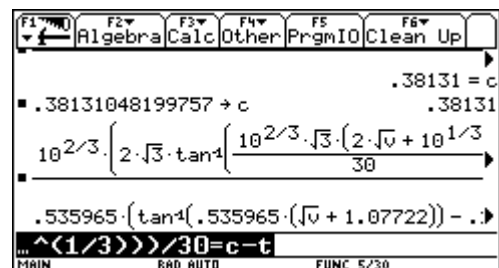
Für die Berechnung der partikulären Lösung verwenden wir den Mit-Operator und setzen für t und v die Werte 0 und 20 ein.



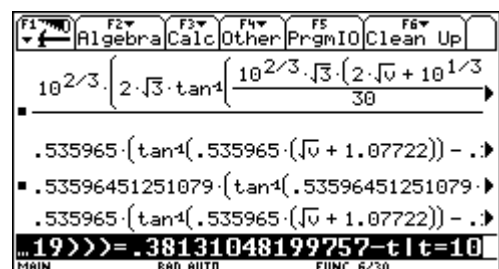
Damit erhält man für c dieses Ergebnis. Abspeichern!



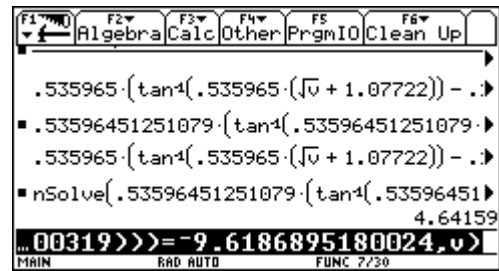
Zur Vereinfachung lassen wir den Ergebnisterm auf reelle Zahlen umrechnen.



Wir können davon ausgehen, dass ein Fallschirmspringer 10 Sekunden nach dem Öffnen des Schirms seine Endgeschwindigkeit erreicht hat. Der letzte Term wird mit $t = 10$ ausgewertet.



Das Ergebnis lassen wir numerisch nach v lösen – die Endgeschwindigkeit beträgt 4,64m/s



Näherungsweise Lösung:

Wir verwenden wieder die Funktion EULERODE und setzen für die Funktion

$$f(x,y) = 10 - y^{\frac{3}{2}}$$

Für die gegebenen Anfangsbedingungen erhalten wir diese Tabelle.

x	y
0	20
.2	4.11146
.4	4.44412
.6	4.57038
.8	4.61623
1.	4.6326
1.2	4.63841

eulerode(0, 20, .2, 10)

Betrachtet man die Tabelle genauer, so sieht man, dass bereits nach weniger als 2 Sekunden die Endgeschwindigkeit $v = 4,64\text{m/s}$ erreicht wird.

x	y
0	20
.2	4.11146
.4	4.44412
.6	4.57038
.8	4.61623
1.	4.6326
1.2	4.63841

eulerode(0, 20, .2, 10)

4.6415390117987

BspNr: D0619b

Ausarbeitung (System: DERIVE)

```
LOAD(D:\DfW5\Math\Ode1.mth)
```

```
LOAD(D:\DfW5\Math\Ode_appr.mth)
```

```
EULER_ODE(10 - v3/2, t, v, 0, 20, 0.2, 10)
```

0	20
0.2	4.111456180
0.4	4.444118770
0.6	4.570382423
0.8	4.616228328
1	4.632597184
1.2	4.638405945
1.4	4.640462790
1.6	4.641190542
1.8	4.641447964
2	4.641539011

Der Fallschirmspringer erreicht eine Endgeschwindigkeit von ca. 4,64m/s.